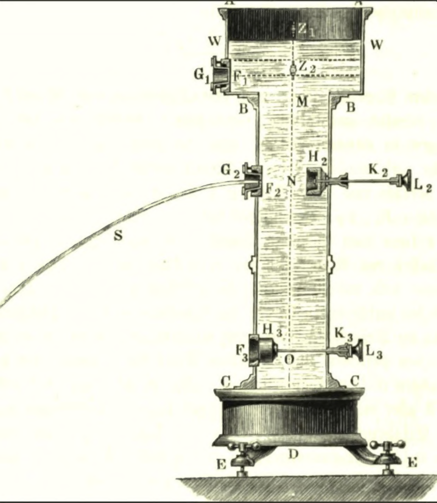
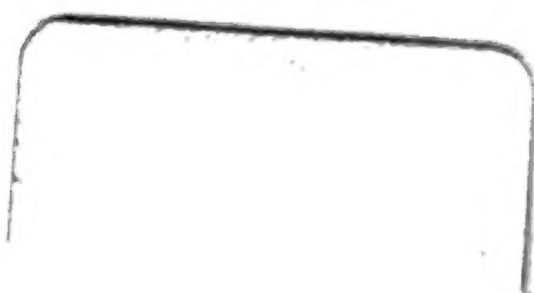


Lehrbuch der ingenieur-und maschinen-mechanik

Julius Ludwig Weisbach

Digitized by Google



Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg;
Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes
Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg u. s. w.

In drei Theilen.

Erster Theil: Theoretische Mechanik.

Mit gegen 900 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1862.

Lehrbuch

der

theoretischen Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg;
Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes
Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg u. s. w.

Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.

Mit gegen 900 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1862.

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Vorrede zur ersten Auflage.

Nicht ohne Zagen schicke ich hier den ersten Theil meiner elementaren Bearbeitung der Ingenieur- und Maschinenmechanik in die Welt. Obwohl ich mir sagen kann, daß ich bei dieser Schrift mit aller möglichen Sorgfalt und Bedachtsamkeit zu Werke gegangen bin, so befürchte ich dennoch, den Wünschen Aller in ihr nicht entsprechen zu können. Die Ansichten, Wünsche und Ansprüche sind nun einmal so sehr verschieden, daß es nicht möglich ist, sie alle zu befriedigen. Mancher wird das eine Capitel zu ausführlich, Mancher wird es zu kurz finden; Einige werden in der Behandlung gewisser Materien eine höhere Wissenschaftlichkeit vermissen, während Andere vielleicht gerade hierin eine größere Popularität gewünscht hätten. Indeß vieljährige Studien, vielfacher Unterricht und mannigfaltige Beobachtungen und Erfahrungen haben mich nun einmal auf die Methode geführt, nach welcher das vorliegende Werk bearbeitet ist, und welche ich für den beabsichtigten Zweck als die angemessenste halte.

Mein Hauptbestreben bei Bearbeitung dieses Werkes war darauf gerichtet, die größte Einfachheit bei der Entwickelung und Beweisführung zu erzielen und alle in der Anwendung auf die Praxis wichtigen Sätze nur mit Hülfe der niederen Mathematik abzuhandeln. Wenn man berücksichtigt, welche mannigfache Kenntnisse ein Techniker sich anzueignen hat, um in seinem Fache etwas Tüchtiges zu leisten, so muß es uns, als Lehrer und Schriftsteller für Techniker, eine Pflicht sein, das gründliche Studium der Wissenschaft durch Vereinfachung im Vortrage, durch Beseitigung alles Ueberflüssigen und durch die Anwendung der bekanntesten und zugänglichsten

Hülfslehren zu erleichtern. Ich habe deshalb auch in dem vorliegenden Werke die Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung gänzlich vermieden. Wenn auch jetzt die Gelegenheit zur Erlernung dieser Rechnung nicht so selten mehr ist, so ist es doch eine unbestreitbare Thatsache, daß ohne immerwährende Uebung die nöthige Fertigkeit in Handhabung derselben sehr bald verloren geht, und es deshalb manchen übrigens sehr tüchtigen Praktiker giebt, welcher mit der früher erlernten Differenzial- und Integralrechnung nicht mehr umzugehen versteht. Da ich mit manchen Schriftstellern, welche in populären Schriften die schwierigeren Sätze ohne Beweise mittheilen, nicht einerlei Meinung bin, so habe ich es vorgezogen, praktisch wichtige Sätze stets auf elementarem, wenn auch zuweilen etwas weitläufigem Wege abzuleiten oder zu beweisen. Man wird daher in diesem Werke nur selten eine Formel ohne ihre Begründung hingestellt finden. Einige ganz allgemeine Kenntnisse gewisser Lehren aus der Naturlehre, zumal aber eine gründliche Kenntniß der reinen Elementarmathematik, müssen wir allerdings bei dem Studium dieser Schrift voraussetzen. Vorzüglich bin ich bemüht gewesen, bei Bearbeitung dieses Werkes die rechte Mitte zwischen Generalisiren und Specialisiren zu halten. Obwohl ich die Vorzüge des Generalisirens nicht verkenne, so bin ich doch der Meinung, daß man in diesem Werke, wie bei jedem elementaren Vortrage, das allzu große Generalisiren zu vermeiden habe. Das Einfache kommt ja in der Praxis häufiger vor als das Zusammengesetzte. Auch ist nicht zu leugnen, daß in der Betrachtung des allgemeinen Falles oft die tiefere Kenntniß des specielleren Falles verloren geht, und daß es nicht selten leichter ist, aus dem Einfachen das Zusammengesetztere abzuleiten, als aus dem Allgemeineren das Einzelne herauszuziehen.

Man erwarte in der Ingenieur- und Maschinenmechanik keine Maschinenbaulehre oder Maschinenbaukunst, sondern nur die Einleitung oder Vorbereitungswissenschaft zu dieser. Die Mechanik soll sich insofern zur Maschinenbaukunst verhalten, wie die darstellende Geometrie zum Maschinenzeichnen. Nach Erlangung der Kenntnisse der Mechanik und der darstellenden Geometrie scheint es am zweckmäßigsten zu sein, den Unterricht über Maschinenbaukunst und den über Maschinenzeichnen in einem Curse zu vereinigen.

Vielleicht wird noch in Zweifel gezogen, daß es zweckmäßig sei, die Ingenieur- und Maschinenmechanik in zwei Theile, in einen theoretischen und in einen angewandten, zu theilen. Wenn man berücksichtigt, daß dieses Werk Unterricht über alle mechanische Verhältnisse der Bau- und Maschinen-

lehre ertheilen soll, so stellt sich die Nützlichkeit, oder vielmehr die Nothwendigkeit dieser Eintheilung von selbst heraus. Um ein Bauwerk und zumal um eine Maschine vollständig beurtheilen zu können, sind oft die verschiedensten Lehren der Mechanik, z. B. die der Reibung, die der Festigkeit, die der Trägheit, des Stoßes, des Ausflusses u. s. w. in Anspruch zu nehmen, es ist also das Material zum mechanischen Studium eines Bau- oder Maschinenwerkes fast aus allen Theilen der Mechanik zusammenzulesen. Da es nun aber für den praktischen Gebrauch viel zweckmäßiger ist, die mechanischen Lehren über jede Maschine im Zusammenhange studiren zu können, als sie aus fast allen Theilen der Mechanik zusammentragen zu müssen, so möchte die Nützlichkeit der gemachten Theilung außer allem Zweifel sein.

Immer die Anwendung im Praktischen vor Augen habend, bin ich beim Aufsetzen dieses Werkes stets bemüht gewesen, die vorgetragenen Lehren durch passende Beispiele aus dem Leben soviel wie möglich zu erläutern. Mit Recht kann ich aber auch behaupten, daß sich dieses Werk durch die große Anzahl und passende Auswahl durchgerechneter Beispiele vor vielen ähnlichen Werken auszeichnet. Nächstdem hoffe ich auch, daß die große Anzahl der sorgfältig ausgeführten Figuren dem beabsichtigten Zwecke dieser Schrift sehr förderlich sein werde. Endlich muß ich es der Verlagshandlung noch besonders Dank wissen, daß sie dem Werke in aller Hinsicht die vorzüglichste Ausstattung hat zu Theil werden lassen. Auf die Richtigkeit der Rechnungen ist eine besondere Sorgfalt verwendet worden; in der Regel ist jedes Beispiel, und zwar nicht von einer und derselben Person, dreimal durchgerechnet worden. Es möchte daher nicht so leicht sein, wesentliche oder ansehnliche Fehler in denselben aufzufinden. In den Beispielen sowie in den Formeln habe ich immer das preußische Maaß und Gewicht zu Grunde gelegt, in der Erwartung, daß die größere Zahl der Leser mit diesem zu rechnen gewohnt sein werde. Aber auch in Hinsicht auf die Correctheit des hier so schwierigen Druckes möchte wenig zu wünschen übrig bleiben. Die bis jetzt gefundenen Schreib- und Druckfehler sind dem Buche beigefügt. Ich glaube nicht, daß noch eine größere Ergänzung zu diesem Verzeichnisse nöthig sein werde. Eine nähere Prüfung der Zeichnungen wird die Ueberzeugung herbeiführen, daß auch bei Ausführung dieser mit Sorgfalt zu Werke gegangen ist. Größere Zeichnungen, und zumal solche, welche Gegenstände nach allen drei Raumdimensionen abbilden, sind nach der von mir zuerst abgehandelten axonometrischen Projectionsmethode (s. polytechn. Mittheilungen, Band I., Tübin-

gen 1845) ausgeführt. Diese Zeichnungsmethode hat mit der isometrischen Perspective gleiche Vorzüge, zeichnet sich aber von dieser noch dadurch aus, daß sie nicht nur schönere, sondern auch solche Bilder liefert, welche die Vorstellung des abgebildeten Gegenstandes leichter erwecken, als die isometrische Perspective. In der Regel sind die Zeichnungen im Buche so ausgeführt, daß die Breiten- oder Tiefendimensionen bei gleicher Größe im abgebildeten Gegenstande nur halb so groß erscheinen, als die Längen- und Höhendimensionen.

Wesentlich zur Correctheit dieses Werkes haben die Revisionen des Herrn Ernst Röting, Studirenden an der hiesigen Bergakademie, beigetragen, weshalb ich nicht unterlassen kann, meinen Dank hier öffentlich auszusprechen.

Endlich ist es nöthig, dem Leser noch anzuzeigen, daß er in dem Buche viel Neues und manches dem Verfasser Eigenthümliches vorfinden wird. Ohne mich auf viele kleine Artikel, die fast in jedem Capitel vorkommen, einzulassen, will ich den Leser nur auf folgende umfassendere Gegenstände aufmerksam machen. Eine allgemeine und leicht ausführbare Bestimmung der Schwerpunkte ebener Flächen und ebenflächiger Polyeder wird man in den Paragraphen 107, 112 und 113 finden, eine angenäherte Formel für die Kettenlinie in dem Paragraphen 148; Ergänzungen zur Axenreibung in den Paragraphen 167, 168, 169, 172 und 173. Die Lehre vom Stoße wird namentlich durch die Paragraphen 277 und 278 eine wesentliche Ergänzung erhalten haben, da man seither den Stoß unvollkommen elastischer Körper zu wenig berücksichtigt, und den Fall, wenn ein vollkommen elastischer Körper mit einem unvollkommen elastischen Körper zusammenstößt, gar nicht betrachtet hat. Die meisten Ergänzungen und zum Theil ganz neue Gesetze wird man allerdings in der Hydraulik mitgetheilt finden, da ich diesen Theil schon seit einer Reihe von Jahren zu einem Gegenstande meiner speciellen Studien gemacht habe. Die Gesetze der vom Verfasser zuerst beobachteten unvollkommenen Contraction der Wasserstrahlen treten hier zum ersten Male in einem Lehrbuche der Mechanik auf. Ebenso werden die für die Praxis sehr wichtigen Hauptresultate der Versuche des Verfassers über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile mitgetheilt. Endlich führt der Verfasser auch die Hauptergebnisse seiner neuesten Versuche, betreffend den Ausfluß des Wassers durch schiefe Ansatzröhren, gebrochene, krumme und lange gerade Röhren u. s. w. hier auf, obgleich das dritte Heft seiner diese Versuche umfassenden „Untersuchungen im Gebiete der

Mechanik und Hydraulik“ dem Drucke noch nicht hat übergeben werden können. Den Capiteln über die fließenden Wasser, über das Wassermessen und über den Wasserstoß sind ebenfalls durch den Verfasser einige Bereicherungen zu Theil geworden. Die Theorie der Reaction des ausfließenden Wassers, sowie die des Wasserstoßes, nach dem Principe der mechanischen Arbeit, ist ganz neu.

Uebrigens kann ich dem Leser nicht bergen, daß ich jetzt, nach Beendigung des ersten Bandes, auch hin und wieder Einiges anders aufgefaßt oder behandelt zu haben wünsche; doch muß ich hinzufügen, daß sich wesentliche Mängel mir noch nicht herausgestellt haben. Wenn hie und da noch Manches vermißt wird, so muß ich auf den zweiten Band verweisen, welcher nicht bloß zufällig, sondern meist absichtlich Ergänzungen zum ersten Bande nachbringen wird, wie auch schon im ersten Bande an vielen Stellen angedeutet wird. Der Druck des zweiten Bandes wird nun seinen ununterbrochenen Fortgang haben, so daß sich erwarten läßt, daß das ganze Buch am Ende dieses Jahres in den Händen der Leser sein werde. Auch wird nun bald das unter dem Namen „der Ingenieur“ in der Mechanik citirte Hülfsbuch, welches in einer Sammlung von Formeln, Regeln und Tabellen der Arithmetik, Geometrie und Mechanik besteht, erscheinen.

Es sollte mir eine große Beruhigung und Freude gewähren, wenn mit diesem Werke das erreicht wird, was ich damit bezielt habe, nämlich Praktikern ein nützlicher Rathgeber in Fällen der Anwendung, Lehrern der praktischen Mechanik ein brauchbarer Leitfaden beim Unterrichte, und Studirenden des Ingenieur- und Maschinenwesens ein willkommenes Hülfsmittel zur Erlernung der Mechanik zu sein.

Freiberg, den 19. März 1846.

Julius Weisbach.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage vom ersten Bande der Ingenieur- und Maschinenmechanik ist in der Methode und Anordnung nicht wesentlich von der ersten Auflage verschieden. Nur der innere Ausbau dieses Werkes hat mit dieser zweiten Auflage manche Veränderungen und Vervollständigungen erlitten, auch ist die Ausdehnung desselben nicht unbedeutend größer geworden. Ueberdies hat sich der Verfasser bemüht, die bemerkten Mängel und Unrichtigkeiten so viel wie möglich in dieser zweiten Bearbeitung zu beseitigen. Die größere Ausdehnung dieser Auflage ist besonders aus drei Zugaben erwachsen. Die erste derselben besteht in einer gedrängten und möglichst populären Darstellung des sogenannten Infinitesimalcalcüls am Kopfe des ganzen Werkes, und ist besonders deshalb hinzugefügt worden, um verwickelte und zu gekünstelte Entwickelungen mittels des niederen Calcüls zu vermeiden, und um zugleich dem Leser mehr Selbstständigkeit in der Mechanik zu verschaffen und ihn auf einen höheren Standpunkt in diesem wichtigen Gebiete zu stellen. Durch Anwendung der in diesem Vorcurs enthaltenen Lehren aus der Analysis ist es möglich geworden, auch solche praktisch wichtige Gegenstände mit in den Vortrag aufzunehmen, welche sich entweder gar nicht oder nur sehr unvollständig mittels der elementaren Algebra und Geometrie behandeln lassen. Um aber Denjenigen, welche sich mit den vorausgeschickten Elementen der Differenzial- und Integralrechnung nicht bekannt gemacht haben, keine Störungen zu bereiten, sind alle diejenigen Paragraphen, in welchen die Anwendung dieses Calcüls vorkommt, durch eine Parenthese ( ) besonders ausgezeichnet worden.

Die zweite Zugabe besteht in einem neuen Capitel in der Hydrostatik, und behandelt die Molecularwirkungen des Wassers. Da die Kenntniß der Molecularkräfte (Capillarität) bei hydraulischen und pneumatischen Beobachtungen und Messungen von Wichtigkeit ist, so hat es der Verfasser für zweckmäßig gehalten, in einem besonderen Capitel die Hauptlehren über diese Kräfte des Wassers hier einzuschalten. Endlich ist dem ganzen Werke noch ein Capitel über die Schwingungen und Wellenbewegungen als Anhang beigegeben worden. Der Verfasser hat sich dazu bewogen gefunden, weil eine nähere Kenntniß der Schwingungen für den Ingenieur von großer Wichtigkeit ist. Der große Einfluß, welchen die Schwingungen auf den Gang und auf die Haltbarkeit und Dauerhaftigkeit der Maschinen und anderer Bauwerke ausüben, ist ein Gegenstand, dem man nicht zu viel Aufmerksamkeit schenken kann! Ueberdies verdanken wir den Schwingungsbeobachtungen die neuesten Bestimmungen der für die Praxis so sehr wichtigen Elasticitätsmodeln. Auch der magnetischen Kraft habe ich in dem Anhange gedacht, vorzüglich weil dieselbe dem Ingenieur beim Orientiren in unterirdischen Räumen und an Orten, welche keine freie Aussicht gewähren, sehr wichtige Dienste leistet. Die Theorie der Wasserwellen, welche den Schluß dieses Bandes ausmacht, gehört ganz in die Hydraulik; ihre Aufnahme in diese Schrift bedarf daher keiner weiteren Rechtfertigung. Leider läßt sie nur noch Vieles zu wünschen übrig!

Was den übrigen Theil dieser Schrift anlangt, so hat vorzüglich das Capitel über die Elasticität und Festigkeit umfänglichere Veränderungen und Ergänzungen erfahren; nächstdem ist aber auch der Hydraulik durch die fortgesetzten Versuche des Verfassers manche Ergänzung und Berichtigung zu Theil geworden.

Möchte auch diese zweite Auflage sich der Beachtung und des Beifalles erfreuen, womit die erste Auflage aufgenommen und der Verfasser in der weiteren Bearbeitung dieses Werkes aufgemuntert worden ist.

Freiberg, den 15. Mai 1850.

Julius Weisbach.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die dritte Auflage von dem ersten Bande meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, hat im Vergleich zu ihren Vorgängerinnen nicht allein mehrfache Verbesserungen, sondern auch vielfache Ergänzungen und Zusätze erhalten. Es sind dieselben vorzüglich aus den Fortschritten der Wissenschaft und zumal aus den Ergebnissen neuerer Forschungen hervorgegangen. Den hier und da ausgesprochenen Wünschen in Betreff dieses Werkes habe ich so viel wie möglich Folge geleistet; wenn es nicht immer geschehen ist, so hatte ich hierzu gewiß hinreichende Gründe. Da ich wegen des außerordentlichen Beifalles, welchen dieses Werk in- und außerhalb Deutschlands, sowie diesseits und jenseits des Oceans gefunden hat, hoffen konnte, daß dasselbe in der Methode und im Umfang den Wünschen des größeren Publicums, für welches es bestimmt ist, entspreche, so mußte bei Bearbeitung dieser neuen Auflage mein Bestreben nur dahin gerichtet sein, die bemerkten Fehler und Mängel aus demselben zu entfernen, und die vollständigeren und sicheren Ergebnisse neuerer Untersuchungen dem Buche, in der demselben eigenthümlichen Behandlungsweise und mit möglichster Einschränkung des Raumes, einzuverleiben. Leid thut mir es, bemerken zu müssen, daß dem Buche auch ganz ungerechte Vorwürfe gemacht worden sind. So zeigt z. B. Herr Professor Wiebe in Berlin, in einer Anmerkung auf Seite 245 und 246 seines Werkes über „die Lehre von der Befestigung der Maschinentheile“ (Berlin 1854) an, daß ich die Torsionscoefficienten für quadratische Schäfte sowohl in meiner „Mechanik“ (I. Aufl.) als auch im „Ingenieur“ 16mal größer als die Morin'schen angegeben habe. Hier-

bei hat aber Herr Wiebe übersehen, daß dafür auch in meinen Formeln wie in beiden Schriften ausdrücklich gesagt wird, die vierten Potenzen der halben Seitenlängen vorkommen, während die Formeln von Morin und Wiebe, sowie auch die der zweiten Auflage meiner „Mechanik“ (von 1850) die vierten Potenzen der ganzen Seitenlänge des quadratischen Querschnittes enthalten. Da nun aber 2^4 gleich 16 ist, so läuft diese Anzeige des Herrn Wiebe auf einen Irrthum seinerseits hinaus.

Auf den partheiischen, aus einer sehr anspruchsvollen Feder geflossenen Tadel in Grunert's Archiv, erwidere ich hier nichts, um an diesem Orte nicht einen unnützen Streit zu führen. Uebrigens hat der Herr Professor Grunert in seinem Archiv der Mathematik aus der physischen und praktischen Mechanik schon Unsinn genug drucken lassen — wie ich leicht beweisen kann —, um dadurch seine Unfähigkeit zur Beurtheilung praktisch-mechanischer Schriften an den Tag zu legen! Das Buch ist für ein praktisches Publicum geschrieben, und würde sicherlich nicht den Beifall gefunden haben, welchen es gefunden hat, wenn ich ihm, was mir allerdings viel leichter geworden wäre, ein ganz wissenschaftliches Gewand gegeben hätte. Von einem anderen Standpunkte aus läßt sich allerdings das Buch leicht, jedoch eben so sehr auch ungerecht, tadeln. Wer sich nur etwas in der Praxis umgesehen hat, wird wahr genommen haben, wie wenig dieselbe noch von der Theorie Gebrauch macht, und wie nicht selten die Theorie von den Praktikern hinten angesetzt wird und in Mißcredit steht. Daran hat gewiß die sogenannte gelehrte Unterrichtsmethode, welche es als ein Verbrechen ansieht, die Wissenschaft ihrer Anwendung wegen zu studiren, ihren größten Antheil!

Außer vielfachen kleineren Ergänzungen erstrecken sich die Erweiterungen dieser neuen Auflage vorzüglich auf eine ganz neue Bearbeitung der Lehre von der Elasticität und Festigkeit, und auf die Einschaltung der Ergebnisse der neuesten hydraulischen Versuche. Aber nicht allein durch ihren Inhalt, sondern auch durch ihre Ausstattung zeichnet sich diese neue Auflage der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik vor ihren älteren Schwestern aus, zumal da dieselbe lauter neu gestochene und schönere Abbildungen erhalten hat. Der Druck der dritten Auflage des zweiten Bandes geht ohne Unterbrechung fort.

Freiberg, im Juli 1856.

Julius Weisbach.

Vorrede zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage meiner Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, hat weder in der Methode, noch in der Anordnung des Stoffes eine Veränderung erlitten. Der ziemlich schnelle Absatz von drei starken Auflagen des Werkes und das Erscheinen zweier Ausgaben desselben in englischer Sprache, und zwar in England und Nord-Amerika, sowie die Uebersetzungen dieses Werkes in das Schwedische, Polnische und Russische lassen mich wohl hoffen, daß mit dieser Schrift den Wünschen und Bedürfnissen des größeren praktischen Publicums, für welches sie bestimmt ist, entsprochen worden ist. Deshalb habe ich mich bei Bearbeitung dieser neuen Auflage nur darauf beschränkt, die bemerkten Mängel und Fehler aus dem Werke zu entfernen und die neuen praktisch wichtigen Erfahrungsresultate und theoretischen Errungenschaften demselben einzuverleiben. So habe ich z. B. im Capitel über die Reibung die Resultate der neuesten Versuche von Bochet mit aufgenommen, und den Abschnitt über die Elasticität und Festigkeit dem dermaligen Standpunkte der Wissenschaft und Praxis entsprechend neu bearbeitet, und hierbei die neueren Schriften von Lamé, Rankine, Bressé u. s. w. benutzt. Vielfache Ergänzungen, Zusätze und Verbesserungen hat endlich auch der Abschnitt über die Hydraulik erlitten. Hier haben vorzüglich die Ergebnisse der neueren Forschungen des Verfassers einen Platz gefunden. Namentlich sind es die Versuche über den Ausfluß des Wassers unter hohem und sehr hohem Drucke, sowie die über die Steighöhe springender Wasserstrahlen, ferner die Versuche über das Ausströmen der Luft und die vergleichenden Versuche über den Stoß von Luft- und Wasserstrahlen, welche dem Buche zugefügt worden sind. Das Capitel über den Ausfluß der

Luft ist gänzlich umgearbeitet worden, weil der Verfasser die Ueberzeugung hat, daß die gewöhnlichen Formeln über den Ausfluß der Luft bei höherem Drucke das Ausflußgesetz nicht richtig darstellen. Die gewonnenen Formeln sind deshalb sehr einfach ausgefallen, weil ich hier, ohne die Genauigkeit innerhalb ziemlich weiter Grenzen zu beeinträchtigen, in der bekannten Wärmeformel

$$\frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{0,42}$$

den Exponenten 0,42 in 0,50 umgeändert, also

$$\frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}$$ gesetzt habe (s. §. 461).

Es hängt ja die Brauchbarkeit einer Formel nicht davon ab, ob sie in den äußersten Grenzen noch richtig ist, sondern nur davon, ob sie sich innerhalb gegebener Grenzen mit hinreichender Genauigkeit an die Resultate der Erfahrung anschließt.

Mehrere neue Paragraphen sind auch den analytischen Hülfslehren der Phoronomie und Aërostatik zugefügt, auch ist in der Hydraulik der Druck des durch Röhren fließenden Wassers in zwei neuen Paragraphen (§. 439 und §. 440) wegen seiner praktischen Wichtigkeit besonders abgehandelt worden. Ferner habe ich in dem Capitel über die Kraft und den Widerstand des Wassers die Theorie des einfachen Reactionsrades, sowie die Anwendung dieser Maschine als Mittel zur Prüfung der Theorie des Stoßes und der Reaction des Wassers abgehandelt. Auch sind noch die neueren Wasser- und Gasmesser mit aufgenommen worden, weil diese Instrumente durch die Reaction einer ausströmenden Flüssigkeit in Umdrehung gesetzt werden, deren Größe nach der vorausgegangenen Theorie leicht zu beurtheilen ist.

Endlich hat noch der Anhang durch das Referat der neueren Forschungen des Herrn Geh. Oberbaurath Hagen über die Wasserwellen eine kleine Ergänzung erhalten.

Die äußere Ausstattung dieser neuen Auflage möchte wohl kaum Etwas zu wünschen übrig lassen, die Abänderungen in den Ueberschriften und den Marginalien gereichen dem Gebrauch des Buches gewiß nur zum Vortheil; insbesondere wird durch die Angabe der Paragraphennummern in den Ueberschriften das Aufsuchen von citirten Stellen sehr erleichtert.

Wenn sich hier und da eine Stimme vernehmen läßt, welche behauptet, daß es dem Zweck des Buches förderlicher gewesen wäre, wenn es ein

wissenschaftlicheres Gewand und die höhere Analysis zur Grundlage erhalten hätte, so muß ich hierauf entgegnen, daß das Buch insbesondere zum Privatstudium und Nachschlagen für Praktiker geschrieben ist, und daß im Allgemeinen bei denselben die Kenntniß und Fertigkeit in Handhabung der Differenzial- und Integralrechnung nicht vorausgesetzt werden kann. Nachdem ich ein Menschenalter lang als Lehrer an einer technischen Lehranstalt gewirkt und hierbei stets in vielfachem Verkehr mit der Praxis gestanden, sowie auch auf Reisen mannichfaltige Fachstudien gemacht habe, kann ich mir wohl über diesen Gegenstand ein sicheres Urtheil zutrauen! Wenn endlich meine Ingenieur- und Maschinen-Mechanik bis in die neueste Zeit noch in verwandten Schriften vielfach benutzt worden ist, so kann ich mich, da mir literarische Ehre viel höher steht als pecuniärer Vortheil, nur darüber freuen, wenn aber in einigen Schriften von meiner Ingenieur- und Maschinen-Mechanik vielfacher Gebrauch gemacht wird, ohne dieselbe an irgend einer Stelle zu citiren, so kann ich wohl mit Recht deshalb an das Urtheil des Publicums appelliren.

Freiberg, im Mai 1863.

Julius Weisbach.

Inhalt des ersten Theiles.

Hülfslehren aus der Analysis.

Artikel		Seite
1— 4	Functionen, Naturgesetze	1
5— 6	Differenzial, Tangentenlage	6
7— 8	Regeln des Differenziirens	8
9—10	Die Potenzfunction $y = x^n$	12
11—12	Gerade Linie, Ellipse, Hyperbel	17
13—14	Curvenlauf, Maximum und Minimum	21
15	Die Mac-Laurin'sche und binomische Reihe	25
16—18	Integral, Integralrechnung	28
19—23	Exponential- und logarithmische Functionen	31
24—27	Trigonometrische und Kreisfunctionen	38
28	Reductionsformel der Integralrechnung	44
29—31	Quadratur der Curven	46
32	Rectification der Curven	53
33—34	Normale und Krümmungshalbmesser der Curven	55
35	Function $y = \frac{0}{0}$	61
36	Methode der kleinsten Quadrate	63
37	Interpolationsmethode	66

Erster Theil.

Die allgemeinen Lehren der Mechanik.

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

Erstes Capitel.

Die einfache Bewegung.

§.		Seite
1	Ruhe und Bewegung	73
2— 3	Bewegungsarten	73
4— 6	Gleichförmige Bewegung	74
7— 9	Gleichförmig veränderte Bewegung	75
10—13	Gleichförmig beschleunigte Bewegung	77
14	Gleichförmig verzögerte Bewegung	80

§.		Seite
15—18	Freier Fall und senkrechtes Aufsteigen der Körper	81
19	Ungleichförmige Bewegung überhaupt	85
20	Phoronometrische Differenzial- und Integralformeln	87
21	Mittlere Geschwindigkeit	89
22—26	Graphische Darstellung der Bewegungsformeln	90

Zweites Capitel.

Zusammengesetzte Bewegung.

27—29	Zusammensetzung der Bewegungen	94
30	Parallelogramm der Bewegungen	95
31—33	Parallelogramm der Geschwindigkeiten	96
34	Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten	99
35	Zusammensetzung der Accelerationen	100
36	Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Accelerationen	100
37—38	Parabelbewegung	102
39	Wurfbewegung	104
40	Springende Wasserstrahlen	106
41—43	Krummlinige Bewegungen überhaupt	109
44	Anwendung des höheren Calculs	113
45—46	Relative Bewegungen	117

Zweiter Abschnitt.

Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

Erstes Capitel.

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

47	Mechanik, Phoronomie, Cinematik	122
48	Kraft, Schwerkraft	122
49	Gleichgewicht, Statik und Dynamik	123
50	Eintheilung der Kräfte, bewegende, widerstehende Kräfte u. s. w.	123
51—52	Druck und Zug, Gleichheit der Kräfte	124
53	Materie, materielle Körper	124
54	Gewichtseinheit, Gramm, Pfund	125
55	Trägheit oder Beharrungsvermögen	125
56	Kräftemaß	126
57—59	Masse und Dichtigkeit der Körper	127
60—61	Specifisches Gewicht, Tabelle der specifischen Gewichte	129
62	Aggregatzustände	130
63	Eintheilung der Kräfte	131
64	Bestimmungsstücke einer Kraft	131
65	Wirkung und Gegenwirkung	132
66	Eintheilung der Mechanik	132

Zweites Capitel.

Mechanik des materiellen Punktes.

§.		Seite
67	Materieller Punkt	133
68—69	Einfache constante Kraft	134
70—73	Mechanische Arbeit oder Leistung einer Kraft	136
74—75	Princip der lebendigen Kräfte	139
76	Zusammensetzung der Kräfte	142
77	Parallelogramm der Kräfte	144
78	Zerlegung der Kräfte	146
79—80	Kräfte in einer Ebene	147
81	Kräfte im Raume	150
82—83	Princip der virtuellen Geschwindigkeiten	152
84	Uebertragung der mechanischen Arbeit	155
85	Arbeit bei der krummlinigen Bewegung	156

Dritter Abschnitt.

Statik fester Körper.

Erstes Capitel.

Allgemeine Lehren der Statik fester Körper.

86—87	Verlegung des Angriffspunktes	159
88—89	Statische Momente	160
90—91	Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene	162
92	Parallelkräfte	166
93—95	Kräftepaare	167
96	Mittelpunkt paralleler Kräfte	172
97	Kräfte im Raume	174
98—102	Princip der virtuellen Geschwindigkeiten	176

Zweites Capitel.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

103—104	Schwerpunkt, Schwerlinie, Schwerebene	180
105—106	Schwerpunktsbestimmung	181
107—108	Schwerpunkte von Linien	183
109—114	Schwerpunkte ebener Figuren	185
115	Schwerpunktsbestimmung durch den höheren Calcul	192
116	Schwerpunkte krummer Flächen	194
117—123	Schwerpunkte von Körpern	195
124	Anwendung der Simpson'schen Regel	204
125	Schwerpunktsbestimmung bei Rotationskörpern u. s. w.	206
126—128	Guldinische Regel	208

Drittes Capitel.

Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper.

§.		Seite
129	Befestigungsarten	214
130	Gleichgewicht unterstützter Körper	215
131	Stabilität eines aufgehangenen Körpers	216
132—133	Druck auf die Stützpunkte eines Körpers	217
134	Gleichgewicht von Kräften um eine Axe	221
135—137	Hebel, mathematische und physische	222
138—139	Druck der Körper auf einander	228
140—141	Stabilität	230
142—143	Stabilitätsformeln	233
144	Dynamische Stabilität	236
145	Arbeit beim Fortschaffen eines schweren Körpers	238
146	Stabilität eines Körpers auf der geneigten Ebene	239
147	Theorie der schiefen Ebene	241
148	Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten	242
149	Theorie des Keiles	244

Viertes Capitel.

Gleichgewicht an den Seilmaschinen.

150	Seilmaschine, Seilpolygon	247
151—153	Seilknoten, fester, loser	248
154—156	Gleichgewicht eines Seilpolygons	252
157	Parabel als Kettenlinie	258
158—160	Kettenlinie	260
161—162	Genaue Gleichung der gemeinen Kettenlinie	266
163—164	Rolle, Kraft- und Leitrolle	270
165—166	Radwelle, Gleichgewicht derselben	272

Fünftes Capitel.

Die Widerstände der Reibung und Steifigkeit der Seile.

167—168	Reibung	276
169	Reibungsarten, gleitende und wälzende Reibung	277
170	Reibungsgesetze	279
171	Reibungscoefficienten	280
172	Reibungswinkel und Reibungskegel	281
173	Reibungsversuche	282
174	Reibungstafeln	285
175	Die neuesten Reibungsversuche	288
176—177	Schiefe Ebene, Reibung auf der schiefen Ebene	290
178	Theorie des Gleichgewichtes mit Rücksicht auf Reibung	295
179—180	Keil, Reibung am Keile	296
181—185	Zapfenreibungscoefficienten, Zapfenreibung	300

§.		Seite
186	Poncelet's Theorem	308
187	Hebel, Zapfenreibung des Hebels	310
188	Reibung an einem stehenden Zapfen	312
189	Reibung an einem Spitzzapfen	314
190	Antifrictionszapfen	316
191	Spitzen und Schneiden	319
192	Wälzende Reibung	320
193—194	Seil- und Kettenreibung	323
195	Steifigkeit der Ketten	328
196—200	Steifigkeit der Seile	330

Vierter Abschnitt.

Die Anwendung der Statik auf die Elasticität und Festigkeit.

Erstes Capitel.

Die Zug-, Druck- und Schub-Elasticität und Festigkeit.

201	Elasticität starrer Körper	337
202	Elasticität und Festigkeit	338
203	Ausdehnung und Zusammendrückung	340
204	Elasticitätsmodul	342
205	Tragmodul und Festigkeitsmodul	345
206	Arbeitsmodul der Elasticität und Festigkeit	348
207	Ausdehnung durch das eigene Gewicht	350
208	Körper von gleichem Widerstande	353
209	Ausdehnungs- und Compressionsversuche	357
210	Ausgeführte Ausdehnungsversuche	359
211	Elasticität und Festigkeit vom Eisen und Holz	363
212	Erfahrungszahlen der Zug- und Druckfestigkeit	368
213	Die Schub- oder Scheerfestigkeit	372

Zweites Capitel.

Die Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

214	Biegung eines starren Körpers	375
215	Biegungsmoment, Maß (W.) desselben	378
216—217	Elastische Linie	380
218	Allgemeinere Gleichung der elastischen Linie	385
219—222	Biegung durch zwei Kräfte	388
223	Gleichmäßig belastete Balken	396
224—225	Reduction der Biegungsmomente	398
226	Biegungsmoment eines Streifens	401
227	Biegungsmoment eines parallelepipedischen Balkens	402
228	Hohle und gerippte Balken	403
229	Drei- und vierseitige Balken	405

§.		Seite
230	Polygonale Balken	407
231	Cylindrische und elliptische Balken	409
232	Anwendung des höheren Calculs bei Bestimmung von *W.*	413
233—234	Balken mit krummlinigen Querschnitten	415
235	Biegungsfestigkeit und Tragkraft	416
236	Festigkeitsformeln	419
237	Verschiedenheit der Tragmodel	423
238	Verschiedenheit der Festigkeitsmodel	426
239	Biegungs- und Brechungsversuche	429
240	Trag- und Festigkeitsmodel, Erfahrungszahlen	432
241	Relative Durchbiegung	435
242	Tragmomente bei verschiedenen Querschnittsformen	438
243	Querschnitte hölzerner Balken	440
244	Ausgehöhlte und gerippte Balken	443
245	Excentrische Belastung der Balken	446
246—248	Tragkraft verschieden unterstützter Balken	450
249—250	Tragkraft verschieden belasteter Balken	457
251—252	Der Brechungsquerschnitt	460
253—254	Körper von gleichem Widerstande	464
255	Biegung eines Körpers von gleichem Widerstande	470
256	Biegung der Metallfedern	472

Drittes Capitel.

Die Wirkung der Schub-Elasticität bei der Biegung und der Drehung der Körper.

257	Die Schubkraft parallel zur neutralen Axe	476
258	Die Schubkraft in der Querschnittsfläche	479
259	Maximal- und Minimalspannungen	481
260	Einfluß der Schubfestigkeit auf die Tragkraft der Balken	485
261	Einfluß der Schub-Elasticität auf die Gestalt der elastischen Linie	487
262	Drehungselasticität der Körper	489
263	Torsionsmomente	490
264	Drehungsfestigkeit	494

Viertes Capitel.

Die Tragkraft langer Säulen oder die Festigkeit des Zerknickens.

265—266	Biegung und Tragkraft langer Säulen	498
267	Körper von gleicher Zerknickungsfestigkeit	505
268	Hodgkinson's Versuche	508
269	Einfachere Bestimmung der Tragkraft der Säulen	510

Fünftes Capitel.

Die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.

§.		Seite
270	Zusammengesetzte Festigkeit	513
271	Excentrischer Zug und Druck	517
272—273	Schiefe Zug- und Druckkraft	519
274—275	Gespannte Balken	525
276	Torsion und Zug	530
277	Torsion und Biegung	533
278	Biegung in verschiedenen Ebenen	536

Fünfter Abschnitt.

Dynamik fester Körper.

Erstes Capitel.

Die Lehre von den Trägheitsmomenten.

279	Bewegungsarten	539
280	Geradlinige Bewegung	540
281	Drehende Bewegung	541
282	Trägheitsmoment	542
283	Reduction träger Massen	544
284	Reduction der Trägheitsmomente	546
285	Trägheitshalbmesser	547
286	Trägheitsmoment einer Stange	548
287	Rechteck und Parallelepiped (Trägheitsmomente derselben)	549
288	Prisma und Cylinder	551
289	Kegel und Pyramide	553
290	Kugel	554
291	Cylinder und Kegel	555
292	Rotations-Segmente	556
293	Parabel und Ellipse	558
294	Rotationsflächen und -Körper (mittels des höheren Calculs)	559
295—296	Beschleunigte Umdrehung einer Radwelle	561
297	Theorie der Fallmaschine	565
298—299	Beschleunigte Bewegung der Rollenzüge	567
300	Fortrollen eines Körpers auf einer horizontalen Ebene	571

Zweites Capitel.

Die Centrifugalkraft starrer Körper.

301	Normalkraft	572
302	Centripetal- und Centrifugalkraft	574

§.		Seite
303—304	Arbeit der Centrifugalkraft	576
305—308	Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen	580
309—311	Freie Axen, Hauptaxen	590
312	Wirkung auf die Umdrehungsaxe	595
313	Mittelpunkt des Stoßes	600

Drittes Capitel.

Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Wegen.

314—318	Gleiten auf der geneigten Ebene	605
319	Rollende Bewegung auf der schiefen Ebene	612
320	Kreispendel	614
321—323	Einfaches Pendel	615
324	Cycloide	621
325—326	Cycloidenpendel	622
327	Zusammengesetztes oder materielles Pendel	627
328	Reversionspendel	628
329	Wälzendes Pendel	631

Viertes Capitel.

Die Lehre vom Stoße.

330—331	Stoß überhaupt	633
332	Centralstoß	635
333	Elastischer Stoß	637
334	Besondere Fälle des Stoßes	638
335	Arbeitsverlust beim Stoß	640
336	Härte der Körper	642
337	Elastisch-unelastischer Stoß	644
338	Unvollkommen elastischer Stoß	646
339—340	Schiefer Stoß	648
341	Stoßreibung, Reibung während des Stoßes	651
342	Stoß drehbarer Körper	654
343	Stoß schwingender Körper	656
344	Ballistisches Pendel	659
345	Excentrischer Stoß	661
346	Benutzung der Stoßkraft	662
347	Einrammen der Pfähle	664
348	Absolute Stoßfestigkeit	668
349	Relative Stoßfestigkeit	671
350	Torsionsstoßfestigkeit	673

Sechster Abschnitt.

Statik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen.

§.		Seite
351	Flüssigkeit, flüssige Körper	678
352	Princip des gleichen Druckes	679
353	Druck im Wasser	681
354	Wasserspiegel	684
355	Bodendruck des Wassers	687
356	Seitendruck des Wassers	690
357—359	Mittelpunkt des Druckes	691
360	Druck nach einer bestimmten Richtung	697
361	Druck auf krumme Flächen	700
362	Horizontal- und Verticaldruck des Wassers	702
363	Röhren- und Kesselstärke	704

Zweites Capitel.

Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern.

364—366	Auftrieb des Wassers	708
367—368	Schwimmtiefe	712
369—370	Stabilität schwimmender Körper	716
371	Schiefes Schwimmen	720
372	Specifisches Gewicht der Körper	721
373	Aräometer	724
374	Gleichgewicht der Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten	727

Drittes Capitel.

Von den Molecularwirkungen des Wassers.

375	Molecularkräfte	728
376	Adhäsionsplatten	729
377	Adhäsion an den Seitenwänden	729
378—379	Spannung des Wasserspiegels	731
380	Krumme Fläche des Wasserspiegels	733
381	Paralleltafeln	736
382—383	Haarröhrchen	738

Viertes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

384	Spannkraft der Gase, Messen derselben	742
385	Atmosphärendruck	743

§.		Seite
386	Manometer	744
387	Mariotte'sches Gesetz	746
388	Arbeit zum Comprimiren der Luft	749
389	Druck in verschiedenen Luftschichten. Barometrisches Höhenmessen	753
390	Stereometer und Volumenometer	754
391	Luftpumpe	756
392	Gay-Lussac'sches Gesetz	759
393	Dichtigkeit der Luft	761
394	Luftmanometer	762
395	Auftrieb der Luft	763

Siebenter Abschnitt.

Dynamik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

396	Ausfluß, Ausflußmenge	766
397	Ausflußgeschwindigkeit	767
398	Zu- und Ausflußgeschwindigkeit	769
399	Ausflußgeschwindigkeit, Druck und Dichtigkeit	770
400	Hydraulischer Druck	774
401	Ausfluß durch rectanguläre Seitenöffnungen	776
402	Trianguläre und trapezoidale Seitenöffnungen	779
403	Kreisförmige Seitenöffnungen	781
404	Bewegte Ausflußgefäße	783

Zweites Capitel.

Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

405	Geschwindigkeitscoefficienten	786
406	Contractionscoefficienten	787
407	Contrahirte Wasserstrahlen	789
408	Ausflußcoefficienten	790
409	Ausflußversuche	791
410	Rectanguläre Seitenöffnungen, Ausfluß durch dieselben	794
411	Ueberfälle	799
412	Maximum und Minimum der Contraction	800
413	Contractionsscala	802
414	Partielle Contraction	803
415	Unvollkommene Contraction	805
416—417	Ausfluß des bewegten Wassers	808
418—419	Versuche von Lesbros	812

Drittes Capitel.

Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren.

§.		Seite
420	Ausfluß durch kurze Ansatzröhren	818
421	Cylindrische Ansatzröhren	819
422	Widerstandscoefficient	821
423	Schiefe Ansatzröhren	823
424	Unvollkommene Contraction beim Ausfluß durch Röhren	824
425—426	Conische Ansatzröhren	827
427—429	Reibungswiderstand des Wassers	829
430	Bewegung des Wassers in langen Röhren	835
431	Bewegung des Wassers in conischen Röhren	838
432	Röhrenleitungen	840
433	Springende Wasserstrahlen	842
434	Steighöhe springender Wasserstrahlen	844
435	Piëzometer	847

Viertes Capitel.

Von den Hindernissen des Wassers beim Durchgange durch Verengungen.

436	Plötzliche Erweiterungen	849
437	Verengungen	851
438	Einfluß der unvollkommenen Contraction	853
439	Druckverhältnisse in cylindrischen Röhren	854
440	Druckverhältnisse in conischen Röhren	857
441	Knieröhren, Widerstand in denselben	860
442	Kropfröhren	862
443—444	Schieber, Hähne, Klappen	866
445	Ventile, Klapp- und Kegelventile	870
446	Zusammengesetzte Gefäße	873

Fünftes Capitel.

Von dem Ausflusse des Wassers unter veränderlichem Drucke.

447	Prismatische Gefäße	876
448—449	Communicirende Gefäße	877
450	Wandeinschnitt	880
451	Keil- und pyramidenförmige Gefäße	882
452	Kugel- und obeliskenförmige Gefäße	884
453	Ungesetzmäßige Gefäße	887
454	Gleichzeitiger Zu- und Abfluß	888
455	Schleusen	890
456	Hydraulischer Versuchsapparat	892

Sechstes Capitel.

Von dem Ausflusse der Luft und anderer Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.

§.		Seite
457	Ausfluß des Quecksilbers und Oeles	896
458	Ausflußgeschwindigkeit der Luft	898
459	Ausflußquantum	899
460	Ausfluß nach dem Mariotte'schen Gesetze	900
461	Arbeit der Wärme	902
462	Ausfluß der Luft mit Rücksicht auf Abkühlung	905
463	Ausfluß der bewegten Luft	907
464—465	Ausflußcoefficienten der Luft	910
466	Reibungscoefficient der Luft	915
467	Bewegung der Luft in langen Röhren	916
468	Ausfluß unter abnehmendem Drucke	918

Siebentes Capitel.

Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

469	Fließende Wasser	921
470	Verschiedene Geschwindigkeiten in einem Querprofile	922
471	Mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers	923
472—474	Vortheilhafteste Querprofile	925
475	Gleichförmige Bewegung des Wassers	931
476	Reibungscoefficienten	932
477—478	Ungleichförmige Bewegung des Wassers	935
479	Anschwellungen der Flüsse	939

Achtes Capitel.

Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen.

480	Aichen oder Ausmessen des Wassers in Gefäßen	942
481—483	Ausflußregulatoren	943
484	Prony's Methode	948
485	Wasserzoll	949
486	Erzeugung eines constanten Ausflusses	951
487	Hydrometrischer Becher	952
488	Schwimmer, Hydrometer	955
489	Geschwindigkeits- und Querschnittsbestimmung	956
490—491	Hydrometrisches Flügelrad	958
492	Pitot'sche Röhre	964
493	Stromquadrant	966
494	Rheometer u. s. w.	967

Neuntes Capitel.

Von der Kraft und dem Widerstande der Flüssigkeiten.

§.		Seite
495—496	Reaction des ausfließenden Wassers	968
497	Stoß und Widerstand des Wassers	972
498—500	Stoß isolirter Strahlen	972
501	Stoß des begrenzten Wassers	977
502	Schiefer Wasserstoß	978
503	Stoß des Wassers ins Wasser	980
504—505	Reactionsrad zu Versuchen	981
506	Wassermesser, Wasseruhren	986
507—508	Gasmesser, Gasuhren	989
509	Wirkungen unbegrenzter Flüssigkeiten	994
510	Theorie des Stoßes und des Widerstandes	995
511	Stoß und Widerstand gegen Flächen	997
512	Stoß und Widerstand gegen Körper	999
513	Bewegung in widerstehenden Mitteln	1001
514	Geworfene Körper	1004

Anhang.

Die Theorie der Schwingungen.

1 — 2	Schwingungstheorie	1008
3 — 4	Längenschwingungen	1011
5	Querschwingungen	1014
6	Torsionsschwingungen	1016
7	Dichtigkeit der Erde	1017
8 — 9	Magnetismus	1019
10	Schwingungen einer Magnetnadel	1021
11 — 12	Magnetische Anziehungsgesetze	1022
13	Bestimmung des Erdmagnetismus	1025
14 — 15	Wellenbewegungen	1027
16	Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen	1030
17	Schwingungszeit	1033
18	Bestimmung der Elasticitätsmodeln	1035
19	Querschwingungen einer Saite	1036
20 — 21	Querschwingungen eines Stabes	1038
22	Schwingungshindernisse	1043
23	Schwingungen des Wassers	1045
24	Elliptische Schwingungen	1047
25 — 28	Wasserwellen	1050

Hülfslehren aus der Analysis.

Art. 1. Die Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x wird durch eine mathematische Formel, z. B. $y = 3x^2$, oder $y = ax^m$ u. s. w. angegeben. Man schreibt allgemein $y = f(x)$ oder $z = \varphi(y)$ u. s. w., und nennt y eine Function von x, sowie z eine Function von y. Die Zeichen f, φ u. s. w. deuten nur allgemein an, daß y von x, oder z von y abhänge; sie lassen die Abhängigkeit dieser Größen von einander ganz unbestimmt, schreiben also die algebraische Operation, durch welche y aus x, oder z aus y hervorgeht, nicht vor.

Eine Function $y = f(x)$ ist eine unbestimmte Gleichung; es giebt unendlich viele Werthe von x und y, welche derselben entsprechen, giebt man jedoch die eine (x), so ist die andere (y) durch die Function bestimmt, und verändert man die eine, so erleidet die andere ebenfalls eine Veränderung. Man nennt deshalb die unbestimmten Größen x und y Variablen oder veränderliche Größen, dagegen die gegebenen oder als gegeben anzusehenden Größen, welche also die Operation vorschreiben, durch welche y aus x hervorgeht, Constanten oder beständige Größen. Von den veränderlichen Größen heißt diejenige, welche willkürlich anzunehmen ist, die Urvariable, und dagegen diejenige, welche als Function der letzteren durch eine bestimmte Operation aus dieser bestimmt wird, die Abhängigvariable. In $y = ax^m$ sind a und m die Constanten und es ist x die Ur-, dagegen y die Abhängigvariable.

Die Abhängigkeit einer Größe z von zwei anderen x und y wird durch

das Zeichen $z = f(x, y)$ ausgedrückt. Es ist in diesem Falle z Function von x und y zugleich, und man hat es daher hier mit zwei Urvariablen zu thun.

Art. 2. Jede durch eine Function oder Formel $y = f(x)$ ausgedrückte Abhängigkeit einer Größe y von einer andern Größe x läßt sich durch eine ebene Curve oder krumme Linie APQ, Fig. 1 und Fig. 2, darstellen; den

Fig. 1.

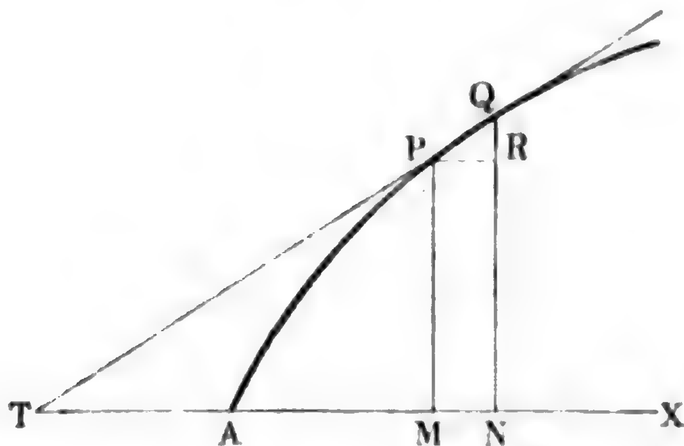
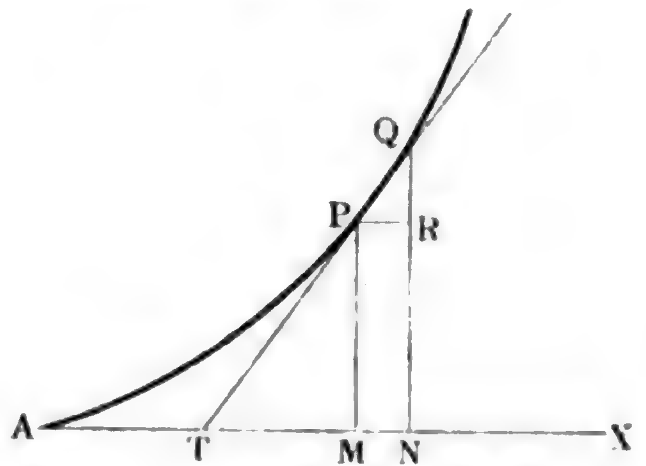


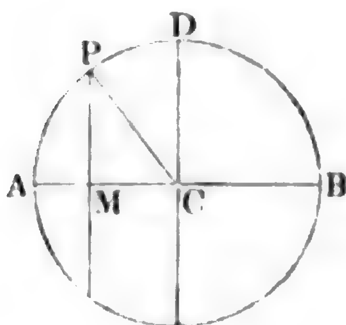
Fig. 2.



verschiedenen Werthen der Urvariablen x entsprechen die Abscissen AM, AN u. s. w., und den verschiedenen Werthen der Abhängigvariablen y die Ordinaten MP, NQ u. s. w. der Curve. Die Coordinaten (Abscissen und Ordinaten) der Curve stellen also die beiden Variablen der Function vor.

Die graphische oder bildliche Darstellung einer Function oder die Zurückführung derselben auf eine Curve vereinigt mehrere Vortheile in sich. Sie liefert uns erstens einen Ueberblick über den Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Größen; sie ersetzt uns zweitens die Stelle einer Tabelle oder eines Inbegriffes von je zwei zusammengehörigen Werthen einer Function, und sie verschafft uns drittens die Kenntniß von den mannigfaltigsten Eigenschaften und Beziehungen der Functionen. Der mit dem Halbmesser $CA = CB = r$ beschriebene Kreis ADB, Fig. 3, welcher der Function $y = \sqrt{2rx - x^2}$ entspricht, worin x und y die Coordinaten AM und MP bezeichnen, gewährt uns z. B. nicht allein eine Uebersicht über die verschiedenen Werthe, welche diese Function annehmen kann, sondern macht uns auch mit anderen Eigenthümlichkeiten dieser Function bekannt, da die Eigenschaften des Kreises auch ihre Bedeutung in der Function haben. Wir wissen z. B. hiernach, ohne weitere Untersuchungen, daß y nicht allein für $x = 0$, sondern auch für $x = 2r$ zu Null wird, daß ferner y ein Maximum und zwar $= r$ wird, wenn $x = r$ ist, u. s. w.

Fig. 3.



Art. 3. Die Naturgesetze lassen sich in der Regel durch Functionen zwischen zwei oder mehreren Größen ausdrücken und sind deshalb auch meist einer graphischen Darstellung fähig.

(1) Beim freien Fallen der Körper im luftleeren Raume hat man z. B. für die Fallgeschwindigkeit y, welche der Fallhöhe x entspricht, $y = \sqrt{2gx}$; diese Formel stimmt aber auch mit der Gleichung $y = \sqrt{px}$ der Parabel überein, wenn man den Parameter (p) der letzteren gleichsetzt der doppelten Beschleunigung ($2g$) der Schwere; daher läßt sich auch das Fallgesetz durch eine Parabel APQ, Fig 4, mit dem Parameter $p = 2g$ graphisch darstellen. Die Abscissen AM, AN . . dieser Curve sind natürlich die Fallräume, und die entsprechenden Ordinaten MP, NQ . . die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Fig. 4.

(2) Ist a ein gewisses Luftvolumen unter der Pressung von 1 Atmosphäre, so hat man, dem Mariotte'schen Gesetze zufolge, das Volumen derselben Luftmenge unter der Pressung von x Atmosphären: $y = \frac{a}{x}$.

Für $x = 1$, ist $y = a$, für $x = 2$, $y = \frac{a}{2}$, für $x = 4$, $y = \frac{a}{4}$,

für $x = 10$, ist $y = \frac{a}{10}$, für $x = 100$, $y = \frac{a}{100}$, für $x = \infty$, $y = 0$;

man sieht also, daß das Volumen immer kleiner und kleiner wird, je größer die Spannung ist, und daß, wenn das Mariotte'sche Gesetz bei allen Spannungen richtig bliebe, einer unendlich großen Spannung x ein unendlich kleines Volumen y entspräche.

Ferner: $x = \frac{1}{2}$ giebt $y = 2a$, $x = \frac{1}{4}$ giebt $y = 4a$,
$x = \frac{1}{10}$ „ $y = 10a$, $x = 0$ „ $y = \infty a$,

je kleiner hiernach die Spannung wird, desto größer fällt dagegen das Volumen aus, und wenn die Spannung unendlich klein ist, so stellt sich das Volumen unendlich groß heraus.

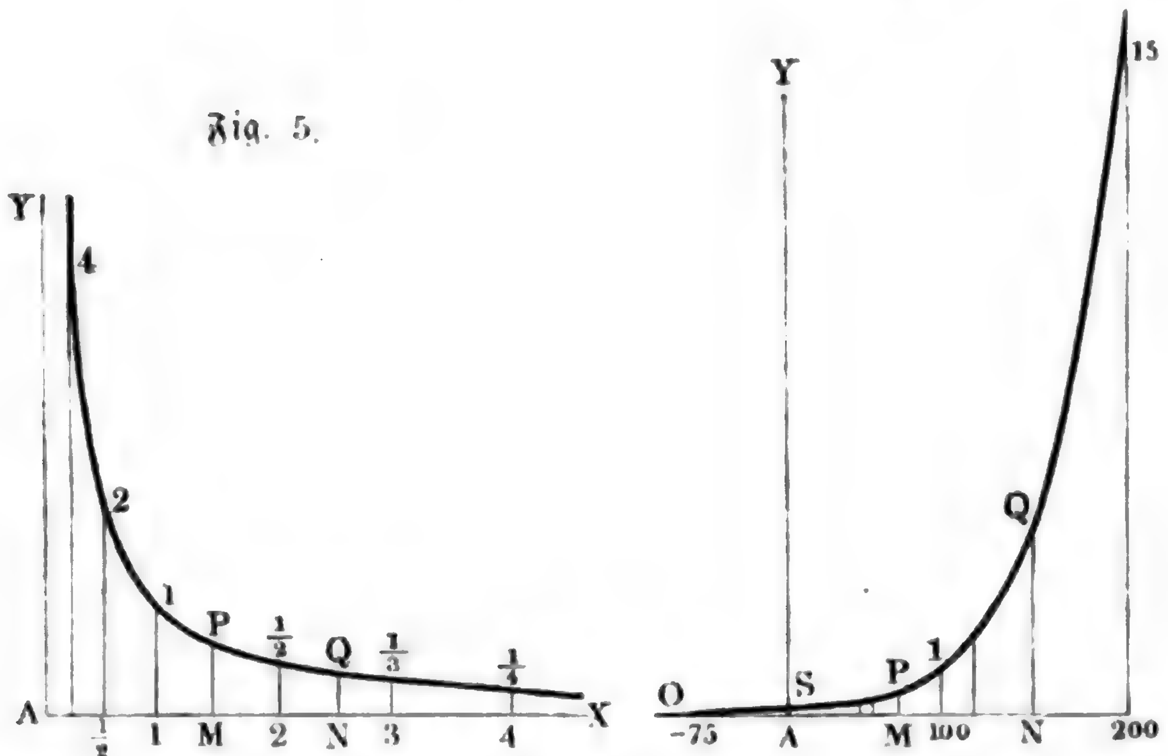
Die Curve, welche diesem Gesetze entspricht, ist in Fig. 5 (a. f. S.) abgebildet; AM, AN . . sind die Spannungen oder Abscissen x, MP, NQ . . die entsprechenden Volumina oder Ordinaten y. Man sieht, diese Curve nähert sich allmälig den Axen AX und AY der Coordinaten, ohne sie je zu erreichen.

(3) Die Abhängigkeit der Expansivkraft y des gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur x läßt sich wenigstens innerhalb gewisser Grenzen durch die Formel:

$$y = \left(\frac{a + x}{b}\right)^m \text{ Atmosphären}$$

ausdrücken, und es ist erfahrungsmäßig, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, $a = 75$, $b = 175$ und $m = 6$. Wenn wir hiernach

$$y = \left(\frac{75 + x}{175}\right)^6$$



setzen und eine unbeschränkte Richtigkeit dieser Formel annehmen, so erhalten wir:

$$\text{Für } x = 100^0,\quad y = \left(\frac{175}{175}\right)^6 = 1{,}000 \text{ Atmosphäre},$$

$$\text{„ } x = 50^0,\quad y = \left(\frac{125}{175}\right)^6 = 0{,}133 \text{ „}$$

$$\text{„ } x = 0^0,\quad y = \left(\frac{75}{105}\right)^6 = 0{,}006 \text{ „}$$

$$\text{„ } x = -75^0,\quad y = \left(\frac{0}{175}\right)^6 = 0{,}000 \text{ „}$$

$$\text{ferner für } x = 120^0,\quad y = \left(\frac{195}{175}\right)^6 = 1{,}914 \text{ „}$$

$$\text{„ } x = 150^0,\quad y = \left(\frac{225}{175}\right)^6 = 4{,}517 \text{ „}$$

$$\text{„ } x = 200^0,\quad y = \left(\frac{275}{175}\right)^6 = 15{,}058 \text{ „}$$

Die entsprechende Curve führt PQ, Fig. 6, vor Augen; man sieht, dieselbe geht in einem Abstande $AO = -75$ vom Anfangspunkte A der Coordinaten durch die Abscissenaxe, und in einem Abstande $AS = 0{,}006$

von eben diesem Punkte durch die Ordinatenaxe; ferner einer Abscisse $AM < 100$ entspricht eine Ordinate MP unter 1 und einer Abscisse $AN > 100$ gehört die Ordinate $NQ > 1$ zu; auch ist wahrzunehmen, daß nicht nur y mit x ins Unendliche wächst, sondern auch, daß die Curve immer steiler und steiler ansteigt, je größer x wird.

Art. 4. Eine Function $z = f(x, y)$ mit zwei Urvariablen läßt sich durch eine krumme Fläche BCD, Fig. 7, darstellen, in welcher die Urvariablen x und y durch die Abscissen AM und AN auf den Axen AX und AY, und die Abhängigvariable z durch die Ordinate OP eines Punktes P in der Fläche ABC repräsentiren. Giebt man bei einem bestimmten Werthe von x, y verschiedene Werthe, so erhält man in z die Ordinaten der Punkte einer mit der Coordinatebene YZ parallel laufenden Curve EPF; nimmt man dagegen bei einem bestimmten Werthe von y für x verschiedene Werthe an, so ergeben sich in z die Ordinaten der Punkte einer mit der Coordinatebene XZ parallel laufenden Curve GPH. Es läßt sich folglich die ganze krumme Fläche BCD als eine stetige Verbindung von mit den Coordinatebenen parallel laufenden Curven ansehen.

Das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz $z = \frac{a(1 + \delta y)}{x}$, wonach sich das Volumen z einer Luftmenge aus der Pressung x und Temperatur y desselben berechnen läßt, ist durch die krumme Fläche $CKPH$, Fig. 8, graphisch darzustellen. Es ist AM die Pressung x, $ANMO$ die Temperatur

Fig. 7.

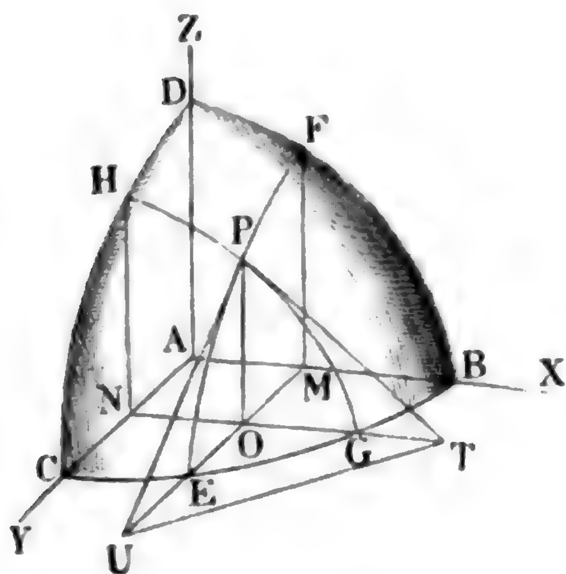
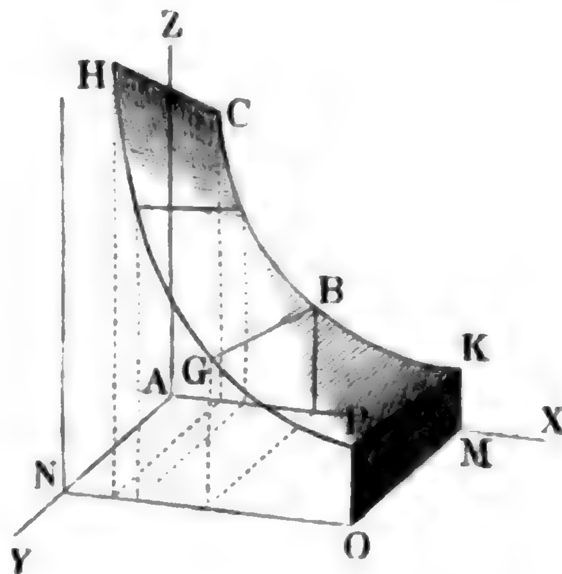


Fig. 8.



y und OP das entsprechende Volumen z, ferner geben die Coordinaten der Curve PGH die Volumina bei einer und derselben Temperatur $AN = y$, sowie die der Geraden KP die Volumina bei einer und derselben Pressung $AM = x$ an.

Art. 5. Wenn man die Urvariable einer Function oder Abscisse $AM = x$, Fig. 9 und Fig. 10, der entsprechenden Curve um eine unendlich kleine, künftig durch ∂x zu bezeichnende Größe MN wachsen läßt, so geht die entsprechende Abhängigvariable oder Ordinate $MP = y$ in $NQ = y_1$ über, und wird um den durch ∂y zu bezeichnenden unendlich kleinen Werth $RQ = NQ - MP$ größer. Beide Wachsthümer ∂x und ∂y von x und y nennt man Differenziale oder Elemente der Veränderlichen oder Coordinaten x und y, und es ist nun unsere Hauptaufgabe, für die am häufigsten vorkommenden Functionen die Differenziale, oder vielmehr die Verhältnisse zwischen den zusammengehörigen Elementen ihrer Variablen x und y zu finden. Setzt man in der Function $y = f(x)$, wo x die Abscisse AM und y die Ordinate MP vorstellt,

statt x: $x + \partial x = AM + MN = AN$, so erhält man
statt y: $y + \partial y = MP + RQ = NQ$, also:
$$y + \partial y = f(x + \partial x),$$
und zieht man hiervon den ersten Werth von y ab, so bleibt das Element oder Differenzial der Variablen y, d. i.:
$$\partial y = \partial f(x) = f(x + \partial x) - f(x)$$
übrig.

Fig. 9.

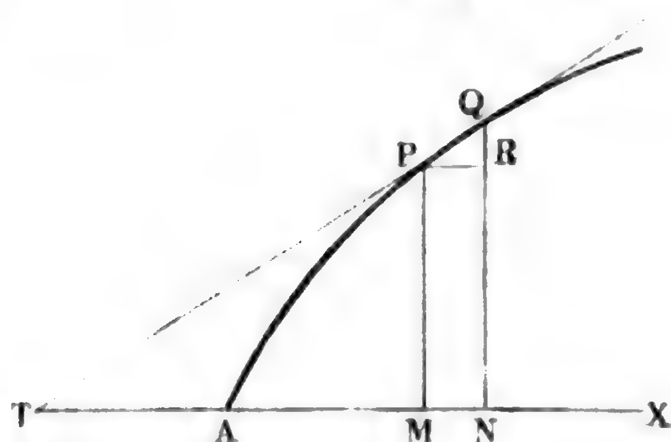
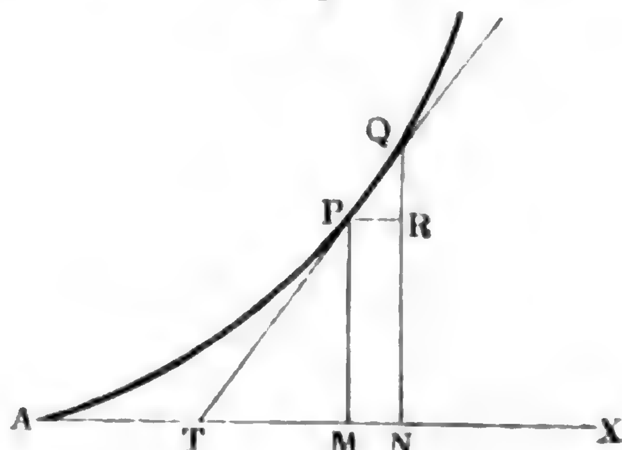


Fig. 10.

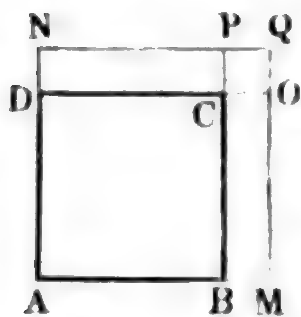


Dies ist die allgemeinste Regel zur Bestimmung des Differenziales einer Function, aus welcher sich durch Anwendung auf verschiedene Functionen wieder andere mehr oder weniger allgemeine Regeln ableiten lassen.

Ist z. B. $y = x^2$, so hat man:
$$\partial y = (x + \partial x)^2 - x^2,$$
oder, da
$$(x + \partial x)^2 = x^2 + 2x\partial x + \partial x^2$$
zu setzen ist:
$$\partial y = 2x\partial x + \partial x^2 = (2x + \partial x)\,\partial x;$$
und einfacher, da ∂x als unendlich kleine Größe gegen $2x$ verschwindet, oder $2x$ durch Hinzutritt von ∂x nicht angebbar verändert wird und deshalb unbeachtet gelassen werden kann:
$$\partial y = \partial (x)^2 = 2x\partial x.$$

Es entspricht $y = x^2$ dem Inhalte eines Quadrates $ABCD$, Fig. 11, dessen Seite $AB = AD = x$ ist, und es läßt sich auch aus der Figur entnehmen, daß durch Zunahme der Seite um $BM = DN = \partial x$, das Quadrat um zwei Rechtecke BO und $DP = 2x\partial x$ und um ein Quadrat $OP = (\partial x)^2$ wächst, daß also bei einem unendlich kleinen Wachsthum ∂x von x das Quadrat $y = x^2$ um das Element $2x\partial x$ zunimmt.

Fig. 11.



Art. 6. Die gerade Linie TPQ, Fig. 9 und 10, welche durch zwei unendlich nahe liegende Punkte P und Q einer Curve geht, heißt Tangente oder Berührungslinie dieser Curve und bestimmt die Richtung derselben zwischen diesen Punkten. Man giebt die Richtung der Tangente durch den Winkel $PTM = \alpha$ an, unter welchem die Abscissenaxe AX von dieser Linie geschnitten wird. Bei einer concaven Curve wie APQ, Fig. 9, liegt die Tangente außerhalb der Curve und Abscissenaxe; bei einer convexen Curve APQ, Fig. 10, hingegen befindet sie sich zwischen der Curve und Abscissenaxe.

In dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke PQR, Fig. 9 und 10, mit den Katheten $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y$ ist der Winkel QPR gleich dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$, und da

$$tang.\, QPR = \frac{QR}{PR}$$

ist, so hat man auch:

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x};$$

es giebt also das Verhältniß oder der Quotient aus den beiden Elementen ∂y und ∂x die trigonometrische Tangente des Tangentenwinkels an.

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man, wenn man $y^2 = px = z$ setzt:

$$\partial z = (y + \partial y)^2 - y^2 = y^2 + 2y\partial y + \partial y^2 - y^2 = 2y\partial y + \partial y^2,$$

oder, da ∂y^2 gegen $2y\partial y$, oder, was auf eins herauskommt, ∂y gegen $2y$ verschwindet:

$$\partial z = 2y\partial y,$$

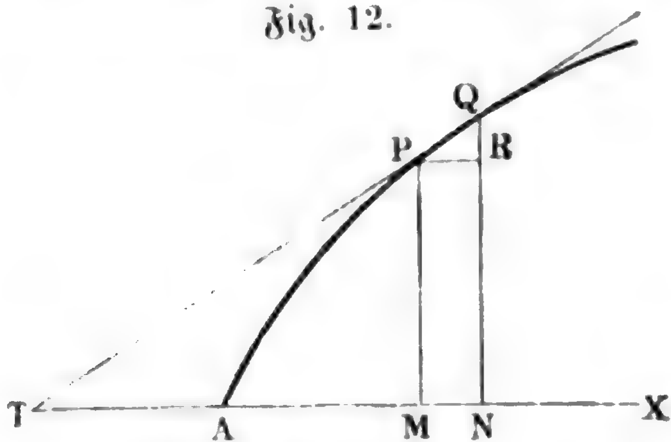
und ebenso:

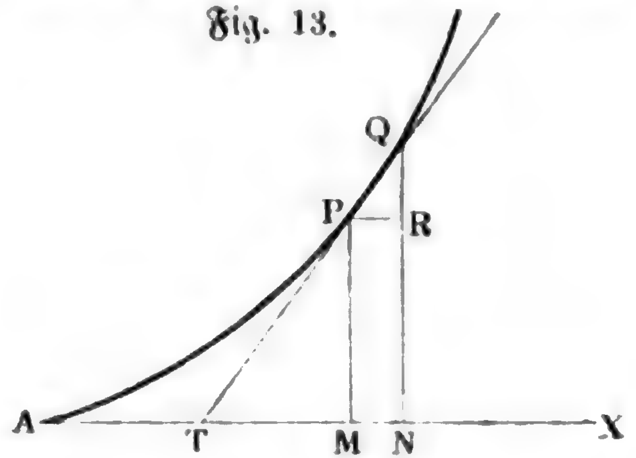
$$\partial z = p(x + \partial x) - p\partial x.$$

Es ist hiernach $2y\partial y = p\partial x$, und daher für den Tangentenwinkel der Parabel:

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{x}{2y}.$$

In der Regel nennt man das bestimmte Stück PT der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkte P und dem Durchschnittspunkte T mit der





Abscissenaxe Tangente, und die Projection TM desselben in der Abscissenaxe Subtangente, und hat daher:

$$subtang. = PM \; cotang. \; PTM$$
$$= y \; cotang. \, \alpha = y \frac{\partial x}{\partial y},$$

z. B. bei der Parabel:

$$subtang. = y \cdot \frac{2x}{y} = 2x.$$

Es ist also hier die Subtangente der doppelten Abscisse gleich, und hiernach die Lage der Tangente für jeden Punkt P der Parabel leicht anzugeben.

Bei einer krummen Fläche BCD, Fig. 7, sind die Neigungswinkel α und β von den Tangenten PT und PU an einem Punkte P durch die Formeln

$$tang. \, \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } tang. \, \beta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

bestimmt.

Die durch PT und PU gelegte Ebene PTU ist Tangentialebene der krummen Fläche.

Art. 7. Für eine Function $y = a + mf(x)$ hat man:

$$\partial y = [a + mf(x + \partial x)] - [a + mf(x)]$$
$$= a - a + mf(x + \partial x) - mf(x)$$
$$= m[f(x + \partial x) - f(x)];$$

d. i.:

I.) . . . . . . $\partial [a + mf(x)] = m \partial f(x)$,

z. B.:

$$\partial (5 + 3x^2) = 3 \, [(x + \partial x)^2 - x^2] = 3 \, . \, 2x \partial x = 6x \partial x.$$

Es ist ebenso:

$$\partial (4 - \tfrac{1}{2} x^3) = - \tfrac{1}{2} \partial (x)^3 = - \tfrac{1}{2} [(x + \partial x)^3 - x^3]$$
$$= - \tfrac{1}{2} (x^3 + 3x^2 \partial x + 3x \partial x^2 + \partial x^3 - x^3)$$
$$= - \tfrac{1}{2} \, . \, 3x^2 \partial x = - \tfrac{3}{2} x^2 \partial x.$$

Wir können hiernach folgende wichtige Regel aufstellen: **Die constanten Glieder (a, 5) einer Function verschwinden beim Differenziiren, und die constanten Factoren (m, 3) bleiben hierbei unverändert.**

Die Richtigkeit dieser Regel läßt sich auch graphisch darthun. Für die Curve APQ, Fig. 14, deren Coordinaten ein Mal $AM = x$ und

Fig. 14.

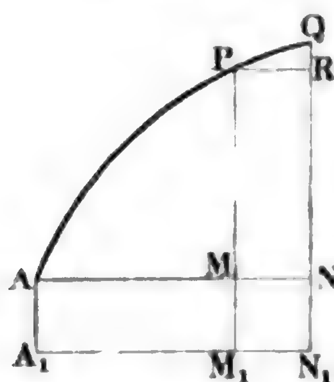
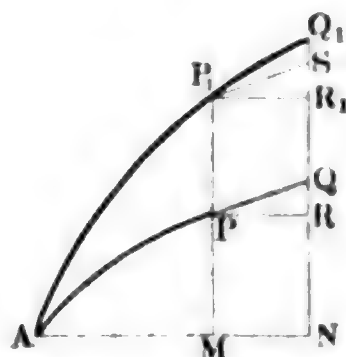


Fig. 15.



$MP = y = f(x)$, und ein anderes Mal $A_1 M_1 = x$ und $M_1 P = a + y = a + f(x)$ sind, ist $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y = \partial f(x)$ und auch $= \partial (a + y) = \partial [a + f(x)]$; und für die Curven AP_1Q_1 und APQ, Fig. 15, deren zusammengehörige Ordinaten MP_1 und MP, sowie NQ_1 und NQ ein gewisses Verhältniß zu einander haben, ist auch das Verhältniß zwischen den Differenzialien

$R_1 Q_1 = NQ_1 - MP_1$ und $RQ = NQ - MP$ beständig dasselbe; denn setzt man $MP_1 = m . MP$ und $NQ_1 = m . NQ$, so folgt:

$$R_1 Q_1 = NQ_1 - MP_1 = m(NQ - MP) = m . QR,$$

d. i.:

$$\partial [mf(x)] = m \partial f(x).$$

Ist ferner $y = u + v$, also die Summe von zwei Variablen u und v, so hat man

$$\partial y = u + \partial u + v + \partial v - (u + v), \text{ d. i. nach Art. 5:}$$

II.) . . . $\partial (u + v) = \partial u + \partial v$; ebenso:

$$\partial [f(x) + \varphi (x)] = \partial f(x) + \partial \varphi (x).$$

Es ist also das Differenzial von der Summe aus mehreren Functionen gleich der Summe von den Differenzialien der einzelnen Functionen; z. B.:

$$\partial (2x + 3x^2 - \tfrac{1}{2}x^3) = 2\partial x + 6x\partial x - \tfrac{3}{2}x^2\partial x = (2 + 6x - \tfrac{3}{2}x^2)\partial x.$$

Die Richtigkeit dieser Regel ist auch aus der Betrachtung einer Curve APQ, Fig. 15, abzuleiten. Ist $MP = f(x)$ und $PP_1 = \varphi (x)$, so hat man:

$$MP_1 = y = f(x) + \varphi (x), \text{ und:}$$

$$\partial y = R_1 Q_1 = R_1 S + SQ_1 = RQ + SQ_1 = \partial f(x) + \partial \varphi (x),$$

da $P_1 S$ parallel zu PQ gelegt und deshalb $R_1 S = RQ$ und $QS = PP_1$ gesetzt werden kann.

Art. 8. Ist $y = uv$, also das Product zweier Variablen, z. B. der Inhalt eines Rechteckes $ABCD$, Fig. 16, mit den variablen Seiten $AB = u$ und $BC = v$, so hat man:

$$\partial y = (u + \partial u)(v + \partial v) - uv = uv + u\partial v + v\partial u + \partial u\partial v - uv$$
$$= u\partial v + v\partial u + \partial u\partial v = u\partial v + (v + \partial v)u.$$

Fig. 16.

Nun ist aber in $v + \partial v$, ∂v unendlich klein gegen v, daher läßt sich

$$v + \partial v = v, \quad \text{und} \quad (v + \partial v)\partial u = v\partial u.$$

sowie

$$u\partial v + (v + \partial v)\partial u = u\partial v + v\partial u$$

setzen, so daß

III.) . . . $\partial(uv) = u\partial v + v\partial u,$

sowie

$$\partial[f(x) \cdot \varphi(x)] = f(x)\partial\varphi(x) + \varphi(x)\partial f(x)$$

folgt.

Es ist also das Differenzial eines Productes zweier Variablen gleich der Summe aus den Producten von je einer und dem Differenziale der anderen Variablen.

Wenn die Seiten des Rechteckes $ABCD$, Fig. 16, um $BM = \partial u$ und $DO = \partial v$ wachsen, so nimmt der Inhalt $y = AB \cdot AD = uv$ desselben um die Rechtecke $CO = u\partial v$, $CM = v\partial u$ und $CP = \partial u\partial v$ zu, wovon das letztere als unendlich klein gegen die ersteren verschwindet, und es ist daher das Differenzial dieses Flächenraumes nur gleich der Summe $u\partial v + v\partial u$ der Inhalte der beiden Rechtecke CO und CM zu setzen.

Dieser Regel zu Folge ist z. B. für $y = x(3x^2 + 1)$:

$$\partial y = x\partial(3x^2 + 1) + (3x^2 + 1)\partial x = 3x\partial(x^2) + (3x^2 + 1)\partial x$$
$$= 3x \cdot 2x\partial x + 3x^2\partial x + \partial x = (9x^2 + 1)\partial x.$$

Ferner ist, wenn w einen dritten variablen Factor bezeichnet:

$$\partial(uvw) = u\partial(vw) + vw\partial u,$$

oder, da $\partial(vw) = v\partial w + w\partial v$ ist,

$$\partial(uvw) = uv\partial w + uw\partial v + vw\partial u; \quad \text{ebenso}$$
$$\partial(uvwz) = uvw\partial z + uvz\partial w + uwz\partial v + vwz\partial u.$$

Ist $u = v = w = z$, so folgt $\partial(u^4) = 4u^3\partial u$, sowie allgemein:

IV.) . . . . $\partial(x^m) = mx^{m-1}\partial x,$

wenn der Exponent m eine ganze positive Zahl ist.

Z. B.: $\partial(x^7) = 7x^6\partial x$, sowie $\partial(\frac{3}{4}x^8) = 6x^7\partial x$.

Ist in $y = x^{-m}$, m wieder eine ganze positive Zahl, so hat man auch:

$$yx^m = 1, \text{ und } \partial(yx^m) = 0, \text{ d. i.}$$
$$y\partial(x^m) + x^m\partial y = 0, \text{ und daher}$$

$$\partial y = -\frac{y\partial(x^m)}{x^m} = -\frac{x^{-m} \cdot mx^{m-1}\partial x}{x^m} = -mx^{-m-1}\partial x,$$

oder, wenn man $-m = n$ setzt:

$$\partial(x^n) = n x^{n-1} \partial x.$$

Es gilt also die Regel (IV) auch für Potenzen mit ganzen negativen Exponenten. Z. B.:

$$\partial(x^{-3}) = -3x^{-4}\partial x = -\frac{3\partial x}{x^4},$$

ebenso:

$$\partial(3x^2+1)^{-2} = -2(3x^2+1)^{-3}\partial(3x^2) = -\frac{12x\partial x}{(3x^2+1)^3}.$$

Ist in $y = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ irgend ein Bruch, dessen Nenner n und Zähler m ganze Zahlen sind, so hat man auch $y^n = x^m$, und $\partial(y^n) = \partial(x^m)$, d. i.

$n y^{n-1}\partial y = m x^{m-1}\partial x$, daher

$$\partial y = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}\partial x}{y^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}\partial x}{x^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}\partial x.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = p$, so folgt:

$\partial y = \partial(x^p) = p x^{p-1}\partial x$, also ebenfalls entsprechend der nun allgemein als richtig anzusehenden Regel IV.

Auch ist $\partial(u^p) = p u^{p-1}\partial u$, wenn u irgend eine abhängige Function von x bezeichnet.

Hiernach ist z. B. $\partial(\sqrt{x^3}) = \partial(x^{3/2}) = {}^3/_2 x^{1/2}\partial x = {}^3/_2\sqrt{x}\,\partial x$,

$$\partial\sqrt{2rx - x^2} = \partial\sqrt{u} = \partial(u^{1/2}) = {}^1/_2 u^{-1/2}\partial u$$

$$= {}^1/_2\frac{\partial(2rx - x^2)}{u^{1/2}} = \frac{2r\partial x - 2x\partial x}{2\sqrt{u}} = \frac{(r-x)\partial x}{\sqrt{2rx - x^2}}.$$

Um das Differenzial eines Quotienten $y = \frac{u}{v}$ zu finden, setze man $u = vy$, wonach dann $\partial u = v\partial y + y\partial v$, folglich

$$\partial y = \frac{\partial u - y\partial v}{v} = \frac{\partial u - \frac{u}{v}\partial v}{v}, \text{ d. i.}$$

V.) $$\partial\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\partial u - u\partial v}{v^2} \text{ folgt.}$$

Hiernach ist z. B.

$$\partial\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = \frac{(x+2)\partial(x^2-1) - (x^2-1)\partial(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)\,.\,2x\partial x - (x^2-1)\,.\,\partial x}{(x+2)^2} = \left(\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\right)\partial x.$$

Auch ist

$$\partial\left(\frac{u}{v}\right) = -\frac{u\,\partial v}{v^2},\ \text{z. B. } \partial\left(\frac{4}{x^2}\right) = -\frac{4\partial(x^2)}{x^4} = -\frac{8\,\partial x}{x^3}.$$

Art. 9. Die Function $y = x^n$ ist die wichtigste der ganzen Analysis, weil man fast bei allen Untersuchungen auf dieselbe stößt. Wenn man dem Exponenten n alle möglichen Werthe, positive und negative, ganze und gebrochene u. s. w., beilegt, so liefert sie auch die verschiedenartigsten Curven, wie durch Fig. 17 veranschaulicht wird. Es ist hier A der Null- oder Anfangspunkt der Coordinaten-, $X\overline{X}$ die Abscissen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinatenaxe.

Trägt man zu beiden Seiten der Coordinataxen in den Abständen $x = \pm 1$ und $y = \pm 1$ von A die zu diesen Axen Parallelen $X_1\overline{X}_1$, $X_2\overline{X}_2$, $Y_1\overline{Y}_1$ und $Y_2\overline{Y}_2$ auf, und verbindet man die Durchschnittspunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 derselben noch durch die Transversalen $Z\overline{Z}$, $Z_1\overline{Z}_1$, so erhält man dadurch ein Diagramm, an welches sich sämmtliche der Gleichung $y = x^n$ entsprechende Curven mehr oder weniger anschließen. Uebrigens ist für jeden Punkt der Abscissenaxe $X\overline{X}$, $y = 0$, sowie für jeden Punkt der Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$, $x = 0$; ferner für die Punkte in den Axen $X_1\overline{X}_1$ und $X_2\overline{X}_2$, $y = \pm 1$, und für die Punkte in den Axen $Y_1\overline{Y}_1$ und $Y_2\overline{Y}_2$, $x = \pm 1$.

Setzt man in der Gleichung $y = x^n$, $x = 1$, so erhält man, was auch der Exponent n für eine Zahl sein möge, stets $y = 1$. und nur für gewisse Werthe von n, überdies noch $y = -1$; es gehen folglich auch alle der Gleichung $y = x^n$ angehörige Curven durch den Punkt P_1, dessen Coordinaten $AM = 1$ und $AN = 1$ sind.

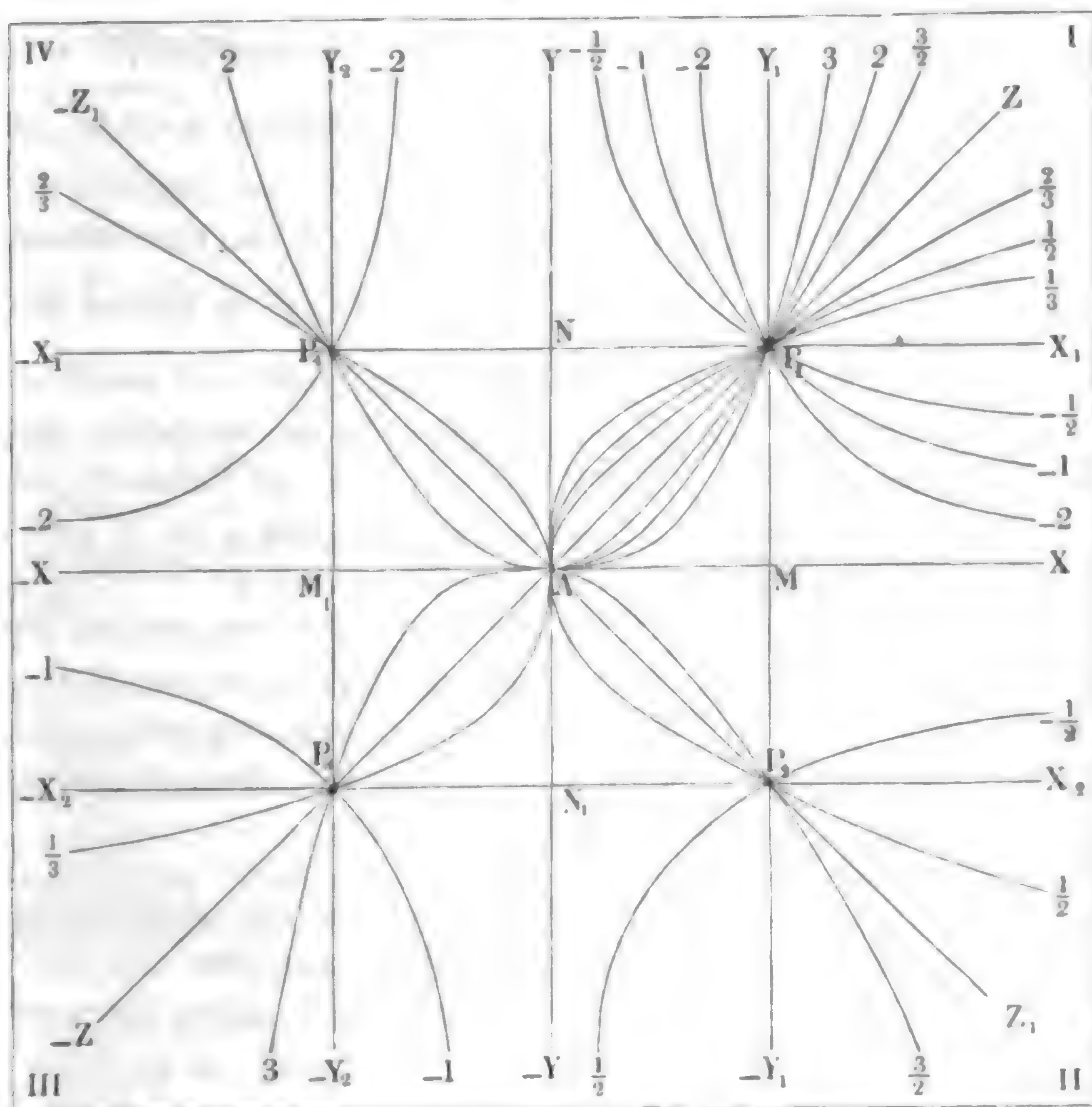
Nimmt man $n = 1$ an, setzt man also $y = x$, so bekommt man die von beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ gleichviel abweichende Gerade ($ZA\overline{Z}$), welche auf der einen Seite von A unter dem Winkel von 45 Grad $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ auf-, und auf der anderen Seite unter demselben Winkel absteigt. Dagegen erhält man für $y = -x$ die unter dem Winkel von 45 Grad auf der einen Seite von A nieder-, und auf der andern Seite aufsteigende Gerade $Z_1A\overline{Z}_1$.

Ist dagegen $n > 1$, so fällt $y = x^n$ für $x < 1$, kleiner und dagegen für $x > 1$, größer als x aus, und ist $n < 1$, so stellt sich $y = x^n$ für $x < 1$. größer und dagegen für $x > 1$, kleiner als x heraus; dem ersteren Falle ($n > 1$) entsprechen convexe Curven, welche anfangs unter, von P_1 aus aber über der geraden Linie ($ZA\overline{Z}$) hinlaufen, und dem zweiten Falle ($n < 1$) concave Curven, bei welchen das Umgekehrte stattfindet.

Wenn im ersten Falle der Exponent n immer kleiner und kleiner und endlich verschwindend klein oder nahe Null angenommen wird, so nähern sich

die Ordinaten dem constanten Werthe $y = x^0 = 1$. und die entsprechenden Curven über AX der gebrochenen Linie ANP_1X_1 immer mehr und mehr;

Fig. 17.



wenn dagegen im zweiten Falle der Exponent n immer größer und größer wird, so nähern sich die Ordinaten allmälig dem Grenzwerthe $y = x^{\infty} = x^{\frac{1}{0}} = \infty$, dagegen die Abscissen nach und nach der Grenze $x = y^0 = 1$, und es rücken deshalb die entsprechenden Curven der gebrochenen Linie AMP_1Y_1 immer näher und näher.

Nimmt man $n = -1$ an, setzt man also $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, so ist für $x = 0$, $y = \infty$ und für $x = \infty$, $y = 0$, und man hat es mit einer aus Art. 3 bekannten und in Fig. 5 abgebildeten Curve ($\overline{1}P_1\overline{1}$) zu thun, welche sich einerseits immer mehr und mehr der Ordinaten- und andererseits immer mehr und mehr der Abscissenaxe nähert, jedoch diese Axen nie wirklich erreicht.

Ist der Exponent $(-n)$ der Function $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ein ächter Bruch, so fällt für $x < 1$, $y < \frac{1}{x}$ und dagegen für $x > 1$, $y > \frac{1}{x}$ aus, und ist dieser Exponent größer als die Einheit, so hat man umgekehrt, für $x < 1$, $y > \frac{1}{x}$ und für $x > 1$, $y < \frac{1}{x}$. Die der Function $y = x^{-n}$ entsprechenden Curven laufen also, je nachdem n kleiner oder größer als Eins ist, anfangs unter oder über, und später vom Punkte P aus, über oder unter der Curve $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ hin. Während überhaupt die Curven, welche positiven Werthen von n entsprechen, sich anfangs unter, und von P_1 aus über der Geraden $(X_1 \overline{X}_1)$ hinziehen, laufen die Curven, welche aus negativen Exponenten $(-n)$ hervorgehen, erst über und von jenseits P_1 unter $(X_1 \overline{X}_1)$ hin. Bei jenen Curven ist für $x = 0$, auch $y = 0$, und für $x = \infty$ auch $y = \infty$, bei diesen hingegen für $x = 0$, $y = \infty$, und für $x = \infty$, $y = 0$. Wenn sich jene immer mehr und mehr von den Coordinatenaxen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ entfernen, je weiter man sie von dem Anfangspunkte A aus verfolgt, nähern sich diese immer mehr und mehr einerseits der Axe $X\overline{X}$ und andererseits der Axe $Y\overline{Y}$, ohne diese Geraden jedoch wirklich zu erreichen.

Uebrigens rücken die letzten Curvensysteme entweder der gebrochenen Linie $Y N P_1 X_1$, oder der gebrochenen Linie $Y_1 P_1 M X$ immer näher und näher, je nachdem sich der Exponent der Grenze $n = o$ oder $n = \infty$ immer mehr und mehr nähert.

Ist in $y = x^{\pm m}$, m eine *ganze ungerade Zahl* (1, 3, 5, 7 . . .), so hat y mit x dasselbe Zeichen; positiven Werthen von x entsprechen auch positive Werthe von y und negativen Werthen von x auch negative Werthe von y. Ist hingegen m eine *ganze gerade Zahl* (2, 4, 6 . . .), so fällt sowohl für positive als auch für negative x, y positiv aus. Die Curven im ersten Falle, wie z. B. $(3 P_1 A P_3 3)$ oder $(\overline{1} P_1 \overline{1}, \overline{1} P_3 \overline{1})$, laufen folglich auf der einen Seite der Ordinatenaxe über und auf der anderen unter der Abscissenaxe $X A \overline{X}$ hin; die Curven im zweiten Falle, wie z. B. $(2 P_1 A P_4 2)$ oder $(\overline{2} P_1 \overline{2}, \overline{2} P_4 \overline{2})$, ziehen sich dagegen nur über der Abscissenaxe hin und nehmen folglich auch nur den ersten und vierten Quadranten ein. Jene entsprechen für $m = \pm \infty$ den Grenzlinien $Y_1 M A M_1 \overline{Y}_2$ und $X M Y_1$, $\overline{X} M_1 \overline{Y}_2$, diese hingegen den Grenzlinien $Y_1 M A M_1 Y_2$ und $X M Y_1$, $\overline{X} M Y_2$.

Ist in $y = x^{\pm\frac{1}{n}}$, n eine ganze ungerade Zahl, so hat y mit x einerlei Zeichen, und ist n eine ganze gerade Zahl, so giebt jedes positive x für y zwei Werthe einen positiven und einen gleich großen negativen, und es ist dagegen für jedes negative x, y imaginär oder unmöglich. Die Curven, wie z. B. ($^1/_3 P_1 A P_3 {}^1/_3$), welche dem ersten Falle entsprechen, befinden sich daher auch nur im ersten und dritten Quadranten, und die Curven für den zweiten Fall, z. B. ($^1/_2 P_1 A P_2 {}^1/_2$), nur im ersten und zweiten Quadranten; jene haben für $m = \infty$ die Grenzlinien $X_1 N A N_1 \overline{X}_2$ und $X_1 N Y$, $\overline{X}_2 N_1 \overline{Y}$, diese die Grenzlinien $X_1 N A N_1 X_2$ und $X_1 N Y$, $X_2 N_1 \overline{Y}$.

Da $y = x^{\pm\frac{1}{n}}$, $x = y^{\pm n}$ bedingt, so folgt, daß das letzte Curvensystem $\left(y = x^{\pm\frac{1}{n}}\right)$ von dem vorhergehenden $(y = x^{\pm m})$ nur in der Lage gegen das Axenkreuz abweicht, und daß durch Drehen und Wenden die Curven des einen Systems mit denen des anderen zum Zusammenfallen gebracht werden können.

Da $y = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ ist, so kann man den Lauf der entsprechenden Curve nach dem Vorstehenden im Allgemeinen stets angeben. Z. B. die Curve für

$$y = x^{2/3} = (x^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{x})^2$$

hat sowohl für positive als auch für negative x, positive Ordinaten. Dagegen die Curve für

$$y = x^{3/2} = (x^{1/2})^3 = (\sqrt{x})^3$$

hat nur für positive x, reelle Ordinaten, und zwar je zwei entgegengesetzte.

Ferner bei der Curve für

$$y = x^{3/5} = (\sqrt[5]{x})^3$$

hat y mit x stets einerlei Zeichen, da weder die fünfte Wurzel noch der Cubus das Zeichen der Grundzahl ändert.

Endlich sind die Curven, welche der Gleichung $y = -x^{\frac{m}{n}}$ entsprechen, nur durch die entgegengesetzte Lage gegen die Abscissenaxe $X\overline{X}$ von denen der Gleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ verschieden, und bilden die symmetrischen Hälften eines Ganzen.

Art. 10. Aus der wichtigen Formel $\partial(x^n) = n x^{n-1} \partial x$ folgt auch die Formel für den Tangentenwinkel der entsprechenden und in Fig. 18 (a. f. S.) abgebildeten Curven; es ist nämlich:

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1},$$

und daher die Subtangente dieser Curven

$$= y \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x^n}{n x^{n-1}} = \frac{x}{n}.$$

Hiernach hat man z. B. für die sogenannte Neil'sche Parabel, deren Gleichung $a y^2 = x^3$, oder $y = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$ ist:

$$tang.\, \alpha = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \left(x^{3/2}\right)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot {}^3/_2\, x^{1/2} = {}^3/_2 \sqrt{\frac{x}{a}},$$

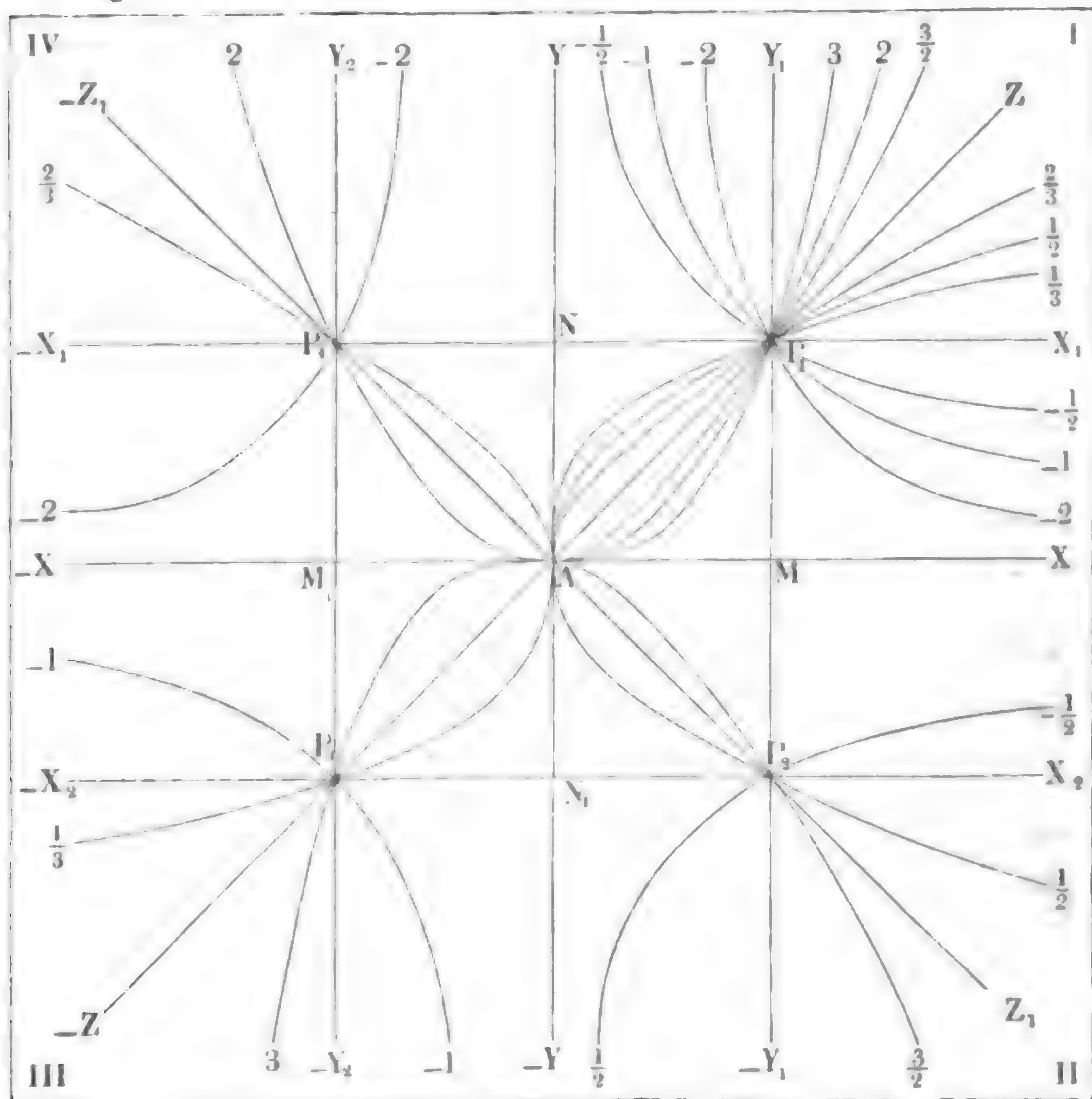
und die Subtangente $= {}^2/_3\, x$.

Ferner ist für die schon aus dem Obigen bekannte Curve $y = \frac{a^2}{x} = a^2 x^{-1}$,

$$tang.\, \alpha = a^2 \frac{\partial \left(x^{-1}\right)}{\partial x} = -\frac{a^2}{x^2} = -\left(\frac{a}{x}\right)^2,$$

und die Subtangente $= \frac{x}{-1} = -x$. (Vergl. Fig. 5.)

Fig. 18.



Folglich wird für $x = 0$, $tang.\,\alpha = -\infty$, also $\alpha = 90^0$,

ferner für $x = a$, $tang.\,\alpha = -1$, also $\alpha = 135^0$

und für $x = \infty$, $tang.\,\alpha = 0$, also $\alpha = 0^0$, u. s. w.

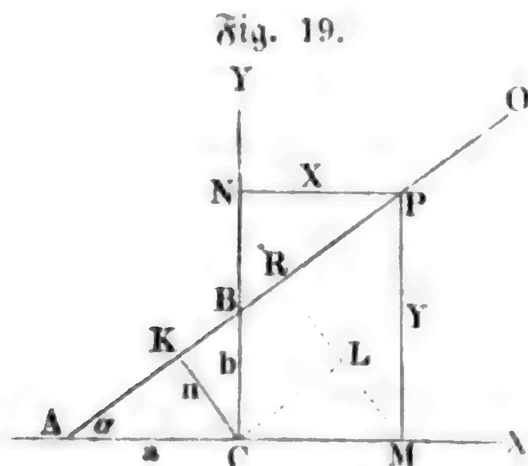
Art. 11. Wenn eine **gerade Linie** AO, Fig. 19, die Abscissenaxe unter dem Winkel $OAX = \alpha$ schneidet, und vom Coordinatenanfangspunkt C um $CK = n$ absteht, so ist die Gleichung zwischen den Coordinaten $CM = NP = x$ und $CN = MP = y$ eines Punktes P in derselben, da $n = MR - ML$, und $MR = y\,cos.\,\alpha$, sowie $ML = x\,sin.\,\alpha$ ist,

$$y\,cos.\,\alpha - x\,sin.\,\alpha = n.$$

Für $x = o$ nimmt y den Werth $CB = b = \frac{n}{cos.\,\alpha}$ an; daher ist auch $n = b\,cos.\,\alpha$, und $y\,cos.\,\alpha - x\,sin.\,\alpha = b\,cos.\,\alpha$, oder $y = b + x\,tang.\,\alpha$.

Gewöhnlich nennt man die Linien CA und CB, um welche die Durchschnittspunkte A und B der Geraden mit den Coordinatenaxen CX und CY von dem Anfangspunkte C abstehen, die **Parameter** der Geraden, und bezeichnet sie durch die Buchstaben a und b. Der Figur entsprechend ist $CA = -a$, daher:

Fig. 19.



$$tang.\,\alpha = \frac{CB}{CA} = -\frac{b}{a}$$

und folglich die Gleichung der Geraden: $y = b - \frac{b}{a}x$, oder:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ (s. Ingenieur Seite 164).}$$

Wenn sich eine Curve einer Geraden, welche um eine endliche Größe vom Coordinatenanfangspunkt absteht, bis ins Unendliche immer mehr und mehr nähert, ohne daß sie dieselbe je wirklich ganz erreicht, so heißt diese Gerade die **Asymptote der Curve**.

Die Asymptote läßt sich als Tangente oder Berührungslinie für einen unendlich entfernten Punkt der Curve ansehen. Ihr Neigungswinkel α gegen die Abscissenaxe ist daher bestimmt durch

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x},$$

und ihr Abstand n von dem Nullpunkt der Coordinaten, durch die Gleichung

$$n = y\,cos.\,\alpha - x\,sin.\,\alpha = (y - x\,tang.\,\alpha)\,cos.\,\alpha$$

$$= \frac{y - x\,tang.\,\alpha}{\sqrt{1 + (tang.\,\alpha)^2}} = \left(y - x\frac{\partial y}{\partial x}\right) : \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

sowie durch $n = (y\,cotg.\,\alpha - x)\,sin.\,\alpha = \frac{y\,cotg.\,\alpha - x}{\sqrt{1 + (cotg.\,\alpha)^2}}$

$$= \left(y\frac{\partial x}{\partial y} - x\right) : \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2},$$

wenn man darin x und $y = \infty$ setzt.

Damit eine Tangente für einen unendlich entfernten Berührungspunkt eine Asymptote sei, ist nöthig, daß für x oder $y = \infty$, $y - x\,tang.\,\alpha$ oder $y\,cotg.\,\alpha - x$ nicht unendlich groß ausfalle.

Für eine Curve von der Gleichung $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ist

$tang.\,\alpha = -\frac{m}{x^{m+1}}$ und $y - x\,tang.\,\alpha = x^{-m} + \frac{m}{x^m} = \frac{m+1}{x^m}$,

sowie $y\,cotg.\,\alpha - x = -\frac{x}{m} - x = -(m+1)\frac{x}{m}$, daher

1) für $x = \infty$, $y = 0$, $tang.\,\alpha = 0$, $y - x\,tang.\,\alpha = 0$ und $n = 0$, und

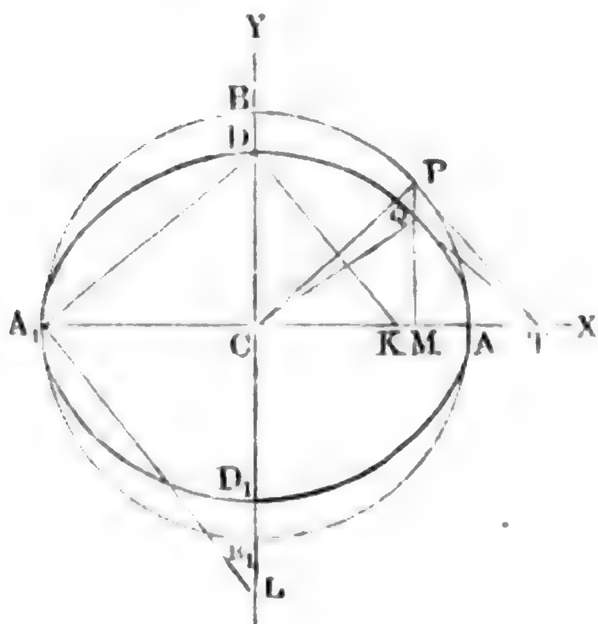
2) für $y = \infty$, $x = 0$, $tang.\,\alpha = \infty$, $y\,cotg. - x = 0$ und $n = 0$.

Den Bedingungen $\alpha = 0$ und $n = 0$ entspricht aber die Abscissenaxe $X\overline{X}$, und den Bedingungen $\alpha = \infty$ und $n = 0$ die Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$, daher sind diese Axen zugleich Asymptoten von den Curven, welche der Gleichung $y = x^{-m}$ entsprechen. (Vergl. die Curven $\overline{1}P_1\overline{1}$, $\overline{2}P_1\overline{2}$ und $\overline{^1/_2}P_1\overline{^1/_2}$ in Fig. 18, Seite 16.)

Art. 12. Die Gleichung einer **Ellipse** ADA_1D_1, Fig. 20, läßt sich aus der Gleichung:

$$x^2 + y_1^2 = a^2$$

Fig. 20.



des Kreises ABA_1B_1, dessen Halbmesser $CA = CB = CP = a$ und Coordinaten $CM = x$ und $MP = y_1$ sind, sogleich ableiten, wenn man in Betracht zieht, daß die Ordinate $MQ = y$ der Ellipse in demselben Verhältnisse zur Ordinate $MP = y_1$ des Kreises (bei gleicher Abscisse) steht, wie die kleine Halbaxe $CD = b$ der Ellipse zu dem der großen Halbaxe derselben gleichen Kreishalbmesser $CB = a$. Es ist also:

$\frac{y}{y_1} = \frac{b}{a}$, daher $y_1 = \frac{a}{b}y$ und $x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2$, d. i.:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, die Gleichung der Ellipse.

Setzt man in dieser Gleichung statt $+ b^2$, $- b^2$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der aus zwei Zweigen PAQ und $P_1 A_1 Q_1$, Fig. 21, bestehenden Hyperbel.

Wenn wir in der hieraus folgenden Formel:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

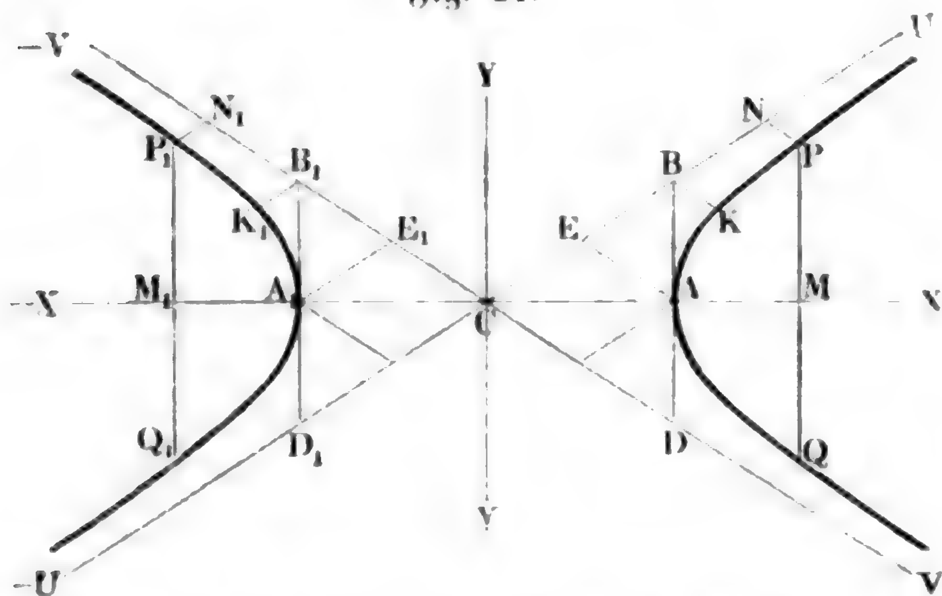
x unendlich groß nehmen, so verschwindet a^2 gegen x^2, und es ist:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \pm \frac{bx}{a} = \pm\, x \; tang.\, \alpha$$

die Gleichung von zwei durch den Coordinatenanfangspunkt C gehenden geraden Linien CU und CV. Da sich die Ordinaten:

$$\pm \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \sqrt{x^2} \text{ und } \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Fig. 21.



immer mehr und mehr der Gleichheit nähern, je größer x genommen wird, so folgt, daß die geraden Linien CU und CV Asymptoten der Hyperbel sind.

Nimmt man $CA = a$, sowie die Perpendikel $AB = + b$ und $AD = - b$, so bestimmt man dadurch die beiden Asymptoten; denn es ist für die Winkel $\pm \alpha$, unter welchen die Abscissenaxe von den Asymptoten geschnitten wird:

$$tang.\, ACB = \frac{AB}{CA}, \text{ d. i. } tang.\, \alpha = \frac{b}{a}, \text{ und ebenso:}$$

$$tang.\, ACD = \frac{AD}{CA}, \text{ d. i. } tang.\, (-\alpha) = -\frac{b}{a}.$$

Nimmt man die Asymptoten $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ als Coordinatenaxen an;

setzt man die Abscisse oder Coordinate CN in der einen Axenrichtung $= u$, und die Ordinate oder Coordinate NP in der anderen Axenrichtung $= v$, so hat man, da die Richtung von u um den Winkel α, und von v die um den Winkel $-\alpha$ von der Abscissenaxe CX abweicht, die Abscisse:

$$CM = x = CN \cos.\alpha + NP \cos.\alpha = (u + v)\cos.\alpha,$$

und die Ordinate:

$$MP = y = CN \sin.\alpha - NP \sin.\alpha = (u - v)\sin.\alpha;$$

bezeichnet man nun noch die Hypotenuse $CB = \sqrt{a^2 + b^2}$ durch e, so hat man:

$$\cos.\alpha = \frac{a}{e} \text{ und } \sin.\alpha = \frac{b}{e},$$

folglich:

$$\frac{\cos.\alpha}{a} = \frac{\sin.\alpha}{b} = \frac{1}{e} \text{ und}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(u^2 + 2uv + v^2)}{a^2}\cos.\alpha^2 - \frac{(u^2 - 2uv + v^2)}{b^2}\sin.\alpha^2$$

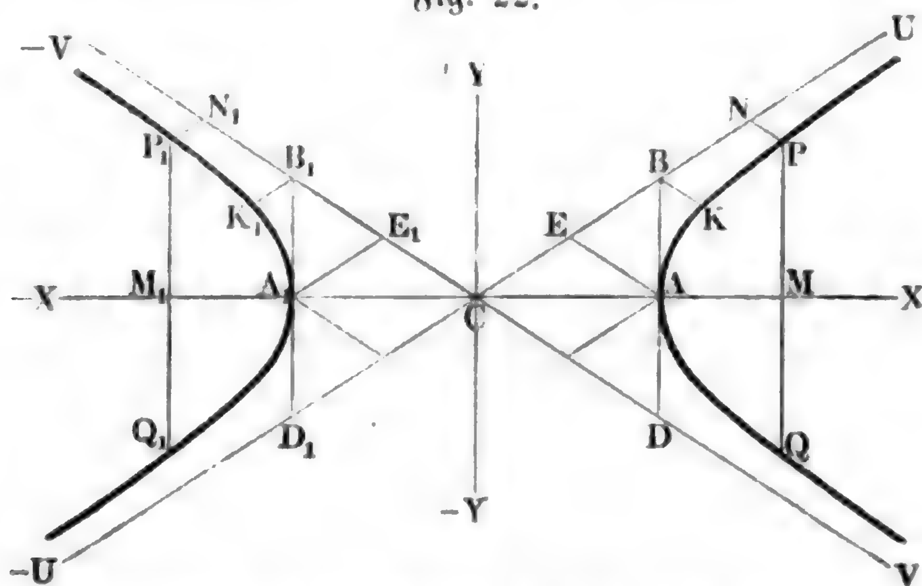
$$= \frac{u^2 + 2uv + v^2}{e^2} - \frac{u^2 - 2uv + v^2}{e^2} = \frac{4uv}{e^2} = 1,$$

woraus die sogenannte Asymptotengleichung der Hyperbel:

$$uv = \frac{e^2}{4}, \text{ oder } v = \frac{e^2}{4u}, \quad \text{hervorgeht.}$$

Hiernach ist die Hyperbel zwischen den gegebenen Asymptoten leicht zu zeichnen. Die Coordinaten für den Scheitel A sind $CE = EA = \frac{e}{2}$,

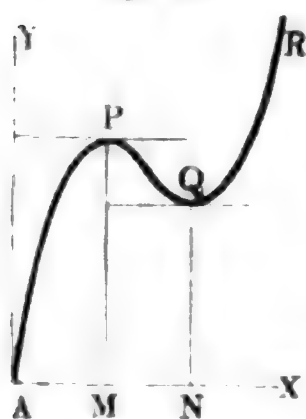
Fig. 22.



dagegen die Coordinaten für den Punkt K sind $CB = e$ und $BK = \frac{e}{4}$, ferner sind für die Abscissen $2e$, $3e$, $4e$ u. s. w. die Ordinaten $\frac{1}{2}\,\frac{e}{4}$, $\frac{1}{3}\,\frac{e}{4}$, $\frac{1}{4}\,\frac{e}{4}$ u. s. w.

Art. 13. Wenn man in dem Elementenverhältniß $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder in der Formel für die Tangente $tang.\,\alpha$ des Tangentenwinkels, für x nach und nach verschiedene Werthe setzt, so erhält man durch dieselbe die verschiedenen Lagen von der Berührungslinie der zugehörigen Curve. Nimmt man $x = 0$, so erhält man die Tangente des Tangentenwinkels im Coordinatenanfangspunkte, nimmt man dagegen $x = \infty$, so ergiebt sich dieselbe für einen unendlich entfernten Punkt der Curve. Am wichtigsten sind die Punkte, wo die Tangente einer Curve mit der einen oder der anderen Coordinatenaxe parallel läuft, weil hier in der Regel die eine oder die andere der Coordinaten x und y ihren größten oder kleinsten Werth hat, oder, wie man sagt, ein Maximum oder Minimum ist. Für den Parallelismus mit der Abscissenaxe hat man $\alpha = 0$, also auch $tang.\,\alpha = 0$, und für den mit der Ordinatenaxe $\alpha = 90^0$, also $tang.\,\alpha = \infty$; und hiernach folgt die Regel: Man findet diejenigen Werthe der Abscisse oder Urvariablen x, welchen die Maximal- oder Minimalwerthe der Ordinate oder Abhängigvariablen y entsprechen, wenn man das Differenzialverhältniß $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, und $= \infty$ setzt, und die erhaltenen Gleichungen in Hinsicht auf x auflöst.

Fig. 23



Z. B. für die Gleichung $x = 6x - {}^9/_2\, x^2 + x^3$, welche der Curve $APQR$ in Fig. 23 entspricht, ist:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6 - 9x + 3x^2 = 3\,(2 - 3x + x^2) = 3\,(1 - x)\,(2 - x),$$

und es erfolgt durch Nullsetzen von $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$1 - x = 0 \text{ und } 2 - x = 0,$$

d. i. $x = 1$ und $x = 2$.

Diese Werthe in die Formel: $y = 6x - {}^9/_2 x^2 + x^3$ gesetzt, ergiebt sich der Maximalwerth von y: $MP = 6 - {}^9/_2 + 1 = {}^5/_2$, und der Minimalwerth: $NQ = 12 - 18 + 8 = 2$.

Ferner für die Curve $KOPQR$, Fig. 24 (a. f. S.), deren Gleichung

$y = x + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ ist, hat man

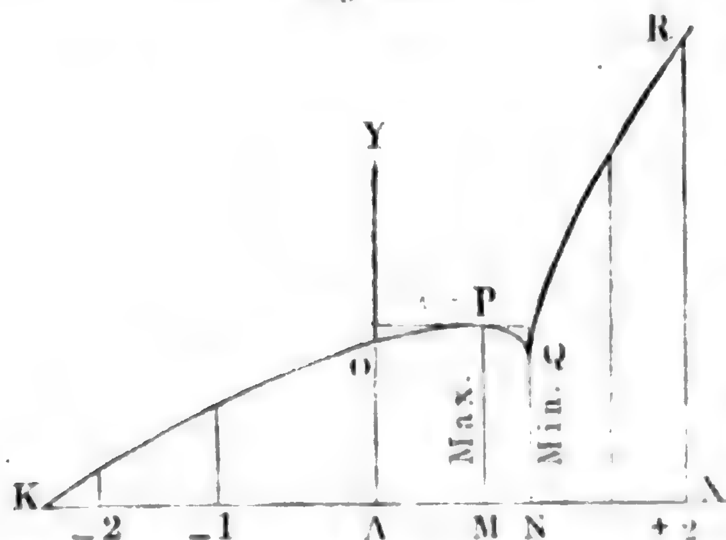
$$\frac{\partial y}{\partial x} = tang.\,\alpha = 1 + {}^2/_3\,(x - 1)^{-1/3} = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}};$$

und zwar $= 0$, für $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = -1$, d. i. für $AM = x = 1 - ({}^2/_3)^3 = {}^{19}/_{27} = 0{,}7037$, dagegen $= \infty$, für $AN = x = 1$. Dem ersteren Falle entspricht der Maximalwerth:

$$MP = y_m = 1 - (2/3)^3 + (2/3)^2 = 31/27 = 1{,}148,$$

und dem letzteren der Minimalwerth: $NQ = y_n = 1$.

Fig. 24.



Auch ist noch für $x = 0$, $AO = y = 1$, dagegen $y = 0$ für die Abscisse $AK = x$, welche der cubischen Gleichung $x^3 + x^2 - 2x + 1$ entspricht und den Werth $x = -2{,}148$ hat.

Art. 14. Sowie bei einer vom Anfangspunkte A aus aufsteigenden Curve y mit x wächst, und deshalb ∂y positiv ist, bei einer niedersteigenden hingegen y abnimmt, wenn x größer wird, und deßhalb ∂y negativ ausfällt, und endlich an der Stelle, wo die Curve mit der Coordinatenaxe AX parallel läuft, ∂y Null ist, ebenso sind die gleichen Abscissen-Elementen $\partial x = MN = NO = PS = QT \ldots$ entsprechenden Ordinaten-Elemente:

$$SQ = PS \; tang. \; QPS, \text{ d. i. } \partial y_1 = \partial x \,.\, tang.\, \alpha_1,$$

$$TR = QT \; tang. \; RQT, \text{ d. i. } \partial y_2 = \partial x \,.\, tang.\, \alpha_2 \text{ u. s. w.}$$

und also auch die Tangentenwinkel α_1, α_2 u. s. w. bei einer convexen Curve APR, Fig. 25, im Wachsen und bei einer concaven Curve

Fig. 25.

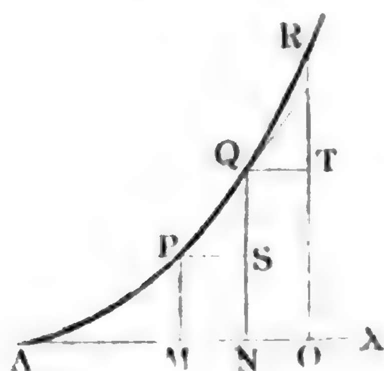


Fig. 26.

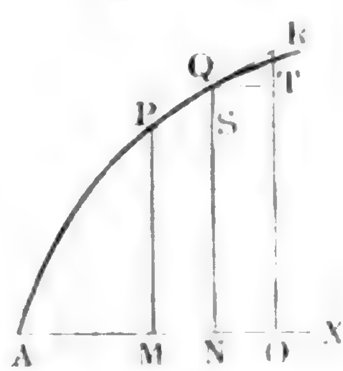
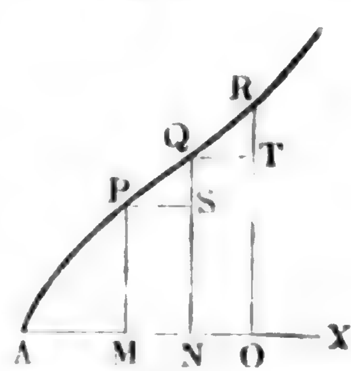


Fig. 27.



APR, Fig. 26, im Abnehmen begriffen; es ist folglich im ersten Falle:

$$\partial\,(tang.\,\alpha) = \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \text{ positiv}$$

und im zweiten $\partial\,(tang.\,\alpha) = \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ negativ, und man hat endlich auch für den Inflexions- oder Wendepunkt Q, Fig. 27, d. i. für die Stelle Q der Curve, wo Convexität in Concavität übergeht, oder das Umgekehrte stattfindet, auch $SQ = TR$, und daher:

$$\partial\,(tang.\,\alpha) = \partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \text{Null}.$$

Es gilt also die Regel: Ist das Differenzial der Tangente des Tangentenwinkels positiv, so besitzt die Curve Convexität, ist es negativ, so hat dieselbe Concavität, und ist es Null, so hat man es mit einem Wendepunkte der Curve zu thun.

Auch ist hiernach leicht Folgendes zu ermessen. Die Stelle, wo die Curve parallel mit der Abscissenaxe läuft, für welche also $tang.\,\alpha = 0$ ist, entspricht entweder einem Minimo, oder Maximo, oder Wendepunkte der Curve, je nachdem diese Curve convex, oder concav, oder keines von beiden, also

$\partial\,(tang.\,\alpha)$ positiv, oder negativ, oder Null ist.

Dagegen die Stelle, wo eine Curve mit der Ordinatenaxe parallel läuft, also $tang.\,\alpha = \infty$ ist, entspricht entweder einem Minimo, oder Maximo, oder Wendepunkte der Curve, je nachdem dieselbe concav oder convex oder theils concav, theils convex, also $d\,(tang.\,\alpha)$ vor und nach dieser Stelle negativ oder positiv ist, oder vor dieser Stelle ein anderes Zeichen hat als nach derselben.

Ein Curvenstück mit Wendepunkt Q der ersten Art führt Fig. 28, und ein solches mit einem Wendepunkt der zweiten Art Fig. 29 vor Augen. Man sieht, die entsprechende Ordinate NQ ist weder ein Maximum, noch ein Minimum; denn es sind in keinem Falle beide benachbarten Ordinaten MP und OR größer oder kleiner als NQ.

Fig. 28.

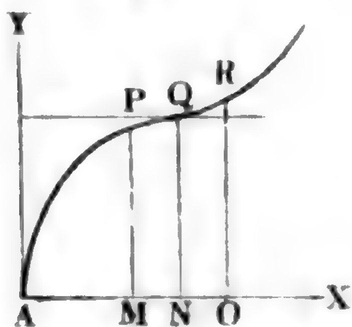


Fig. 29.

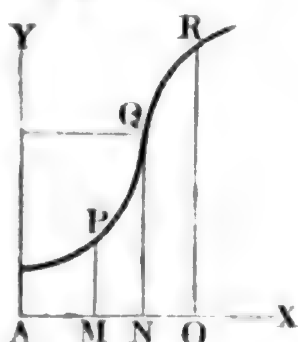


Fig. 30.

In der Geometrie, Physik, Mechanik u. s. w. ist die Ausmittelung von Maximal- und Minimal- oder sogenannten eminenten Werthen einer Function oft von großer Wichtigkeit. Da in der Folge vielfache Bestimmungen solcher Functionswerthe vorkommen werden, so möge hier nur noch folgende geometrische Aufgabe dieser Art zur Lösung gebracht werden.

Es sind die Dimensionen eines geraden Kreiscylinders AN, Fig. 30, anzugeben, welcher bei einem gegebenen Inhalte V die kleinste Oberfläche O hat. Bezeichnen wir den Durchmesser der Basis dieses Cylinders durch x, und die Höhe desselben durch y, so haben wir:

$$V = \frac{\pi}{4}\,x^2\,y \text{ und}$$

die Oberfläche oder den Inhalt der beiden Grundflächen plus den Inhalt des Mantels:

$$O = \frac{2\pi x^2}{4} + \pi x y,$$

oder da der ersten Gleichung zufolge,

$$\pi y = \frac{4V}{x^2}, \text{ also } \pi x y = 4 V x^{-1} \text{ gesetzt werden kann:}$$

$$O = \frac{\pi x^2}{2} + 4 V x^{-1},$$

und folglich, da wir O und x als Coordinaten einer Curve behandenl können:

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial O}{\partial x} = \pi x - 4 V x^{-2}.$$

Setzen wir nun diesen Quotienten Null, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$\pi x = \frac{4V}{x^2}, \text{ oder } \pi x^3 = 4V,$$

deren Auflösung auf:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \text{ und}$$

$$y = \frac{4V}{\pi x^2} = \sqrt[3]{\frac{64 V^3}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{16 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = x$$

führt.

Da noch $\partial\, (tang.\, \alpha) = \left(\pi + \frac{8V}{x^3}\right) \partial x$ positiv ist, so führt diese Bestimmung auf das gesuchte Minimum.

Diese Bestimmung findet auch ihre Anwendung, wenn es darauf ankommt, die Dimensionen eines cylindrischen Gefäßes zu finden, welches bei einem gegebenen Fassungsraume die kleinste Menge an Material erfordert. Sie entspricht diesem Falle unmittelbar, wenn das Gefäß außer seinem kreisförmigen Boden auch noch einen solchen Deckel erhalten soll; wenn aber der letztere nicht gefordert wird, so hat man:

$$O = \frac{\pi x^2}{4} + 4 V x^{-1}, \text{ folglich:}$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{4V}{x^2}, \text{ woraus nun:}$$

$$x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \text{ und } y = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = \tfrac{1}{2} x$$

folgt.

Während also im ersten Falle die Höhe gleich der Weite des Cylinders zu nehmen ist, hat man im zweiten Falle dieselbe nur der halben Cylinderweite gleich zu machen.

Art. 15. Durch successives Differenziiren einer Function $y = f(x)$, findet man eine ganze Reihe neuer Functionen der Urvariablen x, und zwar

$$f_1(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

$$f_2(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x}, \; f_3(x) = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

Z. B. für $y = f(x) = x^{5/3}$, folgt

$f_1(x) = {}^5/_3\, x^{2/3}$, $f_2(x) = {}^{10}/_9\, x^{-1/3}$, $f_3(x) = -\, {}^{10}/_{27}\, x^{-4/3}$ u. s. w.

Für eine Function, welche in einer nach Potenzen von x mit positiven ganzen Exponenten fortschreitenden convergenten Reihe

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots$$

dargestellt ist, erhält man

$$f_1(x) = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + \cdots$$
$$f_2(x) = 2 A_2 + 2 \,.\, 3 A_3 x + 3 \,.\, 4 \; A_4 x^2 + \cdots$$
$$f_3(x) = 2 \,.\, 3 A_3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 A_4 x^2 + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun in diesen Reihen x = Null, so erhält man dadurch lauter zur Bestimmung der constanten Coefficienten A_0, A_1, A_2 ... geeignete Ausdrücke, nämlich:

$f(0) = A_0$, $f_1(0) = 1 A_1$, $f_2(0) = 2 A_2$, $f_3(0) = 2 \,.\, 3 \,.\, A_3$ u. s. w.

und es folgen daher diese Coefficienten selbst:

$$A_0 = f(0),\; A_1 = f_1(0),\; A_2 = {}^1/_2 f_2(0),\; A_3 = \frac{1}{2 \,.\, 3} f_3(0),$$

$$A_4 = \frac{1}{2.3.4} f_4(0) \text{ u. s. w.}$$

Es ist hiernach eine Function in folgende, nach Mac Laurin benannte Reihe:

$$f(x) = f(0) + f_1(0) \cdot \frac{x}{1} + f_2(0) \cdot \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + f_3(0) \cdot \frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+ f_4(0) \cdot \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots \text{ zu verwandeln.}$$

Für die Binomialfunction $y = f(x) = (1 + x)^n$ ist

$$f_1(x) = n\, (1 + x)^{n-1},\; f_2(x) = n\, (n - 1)\, (1 + x)^{n-2},$$
$$f_3(x) = n\, (n - 1)\, (n - 2)\, (1 + x)^{n-3} \text{ u. s. w.,}$$

wenn man daher x = Null setzt, so erhält man:

$$f(0) = 1,\; f_1(0) = n,\; f_2(0) = n\, (n - 1)$$
$$f_3(0) = n\, (n - 1)\, (n - 2) \text{ u. s. w.}$$

und es folgt die binomische Reihe:

$$\text{I.)}\quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}\,x + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,x^2$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Auch ergiebt sich:

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}\,x + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,x^2 - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \cdots,$$

sowie:

$$(1+x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}\,x + \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\,x^2 - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,x^3 + \cdots$$

Ferner $1 + x = (1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z}$ gesetzt, folgt $z = \frac{x}{1+x}$ und

$$(1+x)^n = (1-z)^{-n} = 1 + nz + \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\,z^2$$
$$+ \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,z^3 + \cdots, \text{ d. i.}$$

$$\text{II.)}\quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2$$
$$+ \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

Die Reihe unter I. ist eine endliche für ganze positive, und die unter II. für ganze negative Werthe von n. Z. B.

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^4, \text{ und}$$

$$(1+x)^{-5} = 1 - 5\left(\frac{x}{1+x}\right) + 10\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{1+x}\right)^3$$
$$+ 5\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^5.$$

Da $a + x = a\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ ist, so folgt auch

$$(a+x)^n = a^n\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = a^n\left[1 + \frac{n}{1}\left(\frac{x}{a}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots\right], \text{ d. i.}$$

$$\text{III.)}\quad (a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}\,a^{n-1}\,x + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a^{n-2}\,x^2$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,a^{n-3}\,x^3 + \cdots$$

z. B. $$\sqrt[3]{1009^2} = (1000 + 9)^{2/3} = 100\,(1 + 0{,}009)^{2/3}$$
$$= 100\left(1 + {}^2/_3 \, . \, 0{,}009 + \frac{{}^2/_3\,({}^2/_3 - 1)}{2}\cdot(0{,}009)^2 + \cdots\right)$$
$$= 100\,(1 + 0{,}006 - 0{,}000009) = 100{,}5991.$$

Auch ist:
$$(x+1)^n = x^n + n\,x^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,x^{n-2} + \cdots;$$
daher für sehr große Werthe von x annähernd:
$$(x+1)^n = x^n + n\,x^{n-1}.$$
Hiernach folgt $x^{n-1} = \frac{(x+1)^n - x^n}{n}$, ferner:
$$(x-1)^{n-1} = \frac{x^n - (x-1)^n}{n},$$
$$(x-2)^{n-1} = \frac{(x-1)^n - (x-2)^n}{n},$$
$$(x-3)^{n-1} = \frac{(x-2)^n - (x-3)^n}{n},$$
$$\vdots \qquad = \qquad \vdots$$
und zuletzt:
$$1^{n-1} = \frac{2^n - 1^n}{n}.$$

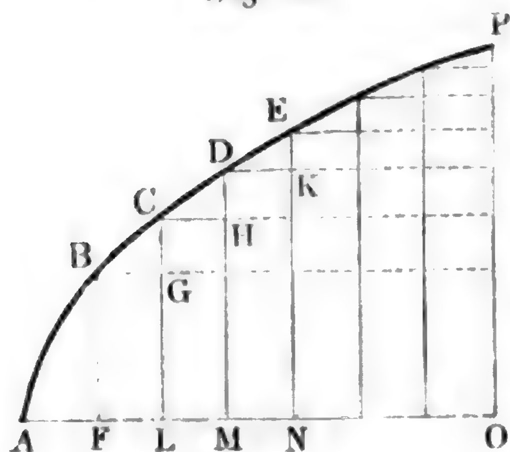
Durch Addition zu beiden Seiten der Gleichheitszeichen folgt nun:
$$x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1} + \cdots + 1$$
$$= \frac{(x+1)^n - 1^n}{n},$$
oder $n - 1 = m$, also $n = m + 1$ gesetzt und die Reihe in umgekehrter Ordnung geschrieben:
$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (x-1)^m + x^m = \frac{(x+1)^{m+1} - 1}{m+1}.$$

Noch kann man, da x sehr groß, eigentlich unendlich groß sein soll, $(x+1)^{m+1} = x^{m+1}$ setzen, weshalb die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlenreihe folgt:

IV.) $$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$ z. B.
$$\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{4^2} + \cdots + \sqrt[3]{1000^2} \text{ annähernd}$$
$$= \frac{1000^{5/3}}{5/3} = {}^3/_5\,\sqrt[3]{1000^5} = 60000.$$

Art. 16. Die der Absciffe $AO = x$, Fig. 31, entsprechende Ordinate $OP = y$ läßt sich aus unendlich vielen ungleichen Elementen ∂y wie FB, GC, HD, KE . . . zusammensetzen, die lauter gleichen Elementen $\partial x = AF = FL = LM = MN$ . . . der Absciffe entsprechen. Wäre daher $\partial y = \varphi(x) . \partial x$ gegeben, so würde man y durch Summation aller derjenigen Werthe von ∂y finden, die sich herausstellen, wenn man in $\varphi(x) . \partial x$ statt x nach und nach ∂x, $2\partial x$, $3\partial x$, $4\partial x$ . . . bis $n\partial x = x$ einsetzt. Diese Summation deutet man durch das sogenannte Integralzeichen $\int$ an, welches man vor den allgemeinen Ausdruck für die zu summirenden Elemente setzt, schreibt also statt:

Fig. 31.



$$y = [\varphi(\partial x) + \varphi(2\partial x) + \varphi(3\partial x) + \cdots + \varphi(x)]\,\partial x,$$

$$y = \int \varphi(x)\,\partial x.$$

Auch nennt man in diesem Falle y das Integral von $\varphi(x)\partial x$, sowie $\varphi(x)\,\partial x$ das Differenzial von y.

Zuweilen kann man das Integral $\int \varphi(x)\partial x$ durch wirkliches Summiren der Reihe $\varphi(\partial x)$, $\varphi(2\partial x)$, $\varphi(3\partial x)$ u. s. w. bestimmen; viel einfacher ist es jedoch, bei Ausmittelung eines Integrals eine der im Folgenden entwickelten Regeln der sogenannten Integralrechnung in Anwendung zu bringen.

Ist n die Anzahl der Elemente ∂x von x, also $x = n\partial x$, oder $\partial x = \frac{x}{n}$, so kann man setzen:

$$\int \varphi(x)\,\partial x = \left[\varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{3x}{n}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{nx}{n}\right)\right]\frac{x}{n}.$$

Für das Differenzial $\partial y = ax\partial x$ hat man z. B. das Integral:

$$y = \int ax\partial x = a\partial x\,(\partial x + 2\partial x + 3\partial x + \cdots + n\partial x)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\,a\,\partial x^2,$$

oder, da nach Art. 15, IV, für $n = \infty$, die Summe der natürlichen Zahlenreihe $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n^2$ und $\partial x^2 = \frac{x^2}{n^2}$ ist,

$$y = \int ax\partial x = \tfrac{1}{2}\,n^2\,a\,\frac{x^2}{n^2} = \tfrac{1}{2}\,a\,x^2.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$y = \int \varphi(x)\,\partial x = \int \frac{x^2\partial x}{a} = [(\partial x)^2 + (2\partial x)^2 + (3\partial x)^2 + \cdots + (n\partial x)^2]\frac{\partial x}{a}$$
$$= (1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\,\frac{\partial x^3}{a},$$

wenn $x = n\partial x$ gesetzt, oder aus n Elementen ∂x bestehend angenommen wird. Nun ist aber nach §. 15, IV, für $n = \infty$,

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3}, \text{ daher folgt:}$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{a} = \frac{n^3}{3} \cdot \frac{\partial x^3}{a} = \frac{(n \partial x)^3}{3a} = \frac{x^3}{3a}.$$

Art. 17. Aus der Formel $\partial[a + mf(x)] = m\partial f(x)$ ergiebt sich durch Umkehrung $\int m \partial f(x) = a + mf(x) = a + m\int \partial f(x)$,

oder $\partial f(x) = \varphi(x) \,.\, \partial x$ gesetzt,

$$\text{I.)} \quad \int m\,\varphi(x)\,\partial x = a + m\int \varphi(x)\partial x,$$

und hieraus folgt, daß der constante Factor m beim Integriren sowie beim Differenziiren unverändert bleibt, und daß durch bloßes Integriren ein etwa vorhandenes constantes Glied a nicht bestimmt werden kann; daß also das Integriren allein ein noch unbestimmtes Integral liefert.

Um das constante Glied zu finden, müssen zwei zusammengehörige Werthe von x und $y = \int \varphi(x)\partial x$ bekannt sein. Ist für $x = c$, $y = k$, und hat man $y = \int \varphi(x)\partial x = a + f(x)$ gefunden, so muß auch:

$$k = a + f(c)$$

sein, und es giebt daher die Subtraction: $y - k = f(x) - f(c)$, also in diesem Falle:

$$y = \int \varphi(x)\partial x = k + f(x) - f(c) = f(x) + k - f(c);$$

und man hat hiernach die Constante $a = k - f(c)$.

Wenn man z. B. weiß, daß das unbestimmte Integral:

$$y = \int x\partial x = \frac{x^2}{2} \text{ für } x = 1,\ y = 3 \text{ giebt,}$$

so hat man die nöthige Constante $a = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, und daher das Integral:

$$y = \int x\partial x = a + \frac{x^2}{2} = \frac{5 + x^2}{2}.$$

Selbst die Constantenbestimmung läßt das Integral noch unbestimmt, weil noch für x als Urvariable, jeder beliebige Werth angenommen werden kann; will man aber einen ganz bestimmten Werth k_1 des Integrals haben, der einem bestimmten Werth c_1 von x entspricht, so muß man noch diesen in das gefundene Integral ein-, also $k_1 = k + f(c_1) - f(c)$ setzen.

So giebt z. B. $y = \int x\partial x = \frac{5 + x^2}{2}$, für $x = 5$, $y = 15$.

Meist ist derjenige Werth von x bekannt, bei welchem $y = 0$ ausfällt; in diesem Falle hat man also $k = 0$, und es führt daher das unbestimmte

Integral $\int\varphi(x)\partial x = f(x)$ auf das bestimmte $k_1 = f(c_1) - (c)$, das also gefunden wird, wenn man in den Ausdruck $f(x)$ für das unbestimmte Integral die beiden gegebenen Grenzwerthe c_1 und c von x einsetzt, und die erhaltenen Werthe von einander subtrahirt. Um dies anzudeuten, schreibt man statt $\int\varphi(x)\partial x$, $\int_c^{c_1}\varphi(x)\partial x$, wenn also z. B. $\int\varphi(x)\partial x = \frac{x^2}{2}$ ist, $\int_c^{c_1}\varphi(x)\partial x = \frac{c_1^2 - c^2}{2}$.

Die Umkehrung der Differenzialformel $\partial[f(x) + \varphi(x)] = \partial f(x) + \partial\varphi(x)$ giebt die Integralformel: $\int[\partial f(x) + \partial\varphi(x)] = f(x) + \varphi(x)$, oder wenn man $\partial f(x) = \psi(x)\partial x$ und $\partial\varphi(x) = \chi(x)\partial x$ setzt:

$$\text{II.)}\quad \int[\psi(x)\partial x + \chi(x)\partial x] = \int\psi(x)\partial x + \int\chi(x)\partial x.$$

Es ist also hiernach das Integral von einer Summe mehrerer Differenzialien gleich der Summe von den Integralen der einzelnen Differenzialien.

Z. B. $\int(3 + 5x)\partial x = \int 3\partial x + \int 5x\partial x = 3x + {}^5/_2 x^2$.

Art. 18. Die wichtigste Differenzialformel IV des Artikels 8:

$$\partial(x^n) = nx^{n-1}\partial x,$$

führt durch Umkehrung auf die ebenfalls sehr wichtige Integralformel. Es ist hiernach $\int nx^{n-1}\partial x = x^n$, oder $n\int x^{n-1}\partial x = x^n$, daher

$$\int x^{n-1}\partial x = \frac{x^n}{n};$$

setzt man also $n - 1 = m$, und hiernach $n = m + 1$, so erhält man folgendes wichtige Integral:

$$\int x^m\partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

welches in Anwendung mindestens ebenso oft vorkommt, als alle übrigen zusammen.

Die Form dieses Integrales weist auch darauf hin, daß es dem in Art. 9 abgehandelten und in Fig. 17 abgebildeten Curvensysteme entspricht.

Hiernach ist z. B. $\int 5x^3\partial x = 5\int x^3\partial x = {}^5/_4 x^4$; ferner:

$$\int\sqrt[3]{x^4}\,\partial x = \int x^{4/3}\partial x = {}^3/_7\, x^{7/3} = {}^3/_7\sqrt[3]{x^7};$$

$$\int\frac{\partial x}{2\sqrt{x}} = {}^1/_2\int x^{-1/2}\partial x = {}^1/_2\,\frac{x^{1/2}}{{}^1/_2} = \sqrt{x};$$

$$\int(4 - 6x^2 + 5x^4)\partial x = \int 4\partial x - \int 6x^2\partial x + \int 5x^4\partial x$$
$$= 4\int\partial x - 6\int x^2\partial x + 5\int x^4\partial x = 4x - 2x^3 + x^5;$$

ferner, wenn man $3x - 2 = u$, also $3\partial x = \partial u$, oder $\partial x = \frac{\partial u}{3}$ einsetzt:

$$\int \sqrt{3x-2}\,.\,\partial x = \int u^{1/2}\frac{\partial u}{3} = {}^1/_3\,\frac{u^{3/2}}{{}^3/_2} = {}^2/_9\,\sqrt{u^3}$$
$$= {}^2/_9\,\sqrt{(3x-2)^3};$$

endlich, wenn $2x^2 - 1 = u$, also $4x\partial x = \partial u$, d. i. $x\partial x = \frac{\partial u}{4}$ gesetzt wird:

$$\int \frac{5x\partial x}{\sqrt[3]{2x^2-1}} = \int \frac{5\partial u}{4\sqrt[3]{u}} = \frac{5}{4}\int u^{-1/3}\partial u = \frac{5}{4}\,\frac{u^{2/3}}{{}^2/_3}$$
$$= \frac{15}{8}\sqrt[3]{u^2} = \frac{15}{8}\sqrt[3]{(2x^2-1)^2}.$$

Durch Hinzufügung der Grenzwerthe lassen sich die unbestimmten Integrale sogleich in bestimmte verwandeln, z. B.:

$$\int_1^2 5x^3\partial x = {}^5/_4(2^4 - 1^4) = {}^5/_4\,.\,(16-1) = 18^3/_4.$$

$$\int_4^9 \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$$

$$\int_1^{16}\sqrt{3x-2}\,.\,\partial x = {}^2/_9(\sqrt{16^3} - \sqrt{1^3}) = {}^2/_9(64-1) = 14.$$

Wäre z. B. $\int(4 - 6x^2 + 5x^4)\partial x = 7$ für $x = 0$, so hätte man allgemein: $\int(4 - 6x^2 + 5x^4)\partial x = 7 + 4x - 2x^3 + x^5$.

Art. 19. Die sogenannte Exponentialfunction $y = a^x$, welche in einer Potenz mit variablen Exponenten besteht, läßt sich mittels Mac Laurin's Theorem wie folgt in eine Reihe verwandeln, wobei auch zugleich das Differenzial derselben mit gefunden wird.

Setzt man $a^x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots$, oder, da für $x = 0$, a^x den Werth $a^0 = 1$ annimmt, also $A_0 = 1$ ausfällt,

$a^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots$, so hat man auch:

$a^{\partial x} = 1 + A_1\partial x + A_2\partial x^2 + A_3\partial x^3 + \cdots$, und daher

$$\partial(a^x) = a^{x+\partial x} - a^x = a^x a^{\partial x} - a^x = a^x(a^{\partial x} - 1)$$
$$= a^x(A_1\partial x + A_2\partial x^2 + A_3\partial x^3 + \cdots)$$
$$= a^x(A_1 + A_2\partial x + \cdots)\partial x = A_1 a^x\partial x.$$

Nun folgt durch successives Differenziiren der Reihe

$$f(x) = a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

$$f_1(x) = \frac{\partial (a^x)}{\partial x} = A_1 a^x = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \cdots,$$

$$f_2(x) = \frac{\partial (A_1 a^x)}{\partial x} = A_1^2 a^x = 2 A_2 + 2 \,.\, 3 \,.\, A_3 x + \cdots,$$

$$f_3(x) = \frac{\partial (A_1^2 a^x)}{\partial x} = A_1^3 a^x = 2 \,.\, 3 \,.\, A_3 + \cdots,$$

setzt man daher $x = 0$, so folgt:

$$A_1 = A_1,\ 2 A_2 = A_1^2,\ 2 \,.\, 3 \,.\, A_3 = A_1^3 + \cdots,$$

daher

$$A_2 = \frac{1}{1 \,.\, 2} A_1^2,\ A_3 = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} A_1^3,\ A_4 = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} A_1^4 \text{ u. s. w.},$$

und es nimmt die Exponentialreihe die Form

$$\text{I.)} \quad a^x = 1 + A_1 \frac{x}{1} + A_1^2 \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + A_1^3 \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + A_1^4 \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \cdots \text{ an.}$$

Der constante Coefficient A_1 ist natürlich eine bestimmte Function der constanten Grundzahl, sowie letztere eine Function des ersteren; giebt man daher die eine von beiden Zahlen, so ist dadurch die andere auch bestimmt. Die einfachste oder sogenannte natürliche Potenzenreihe erhält man für $A_1 = 1$, deren Grundzahl (a) in der Folge mit e bezeichnet wird. Es ist also:

$$\text{II.)} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \cdots$$

und setzt man $x = 1$, so ergiebt sich die Grundzahl der natürlichen Potenzenreihe:

$$e^1 = e = 1 + 1 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_6 + {}^1\!/_{24} + \cdots = 2{,}7182828 \ldots$$

Setzt man $e = a^m$, oder $a = e^{1/m}$, so ist $1/m = Log.\ nat.\ a$, der sogenannte natürliche oder hyperbolische Logarithme von a, und

$$\text{III.)} \quad a^x = (e^{1/m})^x = e^{\frac{x}{m}} = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1 \,.\, 2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \cdots$$

Da diese Reihe der Form nach mit der unter I. übereinstimmt, so ist auch $A_1 = \frac{1}{m}$, und

IV.) $\partial (a^x) = A_1 a^x \partial x = \frac{a^x \partial x}{m} = Log. nat. a \, . \, a^x \partial x$, sowie

V.) $\partial (e^x) = e^x \partial x$.

Z. B. $\partial (e^{3x+1}) = e^{3x+1} \partial (3x + 1) = 3 e^{3x+1} \partial x$.

Setzt man $y = a^x = e^{\frac{x}{m}}$, so hat man umgekehrt:

$$x = Log._a\, y \text{ und } \frac{x}{m} = Log. nat. y, \text{ daher}$$

$$Log._a\, y = m\, Log. nat. y, \text{ sowie umgekehrt}$$

$$Log. nat. y \text{ oder } Log._e\, y = \frac{1}{m} Log._a\, y.$$

Die Zahl m heißt der Modul des der Grundzahl a entsprechenden Logarithmensystemes. Es läßt sich also mit Hülfe desselben der natürliche Logarithme in jeden künstlichen, und umgekehrt, ein solcher in den natürlichen verwandeln. Für das Brigg'sche Logarithmensystem ist die Basis $a = 10$, daher $\frac{1}{m} = Log. nat. 10 = 2{,}30258 \ldots$, und umgekehrt, der Modul

$$m = \frac{1}{Log. nat. 10} = 0{,}43429 \ldots$$

Es ist also:

$$Log. y = 0{,}43429 \; Log. nat. y, \text{ und}$$

$$Log. nat. y = 2{,}30258 \; Log. y.$$

(Vergl. Ingenieur, S. 81 u. s. w.)

Art. 20. Der Lauf der Curven, welche den Exponentialfunctionen $y = e^x$ und $y = 10^x$ entsprechen, wird durch Fig. 32 (a. f. S.) veranschaulicht. Für $x = 0$ ist in beiden Fällen $y = e^0 = a^0 = 1$; deshalb gehen denn auch beide Curven OQS und OQ_1S_1 durch denselben Punkt (O) in der Ordinatenaxe AY. Für $x = 1$, ist:

$$y = e^x = 2{,}718 \ldots, \text{ und}$$

$$y = 10^x = 10,$$

für $x = 2$, giebt:

$$y = e^x = 2{,}718^2 = 7{,}389 \text{ und}$$

$$y = 10^x = 10^2 = 100 \text{ u. s. w.};$$

es steigen also auf der positiven Seite der Abscissenaxe beide Curven, zumal aber die letztere, sehr stark an; dagegen ist für $x = -1$:

$$e^x = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718 \ldots} = 0{,}368 \ldots, \text{ und}$$

$$10^x = 10^{-1} = 0{,}1;$$

ferner für $x = -2$:

$$e^x = e^{-2} = \frac{1}{2{,}718^2} = 0{,}135 \text{ und } 10^x = 10^{-2} = 0{,}01;$$

endlich für $x = -\infty$ geben beide Gleichungen:

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0.$$

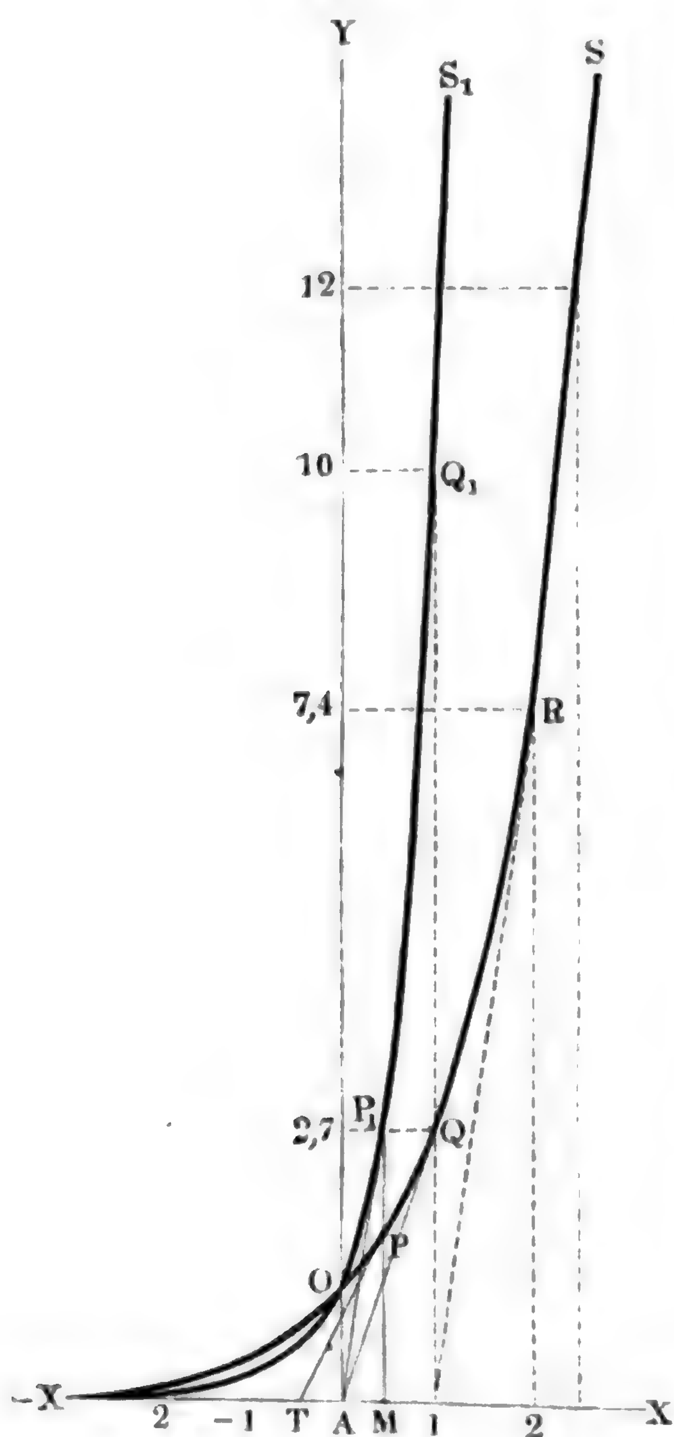


Fig. 32.

Es nähern sich also beide Curven auf der negativen Seite der Abscissenaxe dieser Axe immer mehr und mehr, und zwar die letztere stärker als die erstere; jedoch findet ein wirkliches Zusammentreffen mit dieser Axe nie statt.

Da aus

$y = e^x$, $x = Log. nat. y$

und ebenso aus

$y = a^x$, $x = Log._a y$

folgt, so geben diese Curven auch eine Scala der natürlichen und Brigg'schen Logarithmen ab; es sind nämlich die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten; so ist z. B.

$$AM = Log. nat. MP$$
$$= Log._a MP_1$$

u. s. w.

Nach der Differenzialformel IV. des letzten Artikels ist der Tangentenwinkel α der Exponentialcurve durch die einfache Formel:

$$tang. \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^x \partial x}{m \partial x}$$

$$= \frac{a^x}{m} = \frac{y}{m} = y \, Log. nat. a$$

bestimmt.

Bei der Curve $O P_1 Q_1 S_1$, Fig. 32, ist folglich die Subtangente $= y \, cotg. \alpha = m$, also constant, und bei der Curve $OPQS$ ist sie stets $= 1$, z. B. für den Punkt Q, $\overline{A1} = 1$, für den Punkt R, $\overline{12} = 1$ u. s. w.

Art. 21. Ist $x = a^y$, so hat man auch

$$\partial x = \partial(a^y) = \frac{a^y \partial y}{m},$$

und umgekehrt,

$$\partial y = \frac{m\,\partial x}{a^y} = \frac{m\,\partial x}{x}.$$

Nun ist aber auch $y = Log._a x$, d. i. der Logarithme der variablen Potenz x bei der constanten Grundzahl a, daher hat man auch folgende Differenzialformeln der logarithmischen Functionen

$$y = Log._a x \text{ und } y = Log.\,nat.\,x:$$

$$\text{I.)}\quad \partial\,(Log._a x) = \frac{m\,\partial x}{x} = \frac{1}{Log.\,nat.\,a}\cdot\frac{\partial x}{x}, \text{ sowie}$$

$$\text{II.)}\quad \partial\,(Log.\,nat.\,x) = \frac{\partial x}{x}.$$

Ist α der Tangentenwinkel der Curve, welche der Gleichung $y = Log._a x$ entspricht, so hat man $tang.\,\alpha = \frac{m}{x}$, und die Subtangente

$$= y\,cotg.\,\alpha = \frac{x\,y}{m},$$

also proportional dem Inhalte $x\,y$ eines aus den Seiten x und y zu construirenden Rechteckes.

Mittels der gefundenen Differenzialformeln I. und II. erhält man:

$$1)\ \partial\,(Log.\,nat.\,\sqrt[2]{x}) = \frac{\partial\sqrt[2]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\partial\,(x^{1/2})}{x^{1/2}} = {}^1/_2\,\frac{x^{-1/2}\,\partial x}{x^{1/2}} = \frac{\partial x}{2\,x},$$

$$\text{oder auch} = \partial\,({}^1/_2\,Log.\,nat.\,x) = {}^1/_2\,\partial\,(Log.\,nat.\,x) = {}^1/_2\cdot\frac{\partial x}{x}.$$

$$2)\ \partial\,Log.\,nat.\left(\frac{2+x}{x^2}\right) = \partial\,[Log.\,(2+x) - Log.\,x^2]$$

$$= \partial\,Log.\,(2+x) - \partial\,Log.\,(x^2)$$

$$= \frac{\partial x}{2+x} - 2\,\frac{\partial x}{x} = -\frac{(4+x)\,\partial x}{x\,(2+x)}.$$

$$3)\ \partial\left(Log.\,nat.\,\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \partial\,[Log.\,nat.\,(e^x-1)] - \partial\,[Log.\,nat.\,(e^x+1)]$$

$$= \frac{\partial\,(e^x)}{e^x-1} - \frac{\partial\,(e^x)}{e^x+1} = \frac{e^x\,d\,x}{e^x-1} - \frac{e^x\,\partial x}{e^x+1} = \frac{2\,e^x\,d\,x}{e^{2x}-1}.$$

Art. 22. Wenn man die Differenzialformeln des vorigen Artikels umkehrt, so stößt man, wie folgt, auf andere wichtige Integralformeln.

Aus $\partial\,(a^x) = \frac{a^x\,\partial x}{m}$, folgt $\int\frac{a^x\,\partial x}{m} = a^x$, d. i.:

I.) $\int a^x\,\partial x = m\,a^x = a^x : Log.\,nat.\,a$, und daher:

II.) $\int e^x\,\partial x = e^x$.

Ferner aus $\partial(Log._a x) = \frac{m\,d\,x}{x}$, folgt $\int \frac{m\,\partial x}{x} = Log._a x$, d. i.:

III.) $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{m} Log._a x = Log.\,nat.\,x$, und dasselbe giebt auch die Formel $\partial(Log.\,nat.\,x) = \frac{\partial x}{x}$.

Hiernach lassen sich leicht folgende Beispiele berechnen:

$$\int e^{5x-1}\partial x = {}^1/_5 \int e^{5x-1}\partial(5x-1) = {}^1/_5\, e^{5x-1}.$$

$$\int \frac{3\,\partial x}{7x+2} = {}^3/_7 \int \frac{\partial(7x+2)}{7x+2} = {}^3/_7\, Log.\,nat.\,(7x+2).$$

$$\int \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)\partial x = \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)\partial x$$

$$= \int x\,\partial x + \int \partial x + 2\int \frac{\partial(x-1)}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\,Log.\,nat.\,(x-1).$$

Art. 23. Die erste Integralformel $\int x^m\,\partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ läßt das letzte Integral unbestimmt; denn $m = -1$ gesetzt, folgt:

$\int \frac{\partial x}{x} = \int x^{-1}\,\partial x = \frac{x^0}{0} +$ eine Constante $= \infty +$ Constante; setzen wir aber $x = 1 + u$, und $d\,x = d\,u$, so erhalten wir:

$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots)\,d\,u$, und daher

$$\int \frac{\partial x}{x} = \int \frac{\partial u}{1+u} = \int (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots)\,d\,u$$

$$= \int \partial u - \int u\,\partial u + \int u^2\,\partial u - \int u^3\,\partial u + \cdots$$

$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots;$$

es läßt sich also auch $Log.\,nat.\,(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$, oder

IV.) $Log.\,nat.\,x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$

setzen.

Mit Hülfe dieser Reihe lassen sich die Logarithmen solcher Zahlen berechnen, welche wenig von 1 abweichen; hat man aber von größeren Zahlen die Logarithmen zu finden, so schlage man folgenden Weg ein.

Nimmt man u negativ, so giebt die vorletzte Reihe:

$$Log.\,nat.\,(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \cdots;$$

und es folgt nun durch die Subtraction beider Reihen von einander:

$$Log.nat.(1+u) - Log.nat.(1-u) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots\right), \text{ d. i.}$$

$$Log.\ nat.\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots\right), \text{ oder}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = x, \text{ also } u = \frac{x-1}{x+1} \text{ gesetzt,}$$

V.) $$Log.nat.\ x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + {}^1/_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + {}^1/_5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right].$$

Diese Reihe ist auch zur Bestimmung der Logarithmen von solchen Zahlen zu gebrauchen, welche bedeutend von 1 abweichen, da $\frac{x-1}{x+1}$ stets unter 1 ausfällt.

Es ist auch $Log.(x+y) - Log.x = Log.\left(\frac{x+y}{x}\right) = Log.\left(1+\frac{y}{x}\right)$

$$= \frac{y}{x} - {}^1/_2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + {}^1/_3\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \text{rc.}$$

$$= 2\left[\frac{y}{2x+y} + {}^1/_3\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + {}^1/_5\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$

und daher:

VI.) $$Log.(x+y) = Log.x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + {}^1/_3\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \cdots\right].$$

Diese Formel ist anzuwenden, um aus einem Logarithmen einen nächst größeren zu berechnen.

3. B. $$Log.\ nat.\ 2 = 2\left[\frac{2-1}{2+1} + {}^1/_3 \cdot \left(\frac{2-1}{2+1}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2\ ({}^1/_3 + {}^1/_3 \cdot {}^1/_{27} + {}^1/_5 \cdot {}^1/_{243} + \cdots)$$

$$= 2\begin{pmatrix} 0{,}33333 \\ 0{,}01234 \\ 0{,}00082 \\ 0{,}00007 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0{,}34656 = 0{,}69312,$$

genauer $= 0{,}69314718.$

$Log.\ nat.\ 8 = Log.\ nat.\ 2^3 = 3\ Log.\ nat.\ 2$ ist hiernach $= 2{,}0794415$, und endlich nach der letzten Formel:

$$Log.nat.\ 10 = Log.nat.(8+2)$$

$$= Log.nat.\ 8 + 2\left[\frac{2}{16+2} + {}^1/_3\left(\frac{2}{16+2}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2{,}0794415 + 0{,}2231436 = 2{,}302585.$$

Man kann auch

$$Log.\,nat.\,2 = Log.\,nat.\,1 + 2\left[\frac{1}{4+1} + {}^1\!/_3\left(\frac{1}{4+1}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2\left({}^1\!/_5 + {}^1\!/_3 \cdot \frac{1}{5^3} + {}^1\!/_5 \cdot \frac{1}{5^5} + \cdots\right) = 0{,}693147, \text{ ferner}$$

$$Log.\,nat.\,5 = Log.\,nat.\,(4+1) = 2\,Log.\,nat.\,2 + 2\left({}^1\!/_9 + {}^1\!/_3 \cdot \frac{1}{9^3} + \cdots\right),$$

und zuletzt $Log.\,nat.\,10 = Log.\,nat.\,2 + Log.\,nat.\,5$ setzen.

(Vergl. Artikel 19.)

Art. 24. Von praktischer Wichtigkeit sind endlich noch die **trigonometrischen und Kreisfunctionen**, deren Differenziale und Integrale ebenfalls im Folgenden ermittelt werden.

Die **Sinusfunction** $y = sin.\,x$ giebt für $x = 0$, $y = 0$;

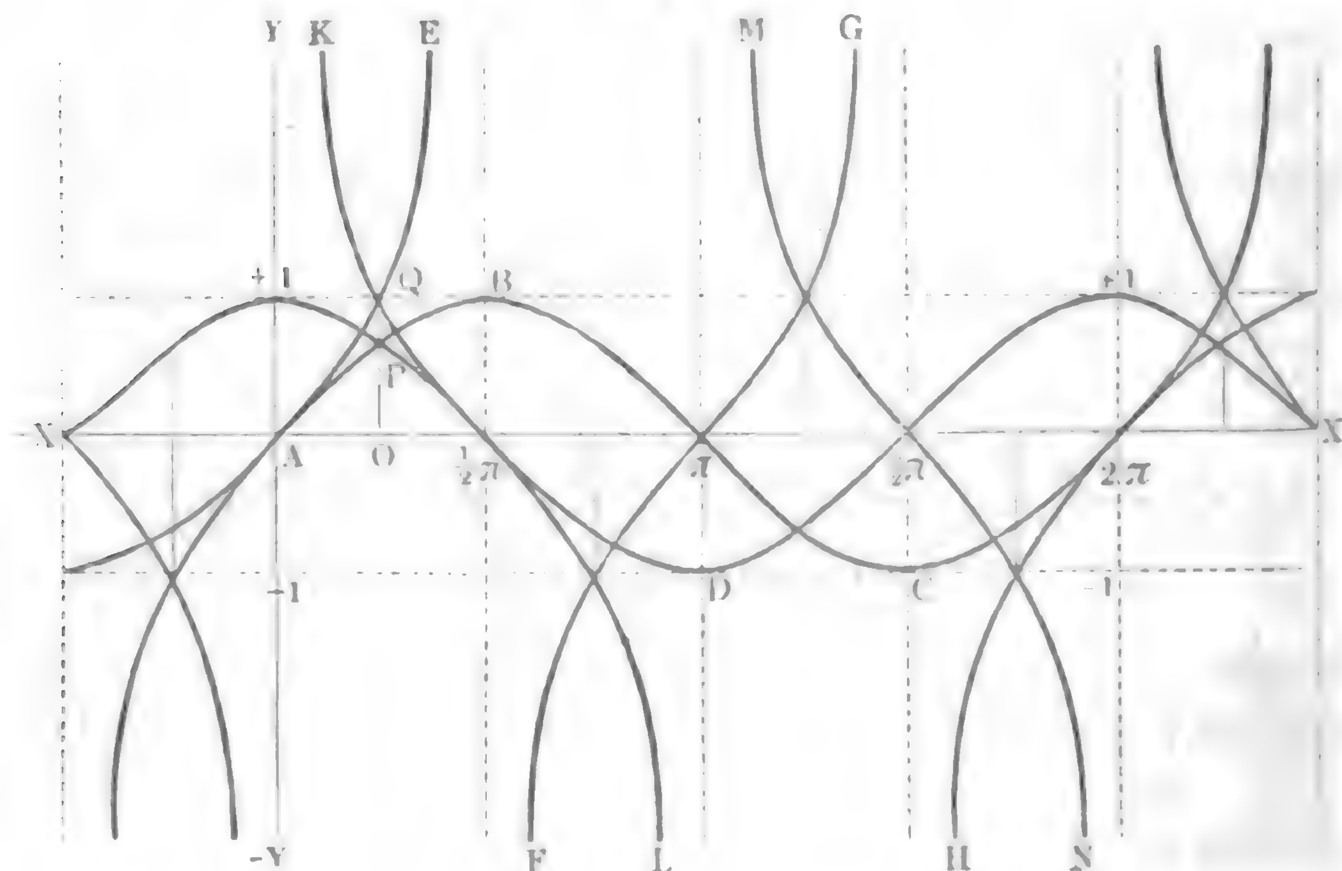
für $x = \frac{\pi}{4} = \frac{3{,}1416}{4} = 0{,}7854\ldots, y = \sqrt{{}^1\!/_2} = 0{,}7071$,

für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$, für $x = \pi$, $y = 0$;

für $x = {}^3\!/_2\,\pi$, $y = -1$, für $x = 2\pi$, $y = 0$ u. s. w.;

trägt man daher x als Abscissen AO und y als die entsprechenden Ordinaten OP auf, so erhält man die schlangenförmige Curve $(APB\pi C\overline{2\pi})$, Fig. 33, welche sich nach beiden Seiten von A ins Unendliche fortsetzen läßt.

Fig. 33.



Die Cosinusfunction $y = cos. x$ giebt für $x = 0$, $y = 1$, für $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \sqrt{{}^1/_2}$, für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, für $x = \pi$, $y = -1$, für $x = {}^3/_2\,\pi$, $y = 0$, für $x = 2\pi$, $y = 1$ u. s. w.; ihr entspricht daher genau dieselbe Schlangenlinie $\left(+1\, P \frac{\pi}{2} D \frac{3\pi}{2} + 1\right)$ wie der Sinusfunction, nur ist dieselbe auf der Abscissenaxe um ${}^1/_2\,\pi = 1{,}5708..$ weiter vor oder hinter der Sinuscurve.

Ganz anders sind aber die Curven gestaltet, welche den Tangens- und Cotangensfunctionen $y = tang. x$ und $y = cotang. x$ entsprechen. Setzt man in $y = tang. x$, $x = 0$, ${}^1/_4\,\pi$, ${}^1/_2\,\pi$, so erhält man $y = 0$, 1, ∞, und daher eine Curve ($A\,Q\,E$), welche sich einer durch den Theilpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ der Abscissenaxe $A\,X$ gehenden Parallele zur Ordinatenaxe $A\,Y$ immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen. Nimmt man ferner $x = \frac{\pi}{2}$, π, ${}^3/_2\,\pi$, so erhält man $y = -\infty$, 0, $+\infty$, und daher eine Curve ($F\pi G$), die sich den Parallelen durch $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und (${}^3/_2\,\pi$) bis ins Unendliche nähert, oder wie man sagt, diese Parallelen zu Asymptoten (s. Art. 11) hat.

Bei ferneren Annahmen für x wiederholen sich dieselben Werthe von y, und deshalb wird also auch der Function $y = tang. x$ durch lauter Curven, wie ($F\pi G$), welche um $\pi = 3{,}1416$ in der Richtung der Abscissenaxe von einander abstehen, entsprochen.

Die Function

$y = cotang. x$, giebt dagegen für $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$; $y = \infty$, 1, 0, $-\infty$, daher entspricht derselben eine Curve $\left(K\,Q \frac{\pi}{2} L\right)$, welche von der Tangentencurve nur der Lage nach verschieden ist; auch läßt sich leicht einsehen, daß noch unendlich viele Curvenzweige, wie z. B. $\left(M \frac{3\pi}{2} N\right)$ u. s. w. dieser Function angehören.

Während sowohl die Curve für Sinus und auch die für Cosinus (die sogenannte Sinusoide und Cosinusoide) ein stetig zusammenhängendes Ganzes bildet, besteht die Curve für die Tangenten, sowie auch die für die Cotangenten (die sogenannte Tangentoide und Cotangentoide) aus lauter getrennten Zweigen, indem ihre Ordinaten für gewisse Werthe von x aus dem positiven Unendlichen in das negative Unendliche überspringen, wobei natürlich die Curve ihre Continuität verliert.

Art. 25. Die Differenziale der trigonometrischen Linien oder Functionen ergeben sich durch Betrachtung der Fig. 34, in welcher
$CA = CP = CQ = 1$, Bog. $AP = x$, $PQ = \partial x$, ferner:
$PM = sin.\,x$, $CM = cos.\,x$, $AS = tang.\,x$, endlich:
$OQ = NQ - MP = sin.(x + \partial x) - sin.\,x = \partial\,sin.\,x$,
$OP = -(CN - CM) = -cos.(x + \partial x) - cos.\,x = -\partial\,cos.\,x$, und
$ST = AT - AS = tang.(x + \partial x) - tang.\,x = \partial\,tang.\,x$ ist.

Da das Bogenelement PQ rechtwinkelig auf dem Halbmesser CP steht, und der Winkel PCA zwischen zwei Linien CP und CA dem Winkel PQO zwischen ihren Perpendikeln PQ und OQ gleich ist, so sind die Dreiecke CPM und QPO einander ähnlich, und es ist:

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{CM}{CP}, \text{ d. i. } \frac{\partial\,sin.\,x}{\partial x} = \frac{cos.\,x}{1}, \text{ daher}$$

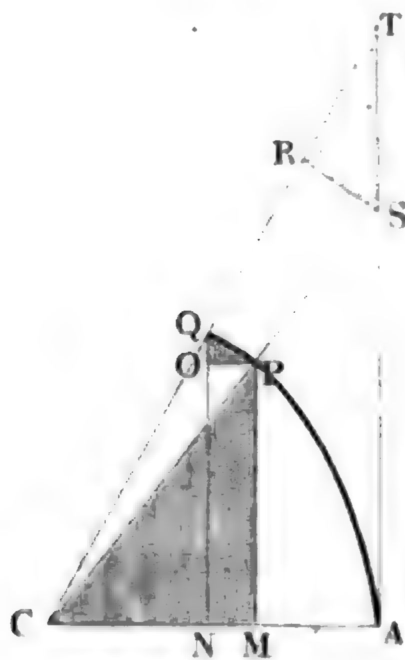
I.) $\partial(sin.\,x) = cos.\,x \cdot \partial x$; ebenso auch:

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{PM}{CP}, \text{ d. i. } \frac{-\partial\,cos.\,x}{\partial x} = \frac{sin.\,x}{1}, \text{ daher}$$

II.) $\partial(cos.\,x) = -sin.\,x\,\partial x$.

Man ersieht hieraus, daß kleine Fehler im Bogen oder Winkel auf den Sinus um so mehr Einfluß haben, je größer $cos.\,x$, je kleiner also der Bogen oder Winkel ist, daß dagegen dieselben den Cosinus um so mehr verändern, je größer $sin.\,x$ ist, je mehr also der Bogen sich $\frac{\pi}{2}$ nähert, und daß endlich das Differenzial des Cosinus das entgegengesetzte Zeichen von dem des Bogens hat, also, wie bekannt, eine Zunahme von x eine Abnahme von $cos.\,x$ liefert, und umgekehrt, eine Abnahme von x ein Wachsen von $cos.\,x$ giebt.

Fig. 34.



Legt man SR rechtwinkelig auf CT so erhält man ein Dreieck SRT, welches wegen der Gleichheit der Winkel RTS und CQN oder CPM dem Dreiecke CPM ähnlich ist, und weshalb man hat:

$$\frac{ST}{SR} = \frac{CP}{CM}, \text{ d. i. } \frac{\partial\,tang.\,x}{SR} = \frac{1}{cos.\,x}.$$

Nun ist aber auch: $\frac{SR}{CS} = \frac{PQ}{CP}$, d. i. $SR = \frac{CS.\partial x}{1}$ und

$$CS = secans.\,x = \frac{1}{cos.\,x}, \text{ daher } SR = \frac{\partial x}{cos.\,x} \text{ und}$$

III.) $\partial\,(tang.\,x) = \dfrac{\partial\,x}{(cos.\,x)^2}$.

Führt man statt x, $\frac{\pi}{2} - x$, also statt $\partial\,x$, $\partial\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,\partial\,x$ ein, so erhält man:

$$\partial\,tang.\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\,\frac{\partial\,x}{\left[cos.\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2},$$ d. i.

IV.) $\partial\,(cotang.\,x) = -\,\dfrac{\partial\,x}{(sin.\,x)^2}$.

Durch Umkehrung geben diese Formeln für das Differenzial des Bogens:

$$\partial\,x = \frac{\partial\,sin.\,x}{cos.\,x} = -\,\frac{\partial\,cos.\,x}{sin.\,x} = (cos.\,x)^2\,\partial\,tang.\,x$$
$$= -\,(sin.\,x)^2\,\partial\,cotang.\,x,$$ oder:

$$\partial\,x = \frac{\partial\,sin.\,x}{\sqrt{1 - (sin.\,x)^2}} = \frac{\partial\,tang.\,x}{1 + (tang.\,x)^2}$$

sowie $$\partial\,x = -\,\frac{\partial\,cos.\,x}{\sqrt{1 - (cos.\,x)^2}} = -\,\frac{\partial\,cotang.\,x}{1 + (cotang.\,x)^2}.$$

Bezeichnet man nun $sin.\,x$ durch y, und x durch $arc.\,(sin. = y)$, so erhält man:

V.) $\partial\,arc.\,(sin. = y) = \dfrac{\partial\,y}{\sqrt{1 - y^2}}$,

und auf gleiche Weise findet man:

VI.) $\partial\,arc.\,(cos. = y) = -\,\dfrac{\partial\,y}{\sqrt{1 - y^2}}$, sowie:

VII.) $\partial\,arc.\,(tang. = y) = \dfrac{\partial\,y}{1 + y^2}$, und

VIII.) $\partial\,arc.\,(cotang. = y) = -\,\dfrac{\partial\,y}{1 + y^2}$.

Art. 26. Die letzten Differenzialformeln geben durch Umkehrung folgende Integralformeln:

I.) $\int cos.\,x\,\partial\,x = sin.\,x$,

II.) $\int sin.\,x\,\partial\,x = -\,cos.\,x$,

III.) $\int \dfrac{\partial\,x}{cos.\,x^2} = tang.\,x$,

IV.) $\int \dfrac{\partial\,x}{sin.\,x^2} = -\,cotang.\,x$, ferner:

V.) $$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = arc.(sin. = x) = -\, arc.(cos. = x),$$

VI.) $$\int \frac{\partial x}{1+x^2} = arc.(tang. = x) = -\, arc.(cotang. = x),$$

und hierzu lassen sich leicht noch folgende finden.

Es ist $\partial\,(Log.\,nat.\,sin.\,x) = \dfrac{\partial\,sin.\,x}{sin.\,x} = \dfrac{cos.\,x\,.\,\partial\,x}{sin.\,x} = cotang.\,x\,.\,\partial\,x$,

folglich:

VII.) $\int cotg.\,x\,\partial\,x = Log.\,nat.\,sin.\,x$, ebenso:

VIII.) $\int tang.\,x\,\partial\,x = -\,Log.\,nat.\,cos.\,x$; ferner:

$$\partial\,(Log.\,nat.\,tang.\,x) = \frac{\partial\,tang.\,x}{tang.\,x} = \frac{\partial\,x}{cos.\,x^2\,tang.\,x}$$

$$= \frac{\partial\,x}{sin.\,x\,cos.\,x} = \frac{\partial\,(2\,x)}{sin.\,2\,x}, \text{ daher:}$$

$$\partial\,(Log.\,nat.\,tang.\,{}^1/_2\,x) = \frac{\partial\,x}{sin.\,x}, \text{ und}$$

IX.) $$\int \frac{\partial\,x}{sin.\,x} = Log.\,nat.\,tang.\,\frac{x}{2}, \text{ ebenso:}$$

X.) $$\int \frac{\partial\,x}{cos.\,x} = Log.\,nat.\,tang.\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= Log.\,nat.\,cotg.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Ferner $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{1-x} = \dfrac{a\,(1-x) + b\,(1+x)}{(1+x)\,(1-x)}$ gesetzt, folgt $1 = a\,(1-x) + b\,(1+x)$. Nimmt man $1 + x = 0$, also $x = -1$ an, so erhält man hiernach $1 = a\,(1+1)$, daher $a = {}^1/_2$, und setzt man $1 - x = 0$, also $x = 1$, so ergiebt sich $1 = 2\,b$, daher:

$$b = {}^1/_2 \text{ und } \frac{1}{1-x^2} = \frac{{}^1/_2}{1+x} + \frac{{}^1/_2}{1-x},$$

endlich aber:

$$\int \frac{d\,x}{1-x^2} = {}^1/_2 \int \frac{\partial\,x}{1+x} + {}^1/_2 \int \frac{\partial\,x}{1-x}$$
$$= {}^1/_2\,Log.\,nat.\,(1+x) - {}^1/_2\,Log.\,nat.\,(1-x),$$

d. i.:

XI.) $$\int \frac{\partial\,x}{1-x^2} = {}^1/_2\,Log.\,nat.\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \text{ und ebenso:}$$

XII.) $$\int \frac{\partial\,x}{x^2-1} = {}^1/_2\,Log.\,nat.\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Setzt man $\sqrt{1+x^2} = xy$, so erhält man $1 + x^2 = x^2 y^2$, und $\partial x\,(1-y^2) = x y \partial y$, daher:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial y}{1-y^2} = {}^1\!/_2\, \partial\, Log.\, nat. \left(\frac{1+y}{1-y}\right),$$ wonach:

XIII.) $$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = Log.\, nat.\, (x + \sqrt{1+x^2}),$$ sowie:

XIV.) $$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}} = Log.\, nat.\, (x + \sqrt{x^2-1})$$ folgt.

Art. 27. Um $arc.\,(tang. = x) = \int \frac{\partial x}{1+x^2}$ zu finden, darf man nur $\frac{1}{1+x^2}$ durch Division in eine Reihe verwandeln und dann Glied für Glied integriren. Man erhält so:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots,$$ und

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} = \int \partial x - \int x^2 \partial x + \int x^4 \partial x - \int x^6 \partial x + \cdots,$$

folglich:

I.) $$arc.\,(tang. = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \cdots,$$ z. B.:

$$\frac{\pi}{4} = arc.\,(tang. = 1) = 1 - {}^1\!/_3 + {}^1\!/_5 - {}^1\!/_7 + {}^1\!/_9 - \cdots,$$

also den Halbkreis $\pi = 4\,(1 - {}^1\!/_3 + {}^1\!/_5 - {}^1\!/_7 + {}^1\!/_9 - \cdots)$, oder:

$$\frac{\pi}{6} = arc.\,(tang. = \sqrt{{}^1\!/_3}) = \sqrt{{}^1\!/_3}\,[1 - {}^1\!/_3 . {}^1\!/_3 + {}^1\!/_5\,({}^1\!/_3)^2 - {}^1\!/_7\,({}^1\!/_3)^3 + \cdots],$$

folglich $\pi = 6\sqrt{{}^1\!/_3}\,(1 - {}^1\!/_9 + {}^1\!/_{45} - {}^1\!/_{189} + \cdots) = 3{,}1415926 \cdots$

Auf gleiche Weise erhält man aus:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + {}^1\!/_2\, x^2 + {}^3\!/_8\, x^4 + {}^5\!/_{16}\, x^6 + \cdots$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \partial x + {}^1\!/_2 \int x^2 \partial x + {}^3\!/_8 \int x^4 \partial x + {}^5\!/_{16} \int x^6 \partial x + \cdots,$$

d. i.:

II.) $$arc.\,(sin. = x) = x + \frac{1\, x^3}{2.3} + \frac{1.3\, x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5\, x^7}{2.4.6.7} + \cdots,$$

z. B.:

$$\frac{\pi}{6} = arc.\,(sin. = {}^1\!/_2) = {}^1\!/_2\,(1 + {}^1\!/_{24} + {}^3\!/_{640} + {}^5\!/_{7168} + \cdots),$$

also:

$$\pi = 3 \cdot \begin{Bmatrix} 1{,}04167 \\ 0{,}00469 \\ 0{,}00070 \\ 0{,}00012 \end{Bmatrix} = 3{,}1416..$$

Ferner folgt durch successives Differenziiren, wenn man
$sin.\, x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots$ setzt:

$$\frac{\partial (sin.\, x)}{\partial x} = cos.\, x = A_1 + 2\, A_2\, x + 3\, A_3\, x^2 + 4\, A_4\, x^3 + \cdots$$

$$\frac{\partial (cos.\, x)}{\partial x} = -\, sin.\, x = 2\, A_2 + 2\,.\,3\, A_3\, x + 3\,.\,4\, A_4\, x^2 + \cdots$$

$$-\frac{\partial (sin.\, x)}{\partial x} = -\, cos.\, x = 2\,.\,3\,.\,A_3 + 2\,.\,3\,.\,4\,.\,A_4\, x + \cdots$$

$$-\frac{\partial (cos.\, x)}{\partial x} = sin.\, x = 2\,.\,3\,.\,4\,.\,A_4 + \cdots$$

Nun ist aber für $x = 0$, $sin.\, x = 0$, und $cos.\, x = 1$, daher folgt aus der ersten Reihe $A_0 = 0$, aus der zweiten $A_1 = cos.\ 0 = 1$, aus der dritten $A_2 = 0$, aus der vierten $A_3 = -\frac{1}{2\,.\,3}$, aus der fünften $A_4 = 0$ u. s. w., und wenn man diese Werthe in die fingirte Reihe einsetzt, die Sinusreihe:

$$\text{III.)}\quad sin.\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich:

$$\text{IV.)}\quad cos. x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc., ferner}$$

$$\text{V.)}\quad tang. x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\, x^5}{3\,.\,5} + \frac{17\, x^7}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,3} + \cdots \text{ und}$$

$$\text{VI.)}\quad cotang.\, x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2\, x^5}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9} - \text{etc.}$$

(Vergl. „Ingenieur", Seite 159).

Art. 28. Wenn man die Differenzialformel $\partial (u\, v) = u\, \partial\, v + v\, \partial\, u$, aus Artikel 8, integrirt, so erhält man den Ausdruck $u\, v = \int u\, \partial\, v + \int v\, \partial\, u$, und folgendes unter dem Namen „die Reductionsformel" bekannte Integral:

$$\int v\, \partial\, u = u\, v - \int u\, \partial\, v, \text{ oder}$$

$$\int \varphi\, (x)\, \partial f\, (x) = \varphi\, (x) f\, (x) - \int f\, (x)\, \partial\, \varphi\, (x).$$

Diese Regel kommt stets zur Anwendung, wenn das Integral $\int v\, \partial\, u = \int \varphi\, (x)\, \partial f\, (x)$ nicht, dagegen aber das Integral $\int u\, \partial\, v = \int f\, (x)\, \partial\, \varphi\, (x)$ bekannt ist.

Mittels der Reductionsformel läßt sich z. B. das Integral von folgendem Differenzial:

$$\partial y = \sqrt{1 + x^2} \,.\, \partial x$$

auf ein anderes bekanntes Integral zurückführen. Es ist

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}, \text{ also } \partial \varphi(x) = \frac{x \partial x}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ und}$$

$$f(x) = x, \text{ also } \partial f(x) = \partial x$$

zu setzen; folglich hat man:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x = x\sqrt{1 + x^2} - \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

aber:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

daher folgt:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x = x\sqrt{1 + x^2} - \int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x + \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

oder:

$$2\int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x = x\sqrt{1 + x^2} + \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

und folglich:

I.) $$\int \sqrt{1 + x^2}\, \partial x = {}^1\!/_2\, x\sqrt{1 + x^2} + {}^1\!/_2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$= {}^1\!/_2 [x\sqrt{1 + x^2} + Ln.(x + \sqrt{1 + x^2})].$$

Ebenso:

II.) $$\int \sqrt{1 - x^2}\, \partial x = {}^1\!/_2\, x\sqrt{1 - x^2} + {}^1\!/_2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$= {}^1\!/_2 [x\sqrt{1 - x^2} + arc.(sin. = x)]$$

und

III.) $$\int \sqrt{x^2 - 1}\, \partial x = {}^1\!/_2\, x\sqrt{x^2 - 1} - {}^1\!/_2 \int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$= {}^1\!/_2 [x\sqrt{x^2 - 1} - Ln.(x + \sqrt{x^2 - 1})].$$

Auch ist

$$\int (sin.x)^2 \partial x = \int sin.x\, sin.x\, \partial x = -\int sin.x\, \partial(cos.x) = -sin.x\, cos.x$$
$$+ \int cos.x\, \partial(sin.x) = -sin.x\, cos.x + \int (cos.x)^2 \partial x$$
$$= -sin.x\, cos.x + \int [1 - (sin.x)^2]\, \partial x,$$

daher folgt:

$$2\int (sin.x)^2 \partial x = \int \partial x - sin.x\, cos.x, \text{ und}$$

IV.) $\int (sin.x)^2 \partial x = \frac{1}{2}(x - sin.x\,cos.x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} sin.2x)$.

Ebenso ist

V.) $\int (cos.x)^2 \partial x = \frac{1}{2}(x + sin.x\,cos.x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} sin.2x)$.

Ferner hat man

VI.) $\int sin.x\,cos.x\,\partial x = \frac{1}{4}\int sin.2x\,\partial(2x) = -\frac{1}{4} cos.2x$,

VII.) $\int (tang.x)^2 \partial x = tang.x - x$, und

VIII.) $\int (cotg.x)^2 \partial x = -(cotg.x + x)$.

Endlich ist

IX.) $\int x\,sin.x\,\partial x = -x\,cos.x + \int cos.x\,\partial x = -x\,cos.x + sin.x$,

X.) $\int x e^x \partial x = \int x \partial(e^x) = x e^x - \int e^x \partial x = (x-1)e^x$,

XI.) $\int Log.nat.x.\partial x = x\,Log.nat.x - \int x \frac{\partial x}{x} = x(Log.nat.x - 1)$

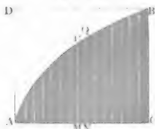
und

XII.) $\int (x\,Log.nat.x\,\partial x) = \frac{x^2}{2} Log.nat.x - \int \frac{x^2}{2}\frac{\partial x}{x}$

$$= (Log.nat.x - \tfrac{1}{2})\frac{x^2}{2}.$$

Art. 29. Kommt es darauf an, eine Curve APB, Fig. 35, zu **quadriren**, d. i. den Inhalt der Fläche ABC, welche von dieser Curve APB und von ihren Coordinaten AC und BC begrenzt wird, zu bestimmen oder durch eine Function der Abscisse dieser Curve auszudrücken, so denken wir uns diesen Flächenraum durch unendlich viele Ordinaten MP, NQ u. s. w. in lauter streifenförmige Elemente, wie $MNQP$ von der constanten Breite $MN = \partial x$ und der veränderlichen Länge $MP = y$ zerlegt. Da sich nun der Inhalt eines solchen Flächenelementes

Fig. 35.



$$\partial F = \left(\frac{MP + NQ}{2}\right).MN = (y + \tfrac{1}{2}\partial y)\partial x = y\,\partial x$$

setzen läßt, so findet man den Inhalt der ganzen Fläche F, indem man das Differenzial $y\,\partial x$ integrirt, also

$$F = \int y\,\partial x$$

setzt.

Z. B. für eine **Parabel** mit dem Parameter p ist $y^2 = p\,x$, und daher folgt die Fläche derselben:

$$F = \int \sqrt{p\,x}\,\partial x = \sqrt{p} \int x^{1/2}\,\partial x = \frac{\sqrt{p} \cdot x^{3/2}}{3/2} = {}^2/_3\, x \sqrt{p\,x} = {}^2/_3\, x\, y.$$

Die Parabelfläche $A\,B\,C$ ist also zwei Drittel von dem sie umschließenden Rechtecke $A\,C\,B\,D$.

Diese Formel gilt auch für **schiefwinkelige**, unter einem Winkel $X A Y = \alpha$ zusammenstoßende Coordinaten, z. B. für die Fläche $A\,B\,C$, Fig. 36, wenn nur statt $B\,C = y$, der Normalabstand $B\,N = y\,sin.\,\alpha$ eingesetzt wird; man hat also hier:

$$F = sin.\,\alpha \int y\,\partial x,$$

z. B. bei der Parabelfläche, wenn die Abscissenaxe $A\,X$ einen Durchmesser und die Ordinatenaxe $A\,Y$ eine Tangente der Parabel bildet, also $y^2 = p_1\,x = \frac{p\,x}{sin.\,\alpha^2}$ ist (s. „Ingenieur“ Seite 177):

$$F = {}^2/_3\, x\, y\, sin.\,\alpha,$$

d. i.:

$$\text{Fläche } A\,B\,C = {}^2/_3 \text{ Parallelogramm } A\,C\,B\,D.$$

Fig. 36.

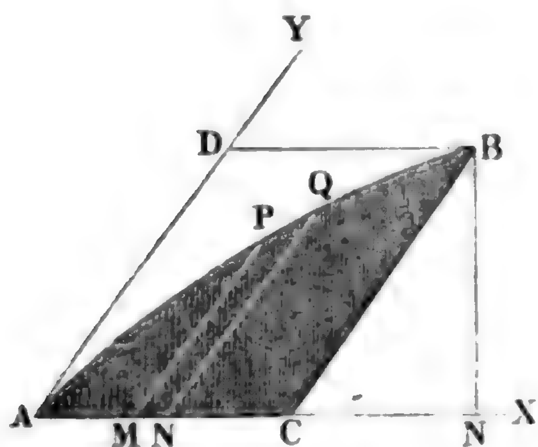
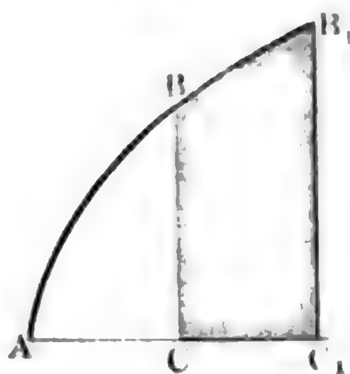


Fig. 37.



Für eine Fläche $B\,C\,C_1\,B_1 = F$, zwischen den Abscissen $A\,C_1 = c_1$ und $A\,C = c$, Fig. 37, ist nach Artikel 17:

$$F = \int_c^{c_1} y\,\partial x.$$

Z. B. für $y = \frac{a^2}{x}$ ist:

$$F = \int_c^{c_1} \frac{a^2\,\partial x}{x} = a^2\,(Log.\,nat.\,c_1 - Log.\,nat.\,c), \text{ d. i.:}$$

$$F = a^2\,Log.\,nat.\left(\frac{c_1}{c}\right).$$

Der Gleichung $\frac{a^2}{x}$ entspricht die oben in Artikel 3 kennen gelernte Curve PQ, Fig. 38, und wenn daher $AM = c$ und $AN = c_1$ ist, so giebt

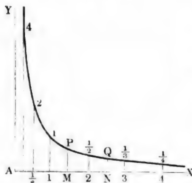


Fig. 38.

$$F = a^2 \, Log. \, nat. \left(\frac{c_1}{c}\right)$$

den Flächenraum von $MNQP$ an. Nimmt man noch der Einfachheit wegen, $a = c = 1$ und $c_1 = x$ an, so hat man:

$$F = Log. \, nat. \, x;$$

es sind hiernach die Flächenräume $(1\,MP\,1)$, $(1\,NQ\,1)$ u. s. w. die natürlichen Logarithmen der Abscissen AM, AN u. s. w. Die Curve selbst ist eine sogenannte **gleichseitige Hyperbel**, in welcher die beiden Halbaxen a und b einander gleich sind, folglich der Asymptotenwinkel $\alpha = 45°$ ist, und die Geraden AX und AY, welchen sich die Curve immer mehr und mehr nähert, ohne sie zu erreichen, sind die **Asymptoten** derselben. Wegen dieses Zusammenhanges zwischen den Abscissen und den Flächenräumen werden die **natürlichen Logarithmen** sehr oft **hyperbolische Logarithmen** genannt.

Art. 30. Man kann auch jedes Integral $\int y \, \partial x = \int \varphi(x) \, \partial x$ gleich dem Inhalte einer Fläche F setzen, und wenn sich nun die Integration durch eine der bekannten Regeln nicht vollziehen läßt, so kann man es wenigstens annähernd finden, wenn man durch Anwendung der bekannten geometrischen Hülfsmittel den Inhalt des entsprechenden Flächenraumes ausmittelt.

Fig. 39.

Für eine Fläche $ABPQN$, Fig. 39, die durch die Grundlinie $AN = x$ und durch die drei gleich weit von einander abstehenden Ordinaten $AB = y_0$, $MP = y_1$ und $NQ = y_2$ bestimmt ist, hat man den trapezoidalen Theil:

$$ABQN = F_1 = (y_0 + y_2)\frac{x}{2}$$

und den segmentförmigen Theil $BPQSB$, wenn man BPQ als Parabel ansieht:

$$F_2 = \tfrac{2}{3} PS.BR = \tfrac{2}{3}(MP - MS).AN = \tfrac{2}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)x,$$

daher die ganze Fläche:

$$F = F_1 + F_2 = \left[{}^1/_2 (y_0 + y_2) + {}^2/_3 \left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right] x$$

$$= [{}^1/_6 (y_0 + y_2) + {}^2/_3 y_1] x = (y_0 + 4 y_1 + y_2) \cdot \frac{x}{6} \cdot$$

Führt man eine mittlere Ordinate y ein, und setzt $F = x y$, so erhält man daher für dieselbe:

$$y = \frac{y_0 + 4 y_1 + y_2}{6}.$$

Um nun hiernach den Inhalt einer Fläche $MABN$, Fig. 40, zu finden, welche über einer gegebenen Grundlinie $MN = x$ steht, und durch eine ungerade Anzahl von Ordinaten $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ bestimmt ist, durch diese also in eine gerade Anzahl von gleich breiten Streifen zerlegt wird, bedarf es nur einer wiederholten Anwendung der letzten Regel. Es ist die Breite eines Streifens $= \frac{x}{n}$ und hiernach die Fläche des ersten Streifenpaares:

Fig. 40.

$$= \frac{y_0 + 4 y_1 + y_2}{6} \cdot \frac{2x}{n},$$

des zweiten Streifenpaares:

$$= \frac{y_2 + 4 y_3 + y_4}{6} \cdot \frac{2x}{n},$$

des dritten Streifenpaares:

$$= \frac{y_4 + 4 y_5 + y_6}{6} \cdot \frac{2x}{n}, \text{ u. s. w.;}$$

also der Inhält der ersten sechs Streifen oder ersten drei Streifenpaare, da hier $n = 6$ beträgt:

$$F = (y_0 + 4 y_1 + 2 y_2 + 4 y_3 + 2 y_4 + 4 y_5 + y_6) \frac{x}{3 . 6}$$

$$= [y_0 + y_6 + 4 (y_1 + y_3 + y_5) + 2 (y_2 + y_4)] \frac{x}{18};$$

und es läßt sich nun leicht ermessen, daß der Inhalt einer in vier Streifenpaare zerlegten Fläche:

$$F = [y_0 + y_8 + 4 (y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2 (y_2 + y_4 + y_6)] \frac{x}{3 . 8},$$

und daß allgemein, der einer Fläche von n Streifen:

$$F = [y_0 + y_n + 4 (y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2 (y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})] \frac{x}{3 n}$$

gesetzt werden kann.

Auch ist die mittlere Höhe einer solchen Fläche:

$$y = \frac{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})}{3n},$$

wobei n stets eine gerade Zahl sein muß.

Diese unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannte Formel (s. „Ingenieur" S. 190) findet ihre Anwendung bei der Bestimmung eines Integrales $\int_c^{c_1} y \partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x) \partial x$, wenn man $x = c_1 - c$ in eine gerade Anzahl n gleicher Theile theilt, die Ordinaten

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right) \ldots \text{ bis } y_n = \varphi(x)$$

berechnet und diese Werthe in die Formel:

$$\int_c^{c_1} y \partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x) \partial x$$

$$= [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})] \frac{c_1 - c}{3n}$$

einsetzt.

Z. B. $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ giebt, da hier $c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist, wenn man $n = 6$, also $\frac{x}{n} = \frac{c_1 - c}{6} = {}^1/_6$ annimmt:

$$y_0 = \frac{1}{1} = 1{,}0000,\ y_1 = \frac{1}{^7/_6} = {}^6/_7 = 0{,}8571,\ y_2 = \frac{1}{^8/_6} = {}^3/_4 = 0{,}7500,$$

$$y_3 = \frac{1}{^9/_6} = {}^6/_9 = 0{,}6666,\ y_4 = \frac{1}{^{10}/_6} = 0{,}6000,\ y_5 = \frac{6}{11} = 0{,}5454 \text{ und}$$

$y_6 = 0{,}5000$, daher:

$y_0 + y_6 = 1{,}5000$, $y_1 + y_3 + y_5 = 2{,}0692$ und $y_2 + y_4 = 1{,}3500$,

und das gesuchte Integral:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = (1{,}5000 + 4 . 2{,}0692 + 2 . 1{,}3500) . {}^1/_{18} = \frac{12{,}4768}{18} = 0{,}69315.$$

Nach Artikel 22, III, ist:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = Log.\,nat.\,2 - Log.\,nat.\,1 = 0{,}693147,$$

also die Uebereinstimmung die erwünschte.

Art. 31. Im Folgenden soll noch eine andere Regel mitgetheilt werden, welche auch bei einer ungeraden Anzahl n von Streifen angewendet werden kann. Behandelt man ein sehr gedrücktes Segment AMB, Fig. 41, als ein Parabelsegment, so hat man nach Art. 29 für den Inhalt desselben:

Fig. 41.

$$F = {}^2/_3\, AB \,.\, MD,$$

oder, wenn AT und BT Tangenten an den Enden A und B sind, und deshalb $CT = 2\,CM$ ist: $F = {}^2/_3 \,.\, \frac{AB\,.\,TE}{2} = {}^2/_3$ des Dreiecks $ATB = {}^2/_3$ des gleich hohen gleichschenkligen Dreiecks ASB, und also auch $= {}^2/_3\, AC\,.\,CS = {}^2/_3\, \overline{AC}^2.\,tang.\,SAC$. Der Winkel $SAC = SBC$ ist $= TAC + TAS = TBC - TBS$; setzt man daher die kleinen Winkel TAS und TBS einander gleich, so erhält man für dieselben:

$$TAS = TBS = \frac{TBC - TAC}{2} \text{ und}$$

$$SAC = TAC + \frac{TBC - TAC}{2} = \frac{TAC + TBC}{2} = \frac{\delta + \varepsilon}{2},$$

wenn man die Tangentenwinkel TAC und TBC durch δ und ε bezeichnet. Da nun noch $AC = BC = {}^1/_2\, AB = {}^1/_2$ Sehne s ist, so hat man:

$$F = {}^1/_6\, s^2\, tang.\left(\frac{\delta + \varepsilon}{2}\right).$$

Diese Formel läßt sich nun auch auf das Flächenstück $MABN$, Fig. 42, anwenden, dessen Tangentenwinkel $TAD = \alpha$ und $TBE = \beta$ gegeben sind; setzt man nämlich noch den Sehnenwinkel $BAD = ABE = \sigma$, so hat man:

Fig. 42.

$$TAB = \delta = TAD - BAD$$
$$= \alpha - \sigma \text{ und}$$
$$TBE = \varepsilon = ABE - TBE$$
$$= \sigma - \beta,$$

daher:

$$\delta + \varepsilon = \alpha - \beta,$$

und das Segment über AB:

$$F = {}^1/_6\, s^2\, tang.\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

oder, wegen der Kleinheit von $\alpha - \beta$:

$$F = \frac{s^2}{12}\, tang.(\alpha - \beta) = \frac{s^2}{12}\left(\frac{tang.\,\alpha - tang.\,\beta}{1 + tang.\,\alpha\; tang.\,\beta}\right),$$

oder, da α und β nicht bedeutend von einander abweichen und deshalb in $tang.\,\alpha\, tang.\,\beta$ statt α und β der Mittelwerth σ eingesetzt werden kann:

$$F = {}^1/_{12}\, s^2 \,.\, \frac{tang.\,\alpha - tang.\,\beta}{1 + tang.\,\sigma^2} = {}^1/_{12}\, s^2 \cos.\,\sigma^2 (tang.\,\alpha - tang.\,\beta),$$

und also statt $s \cos.\,\sigma$ die Grundlinie $MN = x$ substituirt:

$$F = \frac{x^2}{12}\,(tang.\,\alpha - tang.\,\beta),$$

und daher das ganze Flächenstück $MABN$, wenn y_0 und y_1 dessen Ordinaten MA und NB bezeichnen:

$$F_1 = (y_0 + y_1)\frac{x}{2} + (tang.\,\alpha - tang.\,\beta)\,\frac{x^2}{12}.$$

Stößt an das vorige Flächenstück noch ein anderes $NBCO$ mit einer gleichen Grundlinie $NO = x$, den Ordinaten BN und $CO = y_1$ und y_2 und den Tangentenwinkeln $SBF = \beta$ und $SCG = \gamma$, so hat man für dasselbe den Inhalt:

$$F_2 = (y_1 + y_2)\,\frac{x}{2} + (tang.\,\beta - tang.\,\gamma)\,\frac{x^2}{12},$$

und daher für das Ganze, da sich hier $-\, tang.\,\beta$ gegen $+\, tang.\,\beta$ hebt:

$$F = F_1 + F_2 = ({}^1/_2\, y_0 + y_1 + {}^1/_2\, y_2)\, x + (tang.\,\alpha - tang.\,\gamma)\,\frac{x^2}{12}.$$

Für eine Fläche aus drei gleichbreiten Streifen ist ebenso, wenn α den Tangentenwinkel des Anfangs- und δ den des Endpunktes bezeichnet:

$$F = ({}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + {}^1/_2\, y_3)\, x + (tang.\,\alpha - tang.\,\delta)\,\frac{x^2}{12},$$

und allgemein für ein durch die Abscissen $\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \frac{3x}{n} \ldots x$, die Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ und die Tangentenwinkel α_0 und α_n der Endpunkte bestimmtes Flächenstück:

$$F = ({}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + {}^1/_2\, y_n)\,\frac{x}{n}$$
$$+ {}^1/_{12}\,(tang.\,\alpha - tang.\,\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2.$$

Ein Integral:

$$\int_c^{c_1} y\,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,\partial x$$
$$= ({}^1/_2\, y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + {}^1/_2\, y_n)\,\frac{x}{n}$$
$$+ {}^1/_{12}\,(tang.\,\alpha - tang.\,\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2$$

wird hiernach gefunden, wenn man $x = c_1 - c$ setzt:

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\ \ y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$
$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right) \ldots,\ y_n = \varphi\left(c + \frac{nx}{n}\right) = \varphi(c_1),$$

sowie $tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \psi(x) = \psi(c)$ und $tang.\,\alpha_n = \psi(c_1)$ berechnet, und diese Werthe in diese Gleichung einführt.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ hat man, wenn $n = 6$ angenommen wird, da hier $x = c_1 - c = 2 - 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist:

$$y_0 = \frac{1}{c} = 1,\ y_1 = \frac{1}{1 + {}^1/_6} = {}^6/_7,\ y_2 = {}^6/_8,\ y_3 = {}^6/_9,$$
$$y_4 = {}^6/_{10},\ y_5 = {}^6/_{11} \text{ und } y_6 = {}^6/_{12};$$

ferner, da sich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(x^{-1})}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ herausstellt:

$$tang.\,\alpha = -{}^1/_1 = -1 \text{ und } tang.\,\beta = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -{}^1/_4,$$

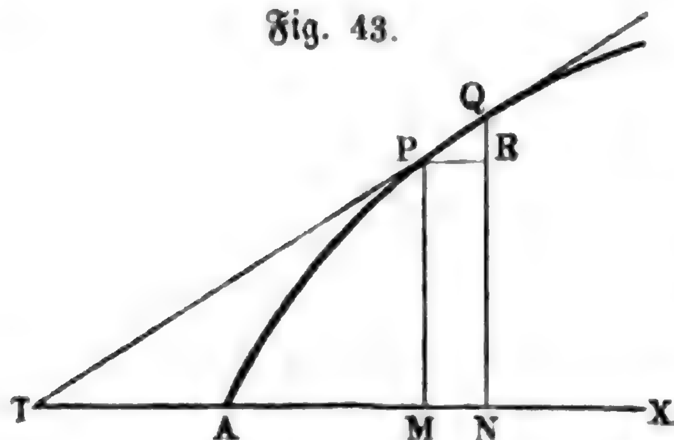
und daher ist:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = ({}^1/_2 + {}^6/_7 + {}^6/_8 + {}^6/_9 + {}^6/_{10} + {}^6/_{11} + {}^1/_4).{}^1/_6 + (-1 + {}^1/_4).{}^1/_{12}.{}^1/_{36}$$
$$= \frac{4{,}1692}{6} - {}^3/_4 \cdot {}^1/_{12} \cdot {}^1/_{36} = 0{,}69487 - 0{,}00173 = 0{,}69314.$$

(Vergleiche das Beispiel des vorigen Artikels.)

Art. 32. Um eine Curve zu rectificiren, oder aus ihrer Gleichung $y = f(x)$ zwischen den Coordinaten $AM = x$ und $MP = y$, Fig. 43, eine Gleichung zwischen dem Bogen $AP = s$ und der einen oder der anderen der beiden Coordinaten abzuleiten, bestimmt man zunächst das Differenzial des Curvenbogens AP, und sucht dann hierzu das Integral. Läßt man x um $MN = PR = \partial x$ wachsen, so nimmt y um $RQ = \partial y$ und s um das Element $PQ = \partial s$ zu, und es ist, dem Pythagoräischen Lehrsatze zufolge:

Fig. 43.



$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2,$$

d. i.:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2,$$

also:

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2},$$

und hiernach der Curvenbogen selbst:

$$s = \int \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

Z. B. für die Neil'sche Parabel (siehe Art. 9 und Fig. 17), deren Gleichung $a y^2 = x^3$ ist, hat man: $2 a y \partial y = 3 x^2 \partial x$, daher:

$$\partial y = \frac{3 x^2 \partial x}{2 a y} \text{ und } \partial y^2 = \frac{9 x^4 \partial x^2}{4 a^2 y^2} = \frac{9 x \partial x^2}{4 a},$$

hiernach:

$$\partial s^2 = \left(1 + \frac{9 x}{4 a}\right) \partial x^2, \text{ und}$$

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{9 x}{4 a}}\, \partial x = \frac{4 a}{9} \int \left(1 + \frac{9 x}{4 a}\right)^{1/2} \partial \left(\frac{9 x}{4 a}\right)$$

$$= \frac{4 a}{9} \int u^{1/2} \partial u = \frac{4 a}{9}\, {}^2/_3\, u^{3/2} = {}^8/_{27}\, a \sqrt{\left(1 + \frac{9 x}{4 a}\right)^3}.$$

Um die hierzu nöthige Constante zu finden, wollen wir s mit x und y zugleich anfangen lassen. Wir erhalten dann:

$$0 = {}^8/_{27}\, a \sqrt{1^3} + Con., \text{ also } Con. = - {}^8/_{27}\, a \text{ und}$$

$$s = {}^8/_{27}\, a \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9 x}{4 a}\right)^3} - 1\right],$$

z. B. für das Stück $A P_1$, dessen Abscisse $x = a$ ist:

$$s = {}^8/_{27}\, a \left[\sqrt{({}^{13}/_4)^3} - 1\right] = 1{,}736 \cdot a.$$

Führt man noch den Tangentenwinkel $Q P R = P T M = \alpha$ (Fig. 43) ein, so hat man auch:

$$Q R = P Q \,.\, sin.\, Q P R \text{ und } P R = P Q \, cos.\, Q P R, \text{ d. i.}$$

$$\partial y = \partial s \, sin.\, \alpha \text{ und } \partial x = \partial s \, cos.\, \alpha,$$

und also außer $tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ (s. Art. 6) auch

$$sin.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial s} \text{ und } cos.\, \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}; \text{ sowie noch}$$

$$s = \int \sqrt{1 + tang.\, \alpha^2} \,.\, \partial x = \int \frac{\partial y}{sin.\, \alpha} = \int \frac{\partial x}{cos.\, \alpha}.$$

Ist nun die Gleichung zwischen zwei der Größen x, y, s und α gegeben, so kann man hiernach auch Gleichungen zwischen je zwei anderen dieser Größen finden. Ist z. B. $cos.\, \alpha = \frac{s}{\sqrt{c^2 + s^2}}$, so hat man:

$$\partial x = \partial s \, cos.\, \alpha = \frac{s \partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}} \text{ und}$$

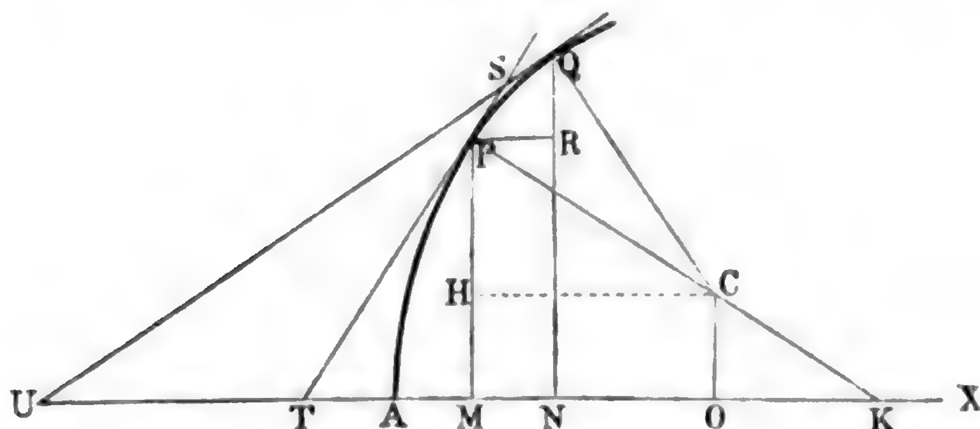
$$x = \int \frac{s \partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}} = {}^1/_2 \int \frac{2 s \partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}} = {}^1/_2 \int \frac{\partial u}{\sqrt{u}} = {}^1/_2 \int u^{-1/2} \partial u = u^{1/2} \partial u$$

$= \sqrt{c^2 + s^2} + Con.$, und wenn nun x und s zugleich Null sind:

$$x = \sqrt{c^2 + s^2} - c.$$

Art. 33. Eine Gerade winkelrecht zur Tangente PT, Fig. 44, ist auch

Fig. 44.



normal zur Berührungsstelle P der Curve, weil die Tangente die Richtung dieser Stelle angiebt. Das Stück PK dieser Linie vom Berührungspunkte P bis zur Abscissenaxe, heißt Normale schlechtweg, und die Projection MK desselben in der Abscissenaxe Subnormale. Für die letztere hat man, da der Winkel MPK dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$ gleich ist:

$$MK = MP \,.\, tang.\, \alpha, \text{ d. i.:}$$

$$\text{die } Subnormale = y \, tang.\, \alpha = y \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Da für das Curvensystem $y = x^m$, $tang.\, \alpha = m\, x^{m-1}$ ist, so folgt hier die $Subnormale = m\, x^m \,.\, x^{m-1} = m\, x^{2m-1} = \frac{m\, y^2}{x}$, und für die gemeine Parabel, deren Gleichung $y^2 = p\, x$ ist, hat man

$$\text{die } Subnormale = y\, \frac{p}{2y} = \frac{p}{2};$$

also constant.

Errichtet man ferner in einem zweiten, der Stelle P unendlich nahen Punkte Q eine andere Normallinie QC, so erhält man in dem Durchschnittspunkte zwischen beiden Linien das Centrum C für einen durch beide Berührungspunkte P und Q zu beschreibenden Kreis, den sogenannten Krümmungskreis, und es sind die Stücke CP und CQ der Normallinien die Halbmesser dieses Kreises oder die sogenannten Krümmungshalbmesser. Jedenfalls ist dieser Kreis derjenige unter allen durch P und Q zu legenden Kreisen, welcher sich am meisten an das Curvenelement PQ anschmiegt, und deshalb anzunehmen, daß sein Bogen PQ mit dem Curvenelemente PQ zusammenfalle.

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser $CP = CQ$ durch r, den Curvenbogen AP durch s, also sein Element PQ durch ∂s, und den Tangentenwinkel oder Bogen von PTM durch α, also sein Element $SUM - STM$, d. i. $- UST = - PCQ$, durch $\partial \alpha$, so haben wir einfach,

da $PQ = CP$. Bogen des Winkels PCQ ist, $\partial s = -r \partial \alpha$, und folglich den Krümmungshalbmesser: $r = -\frac{\partial s}{\partial \alpha}$.

Fig. 45.

Gewöhnlich läßt sich α nur mittels der Coordinatengleichung bestimmen, indem man setzt: $tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$.

Nun ist aber noch: $\partial\, tang.\, \alpha = \frac{\partial \alpha}{cos.\, \alpha^2}$ und $cos.\, \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}$,

daher hat man: $\partial \alpha = cos.\, \alpha^2 . \partial\, tang.\, \alpha = \frac{\partial x^2}{\partial s^2} . \partial\, tang.\, \alpha$, und

$$r = -\frac{\partial s}{cos.\, \alpha^2\, \partial\, tang.\, \alpha} = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\, \partial\, tang.\, \alpha}.$$

Für eine convexe Curve ist $r = +\frac{\partial s}{\partial \alpha} = +\frac{\partial s^3}{\partial x^2\, \partial\, tang.\, \alpha}$, und für einen Wendepunkt, $r = \infty$.

Für die Coordinaten $AO = u$ und $OC = v$ des Krümmungsmittelpunktes C ist

$u = AM + HC = x + CP\, sin.\, CPH$, d. i. $u = x + r\, sin.\, \alpha$, sowie
$v = OC = MP - HP = y - CP\, cos.\, CPH$, d. i. $v = y - r\, cos.\, \alpha$.

Fig. 46.

Die stetige Folge der Krümmungsmittelpunkte giebt eine Curve, welche die Evolute von AP genannt, und deren Lauf durch die Coordinaten u und v bestimmt wird.

Wenn man die Ellipse ADA_1D_1, Figur 46, mit einem Kreise ABA_1B_1 in Verbindung bringt, so kann man die Coordinaten $CM = x$ und $MQ = y$ derselben durch den Centriwinkel $PCB = \varphi$ des Kreises ausdrücken. Es ist nämlich:

$$x = CP\,sin.\,CPM = CP\,sin.\,BCP = a\,sin.\,\varphi \text{ und}$$

$$y = MQ = \frac{b}{a}MP = \frac{b}{a}CP\,cos.\,CPM = b\,cos.\,\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\partial x = a\,cos.\,\varphi\,\partial\varphi \text{ und } \partial y = -b\,sin.\,\varphi\,\partial\varphi,$$

folglich für den Tangentenwinkel $QTX = \alpha$ der Ellipse:

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b\,sin.\,\varphi}{a\,cos.\,\varphi} = -\frac{b}{a}tang.\,\varphi,$$

also für dessen Nebenwinkel $QTC = \alpha_1 = 180^0 - \alpha$:

$$tang.\,\alpha_1 = \frac{b}{a}tang.\,\varphi \text{ und } cotg.\,\alpha_1 = \frac{a}{b}cotg.\,\varphi.$$

Hiernach ist die Subtangente der Ellipse:

$$MT = MQ\,cotg.\,MTQ$$
$$= y\,cotg.\,\alpha_1 = \frac{a\,y}{b}cotg.\,\varphi = y_1\,cotg.\,\varphi,$$

wenn y_1 die Ordinate MP des Kreises bezeichnet. Da bei dem letzteren die Tangente PT rechtwinkelig auf dem Halbmesser CP steht, so ist auch $PTM = PCB = \varphi$, und daher die Subtangente desselben ebenfalls $MT = MP\,cotg.\,MTP = y_1\,cotg.\,\varphi$. Es haben also die beiden Punkte P und Q des Kreises und der Ellipse, welche einerlei Abscisse angehören, eine und dieselbe Subtangente MT.

Ferner ist für das elliptische Bogenelement:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = (a^2\,cos.\,\varphi^2 + b^2\,sin.\,\varphi^2)\,\partial\varphi^2,$$

und das Differenzial von $tang.\,\alpha$, d. i.:

$$\partial\,tang.\,\alpha = -\frac{b}{a}\,\partial\,tang.\,\varphi = -\frac{b}{a}\frac{\partial\varphi}{cos.\,\varphi^2},$$

daher folgt der Krümmungshalbmesser der Ellipse:

$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\,\partial\,tang.\,\alpha} = \frac{(a^2\,cos.\,\varphi^2 + b^2\,sin.\,\varphi^2)^{3/2}}{a^2\,cos.\,\varphi^2\,.\,\dfrac{b}{a\,cos.\,\varphi^2}}$$

$$= \frac{(a^2\,cos.\,\varphi^2 + b^2\,sin.\,\varphi^2)^{3/2}}{a\,b}.$$

Z. B. für $\varphi = 0$, also $sin.\,\varphi = 0$ und $cos.\,\varphi = 1$, folgt der größte Krümmungshalbmesser:

$$r_m = \frac{a^3}{a\,b} = \frac{a^2}{b},$$

und dagegen für $\varphi = 90^0$, also $sin.\,\varphi = 1$ und $cos.\,\varphi = 0$, ergiebt sich der **kleinste** Krümmungshalbmesser:

$$r_n = \frac{b^3}{a\,b} = \frac{b^2}{a}.$$

Der erstere Werth von r entspricht der Stelle D, und der letztere dem Punkte A; beide sind durch die Axenstücke CL und CK bestimmt, welche die in den Endpunkten A_1 und D auf der Sehne $A_1\,D$ errichteten Perpendikel von C aus abschneiden.

Art. 34. Viele Functionen, welche in der Anwendung auf die Praxis vorkommen, lassen sich aus den oben kennen gelernten Hauptfunctionen:

$$y = x^m,\ y = e^x \text{ und } y = sin.\,x,\ y = cos.\,x \text{ u. s. w.}$$

zusammensetzen, und es sind daher auch ihre Eigenschaften, betreffend die Tangentenlage, Quadratur, Krümmungshalbmesser u. s. w. leicht mit Hülfe der vorstehenden Lehren aufzusuchen, sowie auch die ihnen entsprechenden Curven zu construiren, wie folgendes Beispiel zeigen wird.

Für die Curve, welche der Gleichung:

$$y = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) = x^2 - {}^1\!/_3\,x^3 \text{ entspricht, ist}$$

$$\partial y = 2\,x\,\partial x - x^2\,\partial x, \text{ folglich}$$

$$tang.\,\alpha = 2\,x - x^2 = x\,(2 - x).$$

Da diese Tangente für $x = 0$ und $x = 2$, Null ausfällt, so hat sie in den Punkten, welche diesen Abscissenwerthen zukommen, die Richtung der Abscissenaxe. Ferner ist:

$$\partial\,tang.\,\alpha = 2\,\partial x - 2\,x\,\partial x = 2\,(1 - x)\,\partial x, \text{ wonach also}$$

für $x = 0,\ \partial\,tang.\,\alpha = +\,2\,\partial x$, und

für $x = 2,\ \partial\,tang.\,\alpha = -\,\partial x$

ausfällt, und daher die Ordinate des ersten Punktes ein **Minimum**, dagegen die des zweiten Punktes ein **Maximum** ist. Setzt man $\partial\,tang.\,\alpha = 0$, so ergeben sich dadurch die Coordinaten $x = 1$ und $y = {}^2\!/_3$ des **Wendepunktes**, in welchem sich das concave Curvenstück an das convexe anschließt.

Ferner ist für das Curvenelement ∂s:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 + x^2\,(2 - x)^2\,\partial x^2 = [1 + x^2\,(2 - x)^2]\,\partial x^2,$$

und daher der Krümmungshalbmesser der Curve:

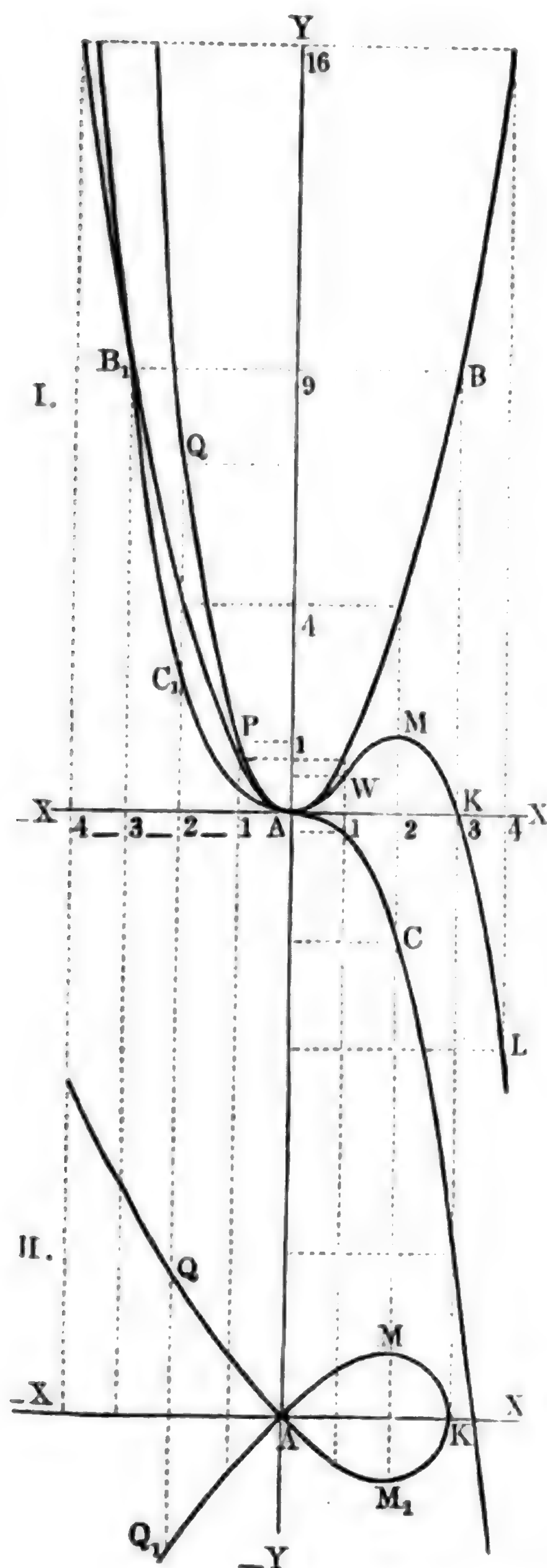
$$r = -\,\frac{\partial s^3}{\partial x^2\,\partial\,tang.\,\alpha} = -\,\frac{[1 + x^2\,(2 - x)^2]^{3/2}}{2\,(1 - x)},$$

z. B. für $x = 0,\ r = \frac{-1}{2} = -\,{}^1\!/_2$, für $x = 1,\ r = -\,\frac{2^{3/2}}{0} = \infty$,

für $x = 2,\ r = \frac{-1}{-2} = +\,{}^1\!/_2$, für $x = 3,\ r = {}^1\!/_4\,.\,10^{3/2} = +\,7{,}906$.

Die entsprechende Curve ist in Fig. 47 vor Augen geführt, worin A den

Fig. 47.



Ursprung der Coordinaten, und $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ die Coordinatenaxen darstellen. Dem ersten Theil $y_1 = x^2$ der Gleichung entspricht die Parabel $B A B_1$, welche sich von A aus zu beiden Seiten der Axe $A Y$ symmetrisch hinzieht, dem zweiten Theil $y_2 = -\,^1/_3\, x^3$ gehört dagegen die Curve $C A C_1$ an, welche sich auf der rechten Seite von $Y\overline{Y}$ unter, und auf der linken Seite von $Y\overline{Y}$ über der Abscissenaxe $X\overline{X}$ hinzieht, und sich dabei immer mehr und mehr von $X\overline{X}$ entfernt, je weiter sie von $Y\overline{Y}$ abrückt. Um für eine gegebene Abscissenaxe x den entsprechenden Punkt der Curve $y = x^2 - \,^1/_3\, x^3$ zu bestimmen, kommt es nur darauf an, die dieser Abscisse zugehörigen Ordinaten der ersten Curven algebraisch zu addiren. Da z. B. für $x = 1$, $y_1 = 1$ und $y_2 = -\,^1/_3$ ist, folgt die entsprechende Ordinate des Punktes W, $y = y_1 + y_2 = 1 - \,^1/_3 = \,^2/_3$, ferner, da für $x = 2$, $y_1 = 4$ und $y_2 = -\,^8/_3$ ist, so folgt die Coordinate des Punktes M, $y = 4 - \,^8/_3 = \,^4/_3$, ebenso ergiebt sich für $x = 3$, $y = y_1 + y_2 = 9 - 9 = 0$, für $x = 4$, $y = 16 - \,^{64}/_3 = -\,^{16}/_3$, für $x = -1$, $y = 1 + \,^1/_3 = \,^4/_3$, für $x = -2$, $y = 4 + \,^8/_3 = \,^{20}/_3$ u. s. w., und man

ersieht, daß die letzte Curve von A aus rechts den Lauf $AWMKL\ldots$ hat, wobei sie anfangs über der Abscisse $AK = 3$ hinläuft, sich aber von da aus weiter bis ins Unendliche unter $X\overline{X}$ hinabzieht, und daß sie von A aus links nur einen ins Unendliche aufsteigenden Zweig $APQ\ldots$ bildet. Auch ist nach dem Obigen, W ein Wende-, sowie M ein Maximalpunkt der Curve. Während die Curve in A und M die Richtung von $X\overline{X}$ hat, steigt sie in W unter dem Winkel $\alpha = 45$ Grad auf, weil für denselben *tang.* $\alpha = x(2-x) = 1$ ist, dagegen ist für den Neigungswinkel in K, *tang.* $\alpha = -3$, folglich $\alpha = 71^0\,34'$ u. s. w.

Die Quadratur der Curve ist durch das Integral

$$F = \int y\,\partial x = \int (x^2 - {}^1\!/_3\,x^3)\,\partial x = \int x^2\,\partial x - {}^1\!/_3 \int x^3\,\partial x$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} = \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{x}{4}\right) \text{ vollzogen.}$$

Hiernach folgt z. B. für das Flächenstück $AWMK$ über $AK = 3$, der Inhalt $F = \frac{3^3}{3}\,(1 - {}^3\!/_4) = {}^9\!/_4$, und dagegen der Inhalt des Flächenstückes $\overline{3L4}$, über dem Abscissenstücke $\overline{34}$, $F_1 = \frac{4^3}{3}(1 - {}^4\!/_4) - \frac{3^3}{3}(1 - {}^3\!/_4) = 0 - {}^9\!/_4 = -{}^9\!/_4$.

Um endlich noch die Länge eines Curvenstückes, z. B. von AWM, zu finden, setzen wir

$$s = \int \sqrt{1 + x^2(2-x)^2}\,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,\partial x,$$

und bringen die im Artikel 30 abgehandelte Integrationsmethode zur Anwendung. Es ist hier $c = 0$, und $c_1 = 2$; nimmt man $n = 4$ an, so folgt $\partial x = \frac{c_1 - c}{n} = \frac{2-0}{4} = {}^1\!/_2$, und setzt man nun für x nach und nach die Werthe 0, $^1\!/_2$, 1, $^3\!/_2$ und 2 in die Function

$\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2(2-x)^2}$ ein, so erhält man die Werthe:

$\varphi(0) = \sqrt{1} = 1$, $\varphi({}^1\!/_2) = \sqrt{1 + {}^9\!/_{16}} = {}^5\!/_4$,

$\varphi(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$

$\varphi({}^3\!/_2) = \sqrt{1 + {}^9\!/_{16}} = {}^5\!/_4$ und $\varphi(2) = \sqrt{1} = 1$,

und daher die Länge des Bogens AWM:

$$s = \Big(\varphi(0) + 4\,\varphi({}^1\!/_2) + 2\,\varphi(1) + 4\,\varphi({}^3\!/_2) + \varphi(2)\Big)\frac{c_1 - c}{3\,.\,4}$$

$$= (1 + 5 + 2{,}828 + 5 + 1)\,.\,{}^1\!/_6 = 2{,}471.$$

Mittels der Curve $y = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ läßt sich nun auch leicht der Lauf der Curve $y = x\sqrt{1 - \frac{x}{3}}$ angeben, denn wenn man aus den Coordinatenwerthen der ersteren die Quadratwurzeln auszieht, ergeben sich die entsprechenden Coordinaten der letzteren. Da die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen imaginär sind, so erstreckt sich diese Curve nicht über den Punkt K hinaus, und da jede Quadratwurzel aus positiver Zahl zwei gleich große entgegengesetzte Werthe hat, so läuft die neue Curve (II.) in zwei symmetrischen Zweigen $QAMK$ und $Q_1 A M_1 K$ zu beiden Seiten der Abscissenaxe $X\overline{X}$ hin.

Art. 35. Wenn der Quotient $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ aus zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für einen gewissen Werth a von x den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ annimmt, welches stets eintritt, wenn, wie z. B. in $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, Zähler und Nenner eines Bruches einen Factor $x - a$ gemeinschaftlich haben, so kann man den wirklichen Werth derselben finden, wenn man Zähler und Nenner jeden für sich differenziirt.

Wächst x um das Element ∂x und entsprechend y um das Element ∂y, so erhält man:

$$y + \partial y = \frac{\varphi(x) + \partial\varphi(x)}{\psi(x) + \partial\psi(x)}.$$

Nun ist aber für $x = a$:

$$\varphi(x) = 0 \text{ und } \psi(x) = 0,$$

daher hat man für diesen Fall:

$$y + \partial y = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\psi(x)},$$

oder, da ∂y als unendlich kleine Größe gegen y verschwindet:

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\psi(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},$$

wo $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ die Differenzialquotienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnen.

Stellt sich $y = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$ wieder $= \frac{0}{0}$ heraus, so kann man von Neuem differenziiren, und

$$y = \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial\psi_1(x)} = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} \text{ setzen u. s. w.}$$

Auf gleiche Weise sind auch die unbestimmten Ausdrücke $y = \frac{\infty}{\infty}$ und

$0 . \infty$ u. s. w. zu behandeln, da $\infty = \frac{1}{0}$, folglich $\frac{\infty}{\infty}$ und $0 . \infty = \frac{0}{0}$ gesetzt werden können. Z. B.:

Für $y = \frac{3x^3 - 7x^2 - 8x + 20}{5x^3 - 21x^2 + 24x - 4}$ giebt für $x = 2$, $\frac{0}{0}$; es ist daher auch erlaubt,

$$y = \frac{\partial(3x^3 - 7x^2 - 8x + 20)}{\partial(5x^3 - 21x^2 + 24x - 4)} = \frac{9x^2 - 14x - 8}{15x^2 - 42x + 24}$$

zu setzen.

Nun fällt aber für $x = 2$, y wieder $= \frac{0}{0}$ aus, daher setzt man von Neuem:

$$y = \frac{\partial(9x^2 - 14x - 8)}{\partial(15x^2 - 42x + 24)} = \frac{18x - 14}{30x - 42} = \frac{9x - 7}{15x - 21} = \frac{11}{9}.$$

Es ist aber auch wirklich der Factor $x - 2$ zwei Mal in dem Zähler und Nenner der gegebenen Function enthalten. Dividirt man beide durch $x - 2$, so erhält man:

$$y = \frac{3x^2 - x - 10}{5x^2 - 11x + 2},$$

und wiederholt man diese Division im letzten Werthe, so stellt sich

$$y = \frac{3x + 5}{5x - 1},$$

also $x = 2$ gesetzt: $y = \frac{11}{9}$ heraus.

Ferner: $y = \frac{a - \sqrt{a^2 - x}}{x}$ giebt für $x = 0$, $\frac{0}{0}$.

Nun ist aber:

$$\partial\left(a - \sqrt{a^2 - x}\right) = -\partial(a^2 - x)^{1/2} = \frac{1/2\, \partial x}{\sqrt{a^2 - x}},$$

daher folgt für diesen Fall: $y = \frac{1/2}{\sqrt{a^2 - x}} = \frac{1}{2a}$.

Ferner in $y = \frac{ln\, x}{\sqrt{1 - x}}$, $x = 1$ gesetzt, folgt $y = \frac{0}{0}$; nun ist aber:

$$\partial\, ln. x, = \frac{\partial x}{x} \text{ und } \partial \sqrt{1 - x} = -\frac{\partial x}{2\sqrt{1 - x}},$$

daher folgt $y = -\frac{2\sqrt{1 - x}}{x} = \frac{2 . 0}{1} = 0$.

Endlich:

$$y = \frac{1 - sin. x + cos. x}{-1 + sin. x + cos. x} \text{ giebt für } x = \frac{\pi}{2} \ (90^0),$$

$$y = \frac{1 - 1 + 0}{-1 + 1 + 0} = \frac{0}{0};$$

daher ist auch

$$y = \frac{\partial (1 - sin. x + cos. x)}{\partial (-1 + sin. x + cos. x)} = \frac{- cos. x - sin. x}{cos. x - sin. x}$$

$$= \frac{-0 - 1}{0 - 1} = 1$$

zu setzen.

Art. 36. Wenn für eine Function $y = \alpha u + \beta v$ eine Reihe von zusammengehörigen Werthen der Variablen u, v und y durch Beobachtung oder Messung gefunden worden ist, so kann man nach denjenigen Werthen der Constanten α und β fragen, welche von den kleinen zufälligen und ungesetzmäßigen Beobachtungs- oder Messungsfehlern möglichst befreit sind und daher auch den Zusammenhang zwischen den Größen u, v und y, wovon u und v auch bekannte Functionen einer und derselben Variablen x bedeuten können, möglichst genau ausdrücken. Unter allen Regeln, welche man zur Beantwortung dieser Frage, d. i. zur Ausmittelung der möglich oder wahrscheinlich richtigsten Werthe der Constanten anwendet, ist die sogenannte **Methode der kleinsten Quadrate** die allgemeinste und wissenschaftlich begründetste.

Sind

$$\left\{\begin{matrix} u_1, & v_1, & y_1 \\ u_2, & v_2, & y_2 \\ u_3, & v_3, & y_3 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ u_n, & v_n, & y_n \end{matrix}\right\}$$

die der Function $y = \alpha u + \beta v$ entsprechenden Resultate der Beobachtung, so hat man für die Beobachtungsfehler und deren Quadrate folgende Werthe:

$$\left\{\begin{matrix} z_1 = y_1 - (\alpha u_1 + \beta v_1) \\ z_2 = y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2) \\ z_3 = y_3 - (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \\ z_n = y_n - (\alpha u_n + \beta v_n) \end{matrix}\right\}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} z_1^2 = y_1^2 - 2\alpha u_1 y_1 - 2\beta v_1 y_1 + \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\beta u_1 v_1 + \beta^2 v_1^2 \\ z_2^2 = y_2^2 - 2\alpha u_2 y_2 - 2\beta v_2 y_2 + \alpha^2 u_2^2 + 2\alpha\beta u_2 v_2 + \beta^2 v_2^2 \\ z_3^2 = y_3^2 - 2\alpha u_3 y_3 - 2\beta v_3 y_3 + \alpha^2 u_3^2 + 2\alpha\beta u_3 v_3 + \beta^2 v_3^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n^2 = y_n^2 - 2\alpha u_n y_n - 2\beta v_n y_n + \alpha^2 u_n^2 + 2\alpha\beta u_n v_n + \beta^2 v_n^2 \end{array}\right\},$$

und erhält nun für die Summe der Fehlerquadrate, wenn man sich der Abkürzung wegen des Summationszeichens Σ bedient, um eine Summation gleichartiger Größen anzuzeigen, also $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2 = \Sigma(y^2)$, $v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \cdots + v_n y_n = \Sigma(v y)$ setzt, u. s. w.:

$$\Sigma(z^2) = \Sigma(y^2) - 2\alpha\Sigma(u y) - 2\beta\Sigma(v y) + \alpha^2\Sigma(u^2) + 2\alpha\beta\Sigma(u v) + \beta^2\Sigma(v^2).$$

In dieser Gleichung sind natürlich außer der als Abhängigvariablen zu behandelnden Fehlerquadratsumme $\Sigma(z^2)$ nur die hier als Urvariable anzusehenden Constanten α und β der Function $y = \alpha u + \beta v$ unbekannt. Die Methode der kleinsten Quadrate fordert nun, sowohl α als auch β so zu wählen, daß die Quadratsumme $\Sigma(z^2)$ zum Minimum werde; und deshalb müssen wir die gewonnene Function für $\Sigma(z^2)$ ein Mal in Beziehung auf α und ein Mal in Beziehung auf β differenziiren, und jeden der sich herausstellenden Differenzialquotienten von $\Sigma(z^2)$ gleich Null setzen. Dadurch stößt man auf folgende zwei Bestimmungsgleichungen für α und β:

$$-\Sigma(u y) + \alpha\Sigma(u^2) + \beta\Sigma(u v) = 0,$$
$$-\Sigma(v y) + \beta\Sigma(v^2) + \alpha\Sigma(u v) = 0;$$

deren Auflösung auf folgende Ausdrücke führt:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(u y) - \Sigma(u v)\Sigma(v y)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(u v)\Sigma(u v)} \text{ und}$$

$$\beta = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(v y) - \Sigma(u v)\Sigma(u y)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(u v)\Sigma(u v)}$$ (vgl. „Ingenieur“ S. 77).

Diese Formeln gehen für eine Function $y = a + \beta v$, da hier $u = 1$, also $\Sigma(u v) = \Sigma(v)$, $\Sigma(u y) = \Sigma(y)$ und $\Sigma(u^2) = 1 + 1 + 1 + \cdots = n$, d. i. die Anzahl der Gleichungen oder Beobachtungen ist, in folgende über:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(y) - \Sigma(v)\Sigma(v y)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)},$$

$$\beta = \frac{n\Sigma(v y) - \Sigma(v)\Sigma(y)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)}.$$

Für die noch einfachere Function $y = \beta v$, wo α = Null ist, erhält man:

$$\beta = \frac{\Sigma(v y)}{\Sigma(v^2)},$$

und endlich für den einfachsten Fall $y = \alpha$, wo es sich also um die Ausmittelung des wahrscheinlichsten Werthes einer einzigen Größe handelt, ist

$$\alpha = \frac{\Sigma(y)}{n},$$

also dieser Werth das arithmetische Mittel aus allen durch Messungen oder Beobachtungen gefundenen Werthen.

Beispiel. Um das Gesetz einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, d. i. deren Anfangsgeschwindigkeit c und Beschleunigungsmaß p kennen zu lernen, hat man die verschiedenen Zeiten t_1, t_2, t_3 u. s. w. entsprechenden Räume oder Wege s_1, s_2, s_3 u. s. w. gemessen, und dabei Folgendes gefunden:

Zeiten	0	1	3	5	7	10 Sec.
Räume	0	5	20	38	58½	101 Fuß.

Ist nun $s = c\,t + \frac{p\,t^2}{2}$ das dieser Bewegung zu Grunde liegende Bewegungsgesetz, so handelt es sich um die Ermittelung der Constanten c und p. Setzt man in die obigen Formeln $u = t$ und $v = t^2$, sowie $\alpha = c$, $\beta = \frac{p}{2}$ und $y = s$, so erhält man zur Berechnung von c und p folgende Formeln:

$$c = \frac{\Sigma(t^4)\,\Sigma(s\,t) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(s\,t^2)}{\Sigma(t^2)\,\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(t^3)} \text{ und}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\Sigma(t^2)\,\Sigma(s\,t^2) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(s\,t)}{\Sigma(t^2)\,\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(t^3)},$$

wonach sich folgende Rechnung führen läßt:

t	t^2	t^3	t^4	s	$s\,t$	$s\,t^2$
1	1	1	1	5	5	5
3	9	27	81	20	60	180
5	25	125	625	38	190	950
7	49	343	2401	58,5	409,5	2866,5
10	100	1000	10000	101	1010	10100
Summen	184 $= \Sigma(t^2)$	1496 $= \Sigma(t^3)$	13108 $= \Sigma(t^4)$	222,5 $= \Sigma(s)$	1674,5 $= \Sigma(s\,t)$	14101,5 $= \Sigma(s\,t^2)$.

Hieraus bestimmt sich:

$$c = \frac{13108 \,.\, 1674{,}5 - 1496 \,.\, 14101{,}5}{184 \,.\, 13108 - 1496 \,.\, 1496} = \frac{85340}{17386} = 4{,}908 \text{ Fuß und}$$

$$\tfrac{1}{2} p = \frac{184 \,.\, 14101{,}5 - 1496 \,.\, 1674{,}5}{184 \,.\, 13108 - 1496 \,.\, 1496} = \frac{89624}{173860} = 0{,}5155 \text{ Fuß},$$

und daher folgende Formel für die beobachtete Bewegung:

$$s = 4{,}908\, t + 0{,}5155 \,.\, t^2.$$

Nach dieser Formel hat man:

für die Zeiten . . .	0	1	3	5	7	10 Sec.
die Räume	0	5,43	19,36	37,43	59,62	100,63 Fuß.

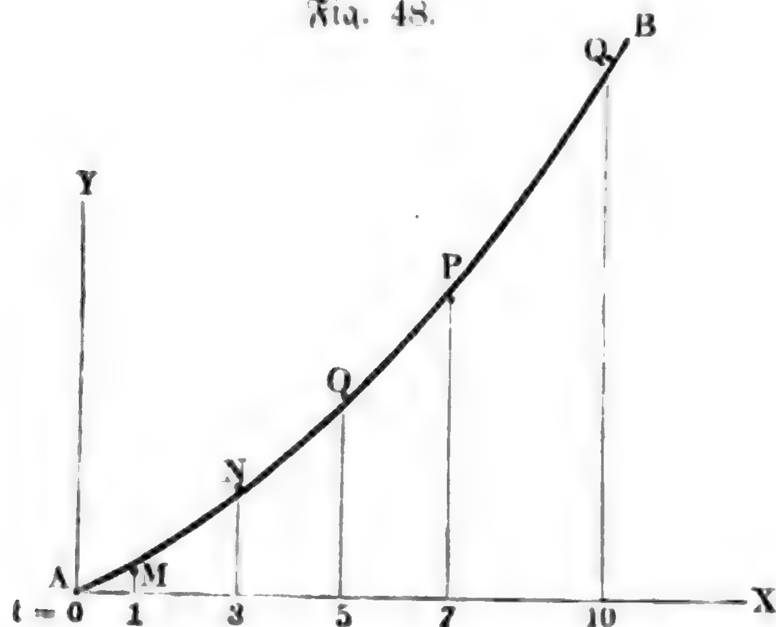


Fig. 48.

Wenn man die Zeiten (t) als Abscissen und sowohl die beobachteten als auch die berechneten Wege (s) als Ordinaten aufträgt, so läßt sich durch die Endpunkte der berechneten Coordinaten eine Curve AB, Fig. 48, legen, welche sich zwischen den durch die beobachteten Coordinaten bestimmten Punkten M, N, O, P, Q so hinzieht, daß die Quadratsumme der Abweichungen derselben von diesen Punkten beiderseits möglichst klein ausfallen.

Art. 37. Kommt es darauf an, in Ermangelung einer Formel für das stetige Fortschreiten einer Größe y oder ihre Abhängigkeit von einer anderen Größe x, einen Werth der Größe y, welcher einem gegebenen Werthe von x entspricht, mittels entweder aus Erfahrung bekannter oder aus einer Tabelle entnommener Werthe von x und y zu bestimmen, so wendet man das sogenannte **Interpolationsverfahren** an, von welchem hier nur das Wichtigste mitgetheilt werden soll.

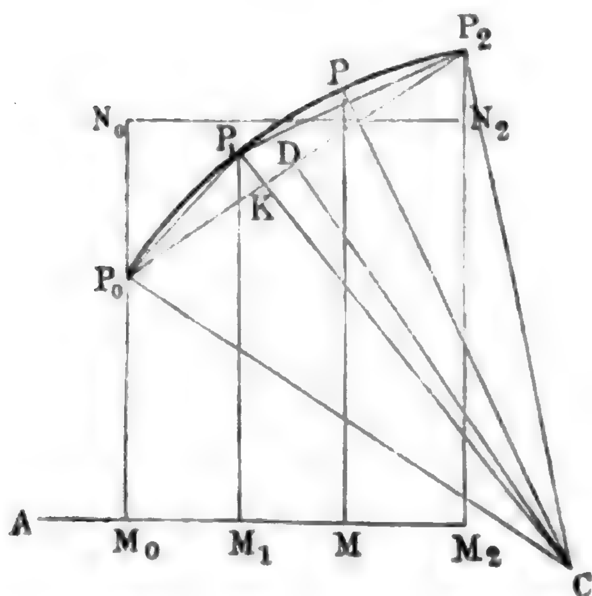


Fig. 49.

Wenn die Abscissen $AM_0 = x_0$, $AM_1 = x_1$ und $AM_2 = x_2$, Fig. 49, und die zugehörigen Ordinaten

$M_0 P_0 = y_0$, $M_1 P_1 = y_1$ und $M_2 P_2 = y_2$ gegeben sind, so kann man die einer neuen Absciffe $AM = x$ entsprechende Ordinate $MP = y$ durch die Formel $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ ausdrücken, wofern die drei dadurch bestimmten Punkte P_1, P_2, P_3 nahe in einer geraden Linie oder in einem wenig gekrümmten Bogen liegen. Legt man den Coordinatenanfangspunkt von A nach M_0, so wird dadurch der Allgemeinheit nicht geschadet, wir bekommen aber dann einfach für $x = 0$, $y = \alpha$ und folglich das constante Glied $\alpha = y_0$.

Führen wir nun ein Mal x_1 und y_1 und ein anderes Mal x_2 und y_2 in die fingirte Gleichung ein, so erhalten wir folgende zwei Bestimmungsgleichungen:

$$y_1 - y_0 = \beta x_1 + \gamma x_1^2 \text{ und}$$
$$y_2 - y_0 = \beta x_2 + \gamma x_2^2, \text{ woraus sich}$$
$$\beta = \frac{(y_1 - y_0) x_2^2 - (y_2 - y_0) x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2} \text{ und}$$
$$\gamma = \frac{(y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1} \text{ ergiebt.}$$

Es ist also hiernach:

$$y = y_0 + \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2^2 - (y_2 - y_0) x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2}\right) x$$
$$+ \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}\right) x^2.$$

Läge die Ordinate y_1 mitten zwischen y_0 und y_2, so hätte man $x_2 = 2 x_1$ und daher einfacher:

$$y = y_0 - \left(\frac{3 y_0 - 4 y_1 + y_2}{2 x_1}\right) x + \left(\frac{y_0 - 2 y_1 + y_2}{2 x_1^2}\right) x^2.$$

Sind nur zwei Paar Coordinaten x_0, y_0 und x_1, y_1 gegeben, so muß man die Begrenzungslinie $P_0 P_1$ als gerade Linie ansehen, und folglich

$$y = y_0 + \beta x,$$

also auch
$$y_1 = y_0 + \beta x_1,$$

setzen, wonach
$$\beta = \frac{y_1 - y_0}{x_1} \text{ und}$$

$$y = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1}\right) x \text{ folgt.}$$

Wenn verlangt wird, zwischen den Ordinaten y_0, y_1, y_2 eine vierte Ordinate y durch Construction zu interpoliren, so legt man durch die Endpunkte P_0, P_1, P_2 dieser Ordinaten einen Kreis, und nimmt y gleich der

Ordinate desselben. Das Centrum C dieses Kreises wird auf die bekannte Weise dadurch bestimmt, daß man die Punkte P_0, P_1, P_2 mit einander durch gerade Linien verbindet und in den Mittelpunkten derselben Perpendikel errichtet; der Durchschnitt C dieser Perpendikel unter einander ist das gesuchte Centrum.

Sind die Entfernungen des mittleren Punktes P_1 von den beiden anderen Punkten P_0 und P_2, s_0 und s_2, und ist der Abstand $P_1 K$ des Punktes P_1 von der Verbindungslinie $s_1 = P_0 P_2$, $= h$, so hat man für den Peripheriewinkel $\alpha = P_1 P_0 P_2 = 1/2$ Centriwinkel $P_1 C P_2$:

$$sin.\,\alpha = \frac{h}{s_0}$$

und folglich für den Krümmungshalbmesser $CP = CP_0 = CP_1 = CP_2$:

$$r = \frac{s_2}{2\,sin.\,\alpha} = \frac{s_0\,s_2}{2\,h}.$$

Man findet folglich das Centrum C des durch P_0, P_1, P_2 gehenden Kreises, wenn man mit dem nach dieser Formel berechneten Halbmesser r aus P_0 oder P_1 oder P_2 das in der Mitte D der Sehne $P_0 P_2$ errichtete Perpendikel durchschneidet.

Art. 38. Das Mittel sämmtlicher Ordinaten über der Grundlinie $M_0 M_2$ ist die Höhe eines Rechteckes $M_0 M_2 N_2 N_0$, über derselben Grundlinie $M_0 M_2$, welches mit der Fläche $M_0 M_2 P_2 P_1 P_0$ einerlei Inhalt hat, und läßt sich daher aus diesem Flächenraume leicht bestimmen. Nach Artikel 29 ist derselbe:

$$F = \int_0^{x_2} y\,\partial x = \int_0^{x_2} (y_0 + \beta x + \gamma x^2)\,\partial x$$

$$= y_0 x_2 + \frac{\beta x_2^2}{2} + \frac{\gamma x_2^3}{3}$$

$$= y_0 x_2 + \left(\frac{(y_1 - y_0)\,x_2^2 - (y_2 - y_0)\,x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2}\right)\frac{x_2^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{(y_1 - y_0)\,x_2 - (y_2 - y_0)\,x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}\right)\frac{x_2^3}{3}$$

$$= \left(y_0 + \frac{(y_1 - y_0)\,x_2^2}{6\,x_1\,(x_2 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_0)\,(3\,x_1 - 2\,x_2)}{6\,(x_2 - x_1)}\right) x_2$$

$$= \left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right) x_2 + \left(\frac{(y_1 - y_0)\,x_2 - (y_2 - y_0)\,x_1}{6\,x_1\,(x_2 - x_1)}\right) x_2^2,$$

und folglich die mittlere Ordinate:

$$y_m = \frac{F}{x_2} = \frac{y_0 + y_2}{2} + \left(\frac{(y_1 - y_0)\,x_2 - (y_2 - y_0)\,x_1}{6\,x_1\,(x_2 - x_1)}\right) x_2.$$

Wäre $\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x_2}{x_1}$, so hätte man es mit einer geradlinigen Begrenzung zu thun, und es wäre dann einfach:

$$F = \left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right) x_2,$$

sowie

$$y_m = \frac{y_0 + y_2}{2}.$$

Wäre ferner bloß $x_2 = 2\,x_1$, also y_1 von den Grenzordinaten y_0 und y_2 gleichviel abstehend, so würde sein:

$$F = (y_0 + 4\,y_1 + y_2)\frac{x_2}{6} \text{ (siehe Art. 30), und}$$

$$y_m = \frac{y_0 + 4\,y_1 + y_2}{6}.$$

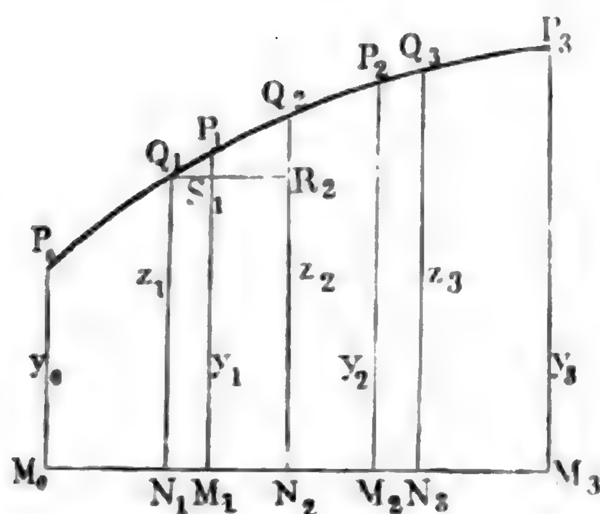


Fig. 50.

Ist ein Flächenraum $M_0\,M_3\,P_3\,P_0$, Fig. 50, durch vier Coordinaten $M_0\,P_0 = y_0$, $M_1\,P_1 = y_1$, $M_2\,P_2 = y_2$, $M_3\,P_3 = y_3$ bestimmt, welche in gleichen Abständen von einander stehen, so kann man die Größe desselben einfach annähernd auf folgende Weise bestimmen.

Bezeichnen wir die Grundlinie $M_0\,M_3$ durch x_3 und drei zwischen y_0 und y_3 in gleichen Abständen von einander eingeschaltete Ordinaten $N_1\,Q_1$, $N_2\,Q_2$, $N_3\,Q_3$ durch z_0, z_1, z_2, so können wir annähernd die Fläche:

$$M_0\,M_3\,P_3\,P_0 = F = (\tfrac{1}{2}\,y_0 + z_0 + z_1 + z_2 + \tfrac{1}{2}\,y_3)\frac{x_3}{4} \text{ setzen.}$$

Nun ist aber:

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{2\,z_1 + 2\,z_2 + 2\,z_3}{6} = \frac{2\,z_1 + z_2}{6} + \frac{2\,z_3 + z_2}{6} \text{ und}$$

$$y_1 = z_1 + \tfrac{1}{3}(z_2 - z_1) = \frac{2\,z_1 + z_2}{3}, \text{ sowie } y_2 = \frac{2\,z_3 + z_2}{3},$$

$$\text{daher folgt: } \frac{z_0 + z_1 + z_2}{3} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \text{ und}$$

$$F = [{}^1\!/\!_2\, y_0 + {}^3\!/\!_2\, (y_1 + y_2) + {}^1\!/\!_2\, y_3]\, \frac{x_3}{4}$$

$$= [y_0 + 3\,(y_1 + y_2) + y_3]\, \frac{x_3}{8}, \text{ sowie:}$$

$$y_m = \frac{y_0 + 3\,(y_1 + y_2) + y_3}{8}.$$

Während die vorige Formel für y_m zur Anwendung kommt, wenn die Fläche in eine gerade Anzahl von Streifen zerlegt ist, läßt sich die letztere anwenden, wenn die Anzahl dieser Flächentheile eine ungerade ist.

Hiernach kann man auch annähernd

$$\int_c^{c_1} y\,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,\partial x = [y_0 + 3\,(y_1 + y_2) + y_3]\, \frac{c_1 - c}{8}$$

setzen, wenn

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(\frac{2c + c_1}{3}\right),\ y_2 = \varphi\left(\frac{c + 2c_1}{3}\right) \text{ und } y_3 = \varphi(c_1)$$

vier bestimmte Werthe der Function $y = \varphi(x)$ sind.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ (s. Beispiel Art. 30) hat man $c = 1$, $c_1 = 2$ und $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, daher folgt

$$y_0 = {}^1\!/\!_1 = 1,\ y_1 = \frac{3}{2+2} = {}^3\!/\!_4,\ y_2 = \frac{3}{1+4} = {}^3\!/\!_5 \text{ und } y_3 = {}^1\!/\!_2,$$

und der angenäherte Werth dieses Integrals:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = [1 + 3\,({}^3\!/\!_4 + {}^3\!/\!_5) + {}^1\!/\!_2]\,.\,{}^1\!/\!_8 = \frac{111}{160} = 0{,}694.$$

Erster Theil.

Die allgemeinen Lehren der Mechanik.

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

Erstes Capitel.

Die einfache Bewegung.

Ruhe und Bewegung. Jeder Körper nimmt im Raume einen gewissen Ort ein, und ein Körper ist in Ruhe (franz. repos; engl. rest), wenn er seinen Ort nicht ändert; er ist hingegen in Bewegung (franz. mouvement; engl. motion), wenn er aus einem Orte nach und nach in andere übergeht. Ruhe und Bewegung eines Körpers sind entweder absolut oder relativ, je nachdem man den Ort desselben auf einen Raum bezieht, der entweder selbst in Ruhe oder in Bewegung ist, oder darin gedacht wird. §. 1

Auf der Erde giebt es keine Ruhe, denn alle Körper auf der Erde nehmen an ihrer Bewegung um die Sonne und um ihre eigene Axe Antheil; denken wir uns aber die Erde in Ruhe, so sind für uns auch alle diejenigen Erdkörper in Ruhe, welche ihren Ort in Beziehung auf die Erde nicht ändern.

Bewegungsarten. Die stetige Folge von Oertern, welche ein Körper in seiner Bewegung nach und nach einnimmt, bildet einen Raum, den man den Weg (franz. chemin, trajectoire; engl. way, trajectory) des bewegten Körpers nennt. Der Weg eines bewegten Punktes ist eine Linie. Der Weg eines geometrischen Körpers ist zwar wieder ein Körper, man versteht aber unter demselben gewöhnlich diejenige Linie, welche ein gewisser Punkt, z. B. der Mittelpunkt des Körpers, bei der Bewegung beschreibt. §. 2

Eine Bewegung ist geradlinig (franz. rectiligne; engl. rectilinear), wenn ihr Weg in einer geraden Linie besteht; sie ist aber krummlinig (franz. curviligne; engl. curvilinear), wenn der Weg des bewegten Körpers eine krumme Linie ist.

In Beziehung auf Zeit (franz. temps; engl. time) ist die Bewegung entweder gleichförmig oder ungleichförmig.

§. 3 Eine Bewegung ist gleichförmig (franz. uniforme; engl. uniform), wenn durch dieselbe in gleichen und beliebig kleinen Zeittheilchen gleiche Wege zurückgelegt werden; sie ist ungleichförmig (franz. varié; engl. variable), wenn diese Gleichheit nicht statthat. Werden mit dem Ablaufen der Zeit die in gleichen Zeittheilchen durchlaufenen Räume immer größer und größer, so heißt die ungleichförmige Bewegung beschleunigt (franz. accéléré; engl. increasing), nehmen diese aber immer mehr und mehr ab, so heißt sie verzögert (franz. retardé; engl. decreasing).

Von der gleichförmigen Bewegung ist die periodische Bewegung (franz. périodique; engl. periodic) dadurch unterschieden, daß bei dieser nur innerhalb gewisser endlicher Zeiträume, die man Perioden nennt, gleiche Räume durchlaufen werden.

Das beste Beispiel der gleichförmigen Bewegung giebt die scheinbare tägliche Umdrehung des Fixsternhimmels; nächstdem das Fortrücken der Zeiger einer Uhr. Beispiele der ungleichförmigen Bewegung geben fallende und in die Höhe geworfene Körper, der sinkende Wasserspiegel beim Ausfluß des Wassers aus Gefäßen u. s. w. Für die periodische Bewegung findet man Beispiele an den Pendelschwingungen, an den Kolbenspielen einer Dampfmaschine u. s. w.

§. 4 **Gleichförmige Bewegung.** Geschwindigkeit (franz. vitesse; engl. velocity) ist die Stärke oder Größe einer Bewegung. Je größer der Raum ist, welchen ein Körper innerhalb einer gewissen Zeit durchläuft, desto stärker ist auch seine Bewegung, oder desto größer ist auch seine Geschwindigkeit. Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit unveränderlich, bei einer ungleichförmigen Bewegung hingegen ändert sie sich in jedem Augenblicke. Das Maß der Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitpunkte ist der Weg, den der Körper von diesem an innerhalb der Zeiteinheit oder Secunde entweder wirklich zurücklegt oder zurücklegen würde, wenn von diesem Augenblicke oder Zeitpunkte an die Bewegung in eine gleichförmige überginge, also die Geschwindigkeit unveränderlich bliebe. Gewöhnlich nennt man dieses Maß schlechtweg Geschwindigkeit.

§. 5 Wenn ein Körper in jedem Zeittheilchen den Weg σ durchläuft, und die Zeitsecunde aus n (sehr vielen) solchen Zeittheilchen besteht, so ist der Weg innerhalb einer Secunde die Geschwindigkeit oder vielmehr das Geschwindigkeitsmaß:

$$c = n \,.\, \sigma.$$

Im Laufe einer Zeit t (Secunden) verfließen $n \,.\, t$ Zeittheilchen, und in

jedem wird der Raum σ zurückgelegt, es ist daher der ganze Weg (franz. l'espace; engl. the space), welcher der Zeit t entspricht:

$$s = n.t.\sigma = n.\sigma.t, \text{ d. i.}$$

I.) $s = ct$.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist also der Raum (s) ein Product aus Geschwindigkeit (c) und Zeit (t).

Umgekehrt ist:

II.) $c = \frac{s}{t}$ und

III.) $t = \frac{s}{c}$.

Beispiele. 1) Ein Dampfwagen, welcher mit einer Geschwindigkeit von 30 Fuß fortrollt, legt in zwei Stunden = 120 Minuten = 7200 Secunden den Weg $s = 30 . 7200 = 216000$ Fuß zurück. 2) Wenn zum Herausziehen einer Tonne aus einem 1200 Fuß tiefen Schachte eine Zeit von $4\frac{1}{2}$ Minuten = 270 Secunden nöthig ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit dieses Förder-gefäßes $(c) = \frac{1200}{270} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9} = 4{,}444 \ldots$ Fuß anzunehmen 3) Ein Pferd, welches sich mit 6 Fuß Geschwindigkeit fortbewegt, braucht zum Zurücklegen eines Weges von einer Meile oder 24000 Fuß die Zeit $t = \frac{24000}{6} = 4000$ Secunden oder 1 Stunde 6 Minuten und 40 Secunden.

Vergleicht man zwei verschiedene gleichförmige Bewegungen mit einander, so stößt man auf Folgendes: §. 6

Die Räume sind $s = ct$ und $s_1 = c_1 t_1$, es ist daher ihr Verhältniß $\frac{s}{s_1} = \frac{ct}{c_1 t_1}$. Setzt man nun $t_1 = t$, so hat man $\frac{s}{s_1} = \frac{c}{c_1}$; nimmt man $c_1 = c$, so erhält man $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; ist endlich $s_1 = s$, so folgt $\frac{c}{c_1} = \frac{t_1}{t}$.

Die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume verhalten sich also bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen wie die Geschwindigkeiten; die mit gleichen Geschwindigkeiten zurückgelegten Wege dagegen wie die Zeiten; die gleichen Räumen entsprechenden Geschwindigkeiten sind endlich den Zeiten umgekehrt proportional.

Gleichförmig veränderte Bewegung. Eine Bewegung ist gleichförmig verändert (franz. uniformément varié; engl. uniformly variable), wenn ihre Geschwindigkeit innerhalb gleicher, beliebig kleiner Zeittheilchen um gleichviel zu- oder abnimmt. Sie ist entweder gleichförmig beschleunigt (franz. uniformément accéléré; engl. uniformly accelerated), oder gleichförmig verzögert (franz. uniformément retardé; engl. uniformly retarded); §. 7

im ersten Falle findet ein allmäliges Wachsen, im zweiten ein stetiges Abnehmen an Geschwindigkeit statt.

Gleichförmig beschleunigt fällt ein Körper im luftleeren Raume, und gleichförmig verzögert würde das Steigen senkrecht in die Höhe geworfener Körper erfolgen, wenn die Luft keinen Einfluß auf den Körper ausübte.

§. 8 Die Stärke oder Größe der Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers heißt Acceleration oder Beschleunigung (franz. accélération; engl. acceleration); sie ist entweder positiv (Beschleunigung) oder negativ (Verzögerung, retardation), je nachdem eine Zu- oder eine Abnahme der Geschwindigkeit statt hat. Je mehr die Geschwindigkeit innerhalb einer gewissen Zeit zu- oder abnimmt, desto größer ist auch die Acceleration. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die Acceleration unveränderlich; es läßt sich daher auch dieselbe durch diejenige Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit messen, welche im Laufe einer Zeitsecunde stattfindet. Bei jeder anderen Bewegung hingegen ist das Maß der Acceleration diejenige Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit, welche ein Körper erhalten würde, wenn von dem Augenblicke an, für welchen man die Acceleration angeben will, dieselbe ihre Veränderlichkeit verlöre, die Bewegung also in eine gleichförmig veränderte überginge.

Sehr gewöhnlich nennt man dieses Maß selbst die Acceleration oder Beschleunigung.

§. 9 Wenn die Geschwindigkeit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in einem sehr kleinen (unendlich kleinen) Zeittheilchen um $\varkappa$ zunimmt, und die Zeitsecunde aus n (unendlich vielen) solchen Zeittheilchen besteht, so ist die Zunahme an Geschwindigkeit in einer Secunde, oder die sogenannte Acceleration: $p = n\varkappa$,
und die Zunahme nach t Secunden, $= nt.\varkappa = n\varkappa.t = pt$.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit (im Augenblicke, wo man die Zeit t zu zählen anfängt) $= c$, so hat man hiernach die Endgeschwindigkeit d. i. die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit:

$$v = c + pt.$$

Für die ohne Geschwindigkeit anfangende Bewegung ist $c = 0$, daher $v = pt$, und für die gleichförmig verzögerte, negative Acceleration $(-p)$ besitzende Bewegung ist:

$$v = c - pt.$$

Beispiele. 1) Die Acceleration eines im luftleeren Raume frei fallenden Körpers ist $= 31\frac{1}{4} = 31{,}25$ Fuß; es erlangt daher ein solcher nach 3 Secunden die Geschwindigkeit $v = pt = 31{,}25 \cdot 3 = 93{,}75$ Fuß. 2) Eine von einer schiefen Ebene herabrollende Kugel hat im Anfang schon die Geschwindigkeit $c = 25$ Fuß, und erlangt beim Herabrollen in jeder Secunde noch 5 Fuß

Zusatz an Geschwindigkeit; es ist daher ihre Geschwindigkeit nach $2^1/_2$ Secunden: $v = 25 + 5 \,.\, 2{,}5 = 25 + 12{,}5 = 37{,}5$ Fuß, d. h., sie wird, von dem letzten Zeitpunkte an gleichförmig fortgehend, in jeder Secunde 37,5 Fuß Weg zurücklegen. 3) Ein mit 30 Fuß Geschwindigkeit fortgehender Dampfwagen wird so gebremst, daß er in jeder Secunde 3,5 Fuß an Geschwindigkeit verliert, seine Acceleration also — 3,5 Fuß beträgt; es ist deshalb seine Geschwindigkeit nach 6 Secunden: $v = 30 - 3{,}5 \,.\, 6 = 30 - 21 = 9$ Fuß.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung. Innerhalb eines unendlich kleinen Zeittheilchens τ läßt sich die Geschwindigkeit einer jeden Bewegung als unveränderlich ansehen; man kann daher den in diesem Zeittheilchen durchlaufenen Raum §. 10

$$\sigma = v \,.\, \tau$$

setzen, und erhält so den in einer endlichen Zeit t durchlaufenen Raum, wenn man die Summe dieser kleinen Räume ermittelt. Nun ist aber für alle diese Räumchen die Zeit τ eine und dieselbe, es läßt sich daher auch ihre Summe gleichsetzen dem Producte aus eben diesen Zeittheilchen und aus der Summe der, gleichen Intervallen entsprechenden Geschwindigkeiten.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist aber die Summe $(0 + v)$ der Geschwindigkeiten im ersten und letzten Augenblicke so groß als die Summe $p\tau + (v - p\tau)$ der Geschwindigkeiten im zweiten und vorletzten Augenblicke, auch gleich der Summe $2p\tau + (v - 2p\tau)$ der Geschwindigkeiten im dritten und vorvorletzten Augenblicke u. s. w., und diese Summe überhaupt gleich der Endgeschwindigkeit v; es ist daher hier die Summe aller Geschwindigkeiten gleich dem Producte $\left(v \,.\, \frac{n}{2}\right)$ aus der Endgeschwindigkeit v und aus der halben Anzahl aller Zeittheilchen, und der durchlaufene Raum das Product $\left(v \,.\, \frac{n}{2} \,.\, \tau\right)$ aus der Endgeschwindigkeit v, der halben Anzahl der Zeittheilchen und der Größe eines solchen Theilchens. Nun giebt endlich die Größe (τ) eines Zeittheilchens, mit der Anzahl n derselben multiplicirt, die ganze Zeit t an, deshalb ist denn der innerhalb der Zeit t gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Raum:

$$s = \frac{v\,t}{2}.$$

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung fällt hiernach der Raum ebenso groß aus wie bei der gleichförmigen Bewegung, wenn die Geschwindigkeit der letzteren Bewegung halb so groß ist als die Endgeschwindigkeit der ersteren.

Beispiele. 1) Wenn ein Körper innerhalb 10 Secunden durch gleichförmig beschleunigte Bewegung eine Geschwindigkeit v von 26 Fuß erlangt hat, so ist der zu gleicher Zeit zurückgelegte Weg $s = \frac{26 \,.\, 10}{2} = 130$ Fuß. 2) Ein Wa-

gen, welcher bei seiner gleichförmig beschleunigten Bewegung im Laufe von 2¹/₄ Secunden 25 Fuß zurückgelegt hat, geht am Ende mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 \cdot 25}{2{,}25} = \frac{50 \cdot 4}{9} = 22{,}22 \ldots \text{ Fuß fort.}$$

§. 11 Die beiden Grundformeln der gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$\text{I.)} \quad v = pt \text{ und}$$

$$\text{II.)} \quad s = \frac{vt}{2},$$

welche ausdrücken, daß hier die Geschwindigkeit ein Product aus Acceleration und Zeit, und der Raum ein solches aus der halben Geschwindigkeit und Zeit ist, schließen noch zwei andere Hauptformeln in sich, die man erhält, wenn man aus beiden Gleichungen ein Mal v und ein zweites Mal t eliminirt. Es folgt nämlich:

$$\text{III.)} \quad s = \frac{pt^2}{2} \text{ und}$$

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{v^2}{2p}.$$

Hiernach ist also der gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Weg ein Product aus der halben Acceleration und dem Quadrate der Zeit, und auch der Quotient aus dem Quadrate der Endgeschwindigkeit und der doppelten Beschleunigung.

Diese vier Hauptformeln geben durch Umkehrung, je nachdem man die eine oder die andere der in ihnen enthaltenen Größen absondert, noch acht andere Formeln, und man findet dieselben im „Ingenieur" Seite 325 in einer Tabelle zusammengestellt.

Beispiele. 1) Ein mit der Acceleration 15,625 Fuß bewegter Körper legt in 1,5 Secunde den Weg $15{,}625 \cdot \frac{(1{,}5)^2}{2} = 15{,}625 \cdot \frac{9}{8} = 17{,}578$ Fuß zurück. 2) Ein durch die Acceleration $p = 4{,}5$ Fuß in die Geschwindigkeit $v = 16{,}5$ Fuß versetzter Körper hat den Raum $s = \frac{(16{,}5)^2}{2 \cdot 4{,}5} = 30{,}25$ Fuß durchlaufen.

§. 12 Bei der Vergleichung von zwei verschiedenen gleichförmig beschleunigten Bewegungen mit einander stößt man auf Folgendes:

Die Geschwindigkeiten sind $v = pt$ und $v_1 = p_1 t_1$, die Räume hingegen $s = \frac{pt^2}{2}$ und $s_1 = \frac{p_1 t_1^2}{2}$, es folgt hieraus:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{pt}{p_1 t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{pt^2}{p_1 t_1^2} = \frac{vt}{v_1 t_1} = \frac{v^2 p_1}{v_1^2 p}.$$

Setzt man nun $t_1 = t$, so erhält man:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{p}{p_1};$$

es verhalten sich also bei gleichen Zeiten die durchlaufenen Wege wie die Endgeschwindigkeiten, oder auch wie die Beschleunigungen.

Nimmt man ferner $p_1 = p$, so ergiebt sich:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{t}{t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{v^2}{v_1^2};$$

bei gleichen Beschleunigungen und also auch bei einer und derselben gleichförmig beschleunigten Bewegung sind also die Endgeschwindigkeiten den Zeiten und die durchlaufenen Räume den Quadraten der Zeiten, oder auch den Quadraten der Endgeschwindigkeiten proportional.

Ferner $v_1 = v$ angenommen, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1}{t}$ und $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; bei gleichen Endgeschwindigkeiten sind die Accelerationen den Zeiten umgekehrt, die Räume aber den Zeiten direct proportional.

Endlich $s_1 = s$ gesetzt, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1^2}{t^2} = \frac{v^2}{v_1^2}$; es verhalten sich also bei gleichen Räumen die Accelerationen umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten und direct wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten.

Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig beschleunigte Bewegung hat man nach §. 9: §. 13

$$\text{I.)} \quad v = c + pt,$$

und da der unveränderlichen Geschwindigkeit c der Raum ct, der Acceleration p aber der Weg $\frac{pt^2}{2}$ zukommt:

$$\text{II.)} \quad s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Entfernt man p aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$\text{III.)} \quad s = \frac{c + v}{2} t,$$

und beseitigt man t, so stellt sich

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$$

heraus.

Beispiele. 1) Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 3$ Fuß und mit der Acceleration $p = 5$ Fuß bewegter Körper legt in 7 Secunden den Weg

$$s = 3 \cdot 7 + 5 \cdot \frac{7^2}{2} = 21 + 122{,}5 = 143{,}5 \text{ Fuß zurück.}$$

2) Ein anderer Körper, welcher innerhalb 3 Minuten = 180 Secunden seine Geschwindigkeit $2\frac{1}{2}$ Fuß in die von $7\frac{1}{2}$ Fuß umändert, macht in dieser Zeit den Weg von $\frac{2,5 + 7,5}{2} \cdot 180 = 900$ Fuß.

§. 14 **Gleichförmig verzögerte Bewegung.** Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig verzögerte Bewegung gelten die Formeln:

$$\text{I.)} \quad v = c - pt,$$

$$\text{II.)} \quad s = ct - \frac{pt^2}{2},$$

$$\text{III.)} \quad s = \frac{c + v}{2} \cdot t,$$

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{c^2 - v^2}{2p},$$

welche aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen sogleich hervorgehen, wenn man darin p negativ setzt. Während bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit ohne Ende wächst, nimmt bei der gleichförmig verzögerten Bewegung die Geschwindigkeit bis zu einem gewissen Zeitpunkte ab, wird in demselben — Null, und fällt später negativ aus, d. h. es geht später die Bewegung in umgekehrter Richtung vor sich.

Setzen wir in der ersten Formel $v = 0$, so erhalten wir $pt = c$, also die Zeit, zu welcher die Geschwindigkeit Null geworden ist:

$$t = \frac{c}{p};$$

setzen wir endlich diesen Werth von t in die zweite Gleichung, so erhalten wir den Raum, welchen der Körper zu diesem Zeitpunkte zurückgelegt hat:

$$s = \frac{c^2}{2p}.$$

Ist die Zeit größer als $\frac{c}{p}$, so fällt der Raum kleiner als $\frac{c^2}{2p}$ aus; ist die Zeit $= \frac{2c}{p}$, so ist der Raum Null, es ist also der Körper nach seinem Ausgangspunkt zurückgekehrt; ist endlich die Zeit noch größer als $\frac{2c}{p}$, so ist s negativ, d. h. es befindet sich der Körper vom Anfangspunkte aus auf der entgegengesetzten Seite.

Beispiel. Ein Körper, welcher mit 40 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene hinaufrollt, durch welche er eine Verzögerung von 8 Fuß pro Secunde erleidet, steigt nur $\frac{40}{8} = 5$ Secunden lang und $\frac{40^2}{2 \cdot 8} = 100$ Fuß hoch, rollt dann zurück, kommt nach 10 Secunden mit 40 Fuß Geschwindigkeit in den

Anfangspunkt zurück und gelangt nach 12 Secunden schon um $40 . 12 - 4 . 12^2$ oder $-(40 . 2 + 4 . 2^2) = 96$ Fuß unter den Anfangspunkt, wenn sich die Ebene auch abwärts fort erstreckt.

Freier Fall der Körper. Der freie oder senkrechte Fall der Körper im luftleeren Raume (franz. mouvement vertical des corps pesants; engl. vertical motion of bodies) giebt das wichtigste Beispiel der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Die durch die Schwerkraft (franz. gravité; engl. gravity) erzeugte Acceleration dieser Bewegung bezeichnet man durch den Buchstaben g, und hat den mittleren Werth von §. 15

9,81 Meter,
30,20 pariser Fuß,
32,20 englischen Fuß,
31,03 wiener Fuß,
$31\frac{1}{4} = 31,25$ preußischen Fuß und
32,7 badischen oder Meterfuß.

Wenn man einen dieser Werthe statt g in die gefundenen Formeln:

$$v = g t,\ s = \frac{g t^2}{2} \text{ und } s = \frac{v^2}{2 g},\ v = \sqrt{2 g s}$$

einführt, so kann man alle Fragen, welche sich in Ansehung des freien Falles der Körper vorlegen lassen, beantworten. Für das Metermaaß ist:

$$v = 9,81 \,.\, t = 4,429 \sqrt{s},$$
$$s = 4,905\, t^2 = 0,0510\, v^2 \text{ und}$$
$$t = 0,1019\, v = 0,4515 \sqrt{s};$$

dagegen für das preußische Fußmaaß:

$$v = 31,25 \,.\, t = 7,906 \sqrt{s};$$
$$s = 15,625 \,.\, t^2 = 0,016\, v^2 \text{ und}$$
$$t = 0,032\, v = 0,253 \sqrt{s}.$$

Beispiele. 1) Ein Körper erlangt beim ungehinderten Fallen in 4 Secunden die Geschwindigkeit $v = 31,25 \,.\, 4 = 125$ Fuß und durchläuft in dieser Zeit den Weg $s = 15,625 . 4^2 = 250$ Fuß. 2) Ein von der Höhe $s = 9$ Fuß herabgefallener Körper hat die Geschwindigkeit $v = 7,906 \,.\, \sqrt{9} = 23,72$ Fuß. 3) Ein mit 10 Fuß Geschwindigkeit vertical emporgeworfener Körper steigt auf die Höhe $s = 0,016 \,.\, 10^2 = 1,6$ Fuß und braucht dazu die Zeit:

$$t = 0,032 \,.\, 10 = 0,32$$

oder ungefähr $\frac{1}{3}$ Secunde.

Wie sich beim freien Fall der Körper die Bewegungsverhältnisse im Laufe der Zeit gestalten, wird durch folgende Tabelle vor Augen geführt: §. 16

Zeit in Secunden.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geschwindigkeit.	0	$1g$	$2g$	$3g$	$4g$	$5g$	$6g$	$7g$	$8g$	$9g$	$10g$
Weg.	0	$1\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	$25\frac{g}{2}$	$36\frac{g}{2}$	$49\frac{g}{2}$	$64\frac{g}{2}$	$81\frac{g}{2}$	$100\frac{g}{2}$
Differenzen.	0	$1\frac{g}{2}$	$3\frac{g}{2}$	$5\frac{g}{2}$	$7\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$11\frac{g}{2}$	$13\frac{g}{2}$	$15\frac{g}{2}$	$17\frac{g}{2}$	$19\frac{g}{2}$

Die letzte Horizontalcolumne dieser Tafel giebt die Wege an, welche der frei fallende Körper in den einzelnen Secunden durchläuft. Man sieht, daß sich diese Wege wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. zu einander verhalten, während die Zeiten und Geschwindigkeiten wie die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w., und die Fallräume wie deren Quadrate 1, 4, 9, 16 u. s. w. wachsen. Hiernach ist z. B. die Geschwindigkeit nach 6 Secunden, $6g = 187{,}5$ Fuß, d. h. der Körper würde, wenn er von dieser Zeit an gleichförmig fortginge, etwa auf einer ihm keine Hindernisse darbietenden Horizontalebene seine Bewegung fortsetzte, in jeder Secunde den Weg $6g = 187{,}5$ Fuß durchlaufen. Diesen Raum durchläuft er im Laufe der folgenden oder siebenten Secunde aber nicht wirklich, sondern derselbe beträgt nach der letzten Columne genau $13 \cdot \frac{g}{2} = 13 \cdot 15{,}625 = 203{,}125$ Fuß; in der achten Secunde ist er sogar $15 \cdot \frac{g}{2} = 15 \cdot 15{,}625 = 234{,}375$ Fuß u. s. w.

Anmerkung. Aeltere deutsche Schriftsteller bezeichnen den Raum von 15,625 Fuß, welcher vom frei fallenden Körper in der ersten Secunde durchlaufen wird, durch g und nennen ihn wohl auch Beschleunigung der Schwere. Sie haben dann für den freien Fall der Körper die Formeln:

$$v = 2gt = 2\sqrt{gs},$$

$$s = gt^2 = \frac{v^2}{4g},$$

$$t = \frac{v}{2g} = \sqrt{\frac{s}{g}}.$$

Dieser nur in Deutschland vorkommende Gebrauch fängt nun auch an allmälig zu verschwinden, und wegen der oft vorkommenden Mißverständnisse und dadurch herbeigeführten Fehler ist dies auch sehr zu wünschen.

Der freie Fall mit einer Anfangsgeschwindigkeit. Geht der freie Fall der Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit (franz. vitesse initial; engl. initial-velocity) c vor sich, so nehmen die Formeln folgende Formen an: §. 17

$$v = c + gt = c + 31{,}25\, t \text{ Fuß} = c + 9{,}81 \text{ Meter},$$

auch:

$$v = \sqrt{c^2 + 2gs} = \sqrt{c^2 + 62{,}5\, s} \text{ Fuß} = \sqrt{c^2 + 19{,}62} \text{ Meter}$$

$$s = ct + \frac{g}{2} t^2 = ct + 15{,}625\, t^2 \text{ Fuß} = ct + 4{,}905 \text{ Meter},$$

auch:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2g} = 0{,}016\,(v^2 - c^2) \text{ Fuß} = 0{,}1019\,(v^2 - c^2).$$

Wird hingegen der Körper mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen, so hat man:

$$v = c - gt = c - 31{,}25\, t \text{ Fuß} = c - 9{,}81 \text{ Meter},$$

auch:

$$v = \sqrt{c^2 - 2gs} = \sqrt{c^2 - 62{,}5\, s} \text{ Fuß} = \sqrt{c^2 - 19{,}62} \text{ Meter},$$

$$s = ct - \frac{g}{2} t^2 = ct - 15{,}625\, t^2 \text{ Fuß} = ct - 4{,}905 \text{ Meter},$$

auch:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2g} = 0{,}016\,(c^2 - v^2) \text{ Fuß} = 0{,}1019\,(c^2 - v^2) \text{ Meter}.$$

Betrachtet man eine gegebene Geschwindigkeit c als eine durch den freien Fall erlangte Endgeschwindigkeit, so nennt man den entsprechenden Fallraum

$$\frac{c^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, c^2 \text{ Fuß} = 0{,}1019\, c^2 \text{ Meter}.$$

die Geschwindigkeitshöhe (franz. hauteur de la vitesse; engl. height of velocity). Durch Einführung derselben lassen sich einige der obigen Formeln einfacher ausdrücken. Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ von der Anfangsgeschwindigkeit c durch k und die der Endgeschwindigkeit $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ durch h, so hat man für fallende Körper:

$$h = k + s \text{ und } s = h - k,$$

und für steigende:

$$h = k - s \text{ und } s = k - h.$$

Es ist also der Fall- oder Steigraum stets gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Beispiel. Sind bei einer gleichförmig veränderten Geschwindigkeit die Geschwindigkeiten 5 Fuß und 11 Fuß, also die Geschwindigkeitshöhen $= 0{,}016 \,.\, 5^2$

= 0,4 Fuß und $0{,}016 \,.\, 11^2 = 1{,}936$ Fuß, so ist der Raum, welcher während des Ueberganges aus der einen Geschwindigkeit in die andere zurückgelegt wird: $s = 1{,}936 - 0{,}400 = 1{,}536$ Fuß.

§. 18 **Das senkrechte Emporsteigen.** Setzt man in der Formel $s = \frac{c^2 - v^2}{2g}$ für das senkrechte Emporsteigen der Körper die Endgeschwindigkeit $v = 0$, so erhält man die größte Steighöhe:

$$s = \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist folglich die der Anfangsgeschwindigkeit c entsprechende größte Steighöhe gleich der der Endgeschwindigkeit c zukommenden Fallhöhe k, und also auch $c = \sqrt{2gk}$ nicht allein die Endgeschwindigkeit für die freie Fallhöhe k, sondern auch die Anfangsgeschwindigkeit für die größte Steighöhe k, und es folgt daher noch, daß der senkrecht in die Höhe geworfene Körper an jeder Stelle diejenige Geschwindigkeit hat, die er, jedoch in umgekehrter Richtung, haben würde, wenn er von der noch übrigen Steighöhe bis zu dieser Stelle frei herabgefallen wäre, die er also auch beim darauf folgenden Niederfallen dort wirklich besitzt.

Beispiel. Ein Körper wird mit 15 Fuß Geschwindigkeit senkrecht emporgeworfen und trifft bei 2 Fuß Steighöhe auf ein elastisches Hinderniß, welches ihn momentan mit derselben Geschwindigkeit zurückwirft, mit welcher er aufschlägt. Wie groß ist nun diese Geschwindigkeit und wie groß ist die Zeit zum Steigen und Zurückfallen? Der Anfangsgeschwindigkeit $c = 15$ Fuß entspricht die Steighöhe $k = 3{,}60$ Fuß, die Geschwindigkeitshöhe für den Augenblick des Anstoßes ist nun $h = 3{,}60 - 2{,}00 = 1{,}60$, und folglich diese Geschwindigkeit selbst $= 7{,}906 \sqrt{1{,}6} = 10$ Fuß. Die Zeit zum Steigen auf die ganze Höhe (3,6 Fuß) wäre: $t = 0{,}032 \,.\, c = 0{,}032 \,.\, 15 = 0{,}480$ Secunden, die Zeit zum Steigen auf die Höhe 1,6 Fuß aber: $t_1 = 0{,}032 \,.\, 10 = 0{,}320$ Secunden, es bleibt diesemnach die Zeit zum Steigen auf die Höhe von 2 Fuß oder die Zeit vom Anfang bis zum Anstoß: $t - t_1 = 0{,}480 - 0{,}320 = 0{,}160$ Secunden, also endlich die ganze Zeit zum Steigen und Fallen $= 2 \,.\, 0{,}160 = 0{,}320$ Secunden. Diese ist also nur der $\frac{0{,}320}{0{,}960}$ ste = 3te Theil von der Zeit, welche zum Aufsteigen und Zurückfallen nöthig wäre, wenn der Körper unaufgehalten stiege und fiele. Dieser Fall findet beim Schmieden des glühenden Eisens seine Anwendung, weil es hier wegen des allmäligen Abkühlens darauf ankommt, in einer kurzen Zeit so viel Hammerschläge wie möglich erfolgen zu lassen. Wenn der Hammer durch eine elastische Prallvorrichtung zurückgeworfen wird, so kann er unter den im Beispiele zum Grunde liegenden Verhältnissen in derselben Zeit ziemlich dreimal so viel Schläge thun als beim ungehinderten Aufsteigen.

Anmerkung 1. Das Umsetzen der Geschwindigkeit in Geschwindigkeitshöhe sowie auch das Umsetzen der letzteren in die erstere, ist ein in der praktischen Mechanik und namentlich in der Hydraulik sehr oft vorkommendes Geschäft. Eine Tafel, wodurch dasselbe in ein bloßes Nachschlagen verwandelt wird, leistet des-

halb dem Praktiker sehr nützliche Dienste. Eine sich auf das preußische Fußmaaß beziehende Tabelle dieser Art enthält der »Ingenieur« Seite 326 bis 329.

Anmerkung 2. Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln sind allerdings nur für den freien Fall im luftleeren Raume streng richtig; sie lassen sich jedoch auch beim freien Fall in der Luft mit einer noch erträglichen Genauigkeit gebrauchen, wenn die fallenden Körper in Beziehung auf ihr Volumen ein großes Gewicht haben, und wenn die Geschwindigkeiten nicht sehr groß ausfallen. Uebrigens werden sie auch noch unter anderen Umständen und Verhältnissen in vielen anderen Fällen gebraucht, wie sich in der Folge zeigen wird.

Ungleichförmige Bewegung überhaupt. Die Formel $s = ct$ (§. 5) für die gleichförmige Bewegung gilt auch für jede ungleichförmige Bewegung, wenn man statt t ein Zeitelement oder unendlich kleines Zeittheilchen τ, und statt s das innerhalb dieses Zeittheilchens zurückgelegte Raumelement σ setzt, da anzunehmen ist, daß innerhalb eines Augenblickes die Geschwindigkeit c, welche hier durch v bezeichnet werden soll, sich nicht ändert, also die Bewegung gleichförmig bleibt. §. 19

Man hat demnach für jede ungleichförmige Bewegung:

$$\text{I.)} \quad \sigma = v\tau, \text{ sowie } v = \frac{\sigma}{\tau} \text{ (Vergl. §. 10).}$$

Es ist also die Geschwindigkeit (v) für jeden Augenblick durch den Quotienten aus dem Raum- und aus dem Zeitelemente bestimmt.

Ebenso ist die Formel $v = pt$ (§. 11) für die gleichförmig beschleunigte Bewegung auch für jede ungleichförmige Bewegung überhaupt giltig, wenn mann statt t und v das Zeitelement τ und den innerhalb desselben erlangten unendlich kleinen Geschwindigkeitszuwachs $\varkappa$ substituirt, da sich die Beschleunigung p innerhalb eines Augenblickes τ nicht angebbar verändert, also die Bewegung während desselben als gleichförmig beschleunigt angesehen werden kann.

Hiernach hat man für alle Bewegungen:

$$\text{II.)} \quad \varkappa = p\tau, \text{ sowie } p = \frac{\varkappa}{\tau}.$$

Es ist also die Acceleration (p) für jeden Augenblick der Bewegung gleich dem Quotienten aus dem Geschwindigkeits- und dem entsprechenden Zeitelemente.

Setzt man die ganze Bewegungszeit $t = n\tau$, und die Geschwindigkeiten in den einzelnen Zeittheilen τ, der Reihe nach $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$, so sind die entsprechenden Wegelemente $\sigma_1 = v_1\tau$, $\sigma_2 = v_2\tau$, $\sigma_3 = v_3\tau \ldots$, $\sigma_n = v_n\tau$; und es ist daher der ganze in der Zeit t zurückgelegte Weg

$$s = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)\tau = \left(\frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}\right) n\tau, \text{ d. i.:}$$

$$\text{I*)} \quad s = \left(\frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}\right) t = vt, \text{ wenn}$$

$v = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}$, die mittlere Geschwindigkeit bei Zurücklegung des Weges s bezeichnet.

Ebenso ist, wenn c die Anfangs- und v die Endgeschwindigkeit bezeichnet, und $p_1, p_2 \ldots p_n$ die Accelerationen in den stetig auf einander folgenden gleichen Zeitelementen τ sind,

$$v - c = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\tau = \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right) n\tau, \text{ d. i.:}$$

$$\text{II*)} \quad v - c = \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right) t = pt, \text{ wenn}$$

$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}$ die mittlere Acceleration bezeichnet.

Durch Verbindung der Formeln I. und II. erhält man folgende nicht minder wichtige Gleichung:

$$\text{III.)} \quad v\varkappa = p\sigma.$$

Nimmt bei Durchlaufung des Weges $s = n\sigma$, die Acceleration nach und nach die Werthe $p_1, p_2, \ldots p_n$ an, so ist die Summe der Producte $p\sigma$,

$$= (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\sigma = \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p}{n}\right) n\sigma$$

$$= \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right) s = ps,$$

wenn p die mittlere Acceleration bezeichnet. Und geht die Anfangsgeschwindigkeit c durch wiederholtes Wachsen um $\varkappa = \frac{v - c}{n}$ in die Endgeschwindigkeit v über, so ist die Summe der Producte $v\varkappa$:

$$c\varkappa + (c + k)\varkappa + \cdots + (v - k)\varkappa + v\varkappa = [c + (c + \varkappa) + \cdots + (v - \varkappa) + v]\varkappa$$

$$= (v + c)\frac{n\varkappa}{2} = \frac{(v + c)(v - c)}{2} = \frac{v^2 - c^2}{2}, \text{ und daher zu setzen:}$$

$$\text{III*)} \quad \frac{v^2 - c^2}{2} = ps, \text{ oder } s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \text{ (vergl. IV. §. 13).}$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich die vielfachsten Aufgaben der Phoronomie und Mechanik lösen.

Auch ist die Zeit, in welcher der Raum $s = n\sigma$ mit der veränderlichen Geschwindigkeit $v_1, v_2, \cdots v_n$ zurückgelegt wird,

$$\text{IV.)} \quad t = \sigma\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots \frac{1}{v_n}\right) = \frac{s}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{s}{v},$$

wenn der Werth $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{v}$ gesetzt, also dessen Reciproke v als die mittlere Geschwindigkeit angesehen wird.

Beispiel. Wenn sich ein Körper nach dem Gesetze $v = a\,t^2$ bewegt, so ist $v + \varkappa = a(t + \tau)^2 = a\,(t^2 + 2\,t\,\tau + \tau^2)$, also $\varkappa = a\,\tau\,(2\,t + \tau)$, folglich $p = \frac{\varkappa}{\tau} = 2\,a\,t$.

Die Geschwindigkeiten des Körpers am Ende der Zeiten $\tau, 2\,\tau, 3\,\tau \ldots n\,\tau$ sind:

$$a\,\tau^2, a\,(2\,\tau)^2, a\,(3\,\tau)^2 \ldots a\,(n\,\tau)^2,$$

und es folgt daher der durchlaufene Weg nach $t = n\,\tau$ Secunden:

$$s = [a\,\tau^2 + a\,(2\,\tau)^2 + \ldots a\,(n\,\tau)^2]\,\tau = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)\,a\,\tau^3,$$

oder da nach Artikel 15, IV., der analytischen Hülfslehren $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3}$ ist:

$$s = \frac{n^3}{3}\,a\,\tau^3 = \frac{a}{3}\,(n\,\tau)^3 = \frac{a\,t^3}{3}.$$

Phoronometrische Differenzial- und Integralformeln. Die (§. 20) allgemeinen Bewegungsformeln, welche im vorstehenden Paragraphen entwickelt worden sind, nehmen im Gewande der Differenzial- und Integralrechnung, wo man das Zeitelement τ durch ∂t, das Wegelement σ durch ∂s und das Geschwindigkeitselement $\varkappa$ durch ∂v bezeichnet, folgende Formeln an:

I.) $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, oder $\partial s = v\,\partial t$, daher $s = \int v\,\partial t$, sowie $t = \int \frac{\partial s}{v}$.

II.) $p = \frac{\partial v}{\partial t}$, oder $\partial v = p\,\partial t$, daher $v = \int p\,\partial t$, sowie $t = \int \frac{\partial v}{p}$.

III.) $v\,\partial v = p\,\partial s$, oder $s = \int \frac{v\,\partial v}{p}$, sowie $\frac{v^2 - c^2}{2} = \int p\,\partial s$, wenn c die Anfangs- und v die Endgeschwindigkeit bei Durchlaufung des Weges s bezeichnet.

Es ist also hiernach die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate gleich dem doppelten Integrale von dem Producte aus der Acceleration und dem Elemente ∂s, oder gleich dem doppelten Producte aus der mittleren Acceleration und dem Raume, welcher während des Ueberganges der Geschwindigkeit aus c in v zurückgelegt wird.

Der Lehre vom Größten und Kleinsten zufolge hat der Raum ein Maximum, also die Bewegung ihre größte Extension erlangt, wenn:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v = \text{Null}$$

ist, und ist die Geschwindigkeit am größten oder kleinsten für:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p = \text{Null}.$$

Die vorstehenden Formeln bilden die Grundlage der höhern Phoronometrie und Mechanik.

Beispiele. 1) Aus der gegebenen Gleichung $s = 2 + 3t + t^2$ für den Raum, folgt durch Differenziiren für die Geschwindigkeit die Gleichung $v = 3 + 2t$, und für die Acceleration $p = 2$; es ist also die letztere constant, und die Bewegung gleichförmig beschleunigt. Für $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Secunden, hat man aber

$v = 3, 5, 7, 9 \ldots$ (Fuß), und

$s = 2, 6, 12, 20 \ldots$ (Fuß).

2) Aus der Formel $v = 10 + 3t - t^2$ für die Geschwindigkeit folgt durch Integriren die Gleichung $s = \int 10\,dt + \int 3t\,dt - \int t^2 dt = 10t + {}^3/_2 t^2 - \frac{t^3}{3}$, dagegen durch Differenziiren, die Formel $p = 3 - 2t$.

Hiernach ist für $3 - 2t = 0$, d. i. für $t = {}^3/_2$ Secunden, die Acceleration Null und die Geschwindigkeit ein Maximum ($v = 12^1/_4$), und für $10 + 3t - t^2 = 0$, d. i. $t = {}^3/_2 + \sqrt{10 + {}^9/_4} = \frac{3 + 7}{2} = 5$ Secunden, die Geschwindigkeit Null und der Raum ein Maximum.

Für $t =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6	Secunden hat man
$p =$	3,	1,	− 1,	− 3,	− 5,	− 7,	− 9	Fuß,
$v =$	10,	12,	12,	10,	6,	0,	− 8	Fuß,
$s =$	0,	$11^1/_6$,	$23^1/_3$,	$34^1/_2$,	$42^2/_3$,	$45^5/_6$,	42	Fuß.

3) Für das Bewegungsgesetz $p = -\mu s$, wo μ einen constanten Coefficienten bezeichnet, hat man:

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = \int p\,\partial s = -\mu \int s\,\partial s = -\frac{\mu s^2}{2},\ \text{oder}\ v^2 = c^2 - \mu s^2;\ \text{wonach}$$

$$v = \sqrt{c^2 - \mu s^2}\ \text{und}\ s = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{\mu}}\ \text{folgt.}$$

Ferner ist $\partial t = \frac{\partial s}{v} = \frac{\partial s}{\sqrt{c^2 - \mu s^2}} = \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\sqrt{1 - \left(\frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right)^2}}$

$$= \frac{\partial \left(\frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right)}{\sqrt{\mu}\sqrt{1 - \left(\frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right)^2}} = \frac{\partial u}{\sqrt{\mu}\sqrt{1 - u^2}},$$

wenn $\frac{s\sqrt{\mu}}{c} = u$ gesetzt wird; und es folgt (s. Art. 26. V. der analyt. Hülfslehren)

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, arc.(sin. = u) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, arc.\left(sin. = \frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right),\ \text{und}$$

$$s = \frac{c}{\sqrt{\mu}}\, sin.(t\sqrt{\mu}),\ \text{sowie}$$

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = c\,cos.(t\sqrt{\mu})\ \text{und}$$

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = -c\sqrt{\mu}\ sin.(t\sqrt{\mu}).$$

Anfangs, also für $t = 0$, ist $s = 0$, $v = c$ und $p = 0$, später für

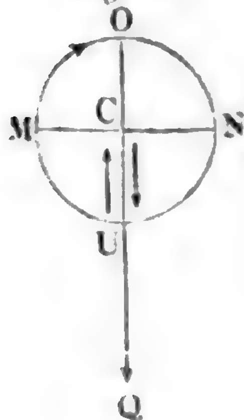
$t\sqrt{\mu} = \frac{\pi}{2}$, oder $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$ ist $s = \frac{c}{\sqrt{\mu}}$, $v = 0$ und $p = -c\sqrt{\mu}$, ferner für $t\sqrt{\mu} = \pi$, oder $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$, $s = 0$, $v = -c$ und $p = 0$, ebenso für $t\sqrt{\mu} = {}^3/_2\,\pi$, oder $t = \frac{3\pi}{2\sqrt{\mu}}$, $s = -\frac{c}{\sqrt{\mu}}$, $v = 0$ und $p = c\sqrt{\mu}$, und für $t\sqrt{\mu} = 2\pi$, oder $t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, wieder $s = 0$, $v = c$ und $p = 0$.

Der bewegte Punkt hat folglich eine schwingende Bewegung auf beiden Seiten des festen Anfangspunktes, zu welchem er jedes Mal nach Zurücklegung des Weges $s = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu}}$, mit der von Null allmälig bis $v = \pm c$ wachsenden Geschwindigkeit zurückkehrt.

Mittlere Geschwindigkeit. Von der Geschwindigkeit $v = \frac{\sigma}{\tau}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)$ §. 21
für einen Augenblick oder während eines Zeitelementes ist τ (∂t) diejenige Geschwindigkeit $c_1 = \frac{s}{t}$ verschieden, welche sich ergiebt, wenn man den Raum, welcher während einer gewissen Zeit, z. B. während einer Periode einer periodischen Bewegung durchlaufen wird, durch die Zeit selbst dividirt. Man nennt dieselbe die mittlere Geschwindigkeit (franz. vitesse moyenne; engl. mean-velocity) und kann sie auch als diejenige Geschwindigkeit ansehen, die ein Körper haben müßte, um in einer gegebenen Zeit (t) einen gewissen Raum (s) gleichförmig zurückzulegen, welcher in Wirklichkeit in eben dieser Zeit ungleichförmig durchlaufen wird. So ist z. B. bei der gleichförmig veränderten Bewegung die mittlere Geschwindigkeit gleich der halben Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit; denn es ist nach §. 13 der Raum gleich dieser Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ multiplicirt durch die Zeit (t).

Allgemein ist (nach §. 19) die mittlere Geschwindigkeit $c_1 = \frac{v_1 + v_2 + \cdots v_n}{n}$, wenn $v_1, v_2, \cdots v_n$ eine gleichen und sehr kleinen Zeitintervallen entsprechende Geschwindigkeitsreihe bezeichnet.

Fig. 51.



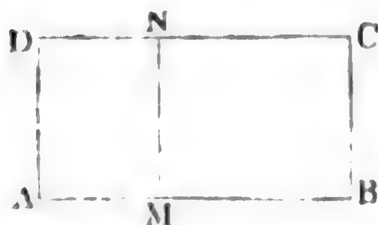
Beispiel. Während eine Kurbel gleichförmig im Kreise $UMON$, Fig. 51, herumgedreht wird, geht die daran hängende Last Q, z. B. der Kolben einer Luft- oder Wasserpumpe u. s. w., ganz ungleichförmig auf und nieder: die Geschwindigkeit dieser Last ist im tiefsten und höchsten Punkte U und O am kleinsten, nämlich Null, auf der halben Höhe, in M und N, aber am größten, nämlich der Kurbelgeschwindigkeit gleich. Innerhalb einer halben Umdrehung ist die mittlere Geschwindigkeit gleich der ganzen

Steighöhe, d. i. dem Durchmesser UO des Kreises, in welchem die Kurbel herumgeht, dividirt durch die Zeit einer halben Umdrehung. Setzen wir den Halbmesser $CU = CO$ des Warzenkreises $= r$, also jenen Durchmesser $= 2r$, und diese Zeit $= t$, so folgt demnach die mittlere Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2r}{t}$. Die Kurbel selbst macht in dieser Zeit den Halbkreis πr; es ist daher ihre Geschwindigkeit $c = \frac{\pi r}{t}$ und folglich die mittlere Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2}{\pi} c = \frac{2}{3,141} c = 0,6366$ mal so groß als die unveränderliche Geschwindigkeit c der Kurbel.

§. 22 **Graphische Darstellung der Bewegungsformeln.** Die im Vorigen gefundenen Bewegungsgesetze lassen sich auch in geometrischen Figuren ausdrücken oder, wie man sagt, graphisch darstellen. Graphische Darstellungen überhaupt erleichtern die Auffassung, unterstützen das Gedächtniß, schützen wohl auch gegen Fehler und dienen sogar zuweilen zur unmittelbaren Ausmittelung der gesuchten Größen; sie sind deshalb der Mechanik von großem Nutzen.

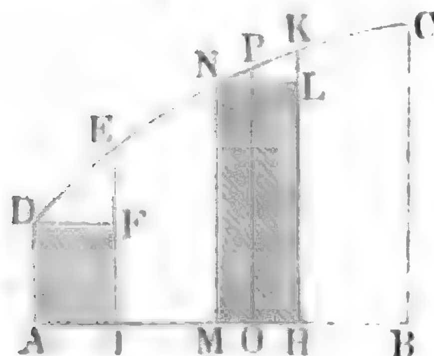
Bei der gleichförmigen Bewegung ist der Raum (s) das Product (ct) aus Geschwindigkeit und Zeit, und von einem Rechtecke der Geometrie ist der Flächenraum ein Product aus Höhe und Grundlinie; man kann daher auch den gleichförmig durchlaufenen Raum s durch ein Rechteck $ABCD$, Fig. 52, darstellen, dessen Grundlinie AB die Zeit (t) und dessen Höhe $AD = BC$ die Geschwindigkeit (c) ist, vorausgesetzt, daß die Zeit mit der Geschwindigkeit in einerlei Längeneinheiten ausgedrückt, daß also durch eine und dieselbe Linie die Zeitsecunde und der Fuß zugleich repräsentirt werden.

Fig. 52.



§. 23 Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit (MN) zu jeder anderen Zeit (AM) der Bewegung eine und dieselbe ist, fällt dieselbe bei der ungleichförmigen Bewegung in jedem Augenblicke anders aus; es läßt sich deshalb diese Bewegung nur durch ein Viereck $ABCD$, Fig. 53, darstellen, welches zur Grundlinie AB die Zeit (t) und zur übrigen Begrenzung drei andere Linien AD, BC und CD hat, von denen die ersten beiden der Anfangs- und Endgeschwindigkeit gleich sind, die letzte aber durch die Endpunkte (N) der verschiedenen Geschwindigkeiten in den Zwischenpunkten (M) bestimmt wird. Nach den ver-

Fig. 53.



schiedenen Arten von ungleichförmigen Bewegungen ist die vierte Linie CD entweder gerade oder krumm; ferner von Anfang aus aufsteigend oder niedersteigend, endlich entweder gegen die Grundlinie concav (hohl) oder convex (erhaben). In jedem Falle ist der Flächeninhalt dieser Figur dem ungleichförmig durchlaufenen Raume (s) gleichzusetzen; denn jener Flächenraum $ABCD$, Fig. 53, läßt sich durch Höhenlinien in lauter schmale, als Rechtecke anzusehende Streifen wie $MOPN$ zerlegen, wovon jeder ein Product aus einem Theile (MO) der Grundlinie und aus der diesem Theile entsprechenden Höhe (MN) oder (OP) ist, und ebenso läßt sich der in einer gewissen Zeit durchlaufene Raum aus Theilchen zusammensetzen, wovon jedes ein Product aus einem Zeittheilchen und der während desselben stattfindenden Geschwindigkeit ist. Die Figur führt auch die Differenz zwischen dem Geschwindigkeitsmaß und dem in der folgenden Zeiteinheit wirklich zurückgelegten Weg vor Augen. Das Rechteck ML über der Grundlinie $MH =$ Eins $(1) = v \,.\, 1$ ist das Maß der Geschwindigkeit $MN = v$, wogegen die Fläche MK über derselben Grundlinie den wirklich durchlaufenen Raum darstellt. Ebenso ist das Rechteck AF über $\overline{A1} =$ Eins, das Maß der Anfangsgeschwindigkeit $AD = c$, und die Fläche AE der in der ersten Secunde wirklich zurückgelegte Weg.

Bei der **gleichförmig veränderten Bewegung** ist die Zu- oder Abnahme $v - c$ der Geschwindigkeit ($= pt$, §. 13) proportional der Zeit (t). Ziehen wir nun in Fig. 54 und Fig. 55 die Linie DE der Grundlinie AB parallel, und schneiden wir dadurch von den die Geschwindigkeiten vorstellen- §. 24

Fig. 54.

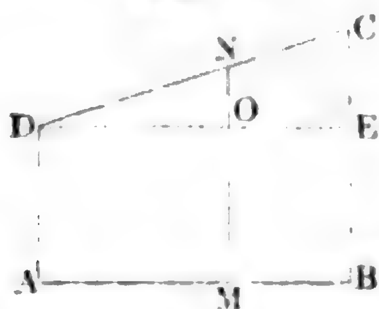
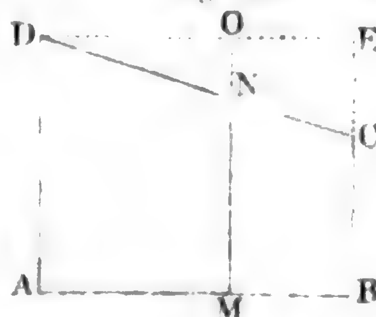


Fig. 55.



den Linien BC und MN die der Anfangsgeschwindigkeit AD gleichen Stücke BE und MO ab, so bleiben uns die Linien CE und NO als Geschwindigkeitszu- oder Geschwindigkeitsabnahmen übrig, für welche nach dem Obigen die Proportion:

$$NO : CE = DO : DE$$

gilt.

Eine solche Proportion bedingt, daß N und so auch jeder Punkt der Linie CD, in der geraden Verbindungslinie zwischen C und D liegen, daß also jene, die verschiedenen Geschwindigkeiten (MN) begrenzende Linie CD selbst, gerade sein muß.

Diesem zufolge läßt sich also der gleichförmig beschleunigt und gleichförmig verzögert durchlaufene Raum durch den Inhalt eines Trapezes $ABCD$ darstellen, das zur Höhe AB die Zeit (t) und zu den (parallelen) Grundlinien AD und BC die Anfangs- und Endgeschwindigkeit hat. Auch ist damit die §. 13 gefundene Formel $s = \frac{c + v}{2} \cdot t$ in vollkommener Uebereinstimmung. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung steigt die vierte Seite DC vom Anfangspunkte an aufwärts, und bei der gleichförmig verzögerten Bewegung läuft diese Linie abwärts. Bei der mit Null Geschwindigkeit anfangenden gleichförmig beschleunigten Bewegung geht das Trapez in ein Dreieck vom Inhalte $\frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{1}{2} vt$ über.

§. 25 Die mittlere Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung ist der Quotient: Raum dividirt durch Zeit; sie giebt also mittelst Multiplication durch die Zeit, den Weg und läßt sich deshalb auch als die Höhe $AF = BE$ desjenigen Rechteckes $ABEF$, Fig. 56, ansehen, das zur Grundlinie AB die Zeit t hat und an Inhalt dem den zurückgelegten Weg oder Raum messenden Vierecke $ABCND$ gleich ist. Die mittlere Geschwindigkeit ergiebt sich demnach auch durch Verwandlung des Viereckes $ABCND$ in ein gleich langes Rechteck $ABEF$. Ihre Bestimmung ist besonders bei periodischen Bewegungen, welche fast bei allen Maschinen vorkommen, von Wichtigkeit. Das Gesetz dieser Bewegungen wird durch eine Schlangenlinie $CDEFG$, Fig. 57, repräsentirt. Schneidet die mit AB

Fig. 56.

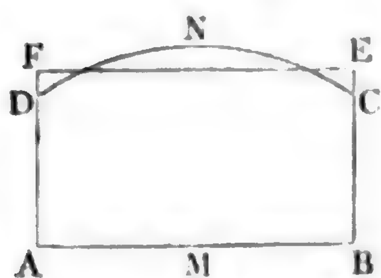
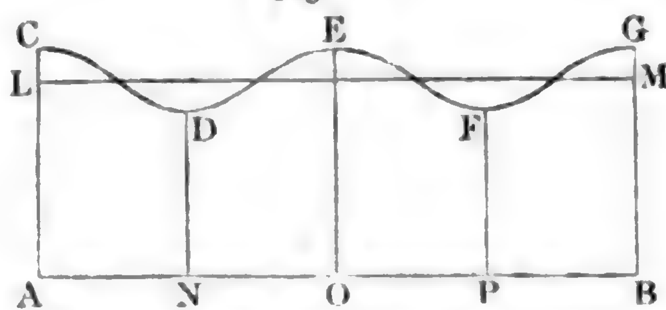


Fig. 57.



parallel laufende Gerade LM denselben Raum wie die Schlangenlinie ab, ist also LM gleichsam die Axe, um welche sich $CDEFG$ windet, so ist der Abstand $AL = BM$ zwischen beiden parallelen Linien AB und LM die mittlere Geschwindigkeit der periodischen Bewegung, dagegen AC, OE, BG u. s. w. die größte und ND, PF u. s. w. die kleinste Geschwindigkeit einer Periode AO, OB u. s. w.

§. 26 Auch die Acceleration oder der in der Zeitsecunde erfolgte Zusatz an Geschwindigkeit läßt sich in der Figur leicht nachweisen. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist sie unveränderlich; sie ist deshalb die Differenz PQ, Fig. 58 und Fig. 59 zwischen zwei Geschwindigkeiten OP und

MN, wovon die eine einer um eine Secunde (MO) größeren Zeit angehört als die andere. Ist die Bewegung ungleichförmig verändert, also die Ge-

Fig. 58.

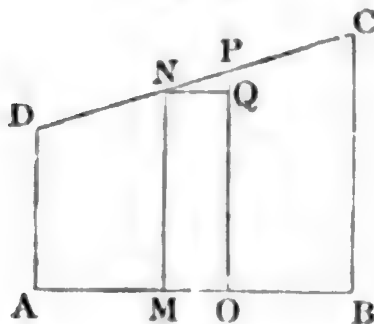
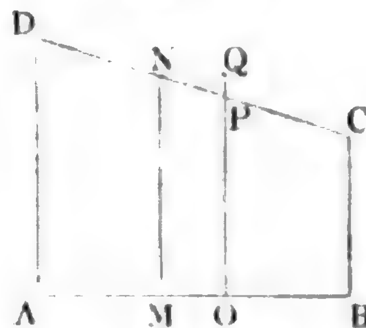


Fig. 59.



schwindigkeitslinie CD eine Curve, so ist für jeden Zeitpunkt (M) die Acceleration eine andere, und deshalb ist sie auch nicht die wirkliche Differenz PQ zwischen den um eine Secunde MO von einander abstehenden Geschwindigkeiten OP und $MN = OQ$, Fig. 60 und 61, sondern sie ist die Zunahme RQ der Geschwindigkeit MN, welche eintreten würde, wenn von dem

Fig. 60.

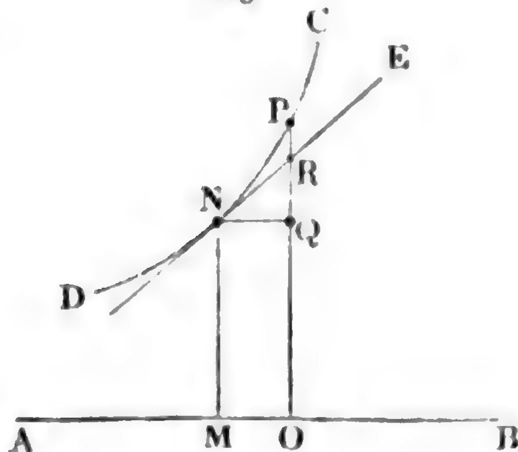
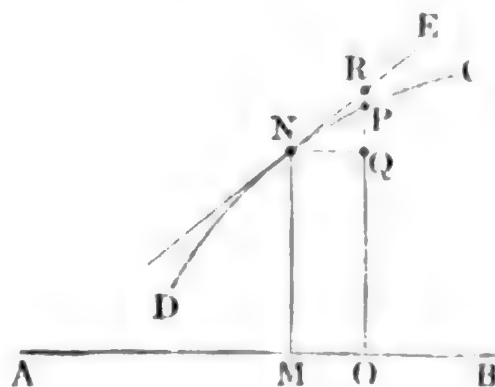


Fig. 61.



Augenblicke M an die Bewegung in eine gleichförmig beschleunigte, also die krumme Geschwindigkeitslinie NPC in eine gerade Linie NE überginge. Nun ist aber die Tangente oder Berührungslinie NE diejenige Gerade, in welche eine Curve DN weiter fortgeht, wenn sie von einer gewissen Stelle (N) an ihre Richtung unverändert beibehält; es fällt demnach die neue Geschwindigkeitslinie mit der Tangente zusammen, es ist solchemnach auch die bis zu dieser Linie gehende Höhenlinie OR die Geschwindigkeit, welche nach einer Secunde eintreten würde, wenn die Bewegung vom Anfang derselben an in eine gleichförmig beschleunigte übergegangen wäre, und daher die Differenz RQ zwischen dieser Geschwindigkeit und der anfänglichen (MN) die Acceleration für den Augenblick, welcher dem Punkte M in der Zeitlinie AB entspricht.

Man kann natürlich auch die Zeiten und Accelerationen als die Coordinaten einer Curve ansehen, in welchem Falle natürlich die Geschwindigkeiten durch Flächenräume repräsentirt werden.

Zweites Capitel.

Zusammengesetzte Bewegung.

§. 27 **Zusammensetzung der Bewegungen.** Ein und derselbe Körper kann gleichzeitig zwei oder mehrere Bewegungen besitzen; jede (relative) Bewegung besteht ja aus der Bewegung innerhalb eines Raumes und aus der Bewegung dieses Raumes innerhalb oder in Beziehung auf einen zweiten Raum. So besitzt schon jeder Punkt auf der Erde zwei Bewegungen; denn er läuft täglich einmal um die Erdaxe und mit dieser zugleich jährlich einmal um die Sonne. Eine auf dem Schiffe gehende Person hat in Beziehung auf die Ufer zwei Bewegungen, ihre eigene und die des Schiffes; das Wasser, welches durch eine Boden- oder Seitenöffnung eines Gefäßes ausfließt, das auf einem Wagen fortgefahren wird, hat zwei Bewegungen, die Bewegung aus dem Gefäße und die Bewegung mit dem Gefäße u. s. w.

Man unterscheidet hiernach einfache und zusammengesetzte Bewegungen. Einfach (franz. und engl. simple) sind die geradlinigen Bewegungen, aus welchen andere gerad- oder krummlinige Bewegungen, die man aber deswegen zusammengesetzte (franz. composés; engl. composed) nennt, bestehen oder bestehend gedacht werden können.

Die Zusammensetzung mehrerer einfachen Bewegungen zu einer einzigen und die Zerlegung einer zusammengesetzten Bewegung in mehrere einfache werden im Folgenden abgehandelt.

§. 28 Erfolgen die einfachen Bewegungen in einer und derselben geraden Linie, so giebt die Summe oder Differenz derselben die resultirende zusammengesetzte Bewegung, ersteres, wenn die Bewegungen nach gleichen Richtungen vor sich gehen, letzteres, wenn ihre Richtungen entgegengesetzt sind. Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet sogleich ein, wenn man die gleichzeitigen Räume der einfachen Bewegungen zu einem einzigen vereinigt. Den gleichförmigen Bewegungen mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 entsprechen die gleichzeitigen Räume $c_1 t$ und $c_2 t$; haben diese Bewegungen eine und dieselbe Richtung, so ist demnach der Raum nach t Secunden:

$$s = c_1 t + c_2 t = (c_1 + c_2) t,$$

und folglich ist die resultirende Geschwindigkeit, mit welcher die zusammengesetzte Bewegung vor sich geht, die Summe der Geschwindigkeiten von den einfachen Bewegungen. Bei entgegengesetzten Richtungen beider Bewegungen ist:

$$s = c_1 t - c_2 t = (c_1 - c_2) t,$$

hier ist also die resultirende Geschwindigkeit der Differenz der einfachen Geschwindigkeiten gleich.

Beispiele. 1) An einer Person, welche sich mit 4 Fuß Geschwindigkeit auf dem Verdecke eines Schiffes in der Bewegungsrichtung desselben fortbewegt, während das Schiff selbst 6 Fuß Geschwindigkeit hat, scheinen die Gegenstände an den Ufern mit $4 + 6 = 10$ Fuß Geschwindigkeit vorbei zu gehen. 2) Das Wasser, welches aus der Seitenöffnung eines Gefäßes mit 25 Fuß Geschwindigkeit ausfließt, während es mit dem Gefäße zugleich in der entgegengesetzten Richtung mit 10 Fuß Geschwindigkeit fortgeht, hat in Beziehung auf die übrigen in Ruhe befindlichen Gegenstände nur $35 - 10 = 15$ Fuß Geschwindigkeit.

Dieselben Verhältnisse finden auch bei den ungleichförmigen Bewegungen §. 29
statt. Hat ein und derselbe Körper außer den Anfangsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 noch die constanten Accelerationen p_1 und p_2, so sind die entsprechenden Räume $c_1 t$, $c_2 t$, $\frac{1}{2} p_1 t^2$, $\frac{1}{2} p_2 t^2$, und haben nun Geschwindigkeiten und Accelerationen eine gleiche Richtung, so ist der ganze Raum, welcher diesen einfachen Bewegungen entspricht:

$$s = (c_1 + c_2)\, t + (p_1 + p_2) \frac{t^2}{2}.$$

Setzt man nun $c_1 + c_2 = c$ und $p_1 + p_2 = p$, so erhält man

Fig. 62.

$s = ct + p \frac{t^2}{2}$, und es folgt hiernach, daß nicht allein durch die Summe der einfachen Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit, sondern auch durch die Summe der Accelerationen der einfachen Bewegungen die Acceleration der resultirenden oder zusammengesetzten Bewegung gegeben wird.

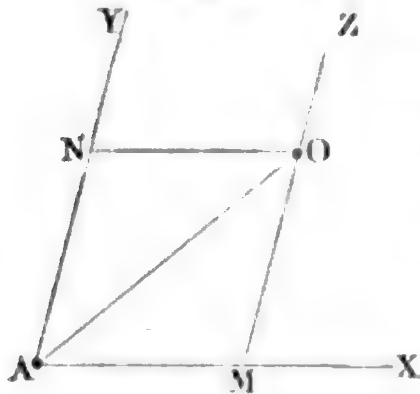
Beispiel. Ein Körper auf dem Monde erhält von der Mondmasse die Acceleration $p_1 = 5$ Fuß und von der Erde die Acceleration $p_2 = 0{,}01$ Fuß. Es fällt daher ein Körper A, Fig. 62, außerhalb des Mondes M und der Erde E, mit 5,01 Fuß, und ein Körper B innerhalb M und E, mit 4,99 Fuß Beschleunigung dem Mittelpunkte des Mondes zu.

Parallelogramm der Bewegungen. Hat ein Körper zwei in den §. 30
Richtungen von einander abweichende Bewegungen zugleich, so nimmt er eine zwischen beiden inneliegende Bewegungsrichtung an, und sind diese Bewegungen ungleichartig, ist z. B. die eine gleichförmig und die andere gleichförmig beschleunigt, so ist die Richtung an jeder Stelle der Bewegung eine andere, die Bewegung selbst also eine krummlinige.

Man findet den Ort O, Fig. 63 (a. f. S.), welchen ein nach den Richtungen AX und AY zugleich bewegter Körper nach einer gewissen Zeit (t)

einnimmt, wenn man den vierten Eckpunkt (O) des Parallelogrammes $AMON$ aufsucht, das durch die gleichzeitigen Wege $AM = x$ und $AN = y$, sowie durch den Winkel XAY gegeben ist, um welchen die Bewegungsrichtungen von einander abweichen. Von der Richtigkeit dieses Verfahrens wird man überzeugt, wenn man die Wege x und y als nicht auf einmal, sondern nach einander zurückgelegt annimmt. Vermöge der einen Bewegung durchläuft der Körper den Weg $AM = x$, und vermöge der anderen von M aus in der Richtung AY, also in einer mit AY parallelen Linie MZ, den Weg $AN = y$. Macht man nun $MO = AN$, so erhält man in O den Ort des Körpers, welcher beiden Bewegungen x und y zugleich entspricht und, der Construction zufolge, der vierte Eckpunkt eines Parallelogrammes $AMON$ ist. Auch kann man sich vorstellen, daß der Raum $AM = x$ in einer Linie AX zurückgelegt werde, die mit allen ihren Punkten zugleich in der Richtung AY fortgeht, also auch M mit AY parallel fortführt und diesen Punkt den Weg $MO = AN = y$ beschreiben läßt.

Fig. 63.

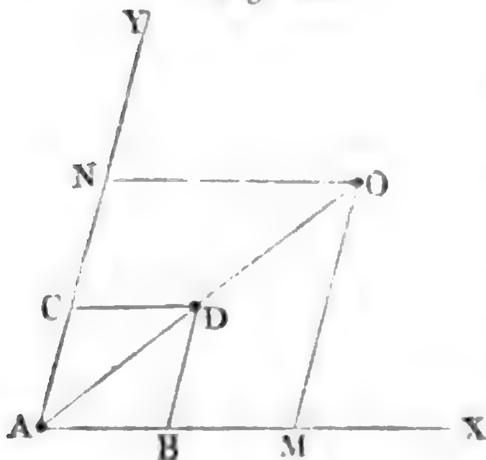


§. 31 **Parallelogramm der Geschwindigkeiten.** Erfolgen die beiden Bewegungen in den Richtungen AX und AY gleichförmig und mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2, so sind die Räume nach einer gewissen Zeit (t):

$$x = c_1 t \text{ und } y = c_2 t;$$

es ist also ihr Verhältniß $\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1}$ zu allen Zeiten dasselbe, eine Eigenthümlichkeit, die nur der geraden Linie AO, Fig. 64, zukommt. Es folgt also hieraus, daß die zusammengesetzte Bewegung in einer geraden Linie vor sich geht. Construirt man ferner aus den Geschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ das Parallelogramm $ABCD$, so giebt dessen vierter Eckpunkt den Ort D an, wo sich der Körper am Ende einer Secunde befindet. Da aber die resultirende Bewegung eine geradlinige ist, so folgt, daß diese überhaupt in der Richtung der Diagonale des aus den Geschwindigkeiten construirten Parallelogrammes vor sich geht. Bezeichnet man nun den Weg AO, welcher in der Zeit (t) wirklich zurückgelegt wird, durch s, so hat man wegen Aehnlichkeit der Dreiecke AMO und ABD:

Fig. 64.



$\frac{s}{x} = \frac{AD}{AB}$, es folgt demnach dieser Weg:

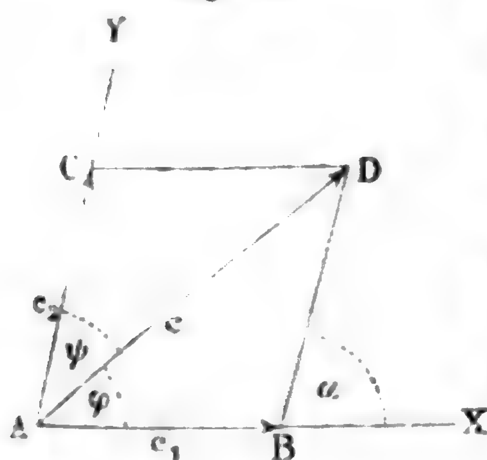
$$s = \frac{x.AD}{AB} = \frac{c_1 t.\overline{AD}}{c_1} = \overline{AD}.t.$$

Der letzten Gleichung zufolge ist der Weg in der Diagonale der Zeit (t) proportional, also die Bewegung selbst gleichförmig, ihre Geschwindigkeit c gleich der Diagonale AD.

Es giebt also die Diagonale eines aus zwei Geschwindigkeiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gebildeten Parallelogrammes die Richtung und Größe derjenigen Geschwindigkeit an, mit welcher die resultirende Bewegung wirklich vor sich geht. Man nennt dieses Parallelogramm Parallelogramm der Geschwindigkeiten (franz. parallélogramme des vitesses; engl. parallelogram of velocities), die einfachen Geschwindigkeiten heißen auch wohl Componenten oder Seitengeschwindigkeiten (franz. composantes; engl. components) und die zusammengesetzte Geschwindigkeit die resultirende oder mittlere (franz. resultante; engl. resultant).

Durch die Anwendung trigonometrischer Formeln läßt sich die Richtung und Größe der mittleren Geschwindigkeit auch rechnend finden. Die Auflösung von einem der gleichen Dreiecke, z. B. von ABD, aus denen das Parallelogramm $ABDC$ (Fig. 65) der Geschwindigkeiten besteht, giebt die mittlere Geschwindigkeit $AD = c$ aus den Seitengeschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ und aus dem von ihren Richtungen gebildeten Winkel $BAC = \alpha$ durch die Formel: §. 32

Fig. 65.



$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2 c_1 c_2 \cos.\alpha},$$

und den Winkel $BAD = \varphi$, den die mittlere Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit c_1 einschließt, durch die Formel:

$$\sin.\varphi = \frac{c_2 \sin.\alpha}{c} \text{ oder}$$

$$\tang.\varphi = \frac{c_2 \sin.\alpha}{c_1 + c_2 \cos.\alpha} \text{ oder } \cotang.\varphi = \cotang.\alpha + \frac{c_2 \sin.\alpha}{c_1}.$$

Auch ist $\tang.\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right) = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \tang.\frac{\alpha}{2}$.

Sind die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 einander gleich, ist also das Parallelogramm derselben ein Rhombus, so ergiebt sich in Folge der Rechtwinkeligkeit zwischen den Diagonalen einfacher:

$$c = 2 c_1 \cos.\, {}^1\!/_2\, \alpha \text{ und } \varphi = {}^1\!/_2\, \alpha.$$

Schließen endlich die Geschwindigkeiten einen Rechtwinkel ein, so erhält man ebenfalls einfacher:

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ und } tang.\ \varphi = \frac{c_2}{c_1}.$$

Beispiele. 1) Das aus einem Gefäße oder aus einer Maschine ausfließende Wasser hat eine Geschwindigkeit $c_1 = 25$ Fuß, während sich das Gefäß selbst mit einer Geschwindigkeit $c_2 = 19$ Fuß in einer Richtung bewegt, die mit der des ausfließenden Wassers einen Winkel $\alpha^0 = 130^0$ bildet. Welches ist die Richtung und Größe der resultirenden, oder wie man wohl sagt, der absoluten Geschwindigkeit des Wassers?

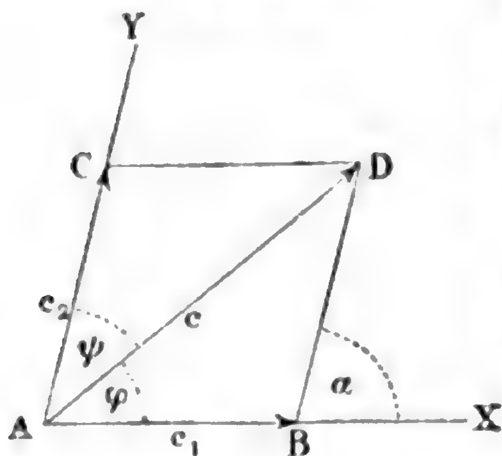
Es ist $c = \sqrt{25^2 + 19^2 + 2.25.19\, cos. 130^0} = \sqrt{625 + 361 - 50.19.cos. 50^0}$ $= \sqrt{986 - 950\, cos. 50^0} = \sqrt{986 - 610{,}7} = \sqrt{375{,}3} = 19{,}37$ Fuß die gesuchte resultirende Geschwindigkeit.

Ferner $sin.\ \varphi = \frac{19\ sin.\ 130^0}{19{,}37} = 0{,}9808\ sin.\ 50^0 = 0{,}7513$, und sonach der Winkel, um welchen die Resultirende von der Geschwindigkeit c_1 abweicht, $\varphi = 48^0\,42'$, also der Winkel, welchen sie mit der Bewegungsrichtung des Gefäßes einschließt: $\alpha - \varphi = 81^0\,18'$.

2) Wären die vorigen Geschwindigkeiten winkelrecht gegen einander gerichtet, so würde $cos.\ \alpha = cos.\ 90^0 = 0$, und deshalb die mittlere Geschwindigkeit $c = \sqrt{986} = 31{,}40$ Fuß sein; für ihre Richtung wäre $tang.\ \varphi = {}^{29}/_{25} = 0{,}76$, daher die Abweichung derselben von der ersten Geschwindigkeit: $\varphi = 37^0\,14'$.

§. 33 Man kann auch jede gegebene Geschwindigkeit aus zwei Seitengeschwindigkeiten bestehend ansehen, und deshalb, gewissen Bedingungen entsprechend, in solche zerlegen. Sind z. B. die Winkel $DAX = \varphi$, und $DAY = \psi$, Fig. 66, gegeben, welche die zu suchenden Geschwindigkeiten mit der mittleren $AD = c$ einschließen sollen, so ziehe man durch den Endpunkt D der die c vorstellenden Graden andere Linien parallel zu den Richtungen AX und AY: die sich ergebenden Durchschnittspunkte B und D schneiden nun die gesuchten Geschwindigkeiten

Fig. 66.



$$AB = c_1 \text{ und } AC = c_2 \text{ ab.}$$

Die Trigonometrie giebt diese Geschwindigkeiten durch die Formeln:

$$c_1 = \frac{c\, sin.\ \psi}{sin. (\varphi + \psi)},\quad c_2 = \frac{c\, sin.\ \varphi}{sin. (\varphi + \psi)}.$$

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung sind die beiden Geschwindigkeiten winkelrecht gegen einander, dann ist also $\varphi + \psi = 90^0$, $sin.\ (\varphi + \psi) = 1$, und es folgt:

$$c_1 = c\ cos.\ \varphi \text{ und } c_2 = c\ sin.\ \varphi.$$

Uebrigens kann auch aus einer Seitengeschwindigkeit (c_1) und ihrem Richtungswinkel (φ) die Richtung und Größe der anderen Seitengeschwindigkeit gefunden werden. Endlich lassen sich auch aus den Geschwindigkeiten c, c_1 und c_2 ihre Richtungswinkel bestimmen, wie man aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel desselben findet.

Beispiel. Es sei die Geschwindigkeit $c = 10$ Fuß in zwei Seitengeschwindigkeiten zu zerlegen, deren Richtungen um die Winkel $\varphi = 65^0$ und $\psi = 70^0$ von ihrer Richtung abweichen. Diese Geschwindigkeiten sind:

$$c_1 = \frac{10\, sin.\, 70^0}{sin.\, 135^0} = \frac{9{,}397}{sin.\, 45^0} = 13{,}29 \text{ Fuß u. } c_2 = \frac{10\, sin.\, 65^0}{sin.\, 135^0} = \frac{9{,}063}{0{,}7071} = 12{,}81 \text{ Fuß.}$$

Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten. §. 34 Durch wiederholte Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten läßt sich jede beliebige Anzahl von Geschwindigkeiten in eine einzige Geschwindigkeit verwandeln. Die Construction des Parallelogrammes $ABDC$ (Fig. 67) giebt die mittlere Geschwindigkeit AD zu c_1 und c_2; durch Construction des Parallelogrammes $ADFE$ erhält man in AF die mittlere Geschwindigkeit zu AD und $AE = c_3$, und ebenso stellt sich durch Construction des Parallelogrammes $AFHG$ die mittlere Geschwindigkeit $AH = c$ von AF und $AG = c_4$, und dadurch auch die von c_1, c_2, c_3 und c_4 heraus.

Am einfachsten ergiebt sich die in Frage stehende mittlere Geschwindigkeit durch Construction eines Polygones $ABDFH$, dessen Seiten AB, BD, DF und FH den gegebenen Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 und c_4 parallel und gleich gemacht werden, und dessen letzte Seite AH allemal die resultirende Geschwindigkeit ist.

Fig. 67.

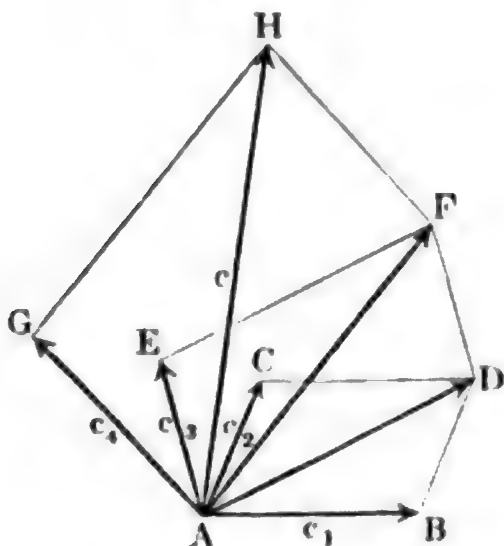
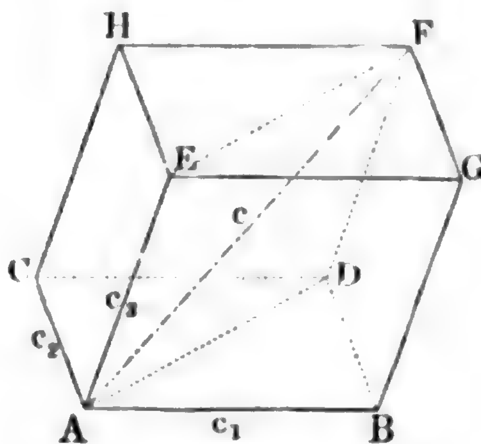


Fig. 68.

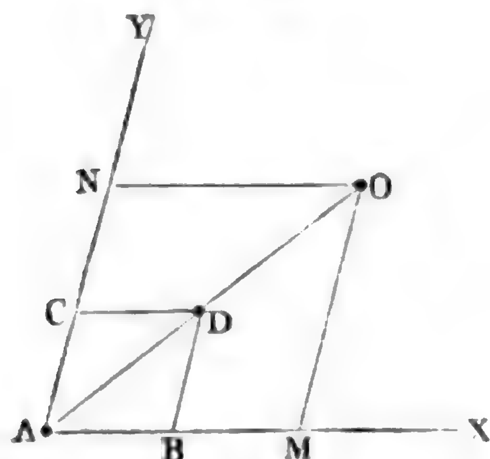


Auch in dem Falle, wenn die Geschwindigkeitsrichtungen nicht in einerlei Ebene liegen, läßt sich die mittlere Geschwindigkeit durch mehrfache Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten finden. Die mittlere Geschwindigkeit $AF = c$ (Fig. 68) von drei nicht in einer Ebene befindlichen Geschwindigkeiten $AB = c_1$, $AC = c_2$ und $AE = c_3$ ist die Diagonale

eines Parallelepipeds $BCHG$, dessen Seiten diesen Geschwindigkeiten gleich sind. Man spricht daher wohl auch von einem Parallelepiped der Geschwindigkeiten.

§. 35 **Zusammensetzung der Accelerationen.** Zwei gleichförmig beschleunigte und mit Null Geschwindigkeit anfangende Bewegungen geben in ihrer Zusammensetzung wieder eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der geraden Linie. Bezeichnet man die Accelerationen dieser nach den Richtungen AX und AY (Fig. 69) vor sich gehenden Bewegungen durch p_1 und p_2, so sind am Ende der Zeit t die Räume:

Fig. 69.



$$AM = x = \frac{p_1 t^2}{2} \text{ und}$$

$$AN = y = \frac{p_2 t^2}{2},$$

und es ist ihr Verhältniß

$$\frac{x}{y} = \frac{p_1 t^2}{p_2 t^2} = \frac{p_1}{p_2}$$

von der Zeit gar nicht abhängig, deshalb also der Weg AO der zusammengesetzten Bewegung ein geradliniger. Macht man $AB = p_1$, und $BD = AC = p_2$, so erhält man ein Parallelogramm $ABDC$, welches dem Parallelogramm $AMON$ ähnlich und für welches

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1/2\, p_1 t^2}{p_1} = 1/2\, t^2, \text{ also } AO = 1/2\, \overline{AD} . t^2 \text{ ist.}$$

Dieser Gleichung zufolge ist der Weg AO der zusammengesetzten Bewegung dem Quadrate der Zeit proportional, ie Bewegung selbst also gleichförmig beschleunigt, und die Acceleration derselben die Diagonale AD des aus den einfachen Accelerationen p_1 und p_2 construirten Parallelogramm.

So wie man also durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten Geschwindigkeiten zusammensetzt und zerlegt, ebenso lassen sich nach genau denselben Regeln durch ein Parallelogramm, welches man das Parallelogramm der Accelerationen (franz. parallélogramme des accélérations; engl. parallelogram of accelerations) nennt, Accelerationen zu einer einzigen vereinigen, sowie in mehrere andere zerlegen.

§. 36 **Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Accelerationen.** Aus der Vereinigung von einer gleichförmigen Bewegung mit einer gleichförmig beschleunigten geht eine gänzlich ungleichförmige Bewegung hervor, wenn die Bewegungsrichtungen nicht zusammenfallen. In einer gewissen Zeit t wird bei der Geschwindigkeit c in der einen Richtung AY, Fig. 70, der Weg:

$$AN = y = ct,$$

und in derselben Zeit bei einer unveränderlichen Acceleration in einer gegen die erstere rechtwinkeligen Richtung AX der Weg:

$$AM = x = \frac{p t^2}{2}$$

zurückgelegt, und es ist der Körper im Eckpunkte O des aus $y = c t$ und $x = \frac{p t^2}{2}$ construirten Parallelogrammes. Mit Hülfe dieser Formeln läßt sich zwar der Ort des Körpers zu jeder Zeit finden, allein derselbe liegt nicht in einer und derselben Geraden; denn nehmen wir aus der ersten Gleichung $t = \frac{y}{c}$ und setzen diesen Werth in die zweite, so erhalten wir die Bahngleichung:

$$x = \frac{p y^2}{2 c^2}.$$

Dieser zufolge verhalten sich die Wege (x) in der zweiten Bewegungsrichtung nicht wie die Wege selbst, sondern wie die Quadrate (y^2) der Wege in der

Fig. 70.

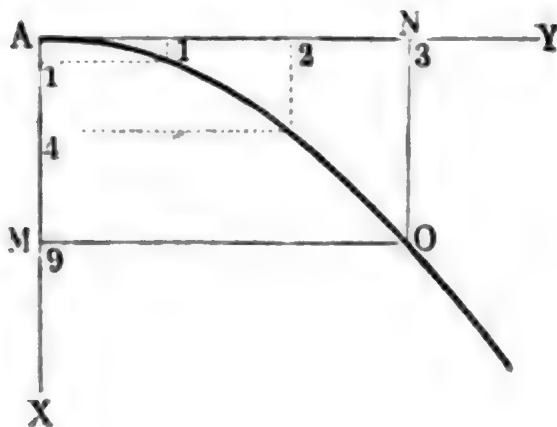
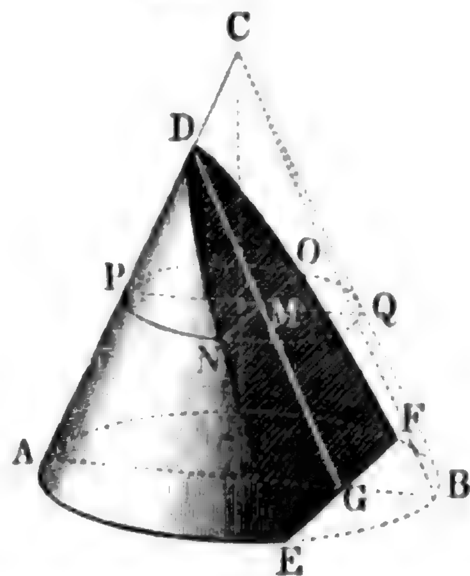


Fig. 71.



ersten Bewegungsrichtung, und es ist deshalb der Weg des Körpers auch keine gerade, sondern eine gewisse krumme Linie, welche man in der Geometrie unter dem Namen die Parabel (franz. parabole; engl. parabola) kennen lernt.

Anmerkung. Es sei ABC, Fig. 71, ein Kegel mit kreisförmiger Basis $AEBF$, sowie DEF ein Schnitt desselben parallel zur Seitenlinie BC und winkelrecht zum Durchschnitt ABC geführt, und $OPNQ$ ein zweiter, mit der Basis paralleler und deswegen ebenfalls kreisförmiger Durchschnitt. Es sei ferner EF die Durchschnittslinie zwischen der Basis und dem ersten Schnitte, und ON die zwischen beiden Schnitten; denken wir uns endlich im triangulären Durchschnitte ABC die parallelen Durchmesser AB und PQ und im Schnitte DEF die Axe DG geführt. Alsdann gilt für die halbe Kreissehne $MN = MO$ die Gleichung $\overline{MN}^2 = PM \cdot MQ$; aber MQ ist $= GB$ und für PM gilt die

Proportion $PM : DM = AG : DG$, es ergiebt sich daher:

$$MN^2 = BG \, . \, \frac{DM \, . \, AG}{DG} \, .$$

Ebenso ist aber auch $GE^2 = BG \, . \, AG$; dividirt man daher beide Gleichungen durch einander, so folgt:

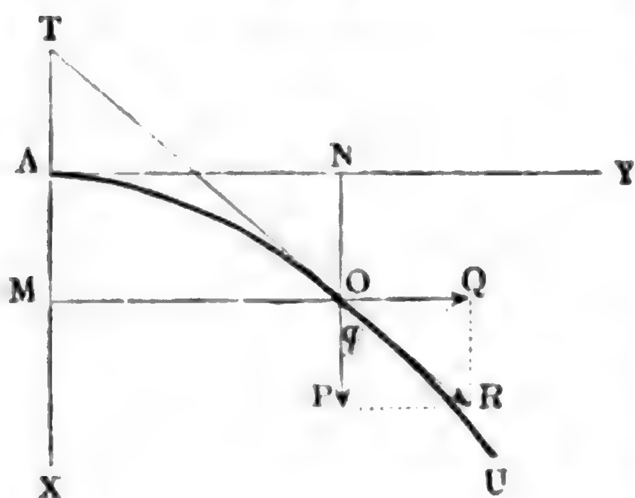
$$\frac{DM}{DG} = \frac{\overline{MN^2}}{\overline{GE^2}};$$

es verhalten sich also die auf der Axe abgeschnittenen Stücke (Abscissen), wie die Quadrate der entsprechenden Perpendikel (Ordinaten). Dieses Gesetz stimmt mit dem oben gefundenen Bewegungsgesetze vollkommen überein; es geht also diese Bewegung in einer krummen Linie DNE vor sich, welche einem Kegelschnitte angehört.

Ueber die Construction, Tangentenlage und andere Eigenschaften der Parabel ist im Ingenieur Seite 175 u. s. w. nachzusehen.

§. 37 **Parabelbewegung.** Um die aus der Zusammensetzung von Geschwindigkeit und Acceleration hervorgehende Bewegung vollständig zu kennen, muß man auch noch die Richtung, Geschwindigkeit und den durchlaufenen Weg für jede Zeit (t) angeben können. Die Geschwindigkeit parallel zu AY ist unveränderlich $= c$, die parallel zu AX aber veränderlich und $= pt$; construirt man nun aus dieser Geschwindigkeit $OQ = c$ und $OP = pt$ das Parallelogramm $OPRQ$, Fig. 72, so erhält man in der Diagonale OR desselben die mittlere oder diejenige Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in O die parabolische Bahn AOU verfolgt. Diese Geschwindigkeit selbst ist:

Fig. 72.



$$v = \sqrt{c^2 + (pt)^2}.$$

Ebenso giebt OR die Tangente oder Richtung, in welcher der Körper in O einen Augenblick lang fortgeht, und es ist für den Winkel $POR = XTO = \varphi$, welchen dieselbe mit der zweiten Richtung (Axe) AX einschließt, durch die Formel:

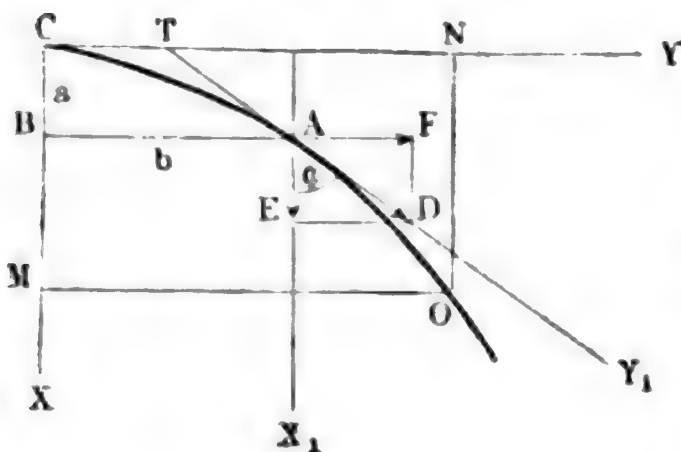
$$tang. \, \varphi = \frac{OQ}{OP} = \frac{c}{pt}$$

gegeben.

Um endlich noch den durchlaufenen Raum oder Curvenbogen $AO = s$ zu finden, kann man sich der Gleichung $\sigma = vt$ (§. 19), wonach sich die als Elemente anzusehenden kleinen Theile desselben berechnen lassen, bedienen. Uebrigens giebt auch die höhere Geometrie eine complicirte Formel zur Berechnung der Länge eines Parabelbogens.

Wir haben seither angenommen, daß die ursprünglichen Bewegungsrichtungen einen Rechtwinkel einschließen, und müssen nun noch denjenigen Fall näher kennen lernen, bei welchem die Richtung der Acceleration mit der Geschwindigkeit einen gewissen Winkel einschließt. Hat der Körper in der Richtung AY_1 (Fig. 73) die Geschwindigkeit c und in der Richtung AX_1, §. 3

Fig. 73.



welche mit der ersten den Winkel $X_1 A Y_1 = \alpha$ einschließt, die Acceleration p, so ist A nicht mehr Scheitel und AX_1 nicht mehr Axe, sondern nur die Axenrichtung der Parabel. Der Scheitel C steht vielmehr um die Coordinaten $CB = a$ und $BA = b$, wovon die erstere in die Axe selbst fällt und die letztere winkelrecht darauf steht, von dem Anfangspunkte A der Bewegung ab. Die Geschwindigkeit $AD = c$ besteht aus den Seitengeschwindigkeiten $AF = c\,sin.\,\alpha$ und $AE = c\,cos.\,\alpha$. Von ihnen ist die erstere immer dieselbe, die letztere aber der veränderlichen Geschwindigkeit pt gleich zu setzen, vorausgesetzt, daß der Körper die Zeit t nöthig gehabt hat, um vom Scheitel C nach dem eigentlichen Anfangspunkte A zu gelangen. Es ergiebt sich also:

$$c\,cos.\,\alpha = pt, \text{ folglich } t = \frac{c\,.\,cos.\,\alpha}{p}, \text{ daher}$$

$$1)\ CB = a = \frac{pt^2}{2} = \frac{c^2 \cos \alpha^2}{2p}, \text{ und}$$

$$2)\ BA = b = c\,sin.\,\alpha\,.\,t = \frac{c^2\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha}{p} = \frac{c^2\,sin.\,2\,\alpha}{2p}.$$

Hat man durch diese Abstände den Scheitel C der Parabel gefunden, so kann man, von da ausgehend, für jede beliebige Zeit den Ort O des Körpers bestimmen. Uebrigens gilt auch, $CM = x$ und $MO = y$ gesetzt, die allgemeine Formel:

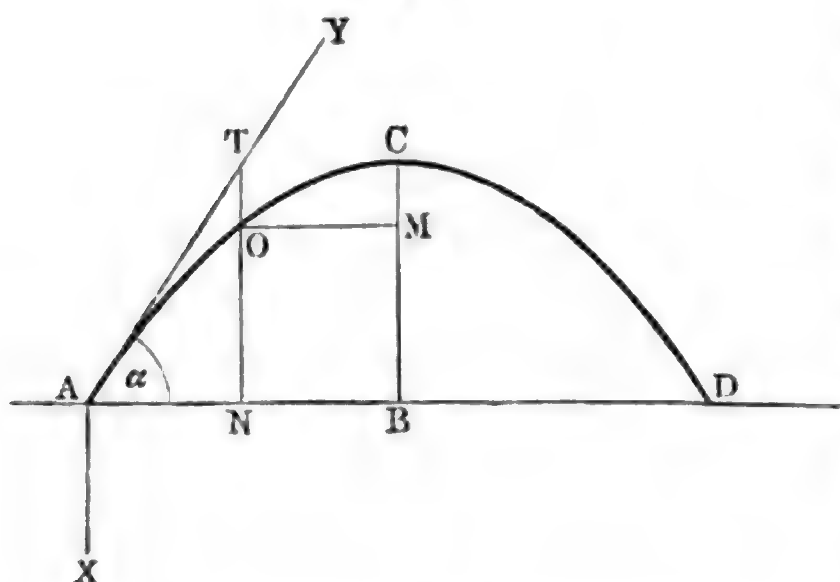
$$x = \frac{p\,y^2}{2\,c^2\,sin.\,\alpha^2}, \text{ oder } y = c\,sin.\,\alpha \sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Anmerkung. Die seither abgehandelte Theorie der parabolischen, aus einer unveränderlichen Geschwindigkeit und einer constanten Acceleration hervorgehenden Bewegung findet ihre Anwendung in der Ballistik, oder der Lehre von der Wurfbewegung. Die schief auf- oder abwärts geworfenen Körper würden in Folge ihrer Anfangsgeschwindigkeit (c) und der Acceleration der Schwere ($g = 31\frac{1}{4}$ Fuß) einen Parabelbogen durchlaufen, wenn der Widerstand der Luft beseitigt wäre, oder die Bewegung im luftleeren Raume vor sich ginge. Ist die

Wurfgeschwindigkeit nicht groß und der geworfene Körper sehr schwer in Hinsicht auf sein Volumen, so fällt die Abweichung von der Parabel klein genug aus, um dieselbe ganz vernachlässigen zu können. Am vollkommensten wird noch die parabolische Bahn an springenden Wasserstrahlen, wie sie sich beim Ausflusse aus Gefäßen, bei Spritzen u. s. w. bilden, vorgefunden. Abgeschossene Körper, wie z. B. Geschützkugeln, beschreiben in Folge des großen Luftwiderstandes, von der Parabel bedeutend abweichende Bahnen.

§. 39 **Wurfbewegung.** Ein unter dem Elevationswinkel $YAD = \alpha$ (Fig. 74) abgeschossener Körper steigt auf eine gewisse Höhe BC, welche die Wurfhöhe (franz. hauteur du jet; engl. height of projection) genannt wird, und er erreicht die Horizontalebene, von der er in A ausgegangen ist, in einer Entfernung AD, welche die Wurfweite (franz. amplitude du jet; engl. range of projection) heißt.

Fig. 74.



Aus der Geschwindigkeit c, der Acceleration g und dem Elevationswinkel folgt, nach §. 38, indem man p durch g und α^0 durch $90^0 + \alpha^0$, also $cos.\ \alpha$ durch $sin.\ \alpha$ ersetzt u. s. w.:

die Wurfhöhe $CB = a = \dfrac{c^2\, sin.\ \alpha^2}{2g}$ und

die halbe Wurfweite $AB = b = \dfrac{c^2\, sin.\ 2\alpha}{2g}$.

Aus der letzten Formel ersieht man, daß die Wurfweite am größten ausfällt, wenn $sin.\ 2\alpha = 1$, also $2\alpha = 90^0$, d. i. $\alpha = 45^0$ ist. Ein unter dem Elevationswinkel von 45 Grad aufsteigender Körper erreicht also die größte Wurfweite.

Auch ist

$$a = \frac{g b^2}{2 c^2 cos.\ \alpha^2},$$

und für einen Punkt O der Wurfbahn hat man, wenn $CM = x$ und $MO = y$ dessen Coordinaten sind:

$$x = \frac{g y^2}{2 c^2 cos.\ \alpha^2},$$

oder, wenn er durch die Coordinaten $AN = x_1$ und $NO = y_1$ angegeben werden soll, da

$$x = CM = BC - NO = a - y_1 \text{ und}$$
$$y = MO = AB - AN = b - x_1 \text{ ist:}$$
$$a - y_1 = \frac{g(b - x_1)^2}{2 c^2 \cos. \alpha^2},$$

folglich:

$$y_1 = a - \frac{g(b - x_1)^2}{2 c^2 \cos. \alpha^2}, \text{ oder, da } a - \frac{g b^2}{2 c^2 \cos. \alpha^2} = 0 \text{ ist,}$$
$$y_1 = x_1 \, tang. \, \alpha - \frac{g x_1^2}{2 c^2 \cos. \alpha^2}.$$

Setzt man in der Gleichung $y_1 = x_1 \, tang. \, \alpha - \frac{g x_1^2}{2 c^2 \cos. \alpha^2}$, für $\frac{1}{\cos. \alpha^2}$ den Werth $1 + tang. \, \alpha^2$, und löst man dieselbe in Beziehung auf $tang. \, \alpha$ auf, so erhält man folgenden Ausdruck für den Wurfwinkel (α), bei welchem ein durch die Coordinaten x_1 und y_1 gegebenes Ziel erreicht wird:

$$tang. \, \alpha = \frac{c^2}{g x_1} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{g x_1}\right)^2 - \left(1 + \frac{2 c^2 y_1}{g x_1^2}\right)}.$$

Ist $\left(\frac{c^2}{g x_1}\right)^2 = 1 + \frac{2 c^2 y_1}{g x_1^2}$, oder $c^4 - 2 g y_1 c^2 = g^2 x_1^2$, also:

$$c = \sqrt{g \left(y_1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)},$$

so fällt einfach

$$tang. \, \alpha = \frac{c^2}{g x_1}$$

aus. Kleinere Werthe für c machen $tang. \, \alpha$ imaginär, und größere Werthe für c führen auf zwei Werthe für $tang. \, \alpha$; im ersten Falle ist das Ziel gar nicht zu erreichen, und im zweiten Falle wird es entweder beim Steigen oder beim Fallen des geworfenen Körpers getroffen.

Beispiele. 1) Ein unter dem Elevationswinkel von 66° mit 20 Fuß Geschwindigkeit aufsteigender Wasserstrahl, dem also die Geschwindigkeitshöhe $h = 0{,}016 \, . \, 20^2 = 6{,}4$ Fuß zukommt, steigt auf die Höhe $a = h \, sin. \, \alpha^2 = 6{,}4 \, (sin. \, 66^0)^2 = 5{,}34$ Fuß und hat die Wurf- oder Sprungweite $2 b = 2 \, . \, 6{,}4 \, sin. \, 132^0 = 2 \, . \, 6{,}4 \, sin. \, 48^0 = 9{,}51$ Fuß. Die Zeit, welche jedes Wassertheilchen braucht, um den ganzen Parabelbogen ACD zu durchlaufen, ist $t = \frac{2 c \, sin. \, \alpha}{g} = \frac{2 \, . \, 20 \, . \, sin. \, 66^0}{31{,}25} = 1{,}17$ Secunde. Die Höhe, welche dem Horizontalabstande $AN = x_1 = 3$ Fuß entspricht, ist

$$y_1 = 3 \, . \, tang. \, 66^0 - \frac{31{,}25 \, . \, 9}{2 \, . \, 400 \, . \, (cos. \, 66^0)^2} = 6{,}738 - \frac{0{,}35156}{0{,}16543}$$
$$= 6{,}738 - 2{,}125 = 4{,}613 \text{ Fuß.}$$

2) Der aus einer horizontalen Röhre ausfließende Wasserstrahl hat auf einer Höhe von $1\frac{3}{4}$ Fuß eine Sprungweite (halbe Wurfweite) von $5\frac{1}{4}$ Fuß; wie groß ist die Geschwindigkeit des Wassers?

Aus der Formel $x = \frac{g y^2}{2 c^2} = \frac{y^2}{4 h}$ folgt $h = \frac{y^2}{4 x}$, hierin $x = 1,75$ und $y = 5,25$ gesetzt, ergiebt sich $h = \frac{5,25^2}{4 . 1,75} = 3,937$ Fuß, und die dieser Höhe entsprechende Geschwindigkeit $c = 15,68$ Fuß.

§. 40 **Springende Wasserstrahlen.** Die Eigenthümlichkeiten der Bewegung des Wassers in springenden Strahlen werden besonders durch Folgendes dargethan und zur Anschauung gebracht. Nach dem Vorstehenden sind

$$y = x \, tang. \, \alpha - \frac{g x^2 [1 + (tang. \, \alpha)^2]}{2 c^2} \text{ und}$$

$$y_1 = x_1 \, tang. \, \alpha_1 - \frac{g x_1^2 [1 + (tang. \, \alpha_1)^2]}{2 c^2}$$

die Gleichungen der Parabeln, welche zwei mit derselben Geschwindigkeit c unter verschiedenen Neigungswinkeln α und α_1 aufsteigende Wasserstrahlen bilden. Setzt man $x_1 = x$ und subtrahirt man diese Gleichungen von einander, so erhält man die neue Gleichung

$$y - y_1 = x (tang. \, \alpha - tang. \, \alpha_1) - \frac{g x^2}{2 c^2} [(tang. \, \alpha)^2 - (tang. \, \alpha_1)^2]$$

$$= x (tang. \, \alpha - tang. \, \alpha_1) \left(1 - \frac{g x}{2 c^2} (tang. \, a + tang. \, a_1)\right).$$

Nimmt man ferner an, daß diese beiden Wasserstrahlen nahe unter denselben Winkeln aufsteigen, und verlangt man endlich, daß beide Parabeln einen Punkt gemeinschaftlich haben, so hat man $y_1 = y$, daher

$$x (tang. \, \alpha - tang. \, \alpha_1) \left(1 - \frac{g x}{2 c^2} (tang. \, \alpha + tang. \, \alpha_1)\right) = 0, \text{ also}$$

$$\frac{g x}{2 c^2} (tang. \, \alpha + tang. \, \alpha_1) = 1,$$

oder, da sich $\alpha_1 = \alpha$ setzen läßt, einfach

$$\frac{g x \, tang. \, \alpha}{c^2} = 1, \text{ folglich } tang. \, \alpha = \frac{c^2}{g x}.$$

Führt man diesen Ausdruck in der Gleichung

$$y = x \, tang. \, \alpha - \frac{g x^2}{2} [1 + (tang. \, a)^2]$$

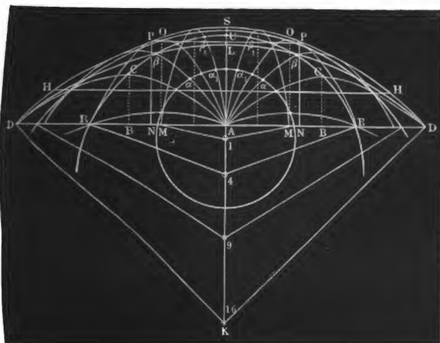
ein, so erhält man die Gleichung

$$y = \frac{c^2}{g} - \frac{g x^2}{2 c^2} \left(1 + \frac{c^4}{g^2 x^2}\right) = \frac{c^2}{2 g} - \frac{g x^2}{2 c^2}$$

der Curve $DPSPD$, Fig. 75, welche durch die benachbarten Punkte geht, worin sich je zwei der mit verschiedenen Winkeln aus einem und demselben Punkte A aufsteigenden Parabeln schneiden, und daher auch das ganze System der Parabeln ACD, AOR u. s. w. berührt oder umhüllt.

Die Sprunghöhe des senkrecht aufsteigenden Strahles ist $AS = \frac{c^2}{2\,g}$ und die Sprungweite des unter dem Winkel $\alpha = 45$ Grad aufsteigenden

Fig. 75.



Strahles ACD ist $AD = 2\,.\,\frac{c^2 \sin. 2\,\alpha}{2\,g} = 2\,.\,\frac{c^2}{2\,g} = 2\,\overline{AS}$.

Verlegt man den Coordinatenanfangspunkt von A nach S, ersetzt man also die Coordinaten $AN = x$ und $NP = y$ durch die Coordinaten $SU = u$ und $UP = v$, so hat man

$$y = AS - SU = \frac{c^2}{2\,g} - u \text{ und } x = AN = UP = v,$$

daher geht die obige Gleichung

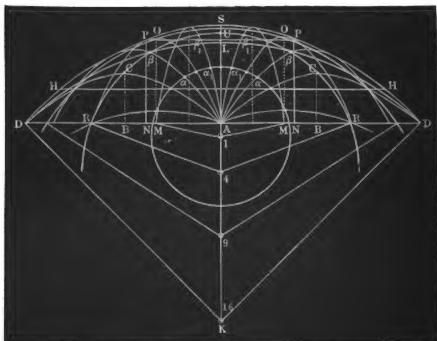
$$y = \frac{c^2}{2\,g} - \frac{g\,x^2}{2\,c^2} \text{ in folgende über:}$$

$$u = \frac{g\,v^2}{2\,c^2} \text{ oder } v^2 = \frac{2\,c^2}{g}\,u.$$

Diese Gleichung gehört der gemeinen Parabel mit dem Parameter $p = \frac{2\,c^2}{g} = 4\,\overline{AS}$ an, und es ist daher auch die Umhüllungscurve $DPSPD$

der sämmtlichen aus demselben Punkte A aufsteigenden Wasserstrahlen die gemeine Parabel mit dem Scheitel S und der Axe SA.

Fig. 76.



Ein nach allen Richtungen aus A aufsteigender Strahlenbündel wird folglich von einem Paraboloid umhüllt, welches durch Umdrehung der Umhüllungscurve $DPSPD$ um AS entsteht.

Ist t die Zeit, in welcher der in einer Parabel aufsteigende Körper den Bogen AO, Fig. 76, zurücklegt, dessen Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ sind, so hat man

$$x = ct\,cos.\,\alpha \text{ und } y = ct\,sin.\,\alpha - \frac{gt^2}{2}, \text{ folglich auch}$$

$$cos.\,\alpha = \frac{x}{ct} \text{ und } sin.\,\alpha = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{ct}.$$

Setzt man nun diese Werthe für $cos.\,\alpha$ und $sin.\,\alpha$ in die bekannte trigonometrische Formel $(cos.\,\alpha)^2 + (sin.\,\alpha)^2 = 1$ ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{(ct)^2} + \frac{(y + \frac{1}{2}gt^2)^2}{(ct)^2} = 1, \text{ oder } x^2 + (y + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 = c^2t^2.$$

Wenn von einem Punkte A, Fig. 76, aus gleichzeitig in derselben Verticalebene Körper unter verschiedenen Neigungswinkeln emporgeworfen werden,

so sind die Orte, welche dieselben nach irgend einer Zeit t einnehmen, durch die zuletzt gefundene Gleichung bestimmt, welche einem Kreise vom Halbmesser $r = ct$ angehört, dessen Mittelpunkt um die Größe $a = \frac{1}{2} g t^2$ senkrecht unter dem Ausgangspunkte A liegt und sich daher auch in der Form $x^2 + (y + a)^2 = r^2$ darstellen läßt. Dieser Kreis wird daher auch gleichzeitig von den in einem und demselben Augenblicke aus A aufsteigenden Elementen springenden Wasserstrahlen ACD, AOP, $ALS\ldots$ erreicht.

Setzt man in der Formel $t_1 = \frac{x}{c\,cos.\,\alpha}$, $\alpha = 45^0$, und $x = AB = \frac{c^2}{2g}$, ein, so erhält man $t_1 = \frac{c}{2g\,cos.\,45^0} = \frac{c}{g}\sqrt{\frac{1}{2}}$, daher die Zeit zum Durchlaufen des Parabelbogens ACD, $t = 2t_1 = \frac{c}{g}\sqrt{2}$, und den Halbmesser des Kreises DLD, welcher von den verschiedenen Wasserelementen gleichzeitig erreicht wird:

$$KD = r = ct = \frac{c^2}{g}\sqrt{2} = \frac{c^2}{2g}\sqrt{8} = 2{,}828\,\frac{c^2}{2g} = 2{,}828\ .\ \overline{AS},$$

sowie den Abstand des Mittelpunktes K von A:

$$AK = a = \tfrac{1}{2} g t^2 = \frac{c^2}{g} = 2\,\frac{c^2}{2g} = 2\,\overline{AS}.$$

Theilt man nun DK in 4, sowie AK in 16 gleiche Theile, so kann man, da r mit t und a mit t^2 proportional wächst, aus den Theilpunkten 1, 4, 9 von AK mit $\frac{1}{4}DK$, $\frac{2}{4}DK$ und $\frac{3}{4}DK$ andere Kreise beschreiben, welche andere in gleichen Zeiten durchlaufene Parabelbögen abschneiden. So schneidet z. B. der aus (1) mit $1\,\alpha = \frac{1}{4}DK$ beschriebene Kreis in den Punkten $\alpha, \alpha_1 \ldots$, sowie der aus (4) mit $4\,\beta = \frac{1}{2}DK$ beschriebene Kreis in den Punkten $\beta, \beta_1 \ldots$ gleichzeitig durchlaufene Parabelwege $A\alpha$, $A\alpha_1 \ldots$, sowie $A\beta$, $A\beta_1 \ldots$ ab.

Dreht man diese Kreise um die verticale Axe KL, so beschreiben sie die Kugelflächen, welche die gleichzeitig durchlaufenen Parabelwege begrenzen, wenn die Strahlen rund herum, nach allen Richtungen und unter allen Neigungswinkeln aufsteigen.

Krummlinige Bewegungen überhaupt. Aus der Vereinigung §. 41
von mehreren Geschwindigkeiten mit mehreren unveränderlichen Accelerationen entspringt ebenfalls eine parabolische Bewegung, denn es lassen sich nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch die Accelerationen zu einer einzigen vereinigen; es ist also das Ergebniß dasselbe, als wenn nur eine Geschwindigkeit und nur eine Acceleration, d. i. nur eine gleichförmige, und nur eine gleichförmig beschleunigte Bewegung vorhanden wäre.

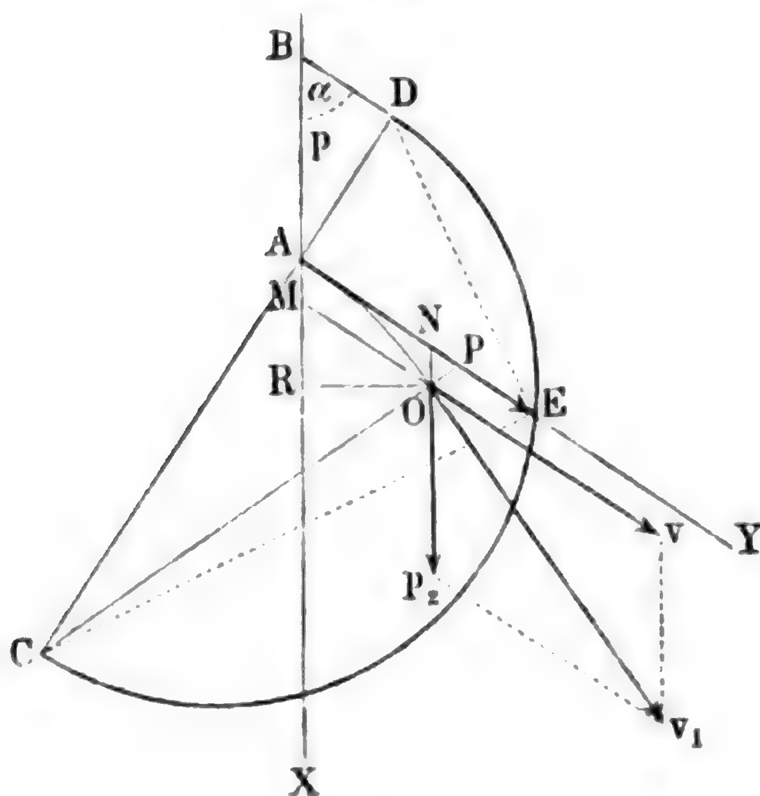
Sind die Accelerationen veränderlich, so kann man sie ebenso gut zu einer

mittleren vereinigen, als wenn sie constant wären, denn es ist erlaubt, dieselben in einem unendlich kleinen Zeittheilchen (τ) als unveränderlich, die entsprechenden Bewegungen also innerhalb dieses Theilchens als gleichförmig beschleunigt anzusehen. Allerdings ist die resultirende Acceleration veränderlich, wie ihre Componenten selbst. Vereinigt man nun diese resultirende Acceleration mit der gegebenen Geschwindigkeit, so läßt sich ein kleiner Parabelbogen angeben, in welchem die Bewegung während eines kleinen Zeittheilchens statthat. Bestimmt man so für das folgende Zeittheilchen wieder die Geschwindigkeit und die mittlere Acceleration, so läßt sich ein neues, einer anderen Parabel angehöriges Bogenstück finden, und fährt man so fort, so erhält man nach und nach die angenäherte vollständige Bahncurve.

§. 42 Man kann jeden kleinen Bogentheil irgend einer Curve als einen Kreisbogen ansehen. Der Kreis, welchem dieser Bogen zugehört, heißt **Krümmungskreis** (franz. cercle osculateur; engl. circle of curvature), und sein ihm zugehöriger Halbmesser **Krümmungshalbmesser** (franz. rayon de courbure; engl. radius of curvature). Es läßt sich ebenso die Bahn eines bewegten Körpers aus Kreisbogen zusammensetzen, und deshalb eine Formel für ihre Halbmesser entwickeln.

Es sei AM (Fig. 77) ein sehr kleiner gleichförmig beschleunigt zurückgelegter Weg $x = \frac{p\tau^2}{2}$ in der Richtung AX, und AN ein sehr kleiner, gleichförmig durchlaufener Weg $y = v\tau$, und O der vierte Endpunkt des aus x und y construirten Parallelogramms, d. i. der Punkt, welchen der von A ausgehende Körper am Ende des Zeittheilchens (τ) einnimmt. Legen wir AC rechtwinkelig gegen AY und sehen wir nun zu, aus welchem Punkte C in dieser Linie sich ein kleiner Kreisbogen durch A und O beschreiben läßt. Wegen der Kleinheit des Bogens AO können wir annehmen, daß nicht allein CA, sondern auch die Gerade COP

Fig. 77.



rechtwinkelig gegen AY stehe, daß also im kleinen Dreiecke NOP der Winkel NPO ein rechter sei. Die Auflösung dieses Dreiecks giebt:

$$OP = ON \sin. ONP = AM \sin. XAY = \frac{p\tau^2}{2} \sin. \alpha,$$

und die Tangente

$$AP = AN + NP = vt + \frac{p\tau^2}{2} \cos. \alpha = \left(v + \frac{p\tau}{2} \cos. \alpha\right)\tau,$$

welche sich $= v\tau$ setzen läßt, weil $\frac{p\tau}{2} \cos. \alpha$ wegen des unendlich kleinen Factors τ gegen v verschwindet. Nun ist aber nach der Lehre vom Kreise $\overline{AP}^2 = PO.(PO + 2\overline{CO})$, oder, da PO gegen $2CO$ verschwindet, $\overline{AP}^2 = PO.2\overline{CO}$; es folgt daher der gesuchte Krümmungshalbmesser:

$$CA = CO = r = \frac{\overline{AP}^2}{2PO} = \frac{v^2\tau^2}{p\tau^2 \sin. \alpha} = \frac{v^2}{p \sin. \alpha}.$$

Um den Krümmungshalbmesser construirend zu bestimmen, trage man auf die Normale zur anfänglichen Bewegungsrichtung AY die Normalacceleration, d. i. den normalen Componenten $p \sin. \alpha$ als AD auf, verbinde den Endpunkt E der Geschwindigkeit $AE = v$ mit D durch die Gerade DE und ziehe EC winkelrecht auf DE; der dadurch bestimmte Durchschnitt C mit der ersten Normalen ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises durch A.

Durch Umkehrung der letzten Formel folgt die Normalacceleration $n = p \sin. \alpha = \frac{v^2}{r}$; es wächst hiernach dieselbe wie das Quadrat der Geschwindigkeit v und umgekehrt wie der Krümmungshalbmesser r, also direct mit der Stärke der Krümmung.

Beispiel. Für die durch die Acceleration der Schwere bewirkte parabolische Bahn ist $r = 0{,}032 \frac{c^2}{\sin. \alpha}$, und im Scheitel dieser Curven, wo $\alpha = 90^0$, also $\sin. \alpha = 1$, fällt $r = 0{,}032\, c^2$ aus. Bei einer Geschwindigkeit von 20 Fuß ergäbe sich also $r = 12{,}8$ Fuß; je mehr sich aber der Körper vom Scheitel entfernt, desto kleiner wird α und desto größer wird folglich der Krümmungshalbmesser.

Hat der Punkt A das Wegelement $AO = \sigma$ durchlaufen, so ist seine Geschwindigkeit eine andere geworden, weil sich nun zur anfänglichen Geschwindigkeit v in der Richtung von AY die erlangte Geschwindigkeit $p\tau$ in der Richtung von AX gesellt, und es ist folglich für den neuen Geschwindigkeitswerth v_1, dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu Folge: §. 43

$$v_1^2 = v^2 + 2vp\tau \cos. \alpha + p^2\tau^2 = v^2 + pt(2v\cos. \alpha + p\tau),$$

oder da $p\tau$ gegen $2v\cos. \alpha$ verschwindet,

$$v_1^2 = v^2 + 2pv\tau \cos. \alpha.$$

Noch ist $v\tau$ das Wegelement $AN = AO = \sigma$, und $p\,cos.\,\alpha$ die Tangentialacceleration, d. i. der Component k der Acceleration p in der Tangenten- oder Bewegungsrichtung, daher hat man:

$$\frac{v_1^2 - v^2}{2} = k\sigma.$$

Auch ist $\sigma\,cos.\,\alpha$ die Projection $AR = \xi_1$ des Wegelementes in der Richtung der Acceleration, daher hat man auch:

$$\frac{v_1^2 - v^2}{2} = p\,\xi_1.$$

Bei fortgesetzter Bewegung geht nach und nach v_1 in $v_2, v_3 \ldots v_n$ über, wobei die projicirten Wegtheile um $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ wachsen, es ist

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = p\,\xi_2, \quad \frac{v_3^2 - v_2^2}{2} = p\,\xi_3, \ldots \frac{v_n^2 - v_{n-1}^2}{2} = p\,\xi_n,$$

daher folgt durch Addition:

$$\frac{v_n^2 - v^2}{2} = p\,(\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n) = p\,x,$$

wenn x die Projection des ganzen Curvenweges in der Richtung AX der Acceleration bezeichnet. Auch läßt sich

$$\frac{v_n^2 - v^2}{2} = \left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right) x$$

setzen, wenn die Acceleration variabel ist und nach und nach die Werthe $p_1, p_2 \ldots p_n$ annimmt.

Es ist also die Geschwindigkeitsveränderung gar nicht von der Gestalt und Größe, sondern nur von der Projection x des Weges in der Richtung der Acceleration abhängig. Aus diesem Grunde haben z. B. die Wasserelemente sämmtlicher springenden Strahlen in Fig. 76, wenn sie eine und dieselbe Horizontale HH erreichen, eine und dieselbe Geschwindigkeit. Ist, wie oben, c die Austritts- oder Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit in HH, und b die Höhe der Linie HH über dem Anfangspunkt A, so hat man

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = -\,g\,b, \text{ und daher}$$

$$v = \sqrt{c^2 - 2\,g\,b}.$$

Ist an einer gewissen Stelle der Bewegung, $\alpha = 90$ Grad, so fällt die Tangentialacceleration $k = p\,cos.\,\alpha = 0$ aus und die Normalacceleration $n = p\,sin.\,\alpha$ mit der mittleren Acceleration p zusammen. Auch ist dann die Veränderung des Geschwindigkeitsquadrates bei Durchlaufung eines Wegelementes σ, $v_1^2 - v^2 = 0$, also $v_1 = v$; und wenn sich nun bei fortgesetzter Bewegung in einer Curve die Richtung der Acceleration so ändert, daß sie stets normal zur Bewegungsrichtung bleibt, also eine Tangentialacceleration

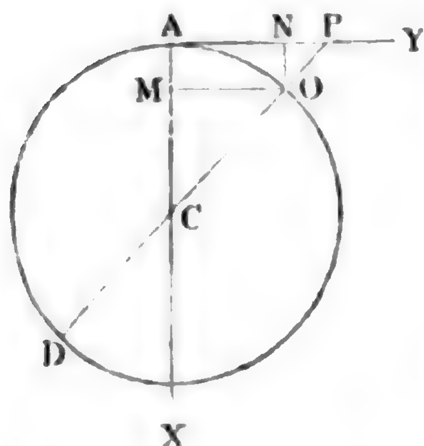
gar nicht vorkommt, so ist auch bei Durchlaufung eines endlichen Curvenweges, $v_1^2 - v^2 = 0$, also $v_1 = v$, unveränderlich, also die Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit c.

Die Normalacceleration, bei welcher diese Beständigkeit der Geschwindigkeit statthat, ist

$$p = \frac{c^2}{r},$$

und sie fällt bei der Bewegung im Kreise AOD, Fig. 78, da hier der Krümmungshalbmesser $CA = CO = CD = r$ constant ist, ebenfalls unveränderlich aus. Umgekehrt bringt auch eine unveränderliche Acceleration, welche den Körper unaufhörlich rechtwinkelig von seiner Bewegung ablenkt, eine gleichförmige Umdrehung im Kreise hervor.

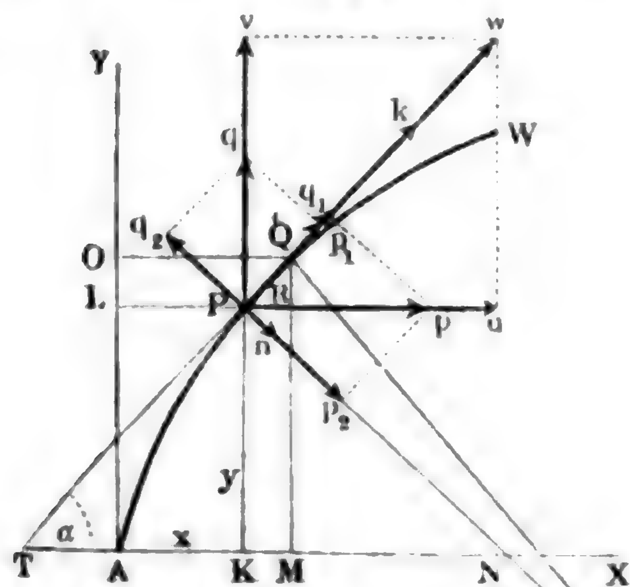
Fig. 78.



Beispiel. Ein Körper, welcher in einem Kreise von 5 Fuß Halbmesser so herumgeht, daß er zu jeder Umdrehung 5 Secunden Zeit braucht, hat die Geschwindigkeit $c = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi \,.\, 5}{5}$ $= 2 \,.\, \pi = 6{,}283$ Fuß, und die Normalacceleration $p = \frac{(6{,}283)^2}{5} = 7{,}896$ Fuß, d. h. er wird in jeder Secunde um $\frac{1}{2}\, p = \frac{1}{2} \,.\, 7{,}896 = 3{,}948$ Fuß von der geraden Linie abgelenkt.

Krummlinige Bewegungen überhaupt. Bewegt sich ein Punkt P, Fig. 79, nach zwei Richtungen AX und AY zugleich, so lassen sich seine Wege $AK = LP = x$ und $AL = KP = y$ als Coordinaten der von der Bahn desselben gebildeten Curve APW ansehen, und ist nun ∂t das Zeitelement, innerhalb dessen der Körper die Wegelemente $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y$ zurücklegt, so hat man nach (§. 20) die Abscissengeschwindigkeit: (§. 44)

Fig. 79.



1) $u = \frac{\partial x}{\partial t}$,

sowie die Ordinatengeschwindigkeit:

2) $v = \frac{\partial y}{\partial t}$,

und daher die daraus resulti-

rende Tangential- oder Curvengeschwindigkeit, wenn die Bewegungsrichtungen AX und AY den Rechtwinkel einschließen:

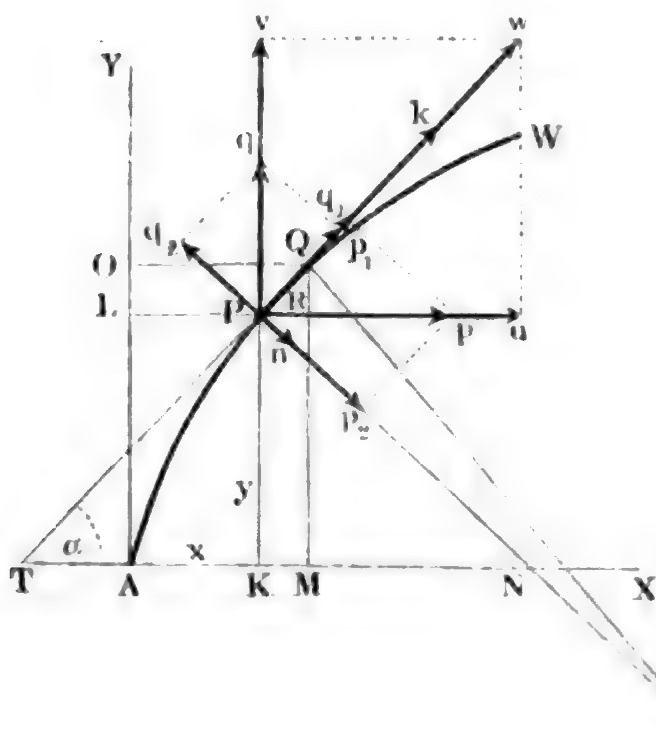
$$3)\quad w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2}} = \frac{\partial s}{\partial t},$$

wo ∂s das Curvenelement PQ bezeichnet, welches nach Art. 32 der analytischen Hülfslehren

$\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ zu setzen ist.

Ebenso ist die Abscissenacceleration nach (§. 20):

Fig. 80.



$$4)\quad p = \frac{\partial u}{\partial t},$$

sowie die Ordinatenacceleration:

$$5)\quad q = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Für den Tangentenwinkel $PTX = QPR = \alpha$, um welchen die Bewegungsrichtung $\overline{Pw}$ von der Abscissenrichtung abweicht, hat man:

$$tang.\,\alpha = \frac{v}{u} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

sowie auch:

$$sin.\,\alpha = \frac{v}{w} = \frac{\partial y}{\partial s} \text{ und}$$

$$cos.\,\alpha = \frac{u}{w} = \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Die Accelerationen p und q lassen sich nach der Tangentialrichtung PT und nach der Normalrichtung PN in die Componenten:

$$p_1 = p\,cos.\,\alpha \text{ und } p_2 = p\,sin.\,\alpha, \text{ sowie}$$
$$q_1 = q\,sin.\,\alpha \text{ und } q_2 = q\,cos.\,\alpha$$

zerlegen, woraus sich durch eine andere Zusammensetzung die Tangentialacceleration:

$$k = p_1 + q_1 = p\,cos.\,\alpha + q\,sin.\,\alpha$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{u}{w} + \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{v}{w} = \frac{u\,\partial u + v\,\partial v}{w\,\partial t},$$

und die Normalacceleration:

$$n = p_2 - q_2 = p\,sin.\,\alpha - q\,cos.\,\alpha$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{v}{w} - \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{u}{w} = \frac{v\,\partial u - u\,\partial v}{w\,\partial t}$$

ergiebt.

Nun folgt aber aus $u^2 + v^2 = w^2$ durch Differenziiren:

$$u\partial u + v\partial v = w\partial w,$$

daher ist einfach die Tangentialacceleration:

$$6) \quad k = \frac{w\partial w}{w\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ferner ergiebt sich aus $tang.\alpha = \frac{v}{u}$:

$$\partial tang.\alpha = \frac{u\partial v - v\partial u}{u^2},$$

(s. analyt. Hülfslehren Art. 8), und es ist der Krümmungshalbmesser $CP = CQ$ des Bogenelementes PQ, nach Art. 33 der analytischen Hülfslehren:

$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial tang.\alpha},$$

daher folgt:

$$v\partial u - u\partial v = -u^2\partial tang.\alpha = \frac{u^2\partial s^3}{r\partial x^2} = \frac{\partial s^3}{r\partial t^2} = \frac{\partial s}{r}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{w^2\partial s}{r},$$

und daher die Normalacceleration einfach

$$7) \quad n = \frac{w^2\partial s}{rw\partial t} = \frac{w}{r}\cdot\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{w^2}{r}.$$

Endlich folgt:

$$k\partial s = \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\partial s = \frac{\partial s}{\partial t}\partial w = w\partial w;$$

woraus sich nun wie in (§. 20):

$$8) \quad \frac{w^2 - c^2}{2} = \int k\partial s$$

ergiebt, wenn man annimmt, daß bei Durchlaufung des Weges s die Geschwindigkeit c in w übergeht. Es ist also auch bei der krummlinigen Bewegung die halbe Differenz der Geschwindigkeitswerthe das Product aus der mittleren Acceleration (k) und dem Wege s.

Ebenso ist $p\partial x + q\partial y = u\partial u + v\partial v = w\partial w$, also auch noch:

$$9) \quad \frac{w^2 - c^2}{2} = \int(p\partial x + q\partial y) = \int p\partial x + \int q\partial y, \text{ und}$$

$$10) \quad \int k\partial s = \int p\partial x + \int q\partial y, \text{ oder}$$

$$k\partial s = p\partial x + q\partial y.$$

Das Product aus der Tangentialacceleration und dem Curvenelemente ist also gleich der Summe von den Producten aus den Coordinatenaccelerationen und den ihnen entsprechenden Coordinatenelementen.

Beispiel. Ein Körper bewegt sich in der einen Axe AX mit der Geschwindigkeit $u = 12\,t$, und in der anderen Axe AY mit der Geschwindigkeit $v = 4\,t^2 - 9$; man soll die übrigen Verhältnisse der hieraus resultirenden Bewegung ermitteln. Die entsprechenden Coordinatenaccelerationen sind:

$$p = \frac{\partial u}{\partial t} = 12, \text{ und } q = \frac{\partial v}{\partial t} = 8\,t,$$

und die zugehörigen Coordinaten oder Axenwege selbst:

$$x = \int u\,\partial t = \int 12\,t\,\partial t = 6\,t^2, \text{ und}$$

$$y = \int v\,\partial t = \int (4\,t^2 - 9)\,\partial t = \frac{4}{3}t^3 - 9\,t,$$

wofern diese Räume mit der Zeit $t = 0$ beginnen. Die Curven- oder Tangentialgeschwindigkeit ist:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{144\,t^2 + (4\,t^2 - 9)^2} = \sqrt{16\,t^4 + 72\,t^2 + 81} = 4\,t^2 + 9,$$

folglich die Tangentialacceleration:

$$k = \frac{\partial w}{\partial t} = 8\,t$$

= der Ordinatenacceleration q, und der Curvenweg:

$$s = \int w\,\partial t = \int (4\,t^2 + 9)\,\partial t = \frac{4}{3}t^3 + 9\,t.$$

Ferner ist für die Bewegungsrichtung:

$$tang.\,\alpha = \frac{v}{u} = \frac{4\,t^2 - 9}{12\,t} = \frac{\frac{2}{3}x - 9}{2\sqrt{6\,x}},$$

daher:

$$\partial\,tang.\,\alpha = \frac{4\,t^2 + 9}{12\,t^2}\partial t,$$

und der Krümmungshalbmesser der Bahn:

$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\,\partial\,tang.\,\alpha} = -\frac{(4\,t^2 + 9)^3 \,.\, 12\,t^2}{144\,t^2\,(4\,t^2 + 9)} = -\frac{(4\,t^2 + 9)^2}{12},$$

$$\text{oder } r = -\frac{w^2}{12}.$$

Hiernach ist nun noch die Normalacceleration, wodurch der bewegte Körper die stetige Richtungsänderung erleidet:

$$n = \frac{w^2}{r} = -12, \text{ also constant.}$$

Die Gleichung der Bahncurve folgt, wenn man $t = \sqrt{\frac{x}{6}}$ in der obigen Gleichung für y einsetzt:

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{6}\right)^3} - 9\sqrt{\frac{x}{6}} = \left(\frac{2}{9}x - 9\right)\sqrt{\frac{x}{6}}.$$

Die Ordinate y ist ein Maximum für $v = 0$, d. i. für $t^2 = \frac{9}{4}$, also für $t = \frac{3}{2}$, und $x = 6\,.\,t^2 = 6\,.\,\frac{9}{4} = \frac{27}{2}$, und:

$$y = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2} - 9\cdot\frac{3}{2} = -9.$$

Sie ist dagegen $= 0$, für $t^2 = \frac{27}{4}$, oder $t = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, und $x = \frac{81}{2}$. Es

läuft also die Bahncurve anfangs unter der Abscissenaxe hin, durchschneidet nach der Zeit $t = \sqrt{\frac{27}{4}}$, und zwar bei der Abscisse $x = \frac{81}{2}$, dieselbe, und bleibt von da an über dieser Axe.

Folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der zusammengehörigen Werthe von t, u, v, w, x, y, $tang.\ \alpha$, r und s, wonach die entsprechende Bahncurve $ABCDE$ in Fig. 81 construirt ist.

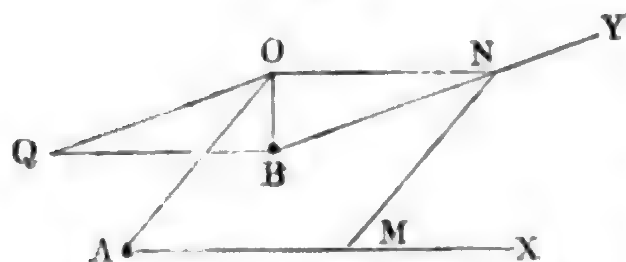
Fig. 81.

t	u	v	w	x	y	$tang.\ \alpha$	r	s
0	0	-9	9	0	0	∞	$-\frac{27}{4}$	0
1	12	-5	13	6	$-\frac{23}{3}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{169}{12}$	$\frac{31}{3}$
$1\frac{1}{2}$	18	0	18	$\frac{27}{2}$	-9	0	-27	18
2	24	7	25	24	$-\frac{22}{3}$	$\frac{7}{24}$	$-\frac{625}{12}$	$\frac{86}{3}$
$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$	18	36	$\frac{81}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	-108	$27\sqrt{3}$
3	36	27	45	54	$+9$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{675}{4}$	63
4	48	55	75	96	$+\frac{148}{3}$	$\frac{55}{48}$	$-\frac{1875}{4}$	$\frac{364}{3}$

Relative Bewegungen. Bei der gleichzeitigen Bewegung zweier Körper findet eine immerwährende Veränderung in der gegenseitigen Lage, Entfernung u. s. w. derselben statt, welche sich mit Hülfe des Obigen für jeden Zeitpunkt wie folgt bestimmen läßt. Es sei in Fig. 82 (a. f. S.) A der Anfangspunkt des einen Körpers, B der des anderen; jener rücke in der §. 45

Richtung AX in einer gewissen Zeit (t) nach M, dieser in der Richtung BY in eben dieser Zeit nach N; ziehen wir nun MN, so erhalten wir in dieser Linie die relative Lage und Entfernung der Körper A und B am Ende dieser Zeit. Legen wir AO parallel mit MN und machen auch $AO = MN$, so wird die Linie AO die gegenseitige Lage der Körper A und B ebenfalls angeben. Ziehen wir noch ON, so erhalten wir ein Parallelogramm, in welchem auch $ON = AM$ ist. Machen wir endlich noch BQ parallel und gleich der NO und ziehen OQ, so erhalten wir ein neues Parallelogramm $BNOQ$, in welchem die eine Seite BN der absolute Weg (y) des zweiten Körpers, die andere Seite BQ der nach entgegengesetzter Richtung gelegte Weg (x) des ersten Körpers, und der vierte Eckpunkt O der relative Ort des zweiten Körpers ist, wofern er nämlich auf den als unveränderlich anzusehenden Ort des ersten Körpers bezogen wird.

Fig. 82.

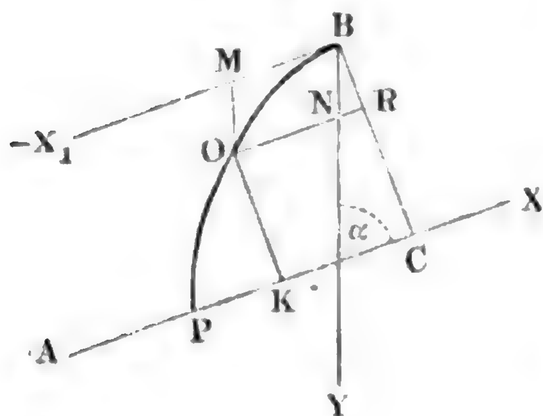


Man findet also den relativen Ort O eines bewegten Körpers (B), wenn man diesem Körper außer seiner eigenen Bewegung (BN) noch diejenige AM des Körpers (A), worauf man den Ort bezieht, in umgekehrter Richtung, also BQ, beilegt, und nun nach den gewöhnlichen Regeln, z. B. mit Hülfe eines Parallelogrammes $BNOQ$, diese Bewegungen zusammensetzt.

§. 46 Sind die Bewegungen der Körper A und B gleichförmig, so kann man für AM und BN die Geschwindigkeiten c und c_1, d. i. die Wege in einer Secunde, einsetzen. Man erhält deshalb die relative Geschwindigkeit des einen Körpers, wenn man demselben außer seiner eigenen absoluten Geschwindigkeit auch noch die des Körpers, auf welchen man die erste Geschwindigkeit bezieht, in entgegengesetzter Richtung beilegt. Auch findet dasselbe Verhältniß mit den Accelerationen statt.

Bewegt sich z. B. ein Körper A, Fig. 83, in der Richtung AC gleichförmig mit der Geschwindigkeit c, und ein Körper B in der Richtung BY, welche mit BX den Winkel α einschließt, bei Null Anfangsgeschwindigkeit mit der constanten Acceleration p, so kann man auch annehmen, daß A still stehe und B außer der Acceleration p noch die Geschwindigkeit $(-c)$ in der Richtung $B\overline{X}_1 \parallel AX$ besitze, wobei er folglich relativ eine parabolische Bahn BOP durchläuft. Die in der Zeit t durch-

Fig. 83.



laufenen Wege in den Richtungen BY und BX_1 sind: $BN = \frac{p t^2}{2}$ und $BM = ct$, wovon sich die erstere in die Componenten $NR = \frac{p t^2}{2} \cos. \alpha$ und $BR = \frac{p t^2}{2} \sin. \alpha$ zerlegen läßt, welche parallel und rechtwinkelig zu AX gerichtet sind. Sind nun $AC = a$ und $CB = b$ die anfänglichen Coordinaten des Punktes B in Hinsicht auf A, sowie $AK = x$ und $KO = y$ die Coordinaten desselben nach der Zeit t, so hat man, da $AK = AC - ON - NR$ und $KO = CB - BR$ ist,

$$x = a - ct - \frac{p t^2}{2} \cos. \alpha \text{ und } y = b - \frac{p t^2}{2} \sin. \alpha$$ und die entsprechenden relativen Geschwindigkeiten:

$$u = - c - pt \cos. \alpha \text{ und } v = - pt \sin. \alpha.$$

Aus der Absciſſe x bestimmt sich die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2(a-x)}{p \cos. \alpha} + \left(\frac{c}{p \cos. \alpha}\right)^2} - \frac{c}{p \cos. \alpha},$$

dagegen aus der Ordinate y:

$$t = \sqrt{\frac{2(b-y)}{p \sin. \alpha}}.$$

Läuft der Körper B in der Linie AX dem Körper A entgegen, so ist sowohl $b = 0$, als auch $\alpha = 0$, daher

$$t = \sqrt{\frac{2(a-x)}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} - \frac{c}{p},$$

und setzt man $x = 0$, so folgt die Zeit, nach welcher die Körper zusammenstoßen:

$$t = \sqrt{\frac{2a}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} - \frac{c}{p} = \frac{\sqrt{2ap + c^2} - c}{p}.$$

Läuft dagegen der Körper B in der Linie AX dem Körper A voraus, so ist $\alpha = 180^0$, daher die Entfernung desselben vom letzten Körper:

$x = a - ct + \frac{p t^2}{2}$, und umgekehrt, die Zeit, an deren Ende die Körper um x von einander entfernt sind:

$$t = \pm \sqrt{- \frac{2(a-x)}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} + \frac{c}{p}.$$

Die entsprechende Geschwindigkeit $u = - c + pt$ ist $= 0$, und die Entfernung x ein Minimum für $t = \frac{c}{p}$, und zwar $x = a - \frac{c^2}{2p}$.

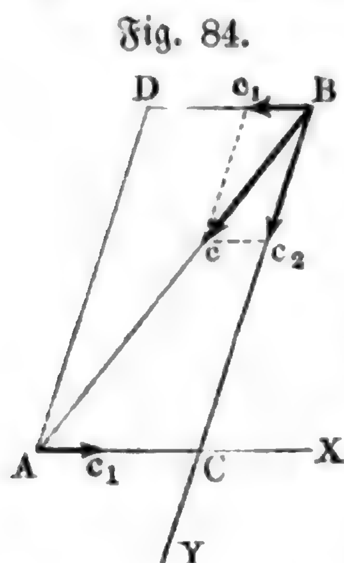
Für jeden anderen Werth von x giebt es zwei Zeitwerthe, den einen größer und den anderen kleiner als $\frac{c}{p}$.

Anmerkung. Die vorstehende Theorie der relativen Bewegung findet sowohl in der Himmels- als auch in der Maschinenmechanik vielfache Anwendung. Behandeln wir hier nur folgenden Fall. Ein Körper A, Fig. 84, bewegt sich in der Richtung AX mit der Geschwindigkeit c_1, und soll von einem anderen Körper B getroffen werden, welcher die Geschwindigkeit c_2 hat; welche Richtung ist demselben zu geben? Ziehen wir AB, tragen wir c_1 an B in umgekehrter Richtung, und vollenden wir aus c_1 und c_2 ein Parallelogramm Bc_1cc_2, dessen Diagonale c auf AB fällt, so erhalten wir in der Richtung der Seite $\overline{Bc_2} = c_2$ desselben zugleich die gesuchte Richtung BY, in welcher der Körper B zu bewegen ist, damit er den Körper A treffe, und zugleich in dem Durchschnittspunkte C der beiden Richtungen AX und BY die Stelle des Zusammenstoßes. Ist α der Winkel BAX, um welchen AX, und β der Winkel ABY, um welchen BY von AB abweicht, so hat man:

$$\frac{sin.\,\beta}{sin.\,\alpha} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Diese Formel findet auch ihre Anwendung in der Aberration des Sternenlichtes, welche aus der Zusammensetzung der Geschwindigkeit c_1 der um die Sonne laufenden Erde A und der Geschwindigkeit c_2 des Sternenlichtes B hervorgeht. Es ist c_1 circa 4 Meilen und $c_2 = 42000$ Meilen, folglich:

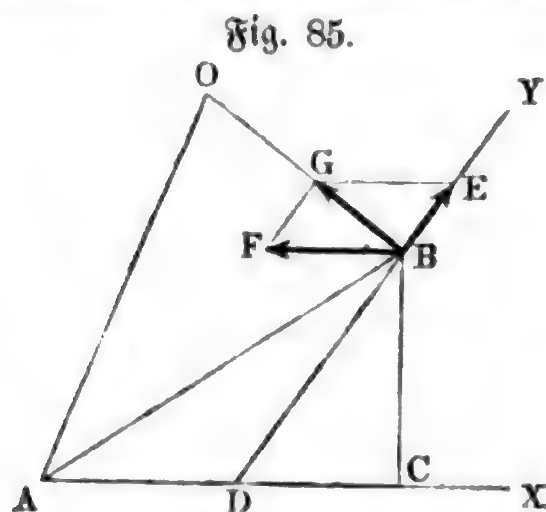
Fig. 84.



$$sin.\beta = \frac{c_1}{c_2}\,sin.\,\alpha = \frac{4\;sin.\,\alpha}{42000} = \frac{sin.\,\alpha}{10500},$$

und hiernach die Aberration oder der Winkel $ABC = \beta$, um welchen die Richtung AB, in welcher man den als unendlich entfernt anzusehenden Stern sieht, von der Richtung BC oder AD abweicht, in welcher er sich wirklich befindet, $\beta = 20''\,sin.\,\alpha$; also für $\alpha = 90^0$, d. i. für einen Stern, welcher sich winkelrecht über der Erdbahn (in dem sogenannten Ekliptikpol) befindet, $\beta = 20''$. In Folge dieser Abweichung sieht man also einen Stern in der Bewegungsrichtung der Erde stets $20''$ von seinem wahren Orte abgerückt, und es beschreibt folglich ein Stern in der Nähe des Ekliptikpoles im Laufe eines Jahres scheinbar einen kleinen Kreis von 20 Secunden Halbmesser um seinen wahren Ort. Bei Sternen, welche in der Ebene der Erdbahn stehen, bildet diese scheinbare Bewegung eine gerade Linie, und bei den übrigen Sternen gehen diese scheinbaren Bewegungen in Ellipsen vor sich.

Fig. 85.



Beispiel. Ein Dampfwagenzug fährt auf der Schienenbahn AX, Fig. 85, von A aus mit 35 Fuß Geschwindigkeit; ein anderer gleichzeitig von B aus auf einer Bahn BY, welche mit der ersteren den

Winkel $BDX = 56^0$ einschließt, mit 20 Fuß Geschwindigkeit. Wenn nun die anfänglichen Abstände $AC = 30000$ Fuß und $CB = 24000$ Fuß betragen, wie groß ist die Entfernung AO beider Wagenzüge nach einer Viertelstunde? Aus der absoluten Geschwindigkeit $BE = c_1 = 20$ Fuß des zweiten Zuges, der umgekehrten Geschwindigkeit $BF = c = 35$ Fuß des ersten Zuges und dem eingeschlossenen Winkel $EBF = \alpha = 180^0 - BDC = 180^0 - 56^0 = 124^0$ folgt die relative Geschwindigkeit des zweiten Zuges:

$$BG = \sqrt{c^2 + c_1^2 + 2\,c\,c_1\,cos.\,\alpha} = \sqrt{35^2 + 20^2 - 2\,.\,35\,.\,20\,.\,cos.\,56^0}$$
$$= \sqrt{1225 + 400 - 1400\,cos.\,56^0} = \sqrt{1625 - 782{,}9} = \sqrt{842{,}1} = 29{,}02 \text{ Fuß}.$$

Für den Winkel $GBF = \varphi$, den die Richtung der relativen Bewegung mit der ersten Bewegungsrichtung einschließt, ist:

$$sin.\,\varphi = \frac{c_1\,sin.\,56^0}{29{,}02} = \frac{20\,.\,0{,}8290}{29{,}02};\ Log.\,sin.\,\varphi = 0{,}75690 - 1, \text{ daher } \varphi = 34^0, 50'.$$

Der in 15 Minuten $= 900$ Sec. relativ durchlaufene Weg ist $BO = 29{,}02\,.\,900 = 26118$ Fuß, die Entfernung $AB = \sqrt{(30000)^2 + (24000)^2} = 38419$ Fuß, der Winkel $BAC = ABF$, da dessen Tangente $\frac{24000}{30000} = 0{,}8$ ist, hat den Werth $\psi = 38^0\,40'$, daher ist der Winkel $ABO = \varphi + \psi = 34^0\,50' + 38^0\,40' = 73''\,30'$, und die Entfernung der beiden Wagenzüge nach 15 Minuten:

$$AO = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 - 2\,AB\,.\,BO\,cos.\,ABO}$$
$$= \sqrt{38419^2 + 26118^2 - 2\,.\,38419\,.\,26118\,cos.\,73^0\,30'}$$
$$= \sqrt{1588190000} = 39850 \text{ Fuß}.$$

Zweiter Abschnitt.

Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

Erstes Capitel.

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

§. 47 **Mechanik.** Die Mechanik (franz. mécanique; engl. mechanics) ist die Wissenschaft, welche von den Bewegungsgesetzen materieller Körper handelt. Sie ist in sofern eine Anwendung der Phoronomie oder Cinematik auf die Körper der Außenwelt, als die letztere sich nur mit der Bewegung geometrischer Körper befaßt und die Ursachen der Bewegung außer Betracht läßt.

Die Mechanik ist ein Theil der Naturlehre (franz. physique générale; engl. natural-philosophy) oder der Lehre von den Gesetzen, nach welchen die Veränderungen in der Körperwelt erfolgen, nämlich derjenige Theil, welcher sich mit den aus meßbaren Bewegungen hervorgegangenen Veränderungen in der materiellen Welt beschäftigt.

§. 48 **Kraft.** Kraft (franz. force; engl. force) ist die Ursache der Bewegung oder der Bewegungsveränderung materieller Körper. Jede Bewegungsveränderung, z. B. jede Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers ist als die Wirkung einer Kraft anzusehen. Aus diesem Grunde messen wir denn auch jedem frei fallenden Körper eine Kraft, die sogenannte Schwerkraft, bei, weil derselbe seine Geschwindigkeit unaufhörlich ändert. Auf der anderen Seite ist aus der Ruhe oder aus der Unveränderlichkeit im Bewegungszustande eines Körpers noch nicht auf die Abwesenheit von Kräften zu schließen; denn es können sich die Kräfte eines Körpers gegenseitig aufheben, ohne eine Wirkung übrig zu lassen. Die Schwerkraft, mit welcher ein Körper zur Erde niederfällt, besitzt derselbe auch noch, wenn er auf einem Tische ruht, es wird aber hier ihre Wirkung durch die Festigkeit des Tisches oder einer anderen Unterlage aufgehoben.

Gleichgewicht. Ein Körper ist im Gleichgewicht (franz. équilibre; engl. equilibrium), oder die Kräfte eines Körpers halten einander das Gleichgewicht, wenn dieselben ohne eine Wirkung übrig zu lassen, oder ohne Bewegung zu erzeugen oder zu verändern, einander aufheben oder vernichten. §. 49

Bei einem an einem Faden aufgehängten Körper ist z. B. die Schwerkraft in demselben mit der Cohäsion des Fadens im Gleichgewicht. Das Gleichgewicht unter Kräften wird aufgehoben, und es entsteht Bewegung, wenn man eine von den Kräften entfernt oder auf andere Weise aufhebt. So geht z. B. die durch ein Gewicht gebogene Stahlfeder in Bewegung über, wenn dieses Gewicht weggenommen wird, weil nun diejenige Kraft der Feder, welche man ihre Elasticität nennt, allein noch wirkt.

Statik (franz. statique; eng. statics) ist derjenige Theil der Mechanik, welcher von den Gesetzen des Gleichgewichts handelt; die Dynamik (franz. dynamique; engl. dynamics) hingegen handelt von den Kräften, inwiefern sie Bewegungen hervorbringen.

Eintheilung der Kräfte. Nach ihren Wirkungen sind die Kräfte entweder bewegende (franz. forces motrices, puissances; engl. moving forces) oder widerstehende (Widerstände, franz. résistances; engl. resistances). Jene bringen Bewegungen hervor, oder vermögen dieselben zu erzeugen, diese hingegen können dieselben nur verhindern und mäßigen. Die Schwerkraft, die Elasticität einer Stahlfeder u. s. w. gehören zu den bewegenden Kräften, die Reibung, Festigkeit der Körper u. s. w. sind widerstehende Kräfte oder Widerstände, weil durch sie nur Bewegungen verhindert oder vermindert oder bewegende Kräfte aufgehoben, aber keineswegs Bewegungen hervorgerufen werden können. Die bewegenden Kräfte theilt man wieder ein in beschleunigende (franz. accéleratrices; engl. accelerating) und in verzögernde (franz. retardatrices; engl. retarding). Jene erzeugen eine positive, diese eine negative Acceleration, durch jene wird also eine beschleunigte, durch diese eine verzögerte Bewegung hervorgebracht. Die Widerstände sind stets verzögernde Kräfte, aber nicht alle verzögernde Kräfte sind widerstehende. Bei einem senkrecht in die Höhe geworfenen Körper wirkt z. B. die Schwerkraft verzögernd, deswegen ist aber die Schwerkraft noch keine widerstehende Kraft, denn beim darauf folgenden Herabfallen des Körpers nimmt sie wieder die Stelle einer bewegenden Kraft ein. §. 50

Noch unterscheidet man beständige (constante, franz. constantes; engl. uniform) und veränderliche Kräfte (franz. variables; engl. variable) von einander. Während constante Kräfte immer auf gleiche Weise wirken und eben deshalb in gleichen Zeittheilchen gleiche Wirkungen, d. i. gleiche Zusätze oder Abnahmen in der Geschwindigkeit hervorbringen, sind bei den

veränderlichen Kräften diese Wirkungen zu verschiedenen Zeiten verschieden; während also aus jenen Kräften gleichförmig veränderte Bewegungen hervorgehen, entsprechen diesen Kräften ungleichförmig beschleunigte oder ungleichförmig verzögerte Bewegungen.

§. 51 **Druck.** Druck (franz. pression; engl. pressure) und Zug (franz. traction; engl. traction) sind die ersten Wirkungen der Kräfte auf materielle Körper. Vermöge derselben werden Körper zusammengedrückt und ausgedehnt, oder überhaupt in ihrer Form verändert.

Der durch die lothrecht abwärts wirkende Schwerkraft hervorgebrachte Druck oder Zug, welchen die Unterlage eines schweren Körpers oder der Faden, woran ein Körper aufgehängt ist, auszuhalten hat, heißt das Gewicht (franz. poids; engl. weight) des Körpers.

Druck und Zug, und also auch Gewicht sind Größen eigenthümlicher Art, die zwar nur unter einander verglichen werden, aber als Wirkungen der Kräfte zum Maße derselben dienen können.

Die einfachsten und deshalb gewöhnlichsten Mittel zum Messen der Kräfte sind Gewichte.

§. 52 **Gleichheit der Kräfte.** Zwei Gewichte oder auch zwei Drücke oder Züge, und also auch die Kräfte, welche letzteren entsprechen, sind gleich, wenn man eine durch die andere ersetzen kann, ohne dadurch eine andere Wirkung zu erhalten. Wenn z. B. eine Stahlfeder durch ein angehängtes Gewicht G genau so gebogen wird wie durch ein anderes, genau ebenso angehängtes Gewicht G_1, so sind diese Gewichte, und deshalb auch die Schwerkräfte in beiden Körpern, gleich. Wenn ebenso eine belastete Waage (franz. und engl. balance) sowohl durch das Gewicht G als auch durch ein anderes Gewicht G_1, welches man an die Stelle von G setzt, zum Einspielen gebracht wird, so sind diese Gewichte G und G_1 gleich, die Waage mag übrigens gleich- oder ungleicharmig, und die übrige Belastung derselben mag groß oder klein sein.

Ein Druck oder Gewicht (Kraft) ist 2, 3, 4 u. s. w. und überhaupt n mal so groß als ein anderer Druck u. s. w., wenn er dieselbe Wirkung hervorbringt als 2, 3, 4 . . . n Drücke der zweiten Art zusammen. Wenn eine übrigens beliebig belastete Waage durch ein Gewicht (G) ebenso zum Einspielen gebracht wird, als durch Auflegen von 2, 3, 4 u. s. w. gleichen Gewichten (G_1), so ist jenes Gewicht (G) 2, 3, 4 u. s. w. mal so groß als dieses Gewicht (G_1).

§. 53 **Materie.** Materie (franz. matière; engl. matter) ist Dasjenige, wodurch die Körper der Außenwelt, die wir, im Gegensatz zu den Körpern der Geometrie, auch materielle oder physische Körper nennen, auf unsere

Sinne wirken. Masse (franz. und engl. masse) ist das Quantum der einen Körper bildenden Materie.

Körper von gleichem Volumen (franz. und engl. volume) oder gleichem geometrischen Inhalte haben meist verschiedene Gewichte, wenn sie aus verschiedenartigen Materien bestehen. Man kann daher aus dem Volumen eines Körpers auf dessen Gewicht noch nicht schließen; es ist dazu vielmehr nöthig, daß man das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikfuß, Cubikmeter u. s. w. der Materie des Körpers kenne.

Gewichtseinheit. Das Messen von Gewichten oder Kräften besteht in einer Vergleichung derselben mit einem gegebenen und unveränderlichen, zur Einheit angenommenen Gewichte. Die Auswahl dieser Gewichts- oder Krafteinheit ist zwar an sich willkürlich, es ist jedoch praktisch vortheilhaft, hierzu das Gewicht von einem allgemein verbreiteten Körper bei einem der gebräuchlichen Raumeinheit gleichen Volumen hierzu auszuwählen. §. 54

Eine derartige Gewichtseinheit ist das Gramm, welches durch das Gewicht von einem Cubikcentimeter reinen Wassers im Zustande der größten Dichtigkeit (bei ungefähr 4° C. Temperatur) gegeben wird. Aber auch das alte preußische Pfund ist eine auf das Gewicht des Wassers zurückgeführte Einheit, es wiegt nämlich ein preußischer Cubikfuß destillirten Wassers im luftleeren Raume und bei 15° R. Temperatur, 66 preußische Pfund. Nun ist aber ein preußischer Fuß = 139,13 Pariser Linien = 0,3137946 Meter, es folgt daher ein preußisches Pfund = 467,711 Gramm. Das preußische Neu- oder Zollpfund ist genau $^1/_2$ Kilogramm.

Trägheit. Trägheit oder Beharrungsvermögen (franz. inertie; engl. inertia) ist diejenige Eigenschaft der Materie, vermöge welcher dieselbe durch sich allein weder Bewegung annehmen, noch erhaltene Bewegung abändern kann. Jeder materielle Körper bleibt so lange in Ruhe, als keine Kraft auf ihn einwirkt, und jeder einmal in Bewegung gesetzte materielle Körper bleibt in einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung, so lange als er ohne Einwirkung einer Kraft ist. Wenn also in dem Bewegungszustande eines materiellen Körpers Veränderungen vor sich gehen, wenn ein Körper seine Bewegungsrichtung verändert, oder wenn er eine größere oder kleinere Geschwindigkeit annimmt, so ist dieselbe nicht dem Körper, als einem gewissen Quantum von Materie, an sich beizumessen, sondern es muß eine fremde Ursache, d. i. eine Kraft, dieselbe herbeigeführt haben. §. 55

Insofern bei jeder Aenderung im Bewegungszustande eines materiellen Körpers eine Kraftentwickelung vor sich geht, insofern läßt sich die Trägheit auch den Kräften beizählen.

Könnten wir die auf eine bewegte Masse wirkenden Kräfte gänzlich entfernen, so würde dieselbe sich ohne Ende gleichförmig fortbewegen; wir finden

aber eine solche gleichförmige Bewegung nirgends, weil es uns nicht möglich ist, eine Masse der Einwirkung aller Kräfte zu entziehen. Bewegt sich eine Masse auf einem horizontalen Tische, so übt zwar die nun vom Tische aufgenommene Schwerkraft eine unmittelbare Wirkung auf den Körper nicht aus, allein aus dem Drucke des Körpers gegen den Tisch entsteht ein Widerstand, den wir in der Folge unter dem Namen Reibung näher kennen lernen werden, welcher dem bewegten Körper unaufhörlich Geschwindigkeit entzieht, weshalb er aus diesem Grunde eine verzögerte Bewegung annimmt und endlich zur Ruhe übergeht. Indessen auch die Luft setzt dem bewegten Körper einen Widerstand entgegen, und wenn auch die Reibung des Körpers ganz beseitigt werden könnte, so würde schon dieses Hindernisses wegen eine allmälige Abnahme an Geschwindigkeit eintreten. Wir finden aber, daß der Verlust an Geschwindigkeit um so kleiner wird, die Bewegung sich also um so mehr und mehr einer gleichförmigen nähert, je mehr wir diese Widerstände der Zahl und Stärke nach vermindern, und können daraus schließen, daß bei Beseitigung aller bewegenden Kräfte und Widerstände eine gänzlich gleichförmige Bewegung eintreten muß.

§. 56 **Kräftemaass.** Die Kraft (P), welche eine träge Masse (M) accelerirt, ist proportional der Acceleration (p) und proportional der Masse (M) selbst; sie wächst bei einerlei Massen wie die in unendlich kleinen Zeiten erlangten Zunahmen an Geschwindigkeit und nimmt bei gleichen Geschwindigkeitszunahmen in demselben Maße zu, als die Massen größer werden. Die $m$fache Acceleration einer und derselben Masse oder gleicher Massen erfordert eine $m$fache Kraft und die $n$fache Masse macht bei einerlei Acceleration auch die $n$fache Kraft nöthig.

Da wir aber bis jetzt ein Maß der Massen noch nicht ausgewählt haben, so können wir deshalb sogleich:

$$P = Mp,$$

die Kraft gleich dem Producte aus Masse und Acceleration annehmen, und zugleich statt Kraft ihre Wirkung, d. i. den von ihr hervorgebrachten Druck einsetzen.

Die Richtigkeit dieses allgemeinen Bewegungsgesetzes läßt sich allerdings wohl durch directe Versuche darthun, indem man z. B. gleiche und verschiedene, auf einem horizontalen Tische bewegliche Massen durch gebogene Stahlfedern fortschnellen läßt, indessen liegt dieselbe auch schon darin, daß alle aus diesem Gesetze gemachten Folgerungen und entwickelten Regeln für zusammengesetzte Bewegungen den Beobachtungen und Erscheinungen in der Natur vollkommen entsprechen.

§. 57 **Masse.** Alle Körper fallen an einem und demselben Orte der Erde und im luftleeren Raume gleich schnell nieder, nämlich mit der unveränderlichen

Acceleration $g = 9{,}81$ Meter $= 31^1/_4$ Fuß (§. 15); ist daher die Masse eines Körpers $= M$ und das die Schwerkraft desselben messende Gewicht $= G$, so hat man nach der letzten Formel auch:

$$G = Mg,$$

d. i. das Gewicht eines Körpers ist ein Product aus dessen Masse und der Acceleration der Schwere, und umgekehrt:

$$M = \frac{G}{g},$$

d. i. Masse eines Körpers ist Gewicht desselben dividirt durch die Beschleunigung der Schwere, oder Masse ist dasjenige Gewicht eines Körpers, welches derselbe haben würde, wenn die Acceleration der Schwere = Eins, z. B. ein Meter, ein Fuß u. s. w. wäre. An dem Punkte auf oder in der Nähe der Erde oder eines anderen Weltkörpers, wo die Körper nicht mit 9,81 Meter, sondern mit 1 Meter Geschwindigkeit (nach der ersten Secunde) niederfallen, wird hiernach die Masse, oder vielmehr nur das Maß derselben, durch das Gewicht des Körpers unmittelbar angegeben.

Je nachdem wir die Beschleunigung der Schwere in Metern oder Fußen ausdrücken, haben wir nun die Masse:

$$M = \frac{G}{9{,}81} = 0{,}1019\ G \text{ oder}$$

$$M = \frac{G}{31{,}25} = 0{,}032\ G.$$

Hiernach ist z. B. die Masse von einem 20 Pfund schweren Körper, $M = 0{,}032 . 20 = 0{,}64$ Pfund, und umgekehrt, das Gewicht einer Masse von 20 Pfund, $G = 31{,}25 \ . \ 20 = 625$ Pfund.

Wenn wir die Beschleunigung (g) der Schwere als unveränderlich anneh- §. 58
men, so folgt, daß die Masse eines Körpers dem Gewichte desselben vollkommen proportional ist, daß also für die Massen M und M_1 mit den Gewichten G und G_1 ist:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{G}{G_1}.$$

Wir erhalten hiernach das Gewicht als Maß der Masse eines Körpers, so daß also ein Körper um so mehr Masse hat, je größer sein Gewicht ist.

Allerdings ist die Beschleunigung der Schwere etwas veränderlich; sie wird größer, je näher man den Erdpolen kommt, und nimmt um so mehr ab, je mehr man sich dem Erdäquator nähert, ist also an den Polen am größten und am Aequator am kleinsten. Auch nimmt sie ab, je mehr ein Körper über dem Niveau des Meeres befindlich ist, und verändert sich mit

der Tiefe des fallenden Körpers unter dem Niveau des Meeres. Da nun aber eine Masse, so lange man zu ihr Nichts hinzunimmt und von ihr Nichts wegnimmt, etwas Unveränderliches ist, also auf allen Punkten der Erde und selbst außerhalb derselben, z. B. auf dem Monde, noch dieselbe bleibt, so folgt daraus, daß auch das Gewicht eines Körpers veränderlich und von dem Orte der Körper abhängig, überhaupt aber der dem Orte entsprechenden Acceleration der Schwere proportional, oder $\frac{G}{G_1} = \frac{g}{g_1}$ sein müsse.

Es wird also hiernach eine und dieselbe Stahlfeder durch ein und dasselbe Gewicht an verschiedenen Orten der Erde, verschieden gebogen, am Aequator und auf hohen Bergen am schwächsten, in der Nähe der Erdpole und im Niveau des Meeres am stärksten.

§. 59 **Dichtigkeit.** Dichtigkeit (franz. densité; engl. density) ist die Stärke der Raumerfüllung der Materie. Ein Körper ist um so dichter, je mehr Materie derselbe in seinem Raume einschließt. Das natürliche Maß der Dichtigkeit ist dasjenige Quantum an Materie (diejenige Masse), welches die Volumeneinheit ausfüllt; weil sich aber die Materie nur durch Gewichte messen läßt, so dient das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikmeter oder Cubikfuße, einer zweiten Materie als Maß der Dichtigkeit derselben.

Hiernach ist z. B. die Dichtigkeit des Wassers = 61,75 Neupfund und die des Gußeisens = 448 Pfund, weil ein Cubikfuß Wasser $61^3/_4$, und ein Cubikfuß Gußeisen 448 Pfund wiegt.

Aus dem Volumen V eines Körpers und der Dichtigkeit γ desselben folgt sein Gewicht $G = V\gamma$.

Volumen mal Dichtigkeit giebt also das Gewicht eines Körpers.

Die Dichtigkeit der Körper ist entweder gleichförmig (franz. uniforme, homogène; engl. uniform) oder ungleichförmig (franz. variable, hétérogène; engl. variable), je nachdem gleiche Volumentheile desselben gleich oder verschieden schwer sind. Es ist z. B. die Dichtigkeit der einfachen Metalle gleichförmig oder es sind die Metalle homogen, weil gleiche, übrigens noch so kleine Theile derselben, gleichviel wiegen; hingegen ist Granit ein Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit, weil er aus Theilen von verschiedener Dichtigkeit besteht.

Beispiele. 1) Wenn die Dichtigkeit des Bleies 700 Pfund beträgt, so wiegen 3,2 Cubikfuß Blei: $G = V\gamma = 700 \,.\, 3{,}2 = 2240$ Pfund. 2) Ist die Dichtigkeit des Stabeisens = 472 Pfund, so hat ein Stück desselben von 205 Pfund Gewicht das Volumen $V = \frac{G}{\gamma} = \frac{205}{472} = 0{,}4343$ Cubikfuß $= 0{,}4343 \,.\, 1728 = 750{,}5$

Cubikzoll. 3) Wiegen 10,4 Cubikfuß vollkommen mit Wasser angeschwängertes Tannenholz 577 Pfund, so ist die Dichtigkeit dieses Holzes:

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{577}{10,4} = 55,5 \text{ Pfund.}$$

Specifisches Gewicht. Specifisches, auch eigenthümliches Gewicht (franz. poids spécifique; engl. specific-weight, specific gravity) ist das Verhältniß der Dichtigkeit eines Körpers zu der als Einheit angenommenen Dichtigkeit eines anderen, gewöhnlich des Wassers. Nun ist aber die Dichtigkeit gleich dem Gewichte der Volumeneinheit; daher ist auch specifisches Gewicht das Verhältniß zwischen dem Gewichte eines Körpers zu dem eines anderen, z. B. des Wassers, bei gleichem Volumen. §. 60

Um das specifische Gewicht nicht mit dem Gewichte zu verwechseln, welches einem Körper von bestimmter Größe zukommt, pflegt man das letztere absolutes Gewicht (franz. poids absolu; engl. absolute-weight) zu nennen.

Ist γ die Dichtigkeit der Materie (des Wassers), auf welche wir die Dichtigkeiten anderer Materien beziehen, und γ_1 die Dichtigkeit irgend einer dieser Materien, deren specifisches Gewicht wir durch ε bezeichnen wollen, so gelten die Formeln:

$$\varepsilon = \frac{\gamma_1}{\gamma} \text{ und } \gamma_1 = \varepsilon \,.\, \gamma,$$

es ist also die Dichtigkeit eines Stoffes gleich: specifisches Gewicht desselben mal Dichtigkeit des Wassers.

Das absolute Gewicht G einer Masse vom Volumen V und specifischem Gewichte ε ist:

$$G = V\gamma_1 = V\varepsilon\gamma.$$

Beispiele. 1) Die Dichtigkeit des reinen Silbers ist 676,5 Pfund und die des Wassers = 66 Altpfund, folglich das specifische Gewicht des ersteren (in Hinsicht auf Wasser) $= \frac{676,5}{66} = 10,25$, d. h. jede Silbermasse ist $10^1/_4$ mal so schwer als eine ebenso viel Raum einnehmende Wassermasse. 2) Das specifische Gewicht des Quecksilbers = 13,598 angenommen und die Dichtigkeit des Wassers = 61,74 Neupfund gesetzt, folgt die Dichtigkeit desselben,

$$\gamma = 13,598 \,.\, 61,74 = 839,54 \text{ Neupfund;}$$

eine Masse von 35 Cubikzoll desselben wiegt, da 1728 Cubikzoll einen Cubikfuß geben:

$$G = 839,54 \,.\, V = \frac{839,54 \,.\, 35}{1728} = 17,005 \text{ Neupfund.}$$

Anmerkung. Der Gebrauch des französischen Maßes und Gewichtes gewährt bei diesen Rechnungen den Vortheil, daß man die Multiplication von ε und γ durch bloßes Verrücken des Decimalstriches vollziehen kann, weil ein Cubikcentimeter Wasser ein Gramm und ein Cubikmeter eine Million Gramm oder 1000 Kilogramm wiegt. Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist hiernach für das französische Maß und Gewicht $\gamma_1 = 13,598 \,.\, 1000 = 13598$ Kilogramm, d. i. ein Cubikmeter Quecksilber wiegt 13598 Kilogramm.

§. 61 Folgende Tabelle enthält die specifischen Gewichte von einigen, vorzüglich in der praktischen Mechanik in Anwendung kommenden Körpern. Eine vollständige Zusammenstellung dieser Gewichte giebt der „Ingenieur“, S. 310.

Mittleres specifisches Gewicht der getrockneten Laubhölzer = 0,659	Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Bruchsteinen:
mit Wasser gesättigt . = 1,110	frisch . . . . = 2,46
Mittleres specifisches Gewicht der getrockneten Nadelhölzer = 0,453	trocken . . . . = 2,40
mit Wasser gesättigt . . = 0,839 *)	Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Sandsteinen:
Quecksilber . . . . = 13,56	frisch . . . . = 2,12
Blei . . . . = 11,33	trocken . . . . = 2,05
Kupfer, gegossen und dicht . = 8,75	Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Ziegelsteinen:
» geschmiedet . . . = 8,97	frisch . . . . . . = 1,55 bis 1,70
Messing . . . . = 8,55	trocken . . . . . . = 1,47 » 1,59
Eisen, Gußeisen, weißes . = 7,50	Erde, lehmige, festgestampft:
» » graues . = 7,10	frisch . . . . = 2,06
» » halbirtes = 7,06	trocken . . . . = 1,93
» Stabeisen . . . . . = 7,60	Gartenerde:
Zink, gegossen . . . . . . = 7,05	frisch . . . . = 2,05
» gewalzt . . . . . . = 7,54	trocken . . . . = 1,63
Granit . . . . . = 2,50 bis 3,05	Trockene magere Erde . . = 1,34.
Gneiß . . . . . = 2,39 » 2,71	
Kalkstein . . . . = 2,40 » 2,86	
Sandstein . . . . = 1,90 » 2,70	
Ziegelstein . . . . = 1,40 » 2,22	

§. 62 **Aggregatzustände.** Die Körper erscheinen uns nach dem verschiedenen Zusammenhange ihrer Theile in drei Hauptzuständen, die wir die Aggregatzustände derselben nennen. Sie sind entweder fest (franz. solides; eng. rigid) oder flüssig (franz. fluides; engl. fluid) und im letzteren Falle wieder entweder tropfbar flüssig (franz. liquides; engl. liquid) oder elastisch flüssig (franz. gazeux, aëriformes; engl. aëriform). Feste oder starre Körper sind diejenigen, deren Theilchen so stark unter sich zusammenhängen, daß eine gewisse Kraft nöthig ist, die Gestalt dieser Körper zu verändern oder eine Zertheilung derselben zu bewirken. Flüssige Körper hingegen sind solche, deren Theile durch die kleinste Kraft an einander verschoben werden können. Die elastisch flüssigen Körper, deren Repräsentant die atmosphärische Luft ist, unterscheiden sich dadurch von den tropfbar flüssigen, durch das Wasser repräsentirten Körpern, daß den-

*) S. das Wasseransaugen des Holzes, polytechnische Mittheilungen Bd. II. 1845.

selben ein Bestreben, sich immer weiter und weiter auszudehnen, inne wohnt, welches Bestreben dem Wasser u. s. w. mangelt.

Während die festen Körper eine eigenthümliche Gestalt und ein bestimmtes Volumen haben, besitzen die tropfbar flüssigen oder wasserförmigen Körper nur ein bestimmtes Volumen ohne eigenthümliche Form, die elastisch- oder ausdehnsam flüssigen Körper endlich weder das eine noch das andere.

Eintheilung der Kräfte. Ihrer Natur nach sind die Kräfte sehr verschieden; wir führen hier nur die vorzüglichsten an: §. 63

1) Die Schwerkraft, vermöge welcher sich alle Körper dem Mittelpunkte der Erde zu nähern suchen.
2) Die Kraft der Trägheit, welche bei Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen bewegter Massen hervortritt.
3) Die Muskelkraft der beseelten Wesen, oder die mittelst der Muskel von Menschen und Thieren ausgeübte (animalische) Kraft.
4) Die Elasticität oder Federkraft, welche Körper bei ihren Form- und Volumenveränderungen äußern.
5) Die Wärmekraft, vermöge welcher sich Körper beim Wechsel der Temperatur ausdehnen oder zusammenziehen.
6) Die Cohäsionskraft, die Kraft, mit welcher die Theile eines Körpers zusammenhängen, mit welcher also auch dieselben einer Trennung widerstehen.
7) Die Adhäsionskraft, mit welcher zwei in nahe Berührung gebrachte Körper einander anziehen.
8) Die Magnetkraft, oder die Anziehungs- und Abstoßungskraft der Magnete.

Nächstdem noch die elektrischen und elektromagnetischen Kräfte u. s. w.

Die Widerstände der Reibung, Steifigkeit, Festigkeit u. s. w. entspringen vorzüglich aus der Cohäsionskraft, welche, wie die Elasticität u. s. w., aus der sogenannten Molekularkraft, oder der Kraft, mit welcher die Moleküle oder kleinsten Theile eines Körpers auf einander wirken, hervorgeht.

Bestimmungsstücke einer Kraft. Bei einer jeden Kraft unterscheiden wir: §. 64

1) Den Angriffspunkt (franz. point d'application; engl. point of application), den Punkt des Körpers, auf welchen eine Kraft unmittelbar wirkt.
2) Die Kraftrichtung (franz. und engl. direction), die gerade Linie, in welcher eine Kraft den Angriffspunkt fortbewegt, oder fortzubewegen oder dessen Bewegung zu verhindern sucht. Die Kraftrichtung hat,

wie jede Bewegungsrichtung, zwei Seiten; sie kann von links nach rechts oder von rechts nach links, ferner von oben nach unten oder von unten nach oben gehen. Man nennt die eine die positive und die andere die negative. Da wir von links nach rechts und von oben nach unten lesen und schreiben, so wäre es am geeignetsten, diese Bewegungen positive und die entgegengesetzten Bewegungen negative zu nennen.

3) Die absolute Größe oder Intensität (franz. grandeur absolue, intensité; engl. intensity) der Kraft, die nach dem Obigen durch Gewichte, z. B. Pfunde, Kilogramme u. s. w., gemessen wird.

Man stellt die Kräfte graphisch durch gerade Linien dar, welche durch ihre Richtung und Länge die Richtung und Größe oder Stärke, sowie durch ihre Anfangspunkte die Angriffspunkte der Kräfte angeben.

§. 65 **Wirkung und Gegenwirkung.** Die erste Wirkung, welche eine Kraft in einem Körper hervorbringt, ist eine mit Ausdehnung oder Zusammendrückung verbundene Form- oder Volumenveränderung, welche im Angriffspunkt ihren Anfang nimmt und sich von da aus immer weiter und weiter im Körper ausbreitet. Durch diese innere Veränderung des Körpers wird aber die in ihm liegende Elasticität angeregt, die sich mit der Kraft ins Gleichgewicht setzt und deshalb derselben gleich ist und ihr entgegengesetzt wirkt. Man sagt hiernach: Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich und entgegengesetzt. Dieses Gesetz findet nicht nur bei den durch Berührung erzeugten Einwirkungen der Kräfte, sondern auch bei den sogenannten Anziehungs- und Abstoßungskräften, wohin die magnetische und selbst die Schwerkraft zu rechnen sind, statt. So stark ein Magnet einen Eisenstab anzieht, ebenso stark wird der Magnet vom Eisenstabe selbst angezogen. Die Kraft, mit welcher der Mond von der Erde angezogen wird (durch die Schwerkraft), ist gleich der Kraft, mit welcher der Mond auf die Erde zurückwirkt.

Die Kraft, mit welcher ein Gewicht auf eine Unterlage drückt, giebt diese in der entgegengesetzten Richtung zurück; die Kraft, womit ein Arbeiter an einer Maschine zieht, schiebt u. s. w., wirkt auf den Arbeiter zurück und sucht denselben in entgegengesetzter Richtung zu bewegen. Wenn ein Körper gegen einen anderen stößt, so drückt der erste den anderen genau so viel, wie der andere den ersten.

§. 66 **Eintheilung der Mechanik.** Die gesammte Mechanik wird nach den zwei Aggregatzuständen der Körper in zwei Hauptabtheilungen gebracht, nämlich:

1) in die Mechanik der festen oder starren Körper, welche man auch

wohl Geomechanik (franz. mécanique des corps solides; engl. mechanics of rigid bodies) nennt, und

2) in die Mechanik der flüssigen Körper, Hydromechanik, auch Hydraulik (franz. mécanique des fluides, hydraulique; engl. mechanics of fluids). Die letztere theilt man wieder ein
   a) in die Mechanik des Wassers und der tropfbar flüssigen Körper überhaupt, Hydromechanik, auch Hydraulik (franz. hydraulique; engl. hydraulic), und
   b) in die Mechanik der Luft und anderer luftförmigen Körper überhaupt, Aëromechanik (franz. mécanique des fluides aëriformes; engl. mechanics of elastic fluids).

Nimmt man nun noch auf die Eintheilung der Mechanik in Statik und Dynamik (§. 49) Rücksicht, so erhält man folgende Theile:

1) Statik der festen Körper, oder Geostatik,
2) Dynamik der festen Körper, oder Geodynamik,
3) Statik des Wassers u. s. w., oder Hydrostatik,
4) Dynamik des Wassers u. s. w., oder Hydrodynamik,
5) Statik der Luft (der Gase und Dämpfe), oder Aërostatik,
6) Dynamik der Luft, oder Aërodynamik, auch Pneumatik.

Zweites Capitel.

Mechanik des materiellen Punktes.

Ein materieller Punkt (franz. point matériel; engl. material point) §. 67
ist ein materieller Körper, dessen Dimensionen nach allen Seiten hin unendlich klein sind in Hinsicht auf die von ihm zurückgelegten Wege. Um den Vortrag zu vereinfachen, wird im Folgenden zunächst nur von der Bewegung und dem Gleichgewichte eines materiellen Punktes die Rede sein. Ein (endlicher) Körper ist eine stetige Verbindung von unendlich vielen materiellen Punkten oder Molekülen. Wenn sich die einzelnen Punkte oder Elemente eines Körpers alle vollkommen gleich, d. i. in parallelen geraden Linien gleich schnell bewegen, so kann man die Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auch auf die des ganzen Körpers anwenden, weil sich in diesem Falle annehmen läßt, daß gleiche Massentheile des Körpers durch gleiche Krafttheile getrieben werden.

§. 68 **Einfache constante Kraft.** Ist p die Acceleration, mit welcher eine Masse M durch eine Kraft fortgetrieben wird, so hat man nach §. 56 für diese:

$$P = Mp, \text{ sowie umgekehrt, die Acceleration } p = \frac{P}{M}.$$

Setzen wir ferner die Masse $M = \frac{G}{g}$, wo G das Gewicht des Körpers und g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet, so ist die Kraft:

$$1)\ P = \frac{p}{g} G,$$

und die Acceleration:

$$2)\ p = \frac{P}{G} g.$$

Man findet also die Kraft (P), welche einen Körper mit einer gewissen Acceleration (p) forttreibt, wenn man das Gewicht (G) des Körpers durch das Verhältniß $\left(\frac{p}{g}\right)$ seiner Acceleration zu der der Schwere multiplicirt.

Es ergiebt sich umgekehrt die Acceleration (p), mit welcher ein Körper durch eine Kraft (P) fortbewegt wird, indem man die Acceleration (g) der Schwere durch das Verhältniß $\left(\frac{P}{G}\right)$ zwischen Kraft und Gewicht des Körpers multiplicirt.

Beispiel. Man denke sich einen Körper auf einem horizontalen und sehr glatten Tische liegend, welcher dem Körper keine Hindernisse in den Weg setzt, wohl aber die Schwerkraft in demselben aufhebt. Wird dieser Körper von einer horizontal wirkenden Kraft gedrückt, so muß der Körper der Einwirkung derselben nachgeben und in der Richtung dieser Kraft fortgehen. Ist das Gewicht dieses Körpers: $G = 50$ Pfund und die auf ihn unausgesetzt drückende Kraft $P = 10$ Pfund, so wird er in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Acceleration $p = \frac{P}{G} \cdot g = \frac{10}{50} \cdot 31{,}25 = 6{,}25$ Fuß übergehen. Ist hingegen die Acceleration, mit welcher ein 42 Pfund schwerer Körper durch eine Kraft (P) beschleunigt wird, $p = 9$ Fuß, so wird diese Kraft $P = \frac{p}{g} G = \frac{9}{31{,}25} \cdot 42 = 0{,}032 \cdot 378 = 12{,}1$ Pfund betragen.

§. 69 Ist die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, constant, so entsteht eine gleichförmig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichförmig beschleunigte, wenn die Kraftrichtung in die anfängliche Bewegungsrichtung fällt, und dagegen eine gleichförmig verzögerte, wenn die Kraftrichtung der anfänglichen

Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Setzen wir nun in den phoronomischen Formeln (§. 13 und §. 14) statt p den Werth $\frac{P}{M} = \frac{P}{G} g$ ein, so bekommen wir Folgendes:

I. Für gleichförmig beschleunigte Bewegungen:

1) $v = c + \frac{P}{G} g t = c + 31{,}25 \frac{P}{G} t$ Fuß $= c + 9{,}81 \frac{P}{G} t$ Meter,

2) $s = c t + \frac{P}{G} \frac{g t^2}{2} = c t + 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$ Fuß $= c t + 4{,}905 \frac{P}{G} t^2$ Meter.

II. Für gleichförmig verzögerte Bewegungen:

1) $v = c - \frac{P}{G} g t = c - 31{,}25 \frac{P}{G} t$ Fuß $= c - 9{,}81 \frac{P}{G} t$ Meter,

2) $s = c t - \frac{P}{G} \frac{g t^2}{2} = c t - 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$ Fuß $= c t - 4{,}905 \frac{P}{G} t^2$ Meter.

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich alle Fragen, welche sich in Ansehung der durch eine beständige Kraft veranlaßten geradlinigen Bewegungen von Körpern stellen lassen, beantworten.

Beispiele. 1) Ein 2000 Pfund schwerer Wagen geht mit 4 Fuß Geschwindigkeit auf einer horizontalen, ihm keine Hindernisse entgegensetzenden Bahn fort, und wird 15 Secunden lang durch eine unveränderliche Kraft von 25 Pfund vorwärts geschoben; mit welcher Geschwindigkeit wird er nach Einwirkung dieser Kraft fortgehen? Es ist diese Geschwindigkeit $v = c + 31{,}25 \frac{P}{G} t$; da hier $c = 4$, $P = 25$, $G = 2000$ und $t = 15$, so folgt $v = 4 + 31{,}25 \cdot \frac{25}{2000} \cdot 15 = 4 + 5{,}859 = 9{,}859$ Fuß. 2) Unter gleichen Umständen wird ein 5500 Pfund schwerer Wagen, der vorher während 3 Minuten gleichförmig fortgehend 950 Fuß zurückgelegt hat, durch eine 30 Secunden lang anhaltend wirkende Kraft so fortgetrieben, daß er später in 3 Minuten 1650 Fuß gleichförmig durchläuft. Welches war diese Kraft? Hier ist Anfangsgeschwindigkeit $c = \frac{950}{3 \cdot 60} = 5{,}277$ Fuß, und Endgeschwindigkeit $v = \frac{1650}{3 \cdot 60} = 9{,}166$ Fuß, daher $\frac{P}{G} g t = v - c = 3{,}889$, und die Kraft $P = \frac{3{,}889 \cdot G}{g t} = 0{,}032 \cdot 3{,}889 \cdot \frac{5500}{30} = 0{,}12445 \cdot \frac{550}{3} = 22{,}81$ Pfund. 3) Ein mit 15 Fuß Geschwindigkeit fortgleitender, 1500 Pfund schwerer Schlitten verliert in Folge der Reibung auf der horizontalen Unterlage innerhalb 25 Secunden seine ganze Bewegung; wie groß ist diese Reibung? Hier ist die Bewegung gleichförmig verzögert und die Endgeschwindigkeit $v = 0$, daher $c = 31{,}25 \frac{P t}{G}$, und $P = 0{,}032 \frac{G c}{t} = 0{,}032 \cdot \frac{1500 \cdot 15}{25} = 0{,}032 \cdot 900 = 28{,}8$ Pfund die in Frage stehende Reibung. 4) Ein anderer

Schlitten von 1200 Pfund Gewicht und 12 Fuß Anfangsgeschwindigkeit hat bei seiner Bewegung eine Reibung von 45 Pfund zu überwinden; welche Geschwindigkeit hat derselbe nach 8 Secunden, und wie groß ist sein zurückgelegter Weg? Die Endgeschwindigkeit ist $v = 12 - 31{,}25 \cdot \frac{45 \cdot 8}{1200} = 12 - 9{,}375 = 2{,}625$ Fuß, und der zurückgelegte Weg $s = \left(\frac{c + v}{2}\right) t = \left(\frac{12 + 2{,}625}{2}\right) . 8 = 58{,}5$ Fuß.

§. 70 **Mechanische Arbeit.** Leistung oder Arbeit einer Kraft (franz. travail mécanique; engl. work done, labouring force) ist diejenige Wirkung einer Kraft, welche dieselbe bei Ueberwindung eines Widerstandes, z. B. der Schwerkraft, der Reibung, der Trägheit u. s. w., hervorbringt. Man verrichtet also eine mechanische Arbeit, indem man Lasten emporhebt, Massen eine größere Geschwindigkeit ertheilt, Körper in ihrer Form verändert, zertheilt u. s. w. Die Leistung oder Arbeit hängt nicht allein von der Kraft, sondern auch von dem Wege ab, auf welchem diese thätig ist oder einen Widerstand überwindet; sie wächst überhaupt mit der Kraft und dem Wege gleichzeitig. Heben wir einen Körper langsam genug in die Höhe, um seine Trägheit vernachlässigen zu können, so ist die verrichtete Arbeit seinem Gewichte und der Höhe, auf welche der Körper gehoben wird, proportional; denn 1) die Wirkung ist dieselbe, ob ein Körper vom m (3) fachen Gewichte ($m\,G$) auf eine gewisse Höhe gehoben wird oder ob m (3) Körper vom einfachen Gewichte (G) auf dieselbe Höhe gehoben werden; sie ist nämlich $m$mal so groß als die nöthige Wirkung zum Aufheben des einfachen Gewichtes auf die nämliche Höhe; und ebenso ist 2) die Leistung dieselbe, ob ein und dasselbe Gewicht auf die n (5) fache Höhe ($n\,h$) oder ob es n (5) mal auf die einfache Höhe gehoben wird, überhaupt aber n (5) mal so groß, als wenn dasselbe Gewicht um die einfache Höhe (h) emporsteigt. Ebenso ist die von einem langsam sinkenden Gewichte verrichtete Arbeit der Größe dieses Gewichtes und der Höhe, von welcher es herabgesunken ist, proportional. Diese Proportionalität findet aber auch bei jeder anderen Art der Arbeitsverrichtung statt; um bei einerlei Tiefe einen Sägeschnitt von doppelter Länge auszuführen, sind noch einmal so viel Theilchen zu trennen, als beim Schnitt von der einfachen Länge, ist also auch die Arbeit doppelt so groß; die doppelte Länge erfordert aber auch den doppelten Weg der Kraft, es ist folglich die Arbeit dem Wege proportional. Ebenso wird die Arbeit eines Mahlganges offenbar mit der Menge der Körner einer gewissen Getreideart, welche derselbe bis zu einem gewissen Grade zerreibt, wachsen. Diese Menge ist aber unter übrigens gleichen Umständen der Zahl der Umdrehungen oder vielmehr dem Wege, welchen der obere Mühlstein (Läufer) während des Mahlens dieser Getreidemenge gemacht hat, proportional; es wächst folglich auch die mechanische Arbeit mit dem Wege gleichmäßig.

Die angegebene Abhängigkeit der Arbeit einer Kraft von der Größe und dem Wege der Kraft erlaubt uns diejenige Arbeit, welche bei Ueberwindung eines Widerstandes von der Größe der Gewichtseinheit (z. B. Kilogramm, Pfund u. s. w.) längs eines Weges von der Größe der Längeneinheit (z. B. Meter oder Fuß) aufgewendet wird, als Einheit der mechanischen Arbeit oder Leistung (franz. unité dynamique; engl. dynamical unit, unit of work) anzunehmen und nun das Maß dieser gleichzusetzen dem Producte aus Kraft oder Widerstand und aus dem während der Ueberwindung des Widerstandes in der Kraftrichtung zurückgelegten Wege. §. 71

Setzen wir die Größe des Widerstandes selbst $= P$, und den bei seiner Ueberwindung von der Kraft oder vielmehr von ihrem Angriffspunkte zurückgelegten Wege, $= s$, so ist hiernach die bei Ueberwindung dieses Widerstandes aufgewendete Arbeit oder die Leistung

$$A = Ps \text{ Arbeitseinheiten.}$$

Um die Arbeitseinheit, für welche man auch den einfachen Namen Dynamie gebrauchen kann, näher zu bezeichnen, giebt man gewöhnlich die Einheiten beider Factoren P und s an, und sagt deshalb statt Arbeitseinheiten Kilogrammmeter, Pfundfuß, auch umgekehrt, Meterkilogramm, Fußpfund u. s. w., je nachdem Gewicht und Weg in Kilogramm und Meter oder in Pfund und Fuß ausgedrückt werden. Der Einfachheit wegen schreibt man statt Meterkilogramm mk oder km, und ebenso statt Fußpfund, Fpfd.

Beispiele. 1) Um einen Pochstempel von 210 Pfund Gewicht 15 Zoll hoch zu heben, ist die mechanische Arbeit $A = 210 . \frac{15}{12} = 262{,}5$ Fußpfund nöthig. 2) Durch eine mechanische Leistung von 1500 Fußpfund kann ein Schlitten, welcher bei seiner Bewegung 75 Pfund Reibung zu überwinden hat, um

$$s = \frac{A}{P} = \frac{1500}{75} = 20 \text{ Fuß fortgezogen werden.}$$

Nicht nur bei unveränderlicher Kraft oder constantem Widerstande ist die Arbeit ein Product aus Kraft und Weg, sondern auch dann, wenn der Widerstand während seiner Ueberwindung veränderlich ist, läßt sich die Arbeit als das Product aus Kraft und Weg ausdrücken, wenn man nur als Kraft einen mittleren Werth aus der stetigen Folge von Kräften annimmt. Das Verhältniß ist hier dasselbe wie das zwischen Zeit, Geschwindigkeit und Raum; denn auch der letztere läßt sich ja als ein Product aus Zeit und einem mittleren Werthe der Geschwindigkeiten ansehen. Auch hier sind dieselben graphischen Darstellungen anwendbar. Es läßt sich die mechanische Arbeit als Flächeninhalt eines Rechteckes $ABCD$, Fig. 86 (a. f. S.), ansehen, dessen Grundlinie AB der zurückgelegte Weg (s) und dessen Höhe entweder die unveränderliche Kraft (P) selbst oder das Mittel von den verschiedenen Kraftwerthen ist. Im Allgemeinen läßt sich aber die Arbeit durch §. 72

den Flächenraum einer Figur $ABCND$, Fig. 87, darstellen, die zur Grundlinie den Weg s hat und deren Höhe über jeder Stelle der Grundlinie gleich

Fig. 86.

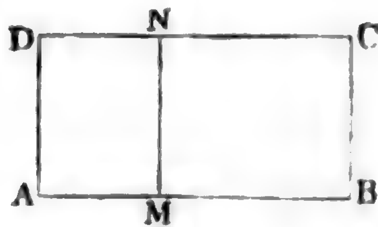
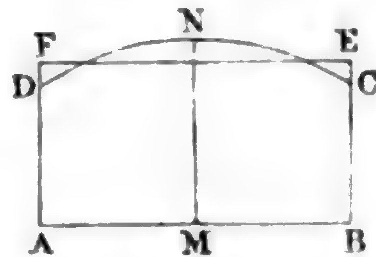


Fig. 87.

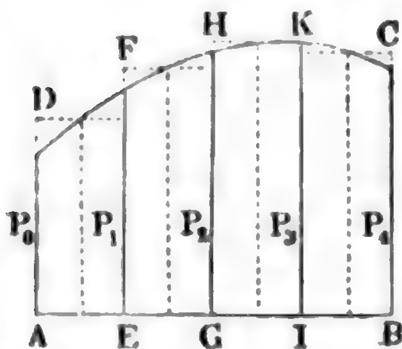


ist der dieser Stelle des Weges entsprechenden Kraft. Verwandelt man die Figur $ABCND$ in ein Rechteck $ABEF$ von gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte, so erhält man in der Höhe $AF = BE$ desselben den mittleren Werth dieser Kraft.

§. 7 Die Arithmetik und Geometrie geben verschiedene Mittel an, um aus einer stetigen Folge von Größen einen mittleren Werth derselben ausfindig zu machen; man findet auch die vorzüglichsten im „Ingenieur“ angegeben. Unter ihnen ist aber die sogenannte Simpson'sche Regel dasjenige, welches man in der Praxis am häufigsten anwendet, weil sie in vielen Fällen große Einfachheit mit einem hohen Grade von Genauigkeit in sich vereinigt.

In jedem Falle ist es nöthig, den Weg $AB = s$ (Fig. 88) in n (möglichst viel) gleiche Theile, wie $AE = EG = GI$ u. s. w., einzutheilen und die Kräfte $EF = P_1$, $GH = P_2$, $IK = P_3$ u. s. w. an den Enden dieser Wegtheile zu ermitteln. Setzen wir dann noch die anfängliche Kraft $AD = P_0$ und die Kraft BC am Ende $= P_n$, so erhalten wir die mittlere Kraft: $P = (\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{n-1} + \frac{1}{2} P_n) : n$, und daher die Arbeit derselben:

Fig. 88.



$$Ps = (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + \tfrac{1}{2} P_n) \frac{s}{n} \cdot$$

Ist die Anzahl (n) der Theile eine gerade, nämlich 2, 4, 6, 8 u. s. w., so giebt die Simpson'sche Regel noch genauer die mittlere Kraft:

$$P = (P_0 + 4\,P_1 + 2\,P_2 + 4\,P_3 + \cdots + 4\,P_{n-1} + P_n) : 3\,n,$$

und daher die entsprechende Arbeit:

$$Ps = (P_0 + 4\,P_1 + 2\,P_2 + 4\,P_3 + \cdots + 4\,P_{n-1} + P_n) \frac{s}{3\,n} \cdot$$

Ist n ungerade, so läßt sich setzen:

$$Ps = [{}^3/_8 (P_0 + 3 P_1 + 3 P_2 + P_3) + {}^1/_3 (P_3 + 4 P_4 + 2 P_5 + \cdots + 4 P_{n-1} + P_n)] \frac{s}{n} \cdot$$ (S. Art. 38 der analyt. Hülfslehren.)

Beispiel. Um die mechanische Arbeit eines Zugpferdes zu finden, welche dieses beim Fortziehen eines Wagens auf einer gewissen Straße verrichtet, bedient man sich eines Kraftmessers (Dynamometers), welcher auf der einen Seite mit dem Wagen und auf der anderen Seite mit den Strängen der Pferde in Verbindung gesetzt ist, und beobachtet an demselben von Zeit zu Zeit die Größe der Kraft. Wenn die anfängliche Kraft $P_0 = 110$ Pfund, die nach Zurücklegung von 25 Fuß Weg, 122 Pfund, nach Zurücklegung von 50 Fuß, 127 Pfund, bei einem Wege von 75 Fuß, 120 Pfund und am Ende des ganzen Weges von 100 Fuß, = 114 Pfund beträgt, so hat man den mittleren Kraftwerth nach der ersten Formel:

$$P = (1/_2 \cdot 110 + 122 + 127 + 120 + 1/_2 \cdot 114) : 4 = 120{,}25 \text{ Pfund},$$

und die mechanische Arbeit:

$$Ps = 120{,}25 \cdot 100 = 12025 \text{ Fußpfund};$$

nach der zweiten Formel aber:

$$P = (110 + 4 \cdot 122 + 2 \cdot 127 + 4 \cdot 120 + 114) : (3 \cdot 4) = \frac{1446}{12} = 120{,}5 \text{ Pfd}.$$

und die mechanische Leistung:

$$Ps = 120{,}5 \cdot 100 = 12050 \text{ Fußpfund}.$$

Princip der lebendigen Kräfte. Setzen wir in der §. 14 entwickelten Formel der Phoronomie $s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$ oder $ps = \frac{v^2 - c^2}{2}$ für die Acceleration p ihren Werth $\frac{P}{G} g$ ein, so erhalten wir die mechanische Arbeit: §. 74

$$A = Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G,$$ oder, wenn wir die Geschwindigkeitshöhen $\frac{v^2}{2g}$ und $\frac{c^2}{2g}$ durch h und k bezeichnen:

$$Ps = (h - k)\, G.$$

Diese für die praktische Mechanik überaus fruchtbringende Gleichung sagt: Die mechanische Arbeit (Ps), welche eine Masse entweder in sich aufnimmt, wenn sie aus einer kleineren Geschwindigkeit (c) in eine größere (v) übergeht, oder hervorbringt, wenn sie aus einer größeren Geschwindigkeit in eine kleinere überzugehen genöthigt wird, ist stets gleich dem Producte aus dem Gewichte dieser Masse und der Differenz der beiden Geschwindigkeiten entsprechenden Geschwindigkeitshöhen $\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right)$.

Beispiele. 1) Um einen 4000 Pfund schweren Wagen auf einer vollkommen glatten Schienenbahn in eine Geschwindigkeit von 30 Fuß zu versetzen, ist eine

mechanische Arbeit $Ps = \frac{v^2}{2g} G = 0{,}016\ v^2\ G = 0{,}016\ .\ 900\ .\ 4000\ .\ 57600$ Fußpfund nöthig; und ebenso viel Arbeit wird dieser Wagen verrichten, wenn man ihm einen Widerstand entgegensetzt und ihn dadurch allmälig in Ruhe überzugehen nöthigt. 2) Ein anderer Wagen von 6000 Pfund geht mit 15 Fuß Geschwindigkeit fort und wird durch eine auf ihn wirkende Kraft in eine Geschwindigkeit von 24 Fuß versetzt; wie groß ist die von diesem Wagen in sich aufgenommene oder von der Kraft verrichtete Arbeit? Den Geschwindigkeiten 15 Fuß und 24 Fuß entsprechen die Geschwindigkeitshöhen $k = \frac{c^2}{2g} = 3{,}6$ Fuß und $h = \frac{v^2}{2g} = 9{,}216$ Fuß; demnach ist die gesuchte mechanische Arbeit:
$Ps = (h - k)\ G = (9{,}216 - 3{,}600) . 6000 = 5{,}616 . 6000 = 33696$ Fpfd. Kennt man nun den Weg, auf welchem diese Geschwindigkeitsveränderung vor sich geht, so läßt sich die Kraft finden, kennt man dagegen diese, so kann man den Weg bestimmen. Soll. z. B. im letzten Falle der Weg des Wagens nur 100 Fuß betragen, während dessen Zurücklegung die Geschwindigkeit von 15 Fuß in die von 24 Fuß übergeht, so hat man die Kraft $P = (h - k) \frac{G}{s} = \frac{33696}{100} = 336{,}96$ Pfund. Wäre aber die Kraft selbst 2000 Pfund, so würde der Weg $s = (h - k) \frac{G}{P} = \frac{33696}{2000} = 16{,}848$ Fuß betragen. 3) Wenn ein 500 Pfund schwerer Schlitten in Folge der Reibung auf der Bahn seine Geschwindigkeit von 16 Fuß nach Zurücklegung von 100 Fuß Weg gänzlich verloren hat, so ist der Reibungswiderstand:

$$P = \frac{h\,G}{s} = 0{,}016\ .\ 16^2\ \frac{500}{100} = 0{,}016\ .\ 256\ .\ 5 = 20{,}48 \text{ Pfund}$$

§. 75 Die im vorigen Paragraphen gefundene Arbeitsformel:

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - k)\ G$$

gilt nicht allein für constante, sondern auch für veränderliche Kräfte, wenn man nur (nach §. 73) statt P den mittleren Kraftwerth einführt; denn da nach III*) in §. 19 für jede stetige Bewegung überhaupt

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = ps \text{ ist,}$$

wenn $p = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$ die gleichen Wegelementen σ entsprechende mittlere Acceleration bei dem Durchlaufen des Weges s bezeichnet, so hat man auch

$$p = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n\,M}, \text{ folglich}$$

$$\left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}\right) s, \text{ und}$$

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \frac{v^2 - c^2}{2g} G = (h - k) G,$$

wenn $P = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}$, das Mittel aller nach Zurücklegung der Wege $\frac{s}{n}, \frac{2s}{n}, \frac{3s}{n} \cdots \frac{ns}{s}$ gemessenen Kraftwerthe bezeichnet.

Uebrigens läßt sich natürlich P auch nach einer der letzteren Formeln des §. 73 berechnen, wenn zumal die Zahl n der Theile nicht sehr groß angenommen wird.

Sehr oft ist die Geschwindigkeitsveränderung zu ermitteln, welche eine gegebene Masse M bei Aufnahme einer gewissen mechanischen Arbeit Ps erleidet. Die gefundene Hauptgleichung wird dann in der Form

$$h = k + \frac{Ps}{G} \text{ oder } v = \sqrt{c^2 + 2g\frac{Ps}{G}} \text{ angewendet.}$$

Hat man mittels dieser Formel die den Wegen $\frac{s}{n}, \frac{2s}{n}, \frac{3s}{n} \cdots s$ entsprechenden Endgeschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \cdots v_n$ bestimmt, so kann man durch Anwendung der Formel

$$t = \frac{s}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right)$$

die Zeit, in welcher der Weg s zurückgelegt wird, berechnen.

In der Form $G = Mg = \frac{2Ps}{v^2 - c^2} = \frac{Ps}{\frac{1}{2}(v+c)(v-c)}$ dient endlich die gefundene Hauptgleichung noch dazu, um die Masse M zu bestimmen, bei welcher die mechanische Arbeit Ps eine gegebene Geschwindigkeitsveränderung $v - c$ hervorbringt.

Wenn bei der (stetigen) Bewegung eines Körpers die Endgeschwindigkeit v gleich ist der Anfangsgeschwindigkeit c, so fällt die hierbei in Anspruch genommene Arbeit = Null aus, d. h. es nimmt der beschleunigte Theil der Bewegung gerade so viel Arbeit in Anspruch, als der verzögerte Theil derselben verrichtet.

Beispiel. Wenn ein ohne Reibung auf einer Eisenbahn fortgehender Wagen von 2500 Pfund Gewicht zur Vermehrung seiner Geschwindigkeit, die anfangs nur 10 Fuß betrug, eine mechanische Arbeit von 8000 Fußpfund in sich aufgenommen hat, so wird seine Geschwindigkeit nach Aufnahme dieser Arbeit

$$v = \sqrt{10^2 + 62{,}5 \cdot \frac{8000}{2500}} = \sqrt{100 + 200} = 17{,}32 \text{ Fuß betragen.}$$

Anmerkung. Man nennt, ohne einen besonderen Begriff damit zu verbinden, das Product aus Masse $M = \frac{G}{g}$ und Quadrat der Geschwindigkeit (v^2), also Mv^2, die lebendige Kraft (franz. force vive; engl., eigentlich lat. vis

viva) der bewegten Masse, und kann hiernach die mechanische Arbeit, welche eine bewegte Masse in sich aufnimmt, gleichsetzen der halben lebendigen Kraft derselben. Geht eine träge Masse aus einer Geschwindigkeit c in eine andere v über, so ist sowohl die gewonnene als auch die verlorene Arbeit gleich der halben Differenz zwischen den lebendigen Kräften am Ende und am Anfange der Geschwindigkeitsveränderung. Dieses Gesetz von der mechanischen Leistung der Körper durch ihre Trägheit nennt man das Princip der lebendigen Kräfte (franz. principe des forces vives; engl. principle of vis viva).

§. 76 **Zusammensetzung der Kräfte.** Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2 auf einen und denselben Körper 1) in gleicher oder 2) in entgegengesetzter Richtung, so ist die Wirkung dieselbe, als wenn nur eine Kraft auf den Körper wirkte, welche 1) der Summe oder 2) Differenz dieser Kräfte gleich ist, denn diese Kräfte ertheilen der Masse M die Acceleration:

$$p_1 = \frac{P_1}{M} \text{ und } p_2 = \frac{P_2}{M};$$

es ist folglich nach §. 29 die aus beiden resultirende Acceleration:

$$p = p_1 \pm p_2 = \frac{P_1 \pm P_2}{M},$$

und demnach die derselben entsprechende Kraft:

$$P = Mp = P_1 \pm P_2.$$

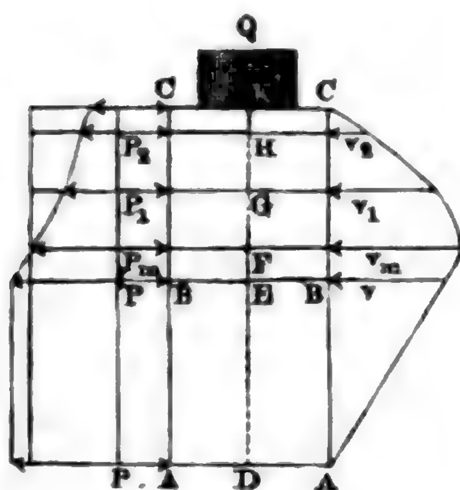
Man nennt die aus den beiden Kräften hervorgehende, gleich viel vermögende (äquipollente) Kraft P die Resultirende (franz. résultante; engl. resultant), ihre Bestandtheile P_1 und P_2 aber die Componenten (franz. composantes; engl. components).

Beispiele. 1) Ein auf der flachen Hand liegender Körper drückt nur so lange mit seinem absoluten Gewichte auf dieselbe, so lange die Hand in Ruhe ist oder mit dem Körper gleichförmig auf- oder abwärts bewegt wird; hebt man aber die Hand beschleunigt empor, so erleidet dieselbe einen stärkeren Druck, geht man dagegen beschleunigt mit der Hand senkrecht nieder, so wird der Druck kleiner als das Gewicht; er wird sogar Null, wenn man die Hand mit der Acceleration der Schwere herabführt. Ist der Druck auf die Hand $= P$, so fällt der Körper nur mit der Kraft $G - P$ nieder, während seine Masse $M = \frac{G}{g}$ ist; setzen wir daher die Acceleration, mit welcher die Hand mit dem darauf liegenden Körper niedergeht, $= p$, so folgt $G - P = \frac{G}{g} p$, und daher der Druck $P = G - \frac{p}{g} G = \left(1 - \frac{p}{g}\right) G$. Läßt man dagegen den Körper auf der Hand mit der Acceleration p aufsteigen, so ist p der Acceleration g entgegengesetzt, daher der Druck auf die Hand, $P = \left(1 + \frac{p}{g}\right) G$. Je nachdem man einen Körper mit 20 Fuß Beschleunigung ab- oder aufwärts steigen läßt, ist der Druck auf die Hand $= \left(1 - \frac{20}{31{,}25}\right) G = (1 - 0{,}64)\, G = 0{,}36$ des Kör-

vergewichtes oder $= 1 + 0{,}64 = 1{,}64$ desselben. 2) Wenn ich mit der flachen Hand einen Körper von 3 Pfund Gewicht 14 Fuß hoch senkrecht in die Höhe schleudere, indem ich ihn auf die ersten zwei Fuß Höhe mit der Hand unausgesetzt forttreibe, so ist die verrichtete mechanische Arbeit $Ps = Gh = 3 \,.\, 14 = 42$ Fußpfund, und demnach der Druck des Körpers auf die Hand: $P = \frac{42}{2} = 21$ Pfund. Während also der ruhende Körper mit 3 Pfund drückt, wirkt er während des Werfens mit 21 Pfund Kraft auf die Hand zurück.

3) Welche Last Q vermag der in einem Cylinder $AACC$, Fig. 89, bewegliche Kolben um $DK = s = 6$ Fuß hoch zu heben, wenn er auf der ersten Weghälfte von innen durch die aus einem großen Reservoir zuströmende Luft mit der Kraft $P = 6000$ Pfund, und auf der zweiten Weghälfte durch die im Cylinder abgesperrte und nach dem Mariotte'schen Gesetze mit allmälig abnehmender Kraft wirkende Luft fortbewegt wird, während die äußere Luft constant auf den Kolben mit 2000 Pfund entgegenwirkt? Da sich die im Cylinder abgesperrte Luft am Ende der zweiten Hälfte des ganzen Kolbenweges um das Doppelte ausgedehnt hat, so ist die Kraft derselben zuletzt nur $\frac{1}{2} \,.\, P = 3000$ Pfund. Es drückt die im Cylinder abgesperrte Luft am Ende des Kolbenweges von 3 Fuß noch mit 6000 Pfund, dagegen am Ende des Weges von 4 Fuß mit $\frac{3}{4} \,.\, 6000 = 4500$ Pfund, am Ende des Weges von 5 Fuß mit $\frac{3}{5} \,.\, 6000 = 3600$ Pfund, und am Ende des ganzen Weges von 6 Fuß mit $\frac{3}{6} \,.\, 6000 = 3000$ Pfund, wonach sich die mittlere Kraft während der Expansion $= \frac{1}{8} [6000 + 3\,(4500 + 3600) + 3000] = \frac{33300}{8} = 4162$ Pfund, und folglich die mittlere Kraft bei der ganzen Kolbenbewegung, $= \frac{6000 + 4162}{2} = 5081$ Pfund ergiebt. Zieht man hiervon den constanten Gegendruck von 2000 Pfund ab, so folgt das vom Kolben aufzuhebende Gewicht

Fig. 89.



$$Q = 5081 - 2000 = 3081 \text{ Pfund.}$$

Die bewegende Kraft bei der ersten Weghälfte ist: $P - (Q + 2000) = 6000 - 5081 = 919$ Pfund, folglich die Acceleration der Bewegung: $p = \left(\frac{P - Q}{Q}\right) g = \frac{919}{3081} \,.\, 31{,}25 = 9{,}32$ Fuß, ferner die Geschwindigkeit am Ende des Kolbenweges $s_1 = \frac{s}{2} = 3$ Fuß: $v = \sqrt{2 p s_1} = \sqrt{6 \,.\, 9{,}32} = \sqrt{55{,}92} = 7{,}478$ Fuß, und die Zeit, in welcher dieser Kolbenweg zurückgelegt wird: $t_1 = \frac{2 s_1}{v} = \frac{6}{7{,}478} = 0{,}802$ Secunden. Der Kolbenweg, bei welchem sich Kraft und Last das Gleichgewicht halten, also die bewegende Kraft und folglich auch die Acceleration Null, und die Kolbengeschwindigkeit ein Maximum ist, hat die Größe:

$$x = \left(\frac{P}{Q + 2000}\right) \frac{s}{2} = \frac{6000 \,.\, 3}{5081} = \frac{18000}{5081} = 3{,}543 \text{ Fuß.}$$

Am Ende des Kolbenweges $\frac{6,543}{2} = 3,2715$ Fuß ist die innere Kolbenkraft $= \frac{6000.3}{3,2715} = 5502$, folglich die bewegende Kraft $= 5502 - 5081 = 421$ Pfund, und der mittlere Werth derselben, während der Bewegung des Kolbens von 3 bis 3,543 Fuß, $= \frac{919 + 4 \,.\, 421 + 0}{6} = 434$ Pfund. Die entsprechende mittlere Acceleration ist $= \frac{434}{3081} g = \frac{434 \,.\, 31,25}{3081} = 4,402$ Fuß, folglich die Maximalkolbengeschwindigkeit am Ende des Weges $x = s_1 + s_2 = 3,543$ Fuß:

$$v_m = \sqrt{v^2 + 2 p s_2} = \sqrt{55,92 + 2 \,.\, 4,402 \,.\, 0,543} = \sqrt{60,70} = 7,791 \text{ Fuß}.$$

Die Zeit zum Durchlaufen des Weges $s_2 = 0,543$ Fuß läßt sich setzen:

$$t_2 = \frac{s_2}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_m}\right) = 0,2715\left(\frac{1}{7,478} + \frac{1}{7,791}\right) = 0,071 \text{ Secunden}.$$

Hat der Kolben den Weg 5,5 zurückgelegt, so ist die bewegende Kraft: $= \frac{18000}{5,500} - 5081 = - 1808$ Pfund, und steht der Kolben im Mittel zwischen diesem Punkte und dem Punkte der Maximalgeschwindigkeit, so ist diese Kraft: $= \frac{18000}{4,5215} - 5081 = - 1100$ Pfund und es sind die entsprechenden Accelerationen folgende:

$$= - \frac{1808 \,.\, 31,25}{3081} = - 18,34 \text{ Fuß und } \frac{- 1100 \,.\, 31,25}{3081} = - 11,16 \text{ Fuß}.$$

Beim Durchlaufen des Wegstückes $5,500 - 3,543 = 1,957$ Fuß, ist folglich die mittlere Acceleration $= - \frac{0 + 4 \,.\, 11,16 + 18,34}{6} = - 10,50$ Fuß, und demnach die am Ende dieses Weges erlangte Geschwindigkeit:

$= \sqrt{60,70 - 2 \,.\, 10,50 \,.\, 1,957} = \sqrt{19,60} = 4,427$ Fuß. Für die erste Hälfte 0,9785 F. des letzteren Wegstückes ist dagegen die mittlere Acceleration $= - \frac{0 + 11,16}{2} = - 5,58$ Fuß, daher die Geschwindigkeit am Ende des Weges von 4,5215 Fuß: $= \sqrt{60,70 - 2 \,.\, 5,58 \,.\, 0,9785} = \sqrt{49,78} = 7,055$ Fuß.

Nun ergiebt sich die Zeit zum Durchlaufen des Wegstückes $s_3 = 1,957$ Fuß:

$t_3 = \frac{s_3}{6}\left(\frac{1}{v_m} + \frac{4}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = 0,326\left(\frac{1}{7,791} + \frac{4}{7,055} + \frac{1}{4,427}\right) = 0,326 \,.\, 0,9212$ $= 0,300$ Secunden. Ferner läßt sich die Zeit für das letzte Stück $s_4 = 0,5$ Fuß des ganzen Kolbenweges, $t_4 = \frac{2 s_4}{v_2} = \frac{1}{4,427} = 0,226$ Secunden setzen, und es folgt nun die Zeit des ganzen Kolbenhubes:

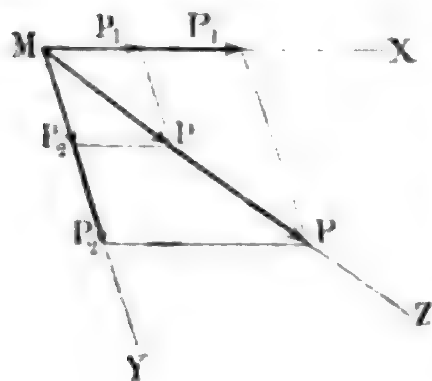
$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0,802 + 0,071 + 0,300 + 0,226 = 1,40 \text{ Secunden}.$$

§. 77 **Parallelogramm der Kräfte.** Wird eine Masse (ein materieller Punkt) M, Fig. 90, von zwei Kräften P_1 und P_2 ergriffen, deren Richtungen MX und MY einen Winkel $XMY = \alpha$ zwischen sich einschließen, so erzeugen diese nach eben diesen Richtungen die Accelerationen:

$$p_1 = \frac{P_1}{M} \text{ und } p_2 = \frac{P_2}{M},$$

aus deren Vereinigung eine mittlere Acceleration (§. 35) in einer Richtung MZ entsteht, welche durch die Diagonale eines aus p_1, p_2 und α construirten Parallelogramms gegeben ist; auch ist diese mittlere oder resultirende Acceleration:

Fig. 90.



$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2\,p_1\,p_2 \cos.\alpha}$$

und für den Winkel φ, den die Richtung derselben mit der Richtung MX der einen Acceleration p_1 einschließt, hat man:

$$\sin.\varphi = \frac{p_2 \sin.\alpha}{p}.$$

Setzen wir in diese beiden Formeln die angegebenen Werthe von p_1 und p_2, so folgt:

$$p = \sqrt{\left(\frac{P_1}{M}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{M}\right)^2 + 2\left(\frac{P_1}{M}\right)\left(\frac{P_2}{M}\right)\cos.\alpha} \text{ und}$$

$$\sin.\varphi = \left(\frac{P_2}{M}\right)\frac{\sin.\alpha}{p}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung durch M, so ergiebt sich:

$$Mp = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1\,P_2 \cos.\alpha},$$

oder, da Mp die der Acceleration p entsprechende Kraft P ist:

$$1)\ P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1\,P_2 \cos.\alpha}, \text{ und}$$

$$2)\ \sin.\varphi = \frac{P_2 \sin.\alpha}{P}.$$

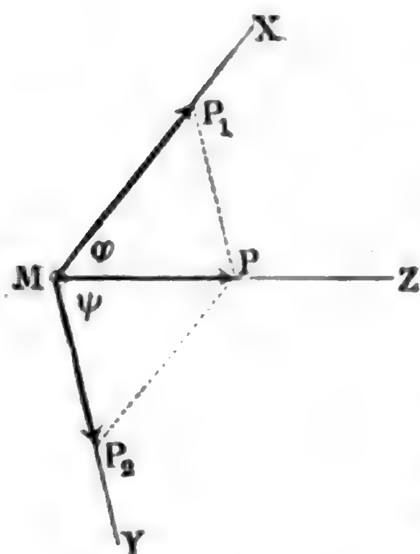
Es wird also die Resultirende oder Mittelkraft sowohl ihrer Größe als auch ihrer Richtung nach aus den Componenten oder Seitenkräften genau so bestimmt, wie die mittlere Acceleration aus den Seitenaccelerationen.

Repräsentiren wir die Kräfte durch gerade Linien, indem wir diese in denselben Verhältnissen zu einander stehen lassen, wie sie in Gewichten, z. B. Pfunden, in Wirklichkeit zu einander stehen, so läßt sich demnach die Resultirende durch die Diagonale desjenigen Parallelogramms darstellen, dessen Seiten durch die Seitenkräfte gebildet werden und wovon ein Winkel dem von den Richtungen der Seitenkräfte gebildeten Winkel gleich ist. Das so aus den Seitenkräften construirte und durch seine Diagonale die Mittelkraft ausdrückende Parallelogramm wird das Parallelogramm der Kräfte genannt.

Beispiel. Wenn ein auf einem vollkommen glatten Tische ruhender Körper, Fig. 91 (a. f. S.), von 150 Pfund Gewicht von zwei Kräften $P_1 = 30$ Pfund und $P_2 = 24$ Pfund ergriffen wird, welche einen Winkel $P_1 M P_2 = \alpha = 105$ Grad zwischen sich einschließen, so ist die Frage, nach welcher

Richtung und mit welcher Acceleration die Bewegung vor sich gehen werde? Da $cos.\,\alpha = cos.\,105^0 = -\,cos.\,75^0$, so folgt die Mittelkraft:

Fig. 91.



$$P = \sqrt{30^2 + 24^2 - 2\,.\,30\,.\,24\,cos.\,75^0}$$
$$= \sqrt{900 + 576 - 1440\,cos.\,75^0}$$
$$= \sqrt{1476 - 372{,}7} = 33{,}22 \text{ Pfund;}$$

und die ihr entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{Pg}{G} = \frac{33{,}22\,.\,31{,}25}{150} = 6{,}92 \text{ Fuß.}$$

Die Bewegungsrichtung schließt mit der Richtung der ersten Kraft einen Winkel φ ein, der bestimmt ist durch

$$sin.\,\varphi = \frac{24}{33{,}22}\,sin.\,105^0 = 0{,}7224\,sin.75^0 = 0{,}6978;$$

es ist also $\varphi = 44^0\,15'$.

Anmerkung. Die Mittelkraft (P) hängt, den gefundenen Formeln zufolge, nur von den Seitenkräften, nie aber von der Masse (M) des Körpers, auf welche die Kräfte wirken, ab. Deshalb findet man in vielen Werken über Mechanik die Richtigkeit des Parallelogramms der Kräfte ohne Rücksicht auf die Masse, wohl aber mit Zugrundlegung irgend eines Grundgesetzes bewiesen. Solcher rein statischen Beweise giebt es viele. In jedem der folgenden Werke findet man einen anderen Beweis: Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Gerstner's Handbuch der Mechanik, Kayser's Handbuch der Statik, Möbius' Lehrbuch der Statik, Rühlmann's technische Mechanik. Der Beweis in Gerstner's Mechanik setzt die Theorie des Hebels voraus; er ist übrigens sehr einfach und findet sich in sehr vielen alten und auch in neuen Schriften, z. B. in denen von Kästner, Monge, Whewell u. s. w. Kayser's Beweis ist der Poisson'sche in elementarem Gewande. Möbius' Entwickelung ist auf eine besondere, von Poinsot (Elémens de Statique) eingeführte Theorie, auf die der Kräftepaare (des couples), gegründet. Einen eigenthümlichen Beweis liefert Duchayla in der Correspondance sur l'école polytechnique No. 4, denselben hat auch Brix in seinem Lehrbuch der Statik fester Körper, 2. Auflage, aufgenommen; er wird aber auch noch in vielen anderen Werken angewendet, z. B. in Moseley's Mechanical Principles u. s. w. Den Beweis des Parallelogramms der Kräfte, welchen Navier in seinem Leçons des mécanique (deutsch von Mejer, 1858) liefert, findet man auch in Rühlmann's Grundzüge der Mechanik, Leipzig 1860. Eine auf die Bewegungsgesetze gegründete Theorie dieses Parallelogramms findet man schon in Newton's Principien; sie wird aber auch von vielen Neueren gebraucht, z. B. von Venturoli, Poncelet, Burg u. s. w. S. Elementi di Mecanica e d'Idraulica di Venturoli; Mécanique industrielle par Poncelet; Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre von Burg. Ein neuer Beweis von Möbius findet sich in den Berichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (1850), ein anderer von Ettingshausen in den Wiener akademischen Schriften (1851), und ein dritter von Schlömilch in dessen Zeitschrift für Mathematik und Physik (1857).

§. 78 **Zerlegung der Kräfte.** Mit Hülfe des Kräfteparallelogramms lassen sich nicht nur zwei oder mehrere Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen,

sondern auch gegebene Kräfte unter gegebenen Verhältnissen in zwei oder mehrere Kräfte zerlegen. Sind die Winkel φ und ψ gegeben, welche die Seitenkräfte $MP_1 = P_1$ und $MP_2 = P_2$, Fig. 91, mit der gegebenen Kraft $MP = P$ einschließen, so ergeben sich die Streitkräfte oder Componenten durch die Formeln:

$$P_1 = \frac{P \, sin. \psi}{sin. (\varphi + \psi)}, \quad P_2 = \frac{P \, sin. \varphi}{sin. (\varphi + \psi)}.$$

Stehen die Seitenkräfte winkelrecht auf einander, ist also $\varphi + \psi = 90^0$ und $sin. (\varphi + \psi) = 1$, so hat man:

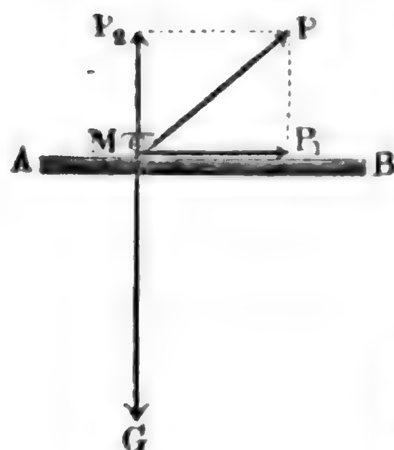
$$P_1 = P \, cos. \varphi \text{ und } P_2 = P \, sin. \varphi.$$

Sind endlich ψ und φ einander gleich, so ist auch:

$$P_2 = P_1, \text{ nämlich } = \frac{P \, sin. \varphi}{sin. 2\varphi} = \frac{P}{2 \, cos. \varphi}.$$

Beispiele. 1) Wie stark wird der Tisch AB, Fig. 92, von einem Körper M gedrückt, dessen Gewicht $G = 70$ Pfund ist, und auf den eine Kraft $P = 50$ Pfund wirkt, deren Richtung unter dem Winkel $PMP_1 = \varphi = 40^0$ gegen den Horizont geneigt ist? Der horizontale Component von P ist:

Fig. 92.



$$P_1 = P \, cos. \varphi = 50 \, cos. 40^0 = 38{,}30 \text{ Pfund},$$

und der verticale Component:

$$P_2 = P \, sin. \varphi = 50 \, sin. 40^0 = 32{,}14 \text{ Pfund};$$

der letztere sucht den Körper vom Tische abzuziehen, es bleibt folglich der Druck auf den Tisch:

$$G - P_2 = 70 - 32{,}14 = 37{,}86 \text{ Pfund}.$$

2) Wenn ein Körper M, Fig. 91, von 110 Pfund Gewicht, auf einer horizontalen Unterlage durch zwei Kräfte so bewegt wird, daß er in der ersten Secunde einen Weg von 6,5 Fuß in einer Richtung durchläuft, welche von den beiden Kräfterichtungen um die Winkel $\varphi = 52^0$ und $\psi = 77^0$ abweicht, so ergeben sich die Kräfte selbst durch Folgendes: Die Acceleration ist der doppelte Weg in der ersten Secunde, also hier $p = 2 \,.\, 6{,}5 = 13$ Fuß. Die Mittelkraft ist nun:

$$P = \frac{p\,G}{g} = 0{,}032 \,.\, 13 \,.\, 110 = 45{,}76 \text{ Pfund};$$

daher die eine Seitenkraft:

$$P_1 = \frac{P \, sin. 77^0}{sin. (52^0 + 77^0)} = \frac{45{,}76 \, sin. 77^0}{sin. 51^0} = 57{,}37 \text{ Pfund},$$

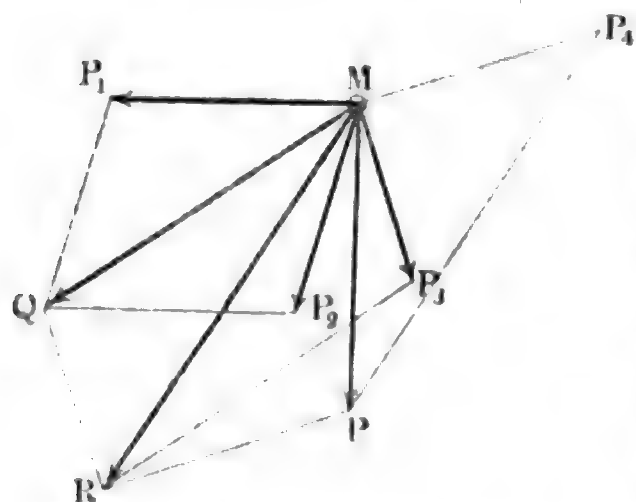
und die andere Seitenkraft:

$$P_2 = \frac{45{,}76 \, sin. 52^0}{sin. 51^0} = 46{,}40 \text{ Pfund}.$$

Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene. Um die Mittelkraft P zu einem Systeme von Seitenkräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. (Fig. 93 a. f. S.) zu finden, kann man genau denselben Weg (§. 34) einschlagen, welcher bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten befolgt wird; man kann nämlich durch wiederholte Anwendung des Kräfteparallelogramms je zwei und zwei Kräfte zu §. 7!

einer vereinigen, bis zuletzt nur noch eine übrig bleibt. Die Kräfte P_1 und P_2 geben z. B. durch das Parallelogramm $M P_1 Q P_2$ die Mittelkraft $\overline{MQ} = Q$: wenn man diese wieder mit P_3 vereinigt, erhält man im Parallelogramm $M Q R P_3$ die Mittelkraft $\overline{MR} = R$, und die letztere wieder mit P_4 zu einem Parallelogramm verbunden, stellt sich in der Diagonale $\overline{MP} = P$ die letzte allen vier Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 zusammen äquivalente Mittelkraft heraus.

Fig. 93.



Es ist nicht nöthig, bei dieser Zusammensetzungsweise das Parallelogramm stets zu vollenden und dessen Diagonale anzugeben. Man bilde ein Polygon $M P_1 Q R P$, indem man die Seiten $M P_1$, $P_1 Q$, $Q R$, $R P$ den gegebenen Componenten P_1, P_2, P_3, P_4 parallel legt und gleichmacht: die letzte, das Polygon zuschließende Seite $M P$ ist die gesuchte Mittelkraft P oder vielmehr das Maß derselben.

Anmerkung. Es ist sehr nützlich, die Aufgaben der Mechanik auch durch Construction aufzulösen; wenn die construirende Auflösung auch nicht so viel Genauigkeit gewährt als die rechnende, so sichert sie dagegen sehr vor groben Fehlern und kann deshalb immer als Prüfung der Rechnung dienen. In Fig. 93 hat man die Kräfte unter den gegebenen Winkeln $P_1 M P_2 = 72^0\, 30'$, $P_2 M P_3 = 33^0\, 20'$ und $P_3 M P_4 = 92^0\, 40'$ an einander gestoßen und so aufgetragen, daß ein Pfund durch eine Linie des preuß. Zolles repräsentirt wird. Die Kräfte $P_1 = 11{,}5$ Pfund, $P_2 = 10{,}8$ Pfund, $P_3 = 8{,}5$ Pfund und $P_4 = 12{,}2$ Pfund sind daher durch Seiten von 11,5 Linien, 10,8 Linien, 8,5 Linien und 12,2 Linien Länge ausgedrückt. Eine sorgfältige Construction des Kräftepolygons giebt die Größe der Mittelkraft $P = 14{,}6$ Pfund und die Abweichung ihrer Richtung MP von der Richtung $M P_1$ der ersten Kraft, $= 86\frac{1}{2}$ Grad.

§. 80 Einfacher und schärfer bestimmt sich die Mittelkraft P, wenn man jeden der gegebenen Componenten P_1, P_2, P_3 u. s. w. nach zwei rechtwinklig gegen einander stehenden Axenrichtungen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, Fig. 94, in Seitenkräfte wie Q_1 und R_1, Q_2 und R_2, Q_3 und R_3 u. s. w. zerlegt, die in eine und dieselbe Axenrichtung fallenden Kräfte algebraisch addirt und nun aus den sich ergebenden, unter einem Rechtwinkel aus einander ziehenden zwei Kräften die Größe und Richtung der Resultirenden sucht. Sind die Winkel $P_1 M X$, $P_2 M X$, $P_3 M X$ u. s. w., welche die Richtungen von den Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. mit der Axe $X\overline{X}$ einschließen, $= \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. s. w., so hat man die Seitenkräfte $Q_1 = P_1 \cos.\alpha_1$, $R_1 = P_1 \sin.\alpha_1$; $Q_2 = P_2 \cos.\alpha_2$, $R_2 = P_2 \sin.\alpha_2$ u. s. w., weshalb folgt aus:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots,$$

$$1)\ Q = P_1\ cos.\ \alpha_1 + P_2\ cos.\ \alpha_2 + P_3\ cos.\ \alpha_3 + \cdots,$$

und ebenso aus $R = R_1 + R_2 + R_3 \cdots$,

$$2)\ R = P_1\ sin.\ \alpha_1 + P_2\ sin.\ \alpha_2 + P_3\ sin.\ \alpha_3 + \cdots$$

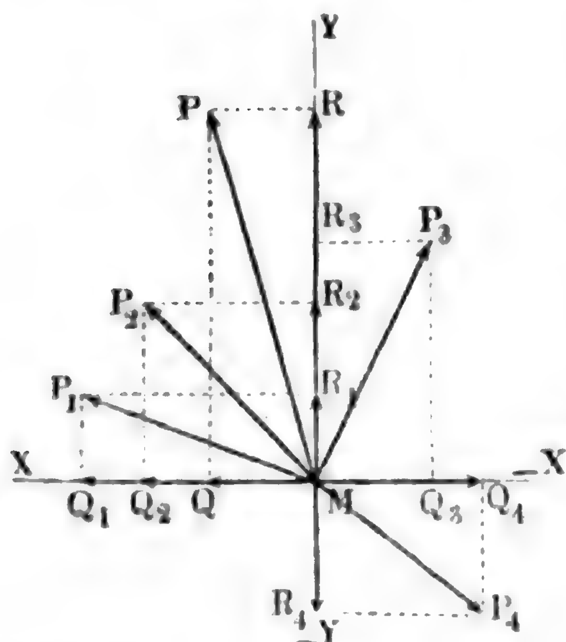
Aus den so gefundenen zwei Seitenkräften Q und R ergiebt sich nun die Größe der gesuchten Mittelkraft:

$$3)\ P = \sqrt{Q^2 + R^2}$$

und der Winkel $PMX = \alpha$, den ihre Richtung mit $X\overline{X}$ einschließt, durch

$$4)\ tang.\ \alpha = \frac{R}{Q}\ .$$

Fig. 94.



Bei der algebraischen Addition der Kräfte hat man die Vorzeichen genau zu berücksichtigen; denn sind dieselben bei zwei Kräften verschieden, d. h. sind diese Kräfte vom Angriffspunkte M aus nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, so geht diese Addition in eine arithmetische Subtraction über (§. 76). Der Winkel α ist spitz, so lange Q und R positiv sind, er ist zwischen einem und zwei Rechtwinkeln, wenn Q negativ und R positiv, zwischen zwei und drei Rechten, wenn Q und R beide negativ sind, und liegt endlich zwischen drei und vier Rechten, wenn bloß R negativ ist.

Beispiel. Welches ist die Größe und Richtung der Mittelkraft aus den Seitenkräften $P_1 = 30$ Pfund, $P_2 = 70$ Pfund und $P_3 = 50$ Pfund, deren Richtungen, in einer Ebene liegend, die Winkel $P_1MP_2 = 56^0$ und $P_2MP_3 = 104^0$ zwischen sich einschließen? Legen wir die Axe $X\overline{X}$, Fig. 94, in die Richtung der ersten Kraft, so erhalten wir $\alpha_1 = 0^0$, $\alpha_2 = 56^0$ und $\alpha_3 = 56^0 + 104^0 = 160^0$; daher:

1) $Q = 30 \,.\, cos.\, 0^0 + 70 \,.\, cos.\, 56^0 + 50 \,.\, cos.\, 160^0 = 30 + 39{,}14 - 46{,}98$ $= 22{,}16$ Pfund, und

2) $R = 30 \,.\, sin.\, 0^0 + 70 \,.\, sin.\, 56^0 + 50 \,.\, sin.\, 160^0 = 0 + 58{,}03 + 17{,}10$ $= 75{,}13$ Pfund. Ferner:

3) $tang.\ \alpha = \dfrac{75{,}13}{22{,}16} = 3{,}3903$,

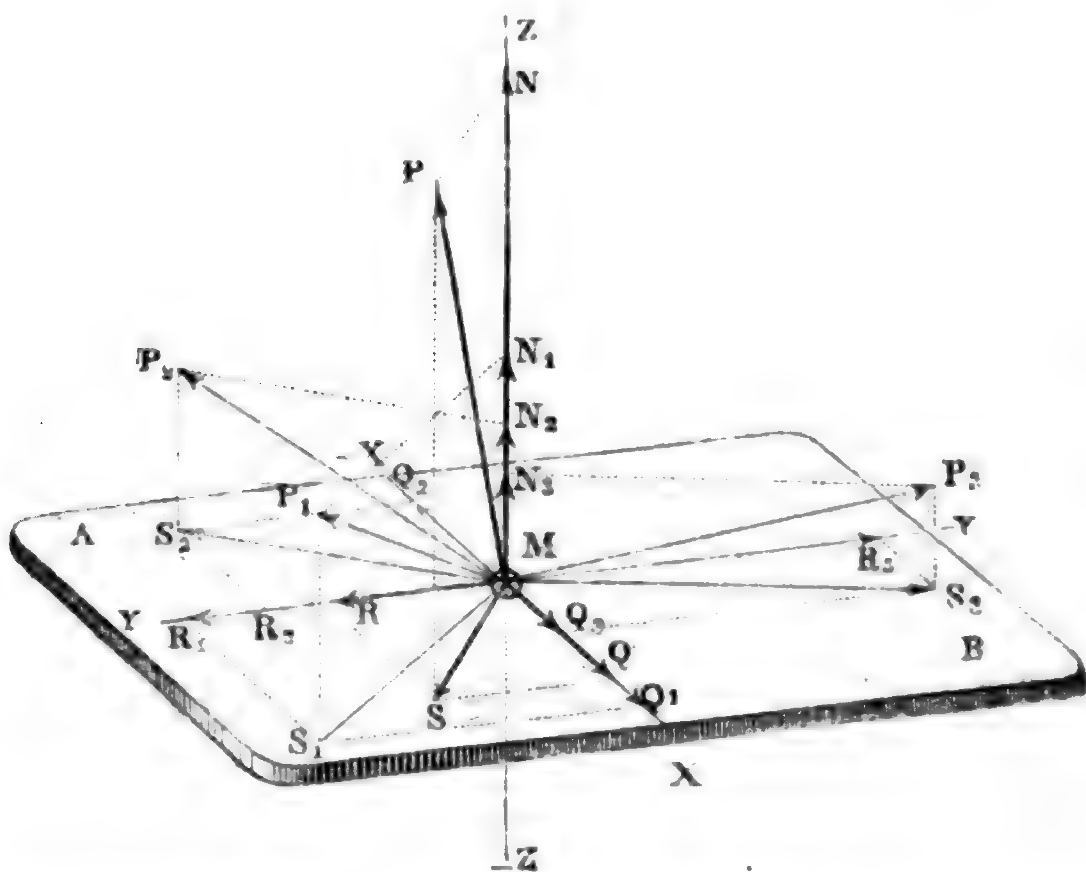
und hiernach den Winkel, welchen die Mittelkraft mit dem positiven Axentheile MX oder der Kraft P_1 einschließt, $\alpha = 73^0\,34'$, endlich diese Kraft selber:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \frac{Q}{cos.\ \alpha} = \frac{R}{sin.\ \alpha} = \frac{75{,}13}{sin.\ 73^0\,34'} = \frac{75{,}13}{0{,}9591} = 78{,}33 \text{ Pfund.}$$

§. 81 **Kräfte im Raume.** Liegen die Kraftrichtungen nicht in einer und derselben Ebene, so lege man durch den Angriffspunkt der Kräfte eine Ebene und zerlege jede derselben in zwei andere, die eine derselben in der Ebene liegend, die andere rechtwinklig zur Ebene. Die so erhaltenen Seitenkräfte in der Ebene sind nun nach der Regel des vorigen Paragraphen zu einer und die Seitenkräfte rechtwinklig zur Ebene durch bloße Addition zu einer anderen Mittelkraft zu vereinigen; zu den auf diese Weise erhaltenen zwei rechtwinkligen Componenten ist endlich nach der bekannten Regel (§. 77) die Mittelkraft zu finden.

Fig. 95 führt das eben angegebene Verfahren mehr vor Augen. $\overline{MP_1} = P_1$, $\overline{MP_2} = P_2$, $\overline{MP_3} = P_3$ seien die einzelnen Kräfte, AB die

Fig. 95.



Ebene (Projectionsebene) und $Z\overline{Z}$ die Axe winkelrecht zu ihr. Aus der Zerlegung der Kräfte P_1, P_2 u. s. w. ergeben sich die Kräfte S_1, S_2 u. s. w. in der Ebene, und die Kräfte N_1, N_2 u. s. w. in der Normalen $Z\overline{Z}$. Jene werden wieder nach zwei Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ in die Seitenkräfte Q_1, Q_2 u. s. w. R_1, R_2 u. s. w. zerlegt und geben die Componenten Q und R, woraus sich endlich die Mittelkraft S bestimmen läßt, welche, mit der Summe N aller Normalkräfte N_1, N_2 u. s. w. vereinigt, die gesuchte Mittelkraft P giebt.

Setzen wir die Winkel, unter welchen die Kraftrichtungen gegen die Ebene AB, z. B. gegen den Horizont geneigt sind, β_1, β_2 u. s. w., so ergeben sich Kräfte in der Ebene $S_1 = P_1 \cos. \beta_1$, $S_2 = P_2 \cos. \beta_2$ u. s. w., und die Normalkräfte $N_1 = P_1 \sin. \beta_1$, $N_2 = P_2 \sin. \beta_2$ u. s. w.; be-

zeichnen wir endlich die Winkel, welche die in der Ebene AB liegenden Projectionen der Kräfterichtungen mit der Axe XX einschließen, mit α_1, α_2 u. s. w., setzen wir also $S_1 MX = \alpha_1$, $S_2 MX = \alpha_2$ u. s. w., so stoßen wir auf folgende drei, die Kanten eines geraden Parallelepipeds (des Kräfteparallelepipeds) bildende Kräfte:

$Q = S_1 \cos. \alpha_1 + S_2 \cos. \alpha_2 + \cdots$, oder

1) $Q = P_1 \cos. \beta_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \beta_2 \cos. \alpha_2 + \cdots$, ebenso

2) $R = P_1 \cos. \beta_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \cos. \beta_2 \sin. \alpha_2 + \cdots$, endlich

3) $N = P_1 \sin. \beta_1 + P_2 \sin. \beta_2 + \cdots$

Aus diesen drei Kräften folgt die letzte Resultirende:

4) $P = \sqrt{Q^2 + R^2 + N^2}$, ferner

der Neigungswinkel $PMS = \beta$ derselben gegen die Projectionsebene durch

5) $tang. \beta = \frac{N}{S} = \frac{N}{\sqrt{Q^2 + R^2}}$, endlich

der Winkel $SMX = \alpha$, welchen die Projection der Resultirenden in der Ebene AB mit der ersten Axe XX einschließt, durch

6) $tang. \alpha = \frac{R}{Q}$.

Sind $\lambda_1, \lambda_2 ..$ die Winkel, welche die Kräfte $P_1, P_2 ..$ mit der Axe AX, ferner $\mu_1, \mu_2 ..$ die Winkel, welche dieselben mit der Axe AY, und $\nu_1, \nu_2 ..$ die Winkel, welche sie mit der Axe AZ einschließen, so hat man auch:

1*) $Q = P_1 \cos. \lambda_1 + P_2 \cos. \lambda_2 + \cdots$,

2*) $R = P_1 \cos. \mu_1 + P_2 \cos. \mu_2 + \cdots$, und

3*) $N = P_1 \cos. \nu_1 + P_2 \cos. \nu_2 + \cdots$.

Die Größe der Mittelkraft ist wieder durch die Formel

4*) $P = \sqrt{Q^2 + R^2 + N^2}$

bestimmt, wogegen sich die Richtung derselben mittels der Formeln

5*) $\cos. \lambda = \frac{Q}{P}$, $\cos. \mu = \frac{R}{P}$ und $\cos. \nu = \frac{N}{P}$

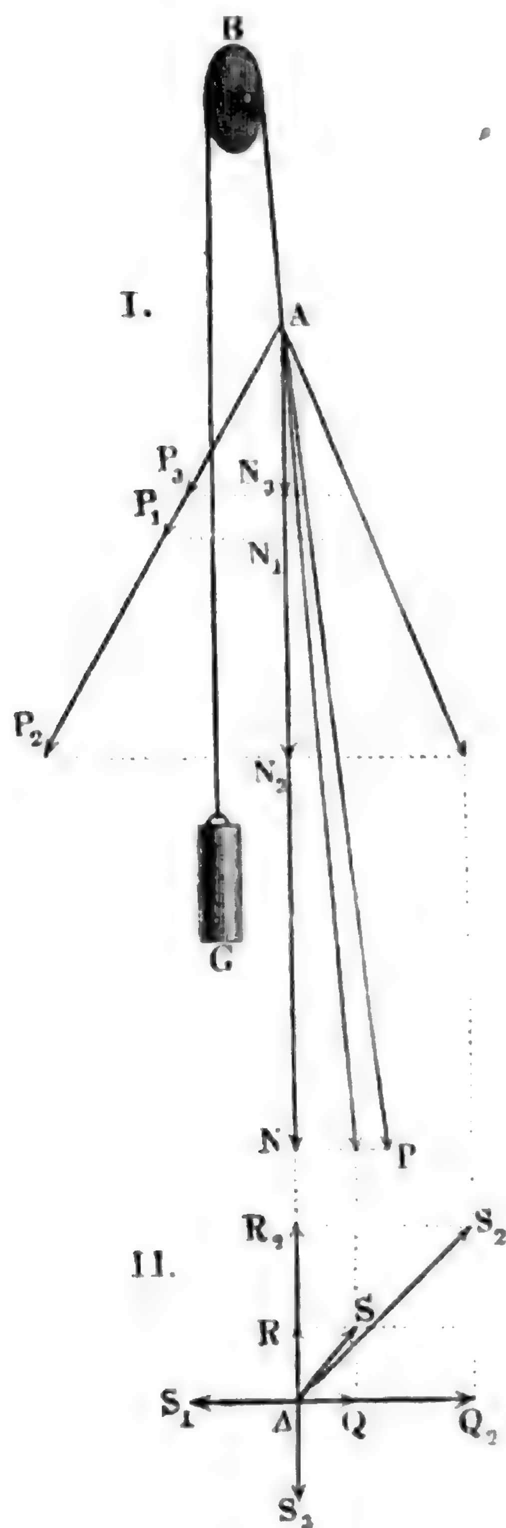
berechnen läßt, in welchen λ, μ und ν die Winkel bezeichnen, welche P mit den Axen AX, AY und AZ einschließt.

Auch ist $\cos. \lambda = \cos. \alpha \cos. \beta$, $\cos. \mu = \sin. \alpha \cos. \beta$ und $\nu = 90^0 - \beta$, also $\cos. \nu = \sin. \beta$.

Beispiel. Um ein Gewicht G, Fig. 96 I u. II (a. f. S.), mittels des über der Leitrolle B weggezogenen Seiles GBA senkrecht emporzuheben, ziehen an dem Seilende A drei Arbeiter mit den Kräften $P_1 = 50$ Pfund, $P_2 = 100$ Pfund und $P_3 = 40$ Pfund, deren Richtungen eine Neigung von 60 Grad gegen den Horizont haben, und welche die Horizontalwinkel $S_1 A S_2 = S_2 A S_3 = 135$ Grad und $S_3 A S_1 = 90$ Grad unter sich einschließen; welches ist die Größe und Richtung der dem Gewichte G gleichzusetzenden Mittelkraft, und

wie groß könnte dieses Gewicht sein, wenn die Kräfte eine und dieselbe Richtung hätten?

Fig. 96.



Die verticalen Componenten der Kräfte sind:
$N_1 = P_1 \sin. \beta_1 = 50 \sin. 60^0 = 43{,}30$ Pfund, $N_2 = P_2 \sin. \beta_2 = 100 \sin. 60^0 = 86{,}60$ Pfund und $N_3 = P_3 \sin. \beta_3 = 40 \sin. 60^0 = 34{,}64$ Pfund, folglich ist die in A vertical niederziehende Kraft

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 164{,}54 \text{ Pfund}.$$

Ferner sind die horizontalen Componenten:
$S_1 = P_1 \cos. \beta_1 = 50 \cos. 60^0 = 25$ Pfd., $S_2 = P_2 \cos. \beta_2 = 100 \cos. 60^0 = 50$ Pfd., und $S_3 = P_3 \cos. \beta_3 = 40 \cos. 60^0 = 20$ Pfund. Legt man eine Axe $X\overline{X}$ in der Richtung der Kraft S_1, so folgt die Seitenkraft in dieser Axe:
$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = S_1 \cos. \alpha_1 + S_2 \cos. \alpha_2 + S_3 \cos. \alpha_3 = 25 \cos. 0^0 + 50 \cos. 135^0 + 20 \cos. 270^0 = 25 \,.\, 1 - 50 \,.\, 0{,}7071 - 20 \,.\, 0 = 25 - 35{,}355 = -10{,}355$ Pfund, sowie die Seitenkraft in der zweiten Axe $Y\overline{Y}$:
$R = R_1 + R_2 + R_3 = S_1 \sin. \alpha_1 + S_2 \sin. \alpha_2 + S_3 \sin. \alpha_3 = 25 \sin. 0 + 50 \sin. 135 + 20 \sin. 270^0 = 50 \,.\, 0{,}7071 - 20 = 15{,}355$ Pfund,
und die horizontale Mittelkraft:

$$S = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{10{,}355^2 + 15{,}355^2} = 18{,}520 \text{ Pfund}.$$

Der Winkel α, welchen diese Kraft mit der Axe $X\overline{X}$ einschließt, ist bestimmt durch

$$tang. \alpha = \frac{R}{Q} = -\frac{15{.}355}{10{,}355} = -1{,}4828,$$

wonach $\alpha = 180 - 56^0 = 124^0\,0'$ folgt.

Die vollständige Mittelkraft ist:

$$P = \sqrt{N^2 + S^2} = \sqrt{164{,}54^2 + 18{,}520^2} = 165{,}58 \text{ Pfund}.$$

Der Neigungswinkel dieser Kraft gegen den Horizont wird bestimmt durch

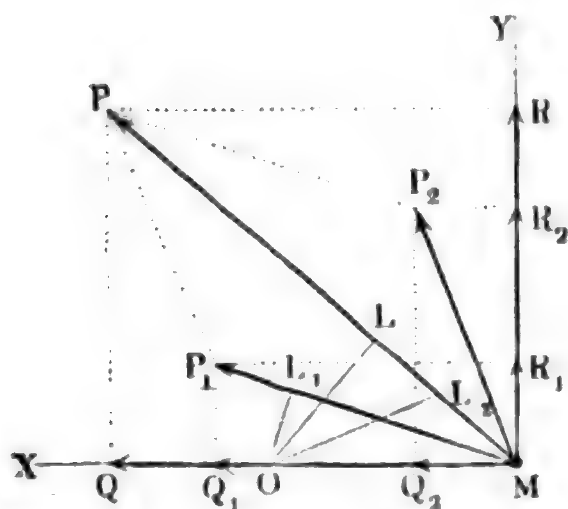
$$tang. \beta = \frac{N}{S} = \frac{164{,}54}{18{,}520} = 8{,}8848, \text{ wonach } \beta = 83^0\,35' \text{ folgt.}$$

Wenn die drei Kräfte in einer und derselben Richtung wirkten, wäre die Mittelkraft $= 50 + 100 + 40 = 190$ Pfund, also um $190 - 165{,}58 = 24{,}42$ Pfund größer als die gefundene.

§. 82 **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** Aus den in dem Vorigen gefundenen Regeln über die Zusammensetzung der Kräfte lassen sich noch zwei andere, im praktischen Gebrauch wesentliche Dienste leistende, ab-

leiten. Es sei in Fig. 97, M ein materieller Punkt, es seien $\overline{MP_1} = P_1$ und $\overline{MP_2} = P_2$ die auf ihn wirkenden Kräfte, endlich sei $\overline{MP} = P$ die Mittelkraft aus den Kräften P_1 und P_2. Legen wir durch M zwei Axen MX und MY winkelrecht gegen einander, und zerlegen wir die Kräfte P_1 und P_2 sowie ihre Mittelkraft P in nach diesen Axen gerichtete Seitenkräfte, also P_1 in Q_1 und R_1, P_2 in Q_2 und R_2, und P in Q und R, so erhalten wir die Kräfte in der einen Axe Q_1, Q_2 und Q, und die in der anderen R_1, R_2 und R, und es ist $Q = Q_1 + Q_2$ sowie $R = R_1 + R_2$. Nehmen wir nun in der Axe MX irgend einen Punkt O an, und fällen von demselben Perpendikel OL_1, OL_2 und OL gegen die Richtungen der Kräfte P_1, P_2 und P, so erhalten wir rechtwinkelige Dreiecke MOL_1, MOL_2, MOL, welche den von den drei Kräften gebildeten Dreiecken ähnlich sind, nämlich:

Fig. 97.



$$\triangle MOL_1 \backsim \triangle MP_1Q_1,$$
$$\triangle MOL_2 \backsim \triangle MP_2Q_2,$$
$$\triangle MOL \backsim \triangle MPQ.$$

Diesen Aehnlichkeiten zufolge ist aber $\frac{MQ_1}{MP_1}$, d. i. $\frac{Q_1}{P_1}, = \frac{ML_1}{MO}$, ebenso $\frac{Q_2}{P_2} = \frac{ML_2}{MO}$ und $\frac{Q}{P} = \frac{ML}{MO}$; setzen wir die hiernach bestimmten Werthe von Q_1, Q_2 und Q in die Gleichung $Q = Q_1 + Q_2$, so erhalten wir:

$$P \,.\, \overline{ML} = P_1 \,.\, \overline{ML_1} + P_2 \,.\, \overline{ML_2}.$$

Ebenso ist auch:

$$\frac{R_1}{P_1} = \frac{OL_1}{MO}, \frac{R_2}{P_2} = \frac{OL_2}{MO} \text{ und } \frac{R}{P} = \frac{OL}{MO},$$

daher:

$$P \,.\, \overline{OL} = P_1 \,.\, \overline{OL_1} + P_2 \,.\, \overline{OL_2}.$$

Diese Gleichungen gelten auch dann noch, wenn P die Mittelkraft aus drei oder mehreren Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. ist, weil man allgemein

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$$
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \text{ hat.}$$

Man kann daher allgemein:

1) $P.\overline{ML} = P_1.\overline{ML_1} + P_2.\overline{ML_2} + P_3.\overline{ML_3} + \cdots,$

2) $P.\overline{OL} = P_1.\overline{OL_1} + P_2.\overline{OL_2} + P_3.\overline{OL_3} + \cdots$ setzen.

Beiden Gleichungen muß die Mittelkraft P aus den Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. entsprechen, es lassen sich daher auch diese Gleichungen zur Bestimmung von P anwenden.

Die erstere dieser beiden Gleichungen ist auch auf ein Kräftesystem im Raume, wie N, Q, R, Fig. 95, anwendbar, da auch hier $N = N_1 + N_2 + N_3 + \cdots$, oder

$$P \cos. v = P_1 \cos. v_1 + P_2 \cos. v_2 + P_3 \cos. v_3 + \cdots, \text{ also auch}$$

$$P . \overline{MO} \cos. v = P_1 . \overline{MO} \cos. v_1 + P_2 \overline{MO} \cos. v_2 + P_3 \overline{MO} \cos. v_3 + \cdots$$

ist u. s. w.

§. 83 Rückt der Angriffspunkt M, Fig. 98 und Fig. 99, in einer geraden Linie nach O, oder denkt man sich den Angriffspunkt um den Weg $MO = x$

Fig. 98.

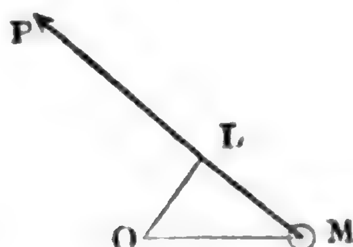
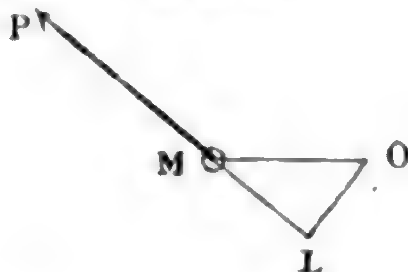


Fig. 99.



fortgegangen, so nennt man die Projection $ML = s$ dieses Weges x nach der Kraftrichtung MP den Weg der Kraft P, und das Product Ps aus der Kraft und ihrem Wege: die Arbeit der Kraft. Führen wir nun diese Bezeichnungen in der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen ein, so erhalten wir:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots,$$

es ist also die Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der Seitenkräfte.

Bei der Summation dieser mechanischen Arbeiten hat man, wie bei der Summation von Kräften, auf die Zeichen derselben Rücksicht zu nehmen. Wirkt eine von den Kräften Q_1, Q_2 u. s. w. des vorigen Paragraphen den übrigen entgegengesetzt, so hat man sie als negative Kraft einzuführen; diese Kraft, wie z. B. Q_3 in Fig. 94, §. 80, ist aber Component einer Kraft P_3, die unter den Verhältnissen, wie sie im vorigen Paragraphen vorausgesetzt wurden, der Bewegung ML_3 ihres Angriffspunktes entgegengesetzt wirkt; man ist daher genöthigt, diejenige Kraft, Fig. 99, welche der Bewegung ML entgegengesetzt wirkt, als negativ zu behandeln, wenn man diejenige Kraft P, Fig. 98, welche in der Bewegungsrichtung ML wirkt, positiv setzt.

Sind die Kräfte ihrer Größe oder Richtung nach veränderlich, so hat die Formel

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots$$

nur für unendlich kleine Wege s, s_1, s_2 u. s. w. ihre Richtigkeit.

Man nennt die einer unendlich kleinen Verrückung σ des materiellen Punktes entsprechenden Wege σ_1, σ_2, σ_3 u. s. w. der Kräfte die **virtuellen Geschwindigkeiten** (franz. vitesses virtuelles; engl. virtual velocities) derselben und das der Formel $P\sigma = P_1\sigma_1 + P_1\sigma_2 + P_3\sigma_3$ entsprechende Gesetz das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten**.

Uebertragung der mechanischen Arbeit. Nach dem Principe der lebendigen Kräfte ist für eine geradlinige Bewegung (§. 74) die mechanische Arbeit (Ps), welche eine Kraft (P) verrichtet, indem sie eine Masse M aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit v versetzt: §. 84

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Ist nun aber P die Mittelkraft aus anderen, auf die Masse M wirkenden Kräften P_1, P_2 u. s. w., und sind die Wege, welche diese zurücklegen, s_1, s_2 u. s. w., während die Masse M selbst den Weg s macht, so hat man nach dem vorigen Paragraphen:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots,$$

es läßt sich daher folgende allgemeine Formel:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$$

angeben, und ihr zu Folge die **Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte gleichsetzen dem halben Gewinn der lebendigen Kraft der Masse.**

Ist die Geschwindigkeit während der Bewegung unveränderlich, also $v = c$, und die Bewegung selbst gleichförmig, so hat man $v^2 - c^2 = 0$, also weder Gewinn noch Verlust an lebendiger Kraft, und daher:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots = 0;$$

dann ist also die Summe der mechanischen Arbeiten von den einzelnen Kräften = Null.

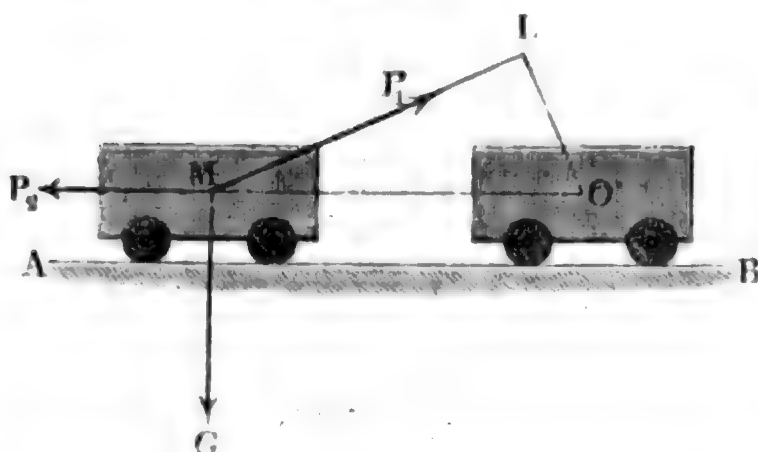
Wenn umgekehrt die Summe der Arbeiten gleich Null ist, so verändern die Kräfte die Bewegung des Körpers in der gegebenen Richtung nicht; hatte der Körper nach der gegebenen Richtung keine Bewegung, so wird er auch durch Einwirkung der Kräfte in dieser Richtung keine bekommen; hatte er vorher eine gewisse Geschwindigkeit nach einer gewissen Richtung, so wird er dieselbe auch behalten.

Sind die Kräfte veränderlich, so kann die veränderliche Geschwindigkeit v nach einer gewissen Zeit wieder in die Anfangsgeschwindigkeit c übergehen, was bei allen periodischen Bewegungen, wie sie namentlich an vielen Maschinen vorkommen, eintritt. Nun giebt aber $v = c$, die Arbeit $\left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$

= Null, es ist daher innerhalb einer Periode der Bewegung der Arbeitsverlust oder Gewinn = Null.

Beispiel. Ein Wagen, Fig. 100, von dem Gewichte $G = 5000$ Pfund wird auf einem horizontalen Wege durch eine unter dem Winkel $\alpha = 24$ Grad aufsteigende Kraft $P_1 = 660$ Pfund vorwärts bewegt und hat während der Bewegung den der Reibung entsprechenden horizontalen Widerstand $P_2 = 450$ Pfund zu überwinden. Welche Arbeit wird die Kraft (P_1) verrichten müssen, um jenen anfänglich mit 2 Fuß Geschwindigkeit fortgehenden Wagen in eine Geschwindigkeit von 5 Fuß zu versetzen?

Fig. 100.



Setzen wir den Weg MO des Wagens $= s$, so haben wir die Arbeit der Kraft P_1:

$$= P_1 \,.\, \overline{ML} = P_1\, s\, cos.\, \alpha = 660 \,.\, s\, cos.\, 24^0 = 602{,}94 \,.\, s,$$

ferner die Arbeit der als Widerstand wirkenden Kraft P_2:

$$= (-\, P_2) \,.\, s = -\, 450 \,.\, s.$$

Hiernach bleibt dann die Arbeit der bewegenden Kraft:

$$Ps = P_1\, s\, cos.\, \alpha - P_2\, s\, cos.\, 0 = (602{,}94 - 450)\, s = 152{,}94 \text{ Fußpfund.}$$

Die Masse erfordert aber zu ihrer Geschwindigkeitsveränderung die Arbeit:

$$\left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = \left(\frac{5^2 - 2^2}{2g}\right) \,.\, 5000 = 0{,}016 \,.\, (25 - 4) \,.\, 5000 = 1680 \text{ Fußpfund;}$$

setzen wir daher beide Arbeiten einander gleich, so erhalten wir $152{,}94 \,.\, s = 1680$, folglich den Weg des Wagens:

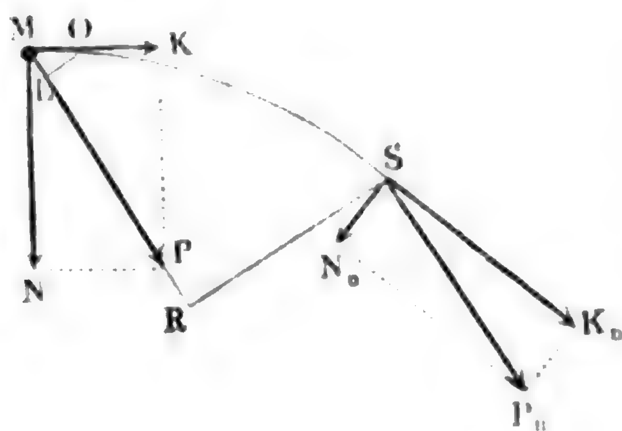
$$MO = s = \frac{1680}{152{,}94} = 10{,}98 \text{ Fuß,}$$

und endlich die mechanische Arbeit der Kraft P_1:

$$P_1\, s\, cos.\, \alpha = 602{,}94 \,.\, 10{,}98 = 6620 \text{ Fußpfund.}$$

§. 85 **Krummlinige Bewegung.** Setzen wir unendliche kleine Wege (σ, σ_1 u. s. w.) voraus, so können wir die zuletzt gefundene Formel auch auf krumme Bahnen anwenden. Es sei MOS, Fig. 101, die Bahn des materiellen Punktes, und $\overline{MP} = P$, die Mittelkraft aller auf ihn wirkenden Kräfte. Zerlegen wir diese Kraft in zwei andere, wovon die eine $\overline{MK} = K$ tangential und die andere $\overline{MN} = N$ normal zur Curve gerichtet ist, so nennen wir jene Tangentialkraft und diese Normalkraft.

Fig. 101.



Während der materielle Punkt

das Element $MO = \sigma$ seines krummen Weges MOS durchläuft und seine Geschwindigkeit c in v_1 übergeht, nimmt die Masse M desselben die Arbeit $\left(\frac{v_1^2 - c^2}{2}\right) M$ in Anspruch, gleichzeitig verrichtet aber die Tangentialkraft K die Arbeit $K\sigma$, und die Normalkraft die Arbeit $N \cdot 0 = 0$: es ist folglich:

$$K\sigma = \left(\frac{v_1^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Wenn während der Zurücklegung des Weges $MOS = s = n\sigma$ die Tangentialgeschwindigkeit des Körpers aus c in v übergeht, und hierbei die Tangentialkraft nach und nach die Werthe K_1, $K_2 + \cdots + K_n$ annimmt, so ist daher auch

$$(K_1 + K_2 + \cdots + K_n)\,\sigma = \left(\frac{K_1 + K_2 + \cdots + K_n}{n}\right) s = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M,$$

also die mechanische Arbeit:

$$A = Ks = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M, \text{ wobei } K = \frac{K_1 + K_2 + \cdots + K_n}{n}$$

den Mittelwerth der veränderlichen Tangentialkraft bezeichnet (vergl. §. 75).

Setzt man die Projection des Wegelementes $\overline{MO} = \sigma$ in der Kraftrichtung $\overline{ML} = \xi$, so hat man auch $P\xi = K\sigma$; wenn daher bei Durchlaufung des Weges $MOS = s = n\sigma$ die Mittelkraft P allmälig die Werthe $P_1, P_2 \cdots P_n$ annimmt und die Projectionen der Wegelemente nach und nach $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$ sind, so hat man auch:

$$P_1\xi_1 + P_2\xi_2 + \cdots + P_n\xi_n = (K_1 + K_2 + \cdots + K_n)\,\sigma,$$

und daher:

$$A = P_1\xi_1 + P_2\xi_2 + \cdots + P_n\xi_n = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Wenn hierbei die Richtung der Kraft P constant bleibt, so bilden die sämmtlichen Projectionen $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$ der Wegtheile $\sigma, \sigma \ldots$ oder des ganzen Weges $s = n\sigma$ eine gerade Linie

$$MR = x = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Setzt man dann noch $x = m\xi$, so kann man auch

$$A = (P_1 + P_2 + \cdots + P_m)\,\xi = (P_1 + P_2 + \cdots + P_m)\frac{x}{m} = Px$$

setzen, wo dann P das Mittel $\frac{P_1 + P_2 + \cdots P_m}{m}$ aus den gleichen Theilen $\xi = \frac{x}{m}$ die entsprechende Kraftrichtung bezeichnet.

Es ist daher dann auch

$$Px = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = (h - k)\, G,$$

wenn k die der Anfangsgeschwindigkeit c, sowie h die der Endgeschwindigkeit v entsprechende Geschwindigkeitshöhe, und G das Gewicht Mg des bewegten Körpers bezeichnet.

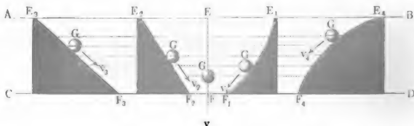
Also auch bei einer krummlinigen Bewegung ist die ganze Arbeit der bewegenden Kraft gleich dem Producte aus dem Gewichte des bewegten Körpers und aus der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Anmerkung. Die gewonnene Formel, welche aus der Verbindung des Princips der lebendigen Kräfte mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgeht, ist vorzüglich in den Fällen anwendbar, wenn Körper durch feste Unterlagen oder durch Aufhängen gezwungen werden, eine bestimmte Bahn zu durchlaufen. Treibt einen solchen Körper die Schwerkraft allein, so ist die Arbeit, welche das Gewicht G desselben beim Herabsinken von einer Höhe, deren Verticalprojection s ist, verrichtet, $= Gs$, und daher:

$$Gs = (h - k)\,G, \text{ d. i. } s = h - k.$$

Welches also auch der Weg sei, in welchem ein Körper von einer horizontalen Ebene AB, Fig. 102, bis zu einer zweiten Horizontalebene CD herab-

Fig. 102.



sinkt, immer ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen gleich der senkrechten Fallhöhe. Körper, welche die Bahnen EF, E_1F_1, E_2F_2 u. s. w. mit gleicher Geschwindigkeit (c) zu durchlaufen anfangen, erlangen auch am Ende dieser Bahnen, obwohl zu verschiedenen Zeiten, gleiche Endgeschwindigkeiten. Ist z. B. die Anfangsgeschwindigkeit $c = 10$ Fuß und die senkrechte Fallhöhe $s = 20$ Fuß, also $h = s + k = 20 + 0{,}016 \cdot 10^2 = 21{,}6$ Fuß, so folgt die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh} = 7{,}906\,\sqrt{21{,}6} = 36{,}74 \text{ Fuß},$$

in welcher geraden oder krummen Linie auch das Herabfallen vor sich gehe.

Dritter Abschnitt.

Statik fester Körper.

Erstes Capitel.

Allgemeine Lehren der Statik fester Körper.

Verlegung des Angriffspunktes. Obgleich jeder feste Körper §. 86
durch die auf ihn wirkenden Kräfte in seiner Form verändert, nämlich zusammengedrückt, ausgedehnt, gebogen wird u. s. w., so ist es doch gestattet, denselben in vielen Fällen als vollkommen starr anzusehen, weil diese Formveränderung oder Verrückung der Theile nicht allein oft sehr klein ist, sondern auch innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes vor sich geht. Wir werden deshalb zunächst und wenn es auch nicht besonders erwähnt wird, der Einfachheit wegen, jeden festen Körper als ein System fest unter einander verbundener Punkte ansehen.

Eine Kraft P, Fig. 103, welche auf einen Punkt A eines festen Körpers M wirkt, pflanzt sich in ihrer eigenen Richtung $X\overline{X}$ unverändert durch den ganzen Körper hindurch, und eine ihr gleiche Gegenkraft P_1 setzt sich mit ihr nur dann ins Gleichgewicht, wenn der Angriffspunkt A_1 derselben in der Richtung $X\overline{X}$ der ersten Kraft liegt.

Fig. 103.

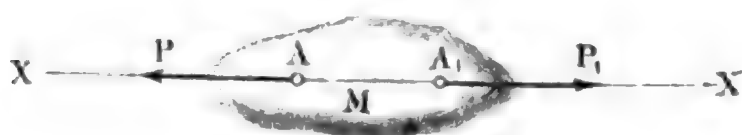
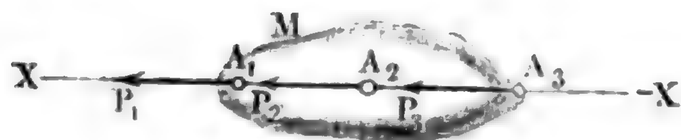


Fig. 104.

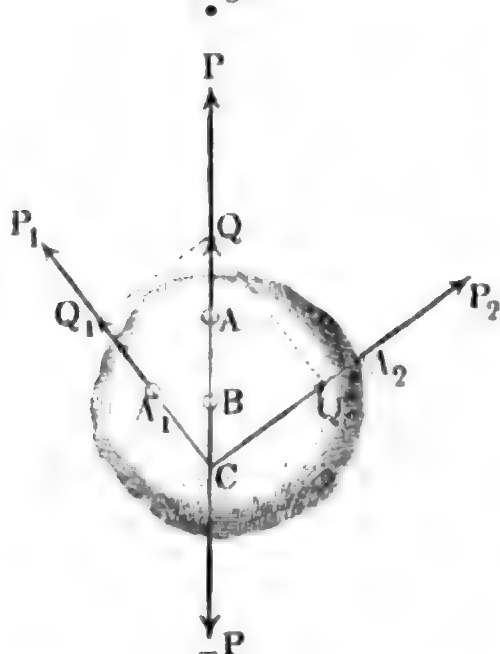


Die Entfernung dieser Angriffspunkte A und A_1 ist ohne Einfluß auf diesen Gleichgewichtszustand; die beiden Gegenkräfte halten sich bei jeder Ent-

fernung das Gleichgewicht, wenn nur beide Punkte fest unter einander verbunden sind. Hiernach läßt sich also behaupten: die Wirkung einer Kraft P (Fig. 104) bleibt dieselbe, in welchem Punkte A_1, A_2, A_3 u. s. w. ihrer Richtung sie auch angreift oder unmittelbar auf den Körper M wirkt.

§. 87 Ergreifen zwei, in derselben Ebene wirkende Kräfte P_1 und P_2, Fig. 105, einen Körper in verschiedenen Punkten A_1 und A_2, so ist deren Wirkung auf den Körper dieselbe, als wenn sie den Punkt C zum gemeinschaftlichen Angriffspunkte hätten, in welchem sich die Richtungen beider schneiden; denn es läßt sich nach dem oben ausgesprochenen Satze jeder dieser Angriffspunkte nach C verlegen, ohne eine Aenderung in den Wirkungen dadurch hervorzubringen. Macht man deshalb

Fig. 105.



$$\overline{CQ_1} = \overline{A_1P_1} = P_1 \text{ und}$$
$$\overline{CQ_2} = \overline{A_2P_2} = P_2,$$

und vollendet jetzt das Parallelogramm CQ_1QQ_2, so giebt uns dessen Diagonale die Mittelkraft $\overline{CQ} = P$ von $\overline{CQ_1}$ und $\overline{CQ_2}$ und also auch von den Kräften P_1 und P_2, deren Angriffspunkt übrigens auch jeder andere Punkt A in der Richtung dieser Diagonale sein kann.

Setzt man der so gefundenen Mittelkraft $\overline{AP} = P$ eine gleich große, in irgend einem Punkte B der Diagonalrichtung CQ angreifende Gegenkraft $\overline{BP} = -P$ entgegen, so wird dadurch den gegebenen Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht gehalten, und es sind folglich P_1, P_2 und $-P$ drei Kräfte im Gleichgewichte.

§. 88 **Statische Momente.** Fällt man von irgend einem Punkte O, Fig. 106, in der Kräfteebene Perpendikel OL_1, OL_2 und OL gegen die Richtungen der Seitenkräfte P_1 und P_2 und ihrer Mittelkraft P, so hat man dem §. 82 zufolge:

$$P \,.\, \overline{OL} = P_1 \,.\, \overline{OL_1} + P_2 \,.\, \overline{OL_2},$$

und es läßt sich demnach aus den Perpendikeln oder Abständen OL_1 und OL_2 der Seitenkräfte der Abstand OL der Mittelkraft finden, indem man setzt:

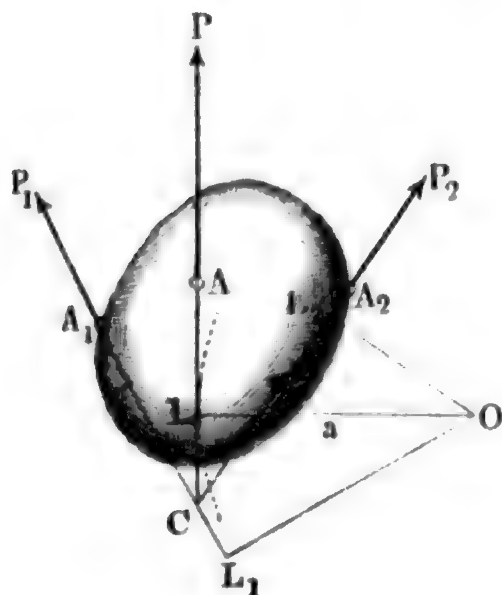
$$OL = \frac{P_1 \,.\, \overline{OL_1} + P_2 \,.\, \overline{OL_2}}{P}.$$

Während man die Richtung und Größe der Mittelkraft durch Anwendung des Kräfteparallelogramms findet, ergiebt sich der Ort L ihres Angriffspunktes mit Hülfe der letzten Formel durch Bestimmung des Abstandes OL.

Schließen die gehörig verlängerten Kraftrichtungen den Winkel $P_1 C P_2 = \alpha$ zwischen sich ein, so hat man die Größe der Mittelkraft:

$$1)\quad P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos. \alpha}.$$

Fig. 106.



Bildet ferner die Mittelkraft den Winkel $PCP_1 = \alpha_1$ mit der Richtung der Seitenkraft P_1, so ist:

$$2)\quad \sin. \alpha_1 = \frac{P_2 \sin. \alpha}{P}.$$

Stehen endlich die Richtungen CP_1 und CP_2 der gegebenen Kräfte um $OL_1 = a_1$ und $OL_2 = a_2$ von einem willkürlichen Punkte O ab, so ist der Abstand $OL = a$ der Richtung CP der Mittelkraft von eben diesem Punkte:

$$3)\quad a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{P}.$$

Mit Hülfe dieses letzten Abstandes a ergiebt sich aber der Ort der Mittelkraft ohne Rücksichtnahme auf den Hülfspunkt C, wenn man mit a aus O einen Kreis construirt und an diesen eine Tangente LP legt, deren Richtung durch den Winkel α_1 bestimmt ist.

Beispiel. Es wirken auf einen Körper die Kräfte $P_1 = 20$ Pfund und $P_2 = 34$ Pfund, deren Richtungen unter einem Winkel $P_1 C P_2 = \alpha = 70$ Grad zusammenstoßen und von einem gewissen Punkte O um $OL_1 = a_1 = 4$ Fuß und $OL_2 = a_2 = 1$ Fuß abstehen, welches ist die Größe, die Richtung und der Ort der Mittelkraft? Die Größe der Mittelkraft ist:

$$P = \sqrt{20^2 + 34^2 + 2 \,.\, 20 \,.\, 34 \cos. 70^0} = \sqrt{400 + 1156 + 1360 \,.\, 0{,}34202}$$
$$= \sqrt{2021{,}15} = 44{,}96 \text{ Pfund};$$

für ihre Richtung ist ferner:

$$\sin. \alpha_1 = \frac{34 \,.\, \sin. 70^0}{44{,}96},\quad Log. \sin. \alpha_1 = 0{,}85163 - 1,$$

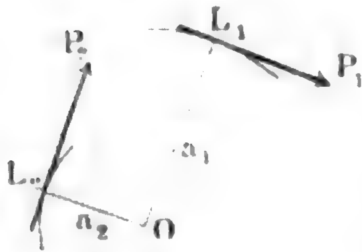
daher $\alpha_1 = 45^0\, 17'$ der Winkel, um welchen diese Mittelkraft von der Richtung der Kraft P_1 abweicht. Der Ort oder die Angriffslinie dieser Mittelkraft ist endlich bestimmt durch ihren Abstand OL von O, welcher ist:

$$a = \frac{20 \,.\, 4 + 34 \,.\, 1}{44{,}96} = \frac{114}{44{,}96} = 2{,}536 \text{ Fuß}.$$

Man nennt die Normalabstände $OL_1 = a_1$, $OL_2 = a_2$ u. s. w. der Kraftrichtungen von einem willkürlichen Punkte O, Fig. 107 (a. f. S.), die **Hebelarme der Kräfte** (franz. bras du levier; engl. arms of lever), weil sie §. 89

bei der in der Folge abzuhandelnden Theorie des Hebels ein wesentliches Element ausmachen. Das Product Pa aus Kraft und Hebelarm hat den Namen **statisches** oder **Kraftmoment** (franz. moment des forces; engl. momentum of the forces) erhalten. Nun ist aber $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2$; folglich **das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der beiden Seitenkräfte.**

Fig. 107.



Bei der Addition der Momente ist noch auf Plus und Minus Rücksicht zu nehmen. Wirken die Kräfte P_1 und P_2, wie in Fig. 107, nach gleicher Richtung um den Punkt O herum, stimmen z. B. die Kraftrichtungen mit den Bewegungsrichtungen der Zeiger einer Uhr überein, so nennt man diese Kräfte, und deshalb auch ihre Momente, gleichbezeichnete; wird also die eine positiv angenommen, so muß die andere ebenfalls positiv gesetzt werden. Wirken hingegen, wie in Fig. 108, die Kräfte in entgegengesetzten Richtungen um den Punkt O herum, so nennt man dieselben, sowie ihre statischen Momente, entgegengesetzte, und es ist nun die eine negativ zu setzen, wenn man die andere positiv annimmt. Bei der in Fig. 109 repräsentirten Zusammensetzung hat man z. B. $Pa = P_1 a_1 - P_2 a_2$, weil P_2 der Kraft P_1 entgegengesetzt, also ihr Moment $P_2 a_2$ negativ ist, während bei der Zusammensetzung in Fig. 106, $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2$ ausfällt.

Fig. 108.

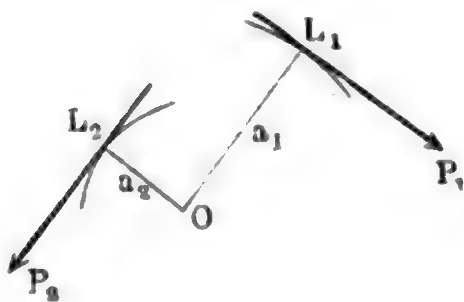
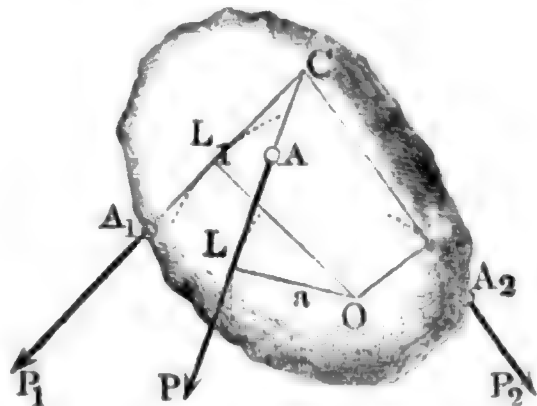


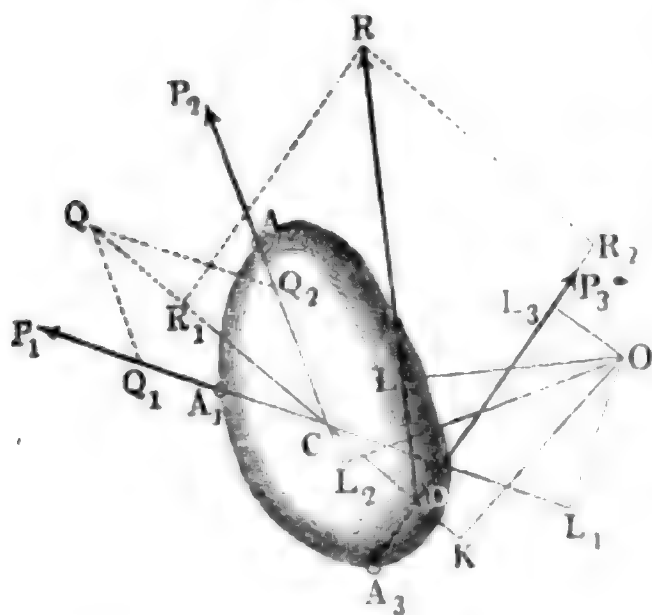
Fig. 109.



§. 90 **Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene.** Ergreifen drei Kräfte P_1, P_2, P_3, Fig. 110, einen Körper in verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3 einer Ebene, so vereinige man nach der letzten Regel erst zwei (P_1, P_2) dieser Kräfte zu einer Mittelkraft $\overline{CQ} = Q$, und diese nachher, nach derselben Regel, mit der dritten Kraft (P_3), indem man aus $DR_1 = CQ$ und $DR_2 = A_3 P_3$ das Parallelogramm $DR_1 RR_2$ construirt. Die Diagonale DR ist nun die gesuchte Mittelkraft P zu P_1, P_2 und P_3. Es ist hiernach auch leicht einzusehen, wie beim Hinzukommen einer vierten Kraft P_4 die Mittelkraft gefunden werden kann, u. s. w.

Bei dieser Zusammensetzung der Kräfte wird die Größe und Richtung der Mittelkraft genau so gefunden, als wenn die Kräfte in einem einzigen Punkte angriffen (s. §. 80), es sind daher die in §. 80 angegebenen Rechnungsregeln anzuwenden, um diese beiden ersten Elemente der Mittelkraft zu bestimmen; um aber das dritte Element, nämlich den Ort der Mittelkraft oder ihre Angriffslinie zu finden, hat man von der Gleichung zwischen den statischen Momenten Gebrauch zu machen. Sind auch hier $OL_1 = a_1$, $OL_2 = a_2$, $OL_3 = a_3$ und $OL = a$ die Hebelarme der drei Seitenkräfte P_1, P_2, P_3 und ihrer Mittelkraft P in Hinsicht auf einen willkürlichen Punkt O und ist Q die Mittelkraft aus P_1 und P_2 sowie OK der Hebelarm derselben, so hat man:

Fig. 110.



$$Pa = Q.\overline{OK} + P_3 a_3 \text{ und } Q.\overline{OK} = P_1 a_1 + P_2 a_2.$$

Verbinden wir aber diese beiden Gleichungen mit einander, so erhalten wir:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3,$$

und ebenso stellt sich für mehrere Kräfte heraus:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \cdots,$$

d. h. es ist allemal das (statische) Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe aus den (statischen) Momenten der Seitenkräfte.

Sind nun P_1, P_2, P_3 u. s. w., Fig. 111 (a. f. S.), die einzelnen Kräfte §. 91
eines Kräftesystemes, sind ferner α_1, α_2, α_3 u. s. w. die Winkel $P_1 D_1 X$, $P_2 D_2 X$, $P_3 D_3 X$ u. s. w., unter welchen eine beliebig angenommene Axe $X\overline{X}$ von den Kraftrichtungen geschnitten wird, und bezeichnen endlich a_1, a_2, a_3 u. s. w. die Hebelarme OL_1, OL_2, OL_3 u. s. w. dieser Kräfte hinsichtlich des Durchschnittspunktes O zwischen beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, so hat man nach den §§. 80 und 90:

1) die Seitenkraft parallel zur Axe $X\overline{X}$:

$$Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + \cdots,$$

2) die Seitenkraft parallel zur Axe $Y\overline{Y}$:

$$R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + \cdots,$$

3) die **Mittelkraft** des ganzen Systemes:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

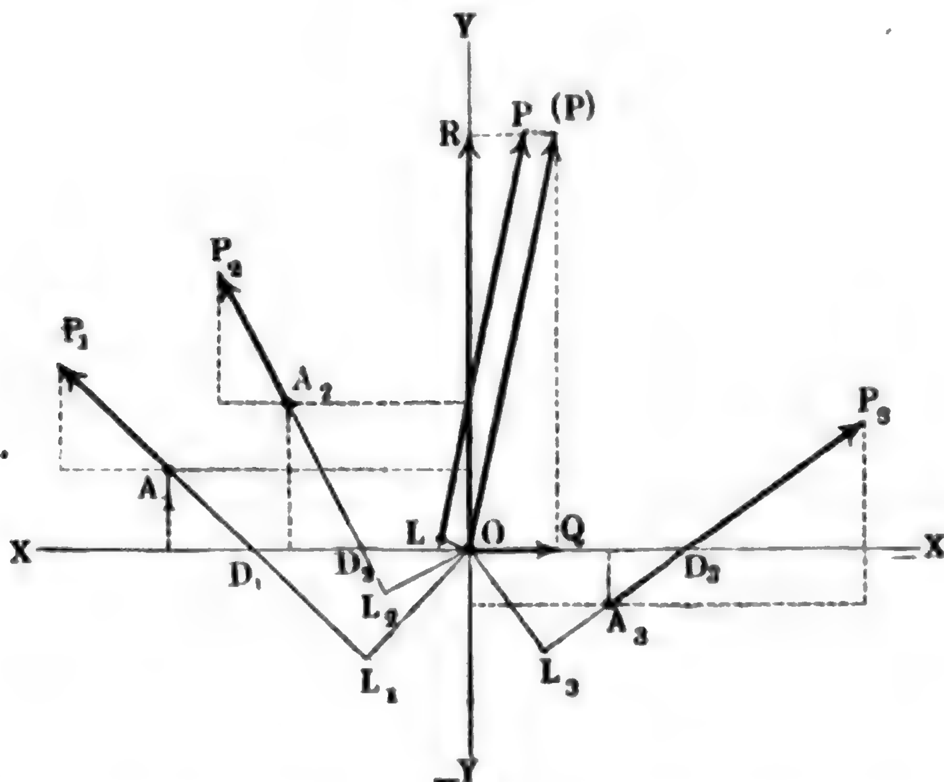
4) den **Winkel** α, unter welchem die Mittelkraft die Axe schneidet, durch

$$tang.\ \alpha = \frac{R}{Q},$$

5) den **Hebelarm der Mittelkraft**, oder den Halbmesser des Kreises, welchen die Richtung der Mittelkraft tangirt:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{P}.$$

Fig. 111.



Bezeichnen b, b_1, b_2 u. s. w. die Abschnitte OD, OD_1, OD_2 u. s. w. von der Axe $X\overline{X}$, so ist:

$$a = b \sin.\alpha,\ a_1 = b_1 \sin.\alpha_1,\ a_2 = b_2 \sin.\alpha_2 \text{ u. s. w.},$$

und daher auch:

$$b = \frac{P_1 b_1 \sin.\alpha_1 + P_2 b_2 \sin.\alpha_2 + \cdots}{P \sin.\alpha} = \frac{R_1 b_1 + R_2 b_2 + \cdots}{R}.$$

Ersetzt man die Mittelkraft (P) durch eine ihr gleiche Gegenkraft $(-P)$, so halten sich die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots (-P)$ das Gleichgewicht.

Bezeichnen noch $x_1, x_2 \ldots$ sowie $y_1, y_2 \ldots$ die Coordinaten der Angriffspunkte $A_1, A_2 \ldots$ der gegebenen Kräfte $P_1, P_2 \ldots$, so sind die Momente der Componenten der letzteren: $R_1 x_1, R_2 x_2 \ldots$ sowie $Q_1 y_1, Q_2 y_2 \ldots$, und es ist das Moment der Mittelkraft:

$$Pa = (R_1 x_1 + R_2 x_2 + \cdots) - (Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \cdots),$$

daher der **Hebelarm** derselben:

$$a = \frac{(R_1 x_1 + R_2 x_2 + \cdots) - (Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \cdots)}{\sqrt{(R_1 + R_2 + \cdots)^2 + (Q_1 + Q_2 + \cdots)^2}}.$$

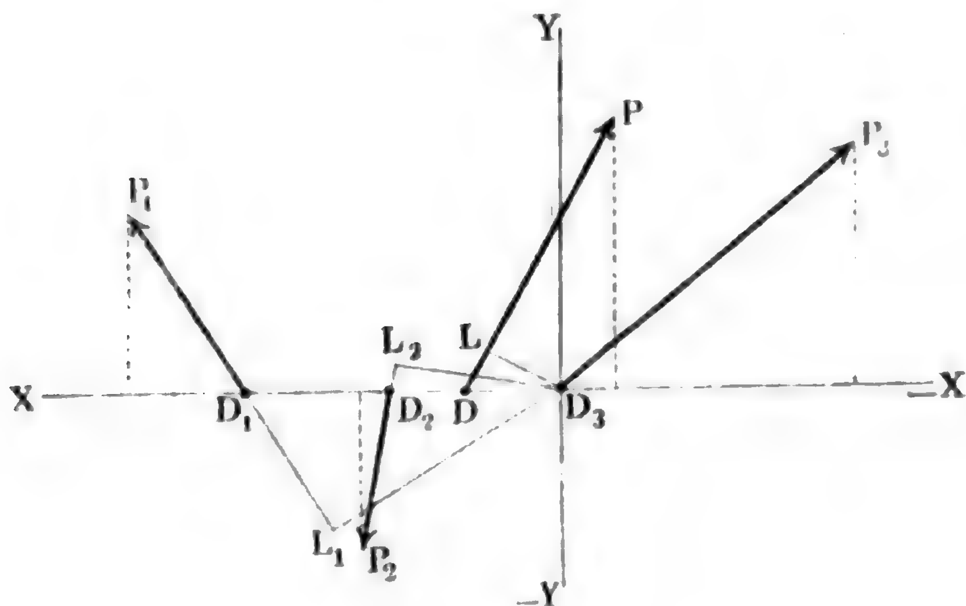
Beispiel. Die Kräfte $P_1 = 40$ Pfund, $P_2 = 30$ Pfund, $P_3 = 70$ Pfund, Fig. 112 durchschneiden die Axe $X\overline{X}$ unter den Winkeln $\alpha_1 = 60^0$, $\alpha_2 = -80^0$, $\alpha_3 = 142^0$, und es sind die Entfernungen zwischen den Durchschnittspunkten D_1, D_2, D_3 der Kraftrichtungen mit der Axe, $D_1 D_2 = 4$ Fuß und $D_2 D_3 = 5$ Fuß. Man sucht die sämmtlichen Bestimmungsstücke der Mittelkraft. Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $X\overline{X}$ ist:

$$Q = 40\, cos.\, 60^0 + 30\, cos.\, (-80^0) + 70\, cos.\, 142^0$$
$$= 40\, cos.\, 60^0 + 30\, cos.\, 80^0 - 70\, cos.\, 38^0$$
$$= 20 + 5{,}209 - 55{,}161 = -29{,}952 \text{ Pfund}.$$

Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $Y\overline{Y}$:

$$R = 40\, sin.\, 60^0 + 30\, sin.\, (-80^0) + 70\, sin.\, 142^0$$
$$= 40\, sin.\, 60^0 - 30\, sin.\, 80^0 + 70\, sin.\, 38^0$$
$$= 34{,}641 - 29{,}544 + 43{,}096 = 48{,}193.$$

Fig. 112.



Nun folgt die gesuchte Mittelkraft:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{29{,}952^2 + 48{,}193^2} = \sqrt{3219{,}68} = 56{,}742 \text{ Pfund}.$$

Der Winkel α, unter welchem sie die Axe schneidet, ist ferner bestimmt durch:

$$tang.\, \alpha = \frac{R}{Q} = \frac{48{,}193}{-29{,}952} = -1{,}6090, \text{ es ergiebt sich daher:}$$

$$\alpha = 180^0 - 58^0 8' = 121^0 52'.$$

Verlegt man den Axpunkt O nach D_3, so hat man den Hebelarm der Mittelkraft:

$$\overline{O L} = a = \frac{P_1\, sin.\, \alpha_1 \,.\, b_1 + P_2\, sin.\, \alpha_2 \,.\, b_2 + \ldots}{P} = \frac{R_1 b_1 + R_2 b_2 + \cdots}{P}$$

$$= \frac{34{,}641 \,.\, (4+5) - 29{,}544 \,.\, 5 + 0}{56{,}742} = \frac{164{,}049}{56{,}742} = 2{,}891 \text{ Fuß},$$

und dagegen den Abschnitt:

$$OD = b = \frac{164,049}{48,193} = 3,404 \text{ Fuß.}$$

§. 92 **Parallelkräfte.** Sind die Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w., Fig. 113, eines festen Systemes unter sich parallel, so fallen die Hebelarme OL_1, OL_2, OL_3 u. s. w. über einander; zieht man nun durch den Anfangspunkt O eine willkürliche Linie $X\overline{X}$, so schneiden hiervon die Kraftrichtungen die Stücke OD_1, OD_2, OD_3 u. s. w. ab, welche den Hebelarmen OL_1, OL_2, OL_3 u. s. w. proportional sind, weil $\triangle\, OD_1L_1 \backsim \triangle\, OD_2L_2 \backsim \triangle\, OD_3L_3$ u. s. w. ist. Bezeichnet man den Winkel $D_1OL_1 = D_2OL_2$ u. s. w. durch α, die Hebelarme OL_1, OL_2 u. s. w. durch a_1, a_2 u. s. w., die Abschnitte OD_1, OD_2 u. s. w. durch b_1, b_2 u. s. w., so hat man:

$$a_1 = b_1 \cos.\alpha,\ a_2 = b_2 \cos.\alpha \text{ u. s. w.}$$

Setzt man endlich diese Werthe in die Formel:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots,$$

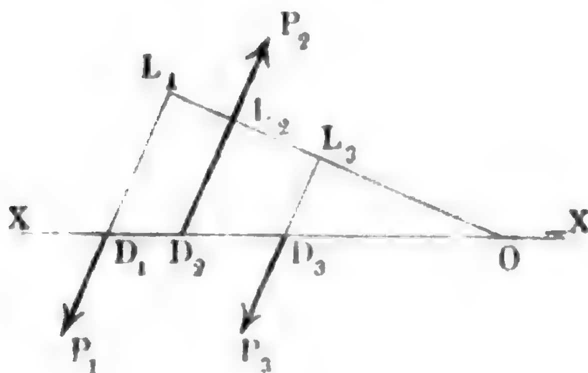
so erhält man:

$$Pb \cos.\alpha = P_1 b_1 \cos.\alpha + P_2 b_2 \cos.\alpha + \cdots,$$

oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $\cos.\alpha$ wegläßt:

$$Pb = P_1 b_1 + P_2 b_2 + \cdots$$

Fig. 113.



Es ist also bei jedem Systeme paralleler Kräfte gestattet, die Hebelarme durch die von irgend einer Linie $X\overline{X}$ abgeschnittenen schiefen Entfernungen, wie OD_1, OD_2 u. s. w., zu ersetzen. Da die Größe und Richtung der Mittelkraft eines Kräftesystemes mit verschiedenen Angriffspunkten dieselbe ist, wie die eines Systemes von Kräften, welche in einem Punkte angreifen, so hat die Mittelkraft des Systemes paralleler Kräfte mit den einzelnen Kräften gleiche Richtung und ist gleich der algebraischen Summe derselben; es ist also:

$$1)\ P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots \text{ und}$$

$$2)\ a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}, \text{ oder auch:}$$

$$b = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Beispiel. Es seien die Kräfte $P_1 = 12$ Pfund, $P_2 = -32$ Pfund, $P_3 = 25$ Pfund, und ihre Richtungen mögen eine gerade Linie in den Punkten D_1, D_2 und D_3, Fig. 113 (a. v. S.), schneiden, deren Abstände von einander folgende sind: $D_1 D_2 = 21$ Zoll, $D_2 D_3 = 30$ Zoll. Man soll die Mittelkraft angeben. Die Größe dieser Kraft ist:

$$P = 12 - 32 + 25 = 5 \text{ Pfund},$$

und die Entfernung $D_1 D$ ihres Angriffspunktes D in der Axe $X\overline{X}$, vom Punkte D_1 aus gemessen:

$$b = \frac{12 . 0 - 32 . 21 + 25 . (21 + 30)}{5} = \frac{0 - 672 + 1275}{5} = 120{,}6 \text{ Zoll}.$$

Kräftepaare. Zwei gleich große, zwar parallel, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P_1 und P_1, Fig. 114, haben die Mittelkraft: §. 93

$$P = P_1 + (-P_1) = P_1 - P_1 = \text{Null},$$

mit dem Hebelarme

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{0} = \infty \text{ (unendlich groß)}.$$

Fig. 114.

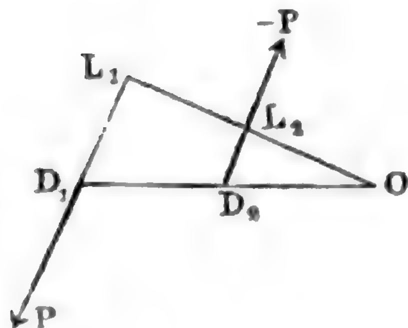
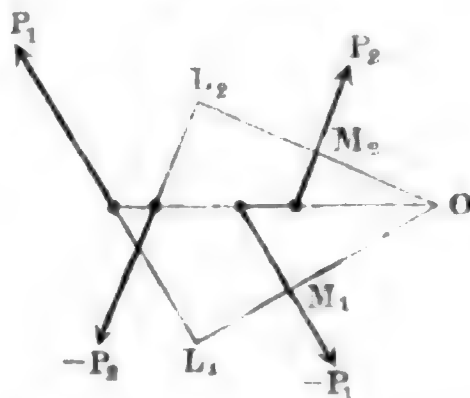


Fig. 115.



Zur Herstellung des Gleichgewichtes mit einem solchen Kräftepaare ist diesemnach eine einzige endliche und in endlicher Entfernung wirkende Kraft P nicht hinreichend, wohl aber können zwei solcher Kräftepaare einander das Gleichgewicht halten. Sind P_1 und $-P_1$ sowie $-P_2$ und P_2, Fig. 115, zwei solche Paare, und $OL_1 = a_1$, $OM_1 = OL_1 - L_1 M_1 = a_1 - b_1$, ferner $OL_2 = a_2$ und $OM_2 = OL_2 - L_2 M_2 = a_2 - b_2$ die Hebelarme derselben, von einem gewissen Punkte O aus genommen, so hat man für das Gleichgewicht:

$$P_1 a_1 - P_1 (a_1 - b_1) - P_2 a_2 + P_2 (a_2 - b_2) = 0, \text{ d. i.:}$$
$$P_1 b_1 = P_2 b_2.$$

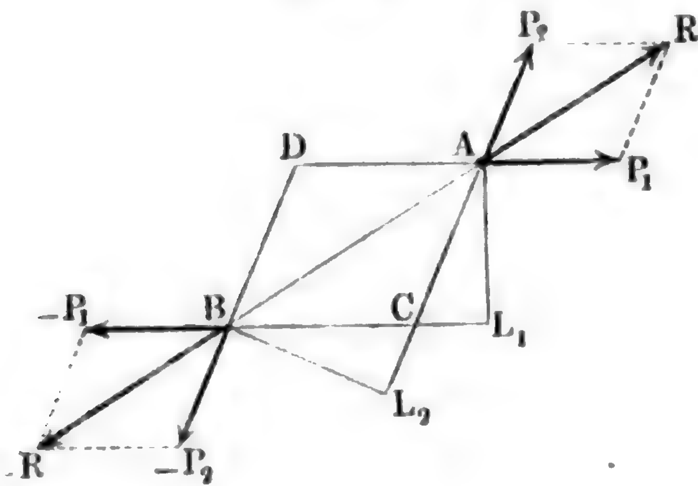
Zwei solche Kräftepaare sind also im Gleichgewichte, wenn das Product aus einer Kraft und ihrem Abstande von der Gegenkraft bei einem Paare so groß ist wie bei dem anderen.

Ein Paar von gleichen Gegenkräften nennt man schlechtweg ein Kräftepaar (franz. und engl. couple), und das Product aus einer Kraft desselben und dem Normalabstande von der anderen Kraft heißt das Moment des

Kräftepaares. Nach dem Vorigen sind zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräftepaare im Gleichgewichte, wenn sie gleiche Momente besitzen.

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auch direct auf folgende Weise darthun. Verlegen wir die Angriffspunkte der Kräfte P_1, P_2 und $-P_1$, $-P_2$ der Kräftepaare $(P_1, -P_1)$ und $(P_2, -P_2)$, Fig. 116, nach den Durchschnitten A und B ihrer Angriffslinien, und vereinigen wir sowohl P_1 mit P_2, als auch $-P_1$ mit $-P_2$ durch ein Kräfteparallelogramm zu den Mittelkräften R und $-R$. Fallen nun die Richtungen dieser Mittelkräfte in die Fortsetzungen der Linie AB, so sind diese Kräfte und folglich auch die ihnen entsprechenden Kräftepaare $(P_1, -P_1)$, $(P_2, -P_2)$, mit einander im Gleichgewichte. Damit dies eintrete, muß das durch AB und durch die Richtungen der Kräfte $-P_1$ und P_2 gebildete Dreieck ABC ähnlich sein den Dreiecken RAP_1 und $B\overline{RP_1}$, und daher der Proportion:

Fig. 116.



$$\frac{CB}{CA} = \frac{P_1}{P_2} \text{ oder der Gleichung: } P_1 . \overline{CA} = P_2 . \overline{CB}$$

Genüge geschehen.

Nun sind aber die Perpendikel $AL_1 = b_1$ und $BL_2 = b_2$ zwischen den Richtungen der Kräftepaare den Hypotenusen CA und CB der einander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke ACL_1 und BCL_2 proportional, folglich ist auch

$$P_1 b_1 = P_2 b_2$$

zu setzen. Es sind also Momente der beiden im Gleichgewichte befindlichen Kräftepaare einander gleich.

Setzen wir in der Formel (§. 91) für den Hebelarm a der Mittelkraft:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{P}$$

$P = 0$, während die Summe der statischen Momente einen endlichen Werth hat, so bekommen wir ebenfalls $a = \infty$, ein Beweis, daß in diesem Falle gleichfalls keine Mittelkraft, sondern nur ein Kräftepaar möglich ist.

Damit sich die Kräfte eines Kräftesystems das Gleichgewicht halten, ist also nicht bloß nöthig, daß die Mittelkraft $P = \sqrt{Q^2 + R^2}$, oder jeder der Componenten Q und R, sondern auch ihr Moment

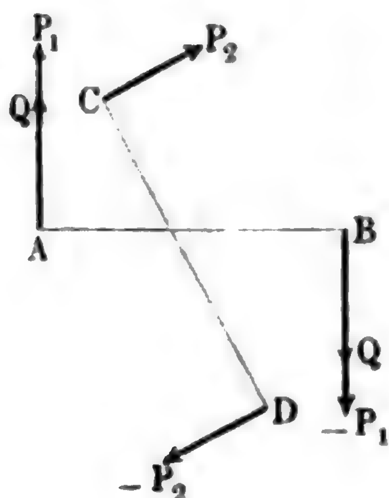
$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots = \text{Null sei.}$$

Beispiel. Besteht ein Kräftepaar aus den Kräften $P_1 = 25$ Pfund und $-P_1 = -25$ Pfund, ein anderes aber aus den Kräften $-P_2 = -18$ Pfund und $P_2 = 18$ Pfund, und ist der Normalabstand b_1 des ersteren Paares $= 3$ Fuß, so muß für den Gleichgewichtszustand, der Normalabstand oder Hebelarm des zweiten

$$b_2 = \frac{25\ .\ 3}{18} = 4^1/_6 \text{ Fuß betragen.}$$

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare. Die Zusammensetzung und Zerlegung der in einer und derselben Ebene wirkenden Kräftepaare wird durch eine einfache algebraische Addition bewirkt, und ist daher viel einfacher als die Zusammensetzung und Zerlegung einzelner Kräfte. Da sich zwei entgegengesetzte Kräftepaare einander das Gleichgewicht halten, wenn sie einerlei Momente haben, so sind auch die Wirkungen zweier gleichgerichteten Kräftepaare einander gleich, wenn das Moment des einen Kräftepaares gleich ist dem Moment des anderen. Sind daher zwei Kräftepaare $(P_1, -P_1)$ und $(P_2, -P_2)$, Fig. 117, mit einander zu vereinigen, so kann man das eine $(P_2, -P_2)$ durch ein anderes ersetzen, welches mit dem ersteren Paar $(P_1, -P_1)$ den Hebelarm $AB = b_1$ gemeinschaftlich hat, und dann die Kräfte desselben zu denen des anderen addiren, so daß man ein einziges Kräftepaar erhält. Ist b_2 der Hebelarm CD des anderen Kräftepaares und ist $(Q, -Q)$ das reducirte Kräftepaar, so hat man $Qb_1 = P_2 b_2$, folglich §. 94

Fig. 117.



$Q = \frac{P_2 b_2}{b_1}$, daher einen Componenten des zusammengesetzten Kräftepaares:

$$P_1 + Q = P_1 + \frac{P_2 b_2}{b_1}$$

und das gesuchte Moment des resultirenden Kräftepaares:

$$(P_1 + Q)\, b_1 = P_1 b_1 + P_2 b_2.$$

Auf gleiche Weise findet man das aus drei Kräftepaaren resultirende Kräftepaar. Sind $P_1 b_1$, $P_2 b_2$ und $P_3 b_3$ die Momente dieser Kräftepaare, so kann man:

$$P_2 b_2 = Q b_1 \text{ und } P_3 b_3 = R b_1, \text{ oder:}$$

$$Q = \frac{P_2 b_2}{b_1} \text{ und } R = \frac{P_3 b_3}{b_1}$$

setzen, so daß nun das Moment des resultirenden Kräftepaares

$$(P_1 + Q + R)\, b_1 = P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3$$

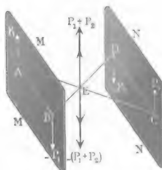
sich ergiebt.

Bei dieser Vereinigung von Kräftepaaren zu einem einzigen Kräftepaare ist natürlich auch auf die Vorzeichen Rücksicht zu nehmen, da die Momente

derjenigen Kräftepaare, welche nach der einen Umdrehungsrichtung wirken, das positive, und die Momente derjenigen Kräftepaare, welche den Körper nach der entgegengesetzten Richtung umzudrehen suchen, das negative Zeichen erhalten müssen. Ueber die Umdrehungsrichtung eines Kräftepaares kann man sich sogleich Rechenschaft ablegen, wenn man zwischen den Angriffslinien des Paares einen Drehungspunkt willkürlich annimmt. Haben dann die Kräfte des Paares die Richtung, in welcher sich die Zeiger einer Uhr umdrehen, so kann man das Kräftepaar, und also auch sein Moment, ein positives nennen, und wirken die Kräfte eines Paares der Umdrehungsbewegung der Uhrzeiger entgegengesetzt, d. i. von rechts nach links, so erhält dann dieses Kräftepaar, und also auch sein Moment, das negative Zeichen.

Die vorstehende Regel über die Zusammensetzung der Kräftepaare ist dann noch anwendbar, wenn die Kräftepaare in parallelen Ebenen wirken. Wenn die parallelen Kräftepaare (P_1, $-P_1$) und (P_2, $-P_2$), Fig. 118, in parallelen Ebenen MM und NN mit gleichen Momenten $P_1 b_1$ und $P_2 b_2$ einander entgegenwirken, so halten sie einander ebenfalls das Gleichgewicht; denn es resultiren aus denselben zwei Mittelkräfte $P_1 + P_2$ und $-(P_1 + P_2)$, welche einander vollständig aufheben, da sie in demselben Punkte E angreifen, der bestimmt ist durch die Gleichungen:

Fig. 118.



$$\overline{EA}.P_1 = \overline{EC}.P_2, \overline{EB}.P_1 = \overline{ED}.P_2, \text{ und}$$
$$P_1 b_1 = P_2 b_2, \text{ d. i. } \overline{AB}.P_1 = \overline{CD}.P_2, \text{ wonach}$$
$$EA:EB:AB = EC:ED:CD$$

folgt, und daher dieser Punkt mit dem Durchschnitte der Transversalen AC und BD zusammenfällt.

Da dem Kräftepaare (P_2, $-P_2$) jedes andere Kräftepaar das Gleichgewicht hält, welches mit demselben in einerlei Ebene wirkt, und das entgegengesetzte Moment hat, so folgt auch, daß jedes Kräftepaar durch ein anderes ersetzt werden kann, welches mit demselben einerlei Moment hat, und in einer Ebene wirkt, welche der Ebene des ersten parallel läuft.

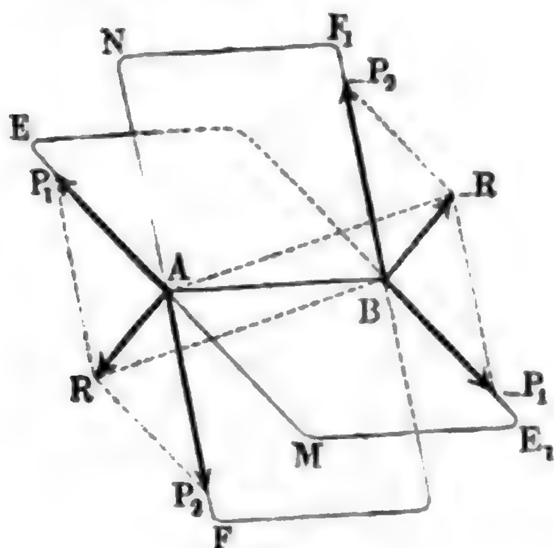
Wenn daher auf einen Körper mehrere Kräftepaare wirken, deren Wirkungsebenen parallel sind, so lassen sich dieselben durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment die algebraische Summe von den Momenten dieser Paare ist, und dessen übrigens willkürliche Wirkungsebene mit den Ebenen des gegebenen Systems parallel läuft.

Wirken zwei Kräftepaare $(P_1, -P_1)$ und $(P_2, -P_2)$ in zwei Ebenen EME_1 und FNF_1, Fig. 119, welche sich unter einem gewissen Winkel §. 95

$$EAF = E_1BF_1 = \alpha$$

in der geraden Linie AB schneiden, so lassen sich dieselben, nachdem man sie auf einen und denselben Hebelarm AB reducirt hat, durch das Kräfteparallelogramm zu einem Kräftepaare vereinigen. Durch dieses erhält man aus P_1 und P_2 die Mittelkraft R, sowie aus $-P_1$ und $-P_2$ die Mittelkraft $-R$. Beide Mittelkräfte sind gleich groß und einander entgegengesetzt gerichtet, und bilden folglich wieder ein Kräftepaar $(R, -R)$, dessen Ebene durch die Richtungen von R und $-R$ bestimmt ist.

Fig. 119.



Durch Rechnung bestimmt sich nach §. 77 die Mittelkraft R mittelst der Formeln:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\,P_1 P_2 \cos.\alpha} \text{ und}$$

$$\sin.\beta = \frac{P_2 \sin.\alpha}{R},$$

wo β den Winkel $EAR = E_1B\overline{R}$ bezeichnet, welchen die Richtung der Mittelkraft R mit der der Seitenkraft P_1 einschließt.

Ist nun der Hebelarm $AB = c$, und setzt man das Moment $P_1c = Pa$ und das Moment $P_2c = Qb$, oder $P_1 = \frac{Pa}{c}$ und $P_2 = \frac{Qb}{c}$, so erhält man:

$$R = \sqrt{\left(\frac{Pa}{c}\right)^2 + \left(\frac{Qb}{c}\right)^2 + 2\,\frac{Pa}{c}\cdot\frac{Qb}{c}\cos.\alpha},$$

also das Moment des aus den Kräftepaaren $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ resultirenden Kräftepaares:

$$Rc = \sqrt{(Pa)^2 + (Qb)^2 + 2\,Pa\,.\,Qb\,.\cos.\alpha},$$

und ebenso für den Winkel β, um welchen die Ebene desselben von der des ersten Kräftepaares $(P, -P)$ abweicht:

$$\sin.\beta = \frac{Qb}{Rc}\sin.\alpha.$$

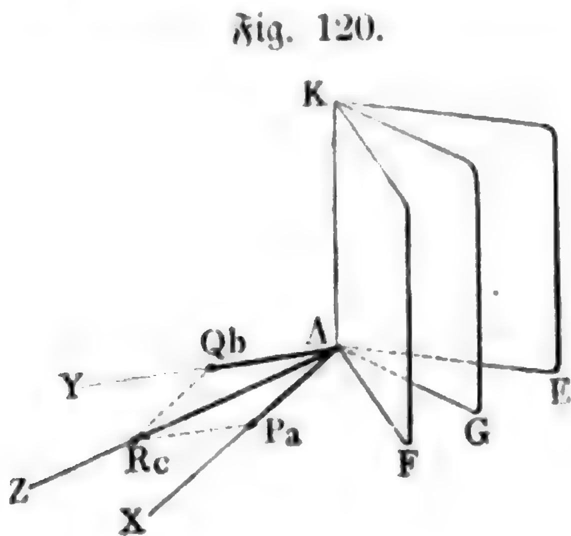
Es lassen sich also die in verschiedenen Ebenen wirkenden Kräftepaare genau so zusammensetzen und zerlegen, wie die in einem Punkte angreifenden einfachen Kräfte, wenn man statt der letzteren die Momente der ersteren, und

statt der Winkel, unter welchen sich die Richtungen der ersteren schneiden, die Winkel einsetzt, um welchen die Ebenen der letzteren von einander abweichen.

Diese Zurückführung der Theorie der Kräftepaare auf die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung einfacher Kräfte läßt sich noch durch Einführen von Umdrehungsaxen statt der Umdrehungsebenen der Paare besonders vereinfachen. Unter der **Umdrehungsaxe** oder **Axe eines Kräftepaares** versteht man jedes Perpendikel auf der Ebene desselben. Da sich jedes Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verrücken läßt, ohne seine Wirkung auf den Körpern zu verändern, so kann man auch die Axe des Paares durch jeden beliebigen Punkt legen.

In Folge der Rechtwinklichkeit zwischen der Ebene und der Axe eines Kräftepaares schließen die Axen AX, AY und AZ, Fig. 120, der Kräftepaare eines Körpers genau denselben Winkel zwischen sich ein, wie die Ebene AEK, AFK und AGK derselben. Ist das eine Kräftepaar die Resultante aus den beiden anderen, so bildet, dem Vorstehenden zufolge, dessen Moment Rc die Diagonale des aus den Momenten Pa und Qb construirten Parallelogramms, trägt man daher die Momente Pa und Qb auf die Axen AX und AY auf und vollendet man das dadurch angefangene Parallelogramm, so erhält man in der Diagonale desselben nicht allein die Axe AZ des resultirenden Kräftepaares, sondern auch dessen Moment Rc. Hiernach sind also die **Kräftepaare genau so zusammen zu setzen und zu zerlegen, wie die einzelnen in einem Punkte angreifenden Kräfte**, vorausgesetzt, daß man die Axen dieser Paare mit den Richtungen, und die Momente derselben mit den Größen der einfachen Kräfte vertauscht. Alle in §. 76, §. 77 u. s. w. abgehandelten Lehren über die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte finden daher auch in diesem Sinne ihre Anwendung bei der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare.

Fig. 120.



§. 96 **Mittelpunkt paralleler Kräfte.** Liegen die Parallelkräfte in verschiedenen Ebenen, so ist deren Vereinigung auf folgende Weise auszuführen. Verlängert man die Gerade $A_1 A_2$, Fig. 121, welche die Angriffspunkte zweier Parallelkräfte P_1 und P_2 verbindet, bis zur Ebene XY zwischen den rechtwinklig gegen einander stehenden Axen MX und MY, und nimmt man den Durchschnittspunkt K als den Anfangspunkt an, so erhält man für den Angriffspunkt A der Mittelkraft $P_1 + P_2$ dieser Kräfte:

$$(P_1 + P_2) . \overline{KA} = P_1 . \overline{KA_1} + P_2 . \overline{KA_2}.$$

Da nun B, B_1 und B_2 die Projectionen der Angriffspunkte A, A_1 und A_2 in der Ebene XY sind, so hat man:

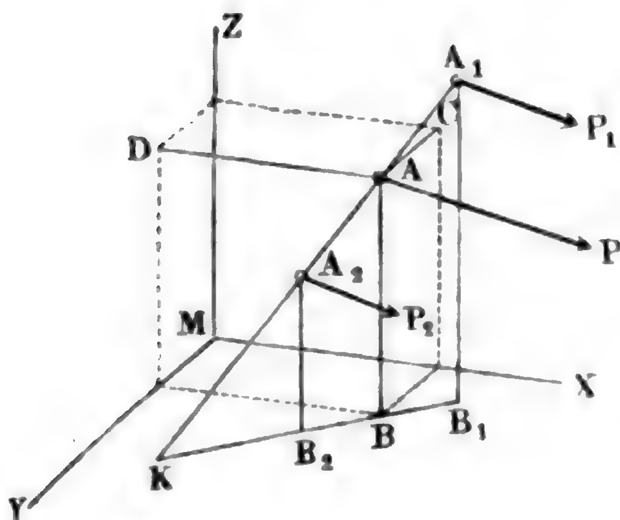
$$AB : A_1 B_1 : A_2 B_2 = KA : KA_1 : KA_2,$$

und daher auch:

$$(P_1 + P_2) . \overline{AB} = P_1 . \overline{A_1 B_1} + P_2 . \overline{A_2 B_2}.$$

Bezeichnen wir die Normalabstände $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ u. s. w. der Angriffspunkte von der Grundebene XY durch z_1, z_2, z_3 u. s. w., und den Normalabstand des Angriffspunktes A von eben dieser Ebene durch z, so haben wir hiernach für zwei Kräfte:

Fig. 121.



$$(P_1 + P_2) z = P_1 z_1 + P_2 z_2;$$

ferner für drei Kräfte, da $P_1 + P_2$ als eine Kraft mit dem Momente $P_1 z_1 + P_2 z_2$ angesehen werden kann:

$$(P_1 + P_2 + P_3) z = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 \text{ u. s. w.}$$

Es ist also allgemein:

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \cdots) z = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 \ldots,$$

folglich:

$$1) \quad z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Bezeichnen wir ebenso die Abstände AC und AD des Angriffspunktes A der Mittelkraft von den Ebenen XZ und YZ durch y und x, sowie die Abstände der Angriffspunkte A_1, $A_2 \ldots$ von eben diesen Ebenen durch y_1, $y_2 \ldots$ und x_1, $x_2 \ldots$, so erhalten wir:

$$2) \quad y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots} \text{ und}$$

$$3) \quad x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Die Abstände, x, y, z, von drei Grundebenen, wie z. B. von dem Fußboden und zwei Seitenwänden eines Zimmers, bestimmen aber den Punkt (A) vollständig, denn er ist der achte Eckpunkt des aus x, y und z zu construirenden Parallelepipedes; es giebt folglich nur einen einzigen Angriffspunkt der Mittelkraft eines solchen Kräftesystems.

Da die drei Formeln für x, y und z die Winkel, welche die Kräfte mit den Grundebenen einschließen, gar nicht enthalten, so ist der Angriffspunkt von diesen, und also auch von den Kraftrichtungen, gar nicht abhängig, es

läßt sich demnach auch das ganze System um diesen Punkt drehen, ohne daß er aufhört, Angriffspunkt zu sein, wenn nur bei dieser Drehung der Parallelismus unter den Kräften bleibt.

Man nennt bei einem Systeme paralleler Kräfte das Product aus einer Kraft und dem Abstande ihres Angriffspunktes von einer Ebene oder Linie das **Moment** dieser Kraft hinsichtlich dieser Ebene oder Linie, auch ist es gewöhnlich, den Angriffspunkt der Mittelkraft selbst den **Mittelpunkt** des ganzen Systems (franz. centre des forces parallèles; engl. centre of parallel forces) zu nennen. Man erhält also den Abstand des **Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte von irgend einer Ebene oder Linie** (letzteres, wenn die Kräfte in einer Ebene liegen), **wenn man die Summe der (statischen) Momente durch die Summe der Kräfte dividirt.**

Beispiel. Sind die Kräfte	P_n	5	— 7	10	4 Pfund.
die Abstände oder Coordinaten der Angriffspunkte derselben	x_n	1	2	0	9 Fuß.
	y_n	2	4	5	3 „
	z_n	8	3	7	10 „
so hat man die Momente	$P_n x_n$	5	— 14	0	36 Fußpfd.
	$P_n y_n$	10	— 28	50	12 „
	$P_n z_n$	40	— 21	70	40 „

Nun ist aber die Kraftsumme $= 19 - 7 = 12$ Pfund; es folgen daher die Abstände des **Mittelpunktes** dieses Systems von den drei Grundebenen:

$$x = \frac{5 + 36 - 14}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ Fuß},$$

$$y = \frac{10 + 50 + 12 - 28}{12} = \frac{44}{12} = \frac{11}{3} = 3{,}66 \text{ Fuß, und}$$

$$z = \frac{40 + 70 + 40 - 21}{12} = \frac{129}{12} = \frac{43}{4} = 10{,}75 \text{ Fuß}.$$

§. 97 **Kräfte im Raume.** Kommt es darauf an, ein aus verschieden gerichteten Kräften bestehendes System zu vereinigen, so lege man eine Ebene durch dasselbe, verlege sämmtliche Angriffspunkte in diese Ebene und zerlege jede Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine winkelrecht auf diese Ebene und die zweite in die Ebene selbst fallend. Sind $\beta_1, \beta_2 \ldots$ die Winkel, unter welchen die Ebene von den Kraftrichtungen geschnitten wird, so folgen die Normalkräfte $P_1 \sin. \beta_1$, $P_2 \sin. \beta_2 \ldots$, dagegen die Kräfte in der Ebene $P_1 \cos. \beta_1$, $P_2 \cos. \beta_2$ u. s. w. Die letzteren lassen sich nach §. 91 und die ersteren nach dem letzten Paragraphen (96) zu einer Mittelkraft vereinigen. In der Regel werden sich die Richtungen beider Mittelkräfte nirgends schneiden, und es

wird demnach auch eine Vereinigung dieser Kräfte nicht möglich sein; geht aber die Mittelkraft aus den parallelen Kräften durch einen Punkt K, Fig. 122, in der Richtung AB der Mittelkraft P aus den in der Ebene (der Papierebene) befindlichen Kräften, so ist eine Zusammensetzung möglich. Setzen wir die Abstände $OC = DK = u$ und $OD = CK = v$ für den Angriffspunkt K der ersten Mittelkraft, dagegen den Hebelarm ON der zweiten $= a$ und den Winkel BAO, unter welchem dieselbe die Axe $X\overline{X}$ schneidet, $= \alpha$, so ist die Bedingung für die Möglichkeit der Zusammensetzung:

$$u \sin. \alpha + v \cos. \alpha = a.$$

Wird dieser Gleichung nicht Genüge geleistet, geht z. B. die Mittelkraft aus den Normalkräften durch K_1, so ist die Zurückführung des ganzen Kräftesystems auf eine Mittelkraft gar nicht möglich, wohl aber läßt sich dasselbe

Fig. 122.

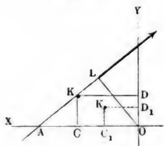
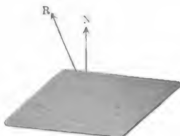


Fig. 123.

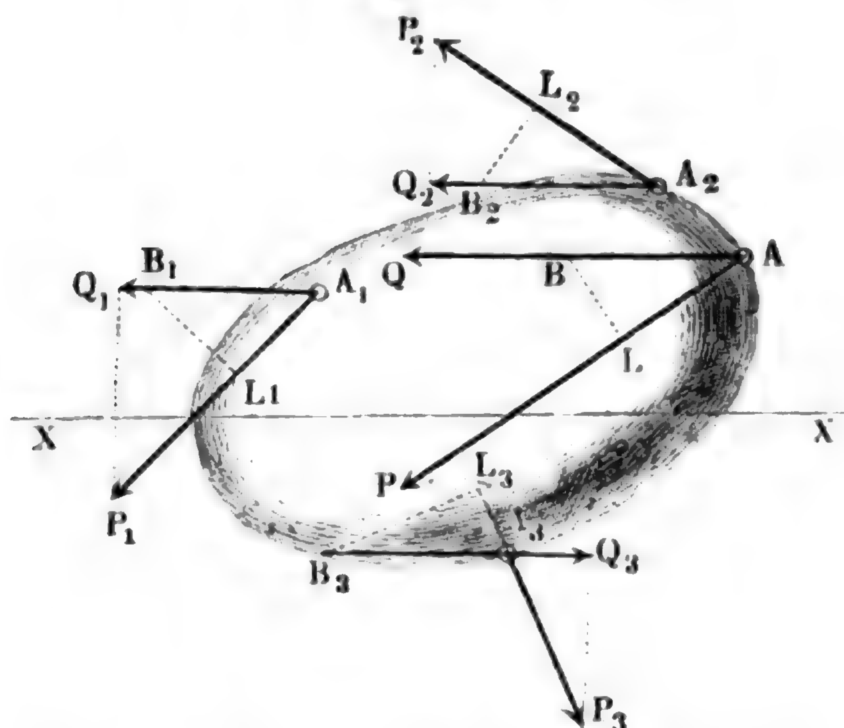


auf eine Mittelkraft R, Fig. 123, und ein Kräftepaar $(P, - P)$ zurückführen, wenn man die Mittelkraft N der parallelen Seitenkräfte in die Kräfte $- P$ und R zerlegt, von denen die eine der Mittelkraft P von den Kräften in der Ebene an Größe gleich, parallel und entgegengesetzt gerichtet ist.

Diese Zurückführung eines beliebigen Kräftesystemes auf eine einzige Kraft und auf ein Kräftepaar läßt sich auch unmittelbar dadurch bewirken, daß man sich in einem beliebigen Punkte des Körpers, auf welchen dieses System von Kräften wirkt, noch ein System von Kräftepaaren angreifend denkt, deren positive Componenten den gegebenen Kräften in Größe und Richtung vollkommen gleich sind. Diese Kräftepaare ändern natürlich in dem Gleichgewichtszustande des Körpers nichts, da sie in demselben Punkte angreifen, sich folglich selbst aufheben; dagegen lassen sich die positiven Componenten derselben nach den bekannten Regeln (§. 81) zu einer Mittelkraft vereinigen, und es bilden die negativen Componenten derselben mit den gegebenen Kräften, Kräftepaare, die sich nach §. 95 zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen lassen. Es bleibt also zuletzt nur noch jene Mittelkraft und dieses Kräftepaar übrig.

§. 98 **Princip der virtuollen Geschwindigkeiten.** Wird ein System von in einer Ebene wirkenden Kräften P_1, P_2, P_3, Fig. 124, progressiv, d. h. so fortgerückt, daß alle Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 ... gleiche Parallelwege $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ durchlaufen, so ist (in dem Sinne des Paragraphen 83) die Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der

Fig. 124.



Seitenkräfte, folglich im Zustande des Gleichgewichts dieselbe = Null. Sind die in die Kraftrichtungen fallenden Projectionen $A_1 L_1$, $A_2 L_2$ u. s. w. des gemeinschaftlichen Weges $A_1 B_1 = A_2 B_2$ u. s. w. $= s_1$, s_2 u. s. w., so ist also die mechanische Arbeit der Mittelkraft:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots$$

Dieses Gesetz folgt aus einer der Formeln des §. 91. Nach dieser ist der mit einer Axe XX parallel laufende Component Q der Mittelkraft gleich der Summe:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$$

der gleichlaufenden Componenten der Seitenkräfte P_1, P_2 u. s. w.; nun folgt aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A_1 B_1 L_1$ und $A_1 P_1 Q_1$ die Proportion:

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{A_1 L_1}{A_1 B_1} = \frac{s_1}{AB},$$

und hieraus:

$$Q_1 = \frac{P_1 s_1}{AB}, \text{ ebenso } Q_2 = \frac{P_2 s_2}{AB} \text{ u. s. w., sowie auch } Q = \frac{Ps}{AB},$$

man kann daher statt

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$$
$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots$$

setzen.

Gleichgewicht bei einer Drehbewegung. Wird das in einer Ebene wirkende Kräftesystem P_1, P_2 u. s. w., Fig. 125, um einen Punkt O sehr wenig gedreht, so gilt das in den Paragraphen 83 und 98 ausgesprochene Gesetz des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ebenfalls, wie sich auf folgende Weise beweisen läßt. Nach §. 89 ist das Kraftmoment $P.\overline{OL} = Pa$ der Mittelkraft gleich der Summe von den Momenten der Seitenkräfte, also: §. 99

Fig. 125.

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots$$

Der einer Drehung um den kleinen Winkel $A_1 O B_1 = \beta^0$ oder Bogen $\beta = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi$ entsprechende Weg $A_1 B_1$ ist auf dem Halbmesser OA_1 winkelrecht, daher das Dreieck $A_1 B_1 C_1$, welches entsteht, wenn man ein Loth $B_1 C_1$ gegen die Kraftrichtung fällt, dem durch den Hebelarm $OL_1 = a_1$ bestimmten Dreiecke $OA_1 L_1$ ähnlich und diesemnach:

$$\frac{OL_1}{OA_1} = \frac{A_1 C_1}{A_1 B_1}.$$

Setzt man die virtuelle Geschwindigkeit $\overline{A_1 C_1} = \sigma_1$ und den Bogen $\overline{A_1 B_1} = \overline{OA_1}.\beta$, so erhält man:

$$a_1 = \frac{OA_1 . \sigma_1}{OA_1 . \beta} = \frac{\sigma_1}{\beta}, \text{ ebenso } a_2 = \frac{\sigma_2}{\beta} \text{ u. s. w.}$$

Wenn man nun diese Werthe für a_1, a_2 u. s. w. in der obigen Gleichung einsetzt, so erhält man:

$$\frac{P\sigma}{\beta} = \frac{P_1 \sigma_1}{\beta} + \frac{P_2 \sigma_2}{\beta} + \cdots \text{ u. s. w.},$$

oder, da β ein gemeinschaftlicher Divisor ist,

$$P\sigma = P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2 + \cdots,$$

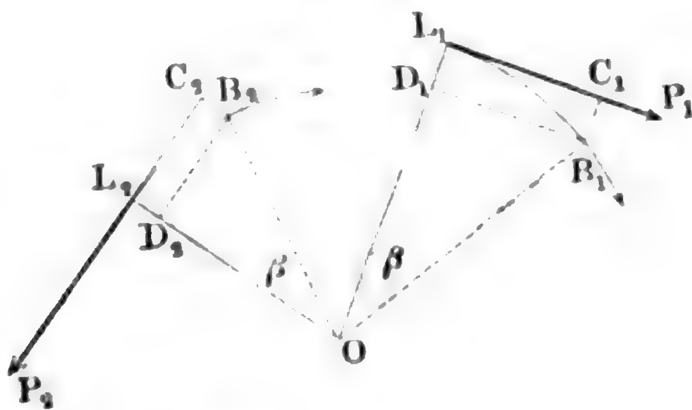
genau wie in §. 83.

Es ist also auch für kleine Drehungen die mechanische Arbeit ($P\sigma$) der Mittelkraft gleich der Summe aus den mechanischen Arbeiten der Seitenkräfte.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gilt sogar bei beliebig großen Drehungen, wenn man statt der virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte die Projectionen $L_1 D_1$, $L_2 D_2$ u. s. w., Fig. 126 (a. f. S.), der in §. 100

den Lothpunkten L_1, L_2 u. s. w. anfangenden Wege einführt; denn multiplicirt man die bekannte Gleichung der statischen Momente

Fig. 126.



$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots$$

durch $sin.\beta$, und setzt in der neuen Gleichung:

$$Pa\, sin.\beta = P_1 a_1\, sin.\beta + P_2 a_2\, sin.\beta + \cdots,$$

statt $a_1\, sin.\beta$, $a_2\, sin.\beta \ldots$ die Wege

$$OB_1\, sin.\, L_1 O B_1 = D_1 B_1 = L_1 C_1 = s_1,$$

$$OB_2\, sin.\, L_2 O B_2 = D_2 B_2 = L_2 C_2 = s_2 \text{ u. s. w.},$$

so folgt die Gleichung: $Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots$

Ebenso behält dieses Princip bei endlichen Drehungen seine Richtigkeit, wenn sich die Kraftrichtungen mit dem Systeme gleichzeitig umdrehen, oder wenn sich der Angriffs- oder Lothpunkt L unaufhörlich und so verändert, daß die Hebelarme $OL_1 = OB_1$ u. s. w. unveränderlich bleiben; denn aus

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2,$$

folgt durch Multiplication mit β:

$$Pa\beta = P_1 a_1 \beta + P_2 a_2 \beta + \cdots, \text{ d. i.}$$

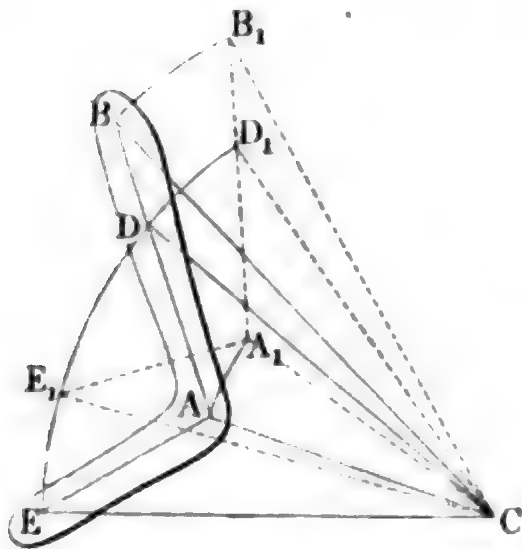
$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots,$$

wenn s_1, s_2 u. s. w. die bogenförmigen Wege $L_1 B_1$, $L_2 B_2$ u. s. w. der Loth- oder Angriffspunkte L_1, L_2 u. s. w. bezeichnen.

101 **Zurückführung einer kleinen Verrückung auf eine Drehung.** Jede in einer Ebene vor sich gehende kleine Bewegung oder Verrückung eines Körpers läßt sich als eine kleine Drehung um einen beweglichen Mittelpunkt ansehen, wie in Folgendem bewiesen werden soll. Seien zwei Punkte A und B, Fig. 127, dieses Körpers (dieser Fläche oder Linie) bei einer kleinen Bewegung nach A_1 und B_1 fortgerückt, sei also auch $A_1 B_1 = AB$. Errichten wir in diesen Punkten Perpendikel auf die durchlaufenen kleinen Wege AA_1 und BB_1, so schneiden sich dieselben in einem Punkte C, aus dem man sich diese als Kreisbogen anzusehenden Wege AA_1 und BB_1 beschrieben denken kann. Nun sind aber wegen der Gleichheiten $AB = A_1 B_1$, $AC = A_1 C$ und $BC = B_1 C$ die Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C$ einander congruent; es

ist daher auch der Winkel $B_1 C A_1$ gleich dem Winkel BCA und der Drehungswinkel $A C A_1$ gleich dem Drehungswinkel $B C B_1$. Macht man $A_1 D_1 = AD$, so bekommt man wegen der Gleichheit der Winkel $D_1 A_1 C_1$ und $D A C$ und wegen der Gleichheit der Seiten $C A_1$ und CA, in $C A_1 D_1$ und $C A D$ wieder zwei congruente Dreiecke, in welchen $C D_1 = C D$ und $\angle A_1 C D_1 = \angle ACD$ ist. Es ist folglich auch $\angle A C A_1 = \angle D C D_1$, und es geht daher bei der kleinen Verrückung der Linie AB, auch jeder beliebige Punkt D in ihr in einem kleinen Kreisbogen DD_1 fort. Ist endlich E ein außerhalb der Linie AB liegender und mit ihr fest verbundener Punkt, so ist noch der kleine Weg $E E_1$ desselben als ein Kreisbogen aus C anzusehen; denn macht man den Winkel $E_1 A_1 B_1 = EAB$ und die Entfernung $A_1 E_1 = AE$, so erhält man wieder zwei congruente Dreiecke $E_1 A_1 C$ und EAC mit den gleichen Seiten $C E_1$ und CE und den gleichen Winkeln $A_1 C E_1$ und $A C E$, und dasselbe läßt sich auch für jeden anderen mit AB fest verbundenen Punkt beweisen. Man kann folglich jede kleine Bewegung einer mit AB fest verbundenen Fläche oder eines festen Körpers als eine kleine Drehung um ein Centrum ansehen, das sich ergiebt, wenn man den Durchschnittspunkt C bestimmt, in welchem sich die Perpendikel zu den Wegen $A A_1$ und $B B_1$ zweier Punkte des Körpers schneiden.

Fig. 127.



Allgemeinheit des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten. Nach einem vorhergehenden Paragraphen (99) ist für eine kleine Drehung des Kräftesystems die mechanische Arbeit der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe aus den Arbeiten ihrer Componenten, nach dem letzten Paragraphen (101) läßt sich aber jede kleine Verrückung eines Körpers als eine kleine Drehung ansehen; es gilt daher das oben ausgesprochene Gesetz von dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten auch für jede beliebig kleine Bewegung eines festen Körpers oder Kräftesystems. §. 10

Ist also in einem Kräftesysteme Gleichgewicht vorhanden, d. h. die Mittelkraft selbst gleich Null, so muß auch nach einer kleinen, übrigens beliebigen Bewegung die Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null sein. Wenn umgekehrt, für eine kleine Bewegung des Körpers die Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null ist, so ist deshalb noch nicht Gleichgewicht nothwendig, es muß vielmehr bei allen möglichen kleinen Verrückungen diese Summe gleich Null ausfallen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. Da

die das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrückende Formel nur eine Bedingung des Gleichgewichts erfüllt, so fordert das Gleichgewicht, daß diesem Gesetze wenigstens bei ebensoviel von einander unabhängigen Bewegungen entsprochen wird, als solcher Bedingungen gemacht werden können, z. B. für ein Kräftesystem in der Ebene bei drei von einander unabhängigen Bewegungen.

Zweites Capitel.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

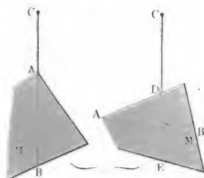
103 **Schwerpunkt.** Die Gewichte von den Theilen eines schweren Körpers bilden ein System von Parallelkräften, dessen Mittelkraft das Gewicht des ganzen Körpers ist und dessen Mittelpunkt nach den drei Formeln des Paragraphen 96 bestimmt werden kann. Man nennt diesen Mittelpunkt der Schwerkräfte eines Körpers oder einer Körperverbindung den Schwerpunkt (franz. centre de gravité; engl. centre of gravity), auch wohl Mittelpunkt der Masse des Körpers oder der Verbindung von Körpern. Dreht man einen Körper um seinen Schwerpunkt, so hört dieser Punkt nicht auf, Mittelpunkt der Schwere zu sein, denn läßt man die drei Grundebenen, auf die man die Angriffspunkte der einzelnen Gewichte bezieht, mit dem Körper zugleich sich umdrehen, so ändert sich bei dieser Drehung nur die Lage der Kraftrichtungen gegen diese Ebenen, die Abstände der Angriffspunkte von diesen Ebenen hingegen bleiben unverändert. Der Schwerpunkt ist hiernach derjenige Punkt eines Körpers, in welchem das Gewicht desselben als vertical niederziehende Kraft wirkt, der also unterstützt oder festgehalten werden muß, um den Körper in jeder Lage in Ruhe zu erhalten.

104 **Schwerlinie und Schwerebene.** Jede den Schwerpunkt enthaltende gerade Linie heißt Schwerlinie, und jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene Schwerebene. Der Schwerpunkt bestimmt sich durch den Durchschnitt zweier Schwerlinien, oder durch den Durchschnitt einer Schwerlinie mit einer Schwerebene, oder durch das Sichkreuzen dreier Schwerebenen.

Da sich der Angriffspunkt einer Kraft in der Kraftrichtung beliebig verlegen läßt, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern, so ist ein Körper in einer Lage im Gleichgewichte, wenn irgend ein Punkt in der durch den Schwerpunkt gehenden Verticallinie festgehalten wird.

Hängt man einen Körper M, Fig. 128, an einem Faden CA auf, so erhält man hiernach in der Verlängerung AB dieses Fadens eine Schwerlinie, und hängt man ihn noch auf eine zweite Weise auf, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie DE. Der Durchschnittspunkt S beider Linien ist nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers.

Fig. 128.



Hängt man den Körper an einer Axe auf, oder bringt man ihn über einer scharfen Kante (Schneide eines Messers) ins Gleichgewicht, so erhält man in der Verticalebene durch die Axe oder scharfe Kante eine Schwerebene u. s. w.

Empirische Bestimmungen des Schwerpunktes, wie sie eben angedeutet wurden, sind selten anwendbar; meistens hat man aber von den im Folgenden gegebenen geometrischen Regeln Gebrauch zu machen, um den Schwerpunkt mit Sicherheit zu bestimmen.

Bei manchen Körpern, z. B. bei Ringen, fällt der Schwerpunkt außerhalb der Masse des Körpers. Soll ein solcher Körper in seinem Schwerpunkte festgehalten werden, so ist es nöthig, diesen durch einen zweiten Körper so mit dem ersten zu verbinden, daß die Schwerpunkte beider Körper zusammenfallen.

Schwerpunktsbestimmung. Sind x_1, x_2, x_3 u. s. w. die Abstände der Theile eines schweren Körpers von der einen Grundebene, y_1, y_2, y_3 ... dieselben von der anderen, und z_1, z_2, z_3 ... die von der dritten, sind endlich die Gewichte dieser Theile P_1, P_2 P_3 u. s. w., so hat man nach §. 96 die Abstände des Schwerpunktes dieses Körpers von diesen drei Ebenen: §. 106

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots},$$

$$y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots},$$

$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots}.$$

Bezeichnet man die Volumina der Körpertheile durch V_1, V_2, V_3 u. s. w., und ihre Dichtigkeiten durch γ_1, γ_2, γ_3 u. s. w., so läßt sich auch setzen:

$$x = \frac{V_1 \gamma_1 x_1 + V_2 \gamma_2 x_2 + \cdots}{V_1 \gamma_1 + V_2 \gamma_2 + \cdots} \text{ u. s. w.}$$

Ist endlich der Körper homogen, haben also alle Theile desselben einerlei Dichtigkeit γ, so ergiebt sich:

$$x = \frac{(V_1 x_1 + V_2 x_2 + \cdots)\gamma}{(V_1 + V_2 + \cdots)\gamma},$$

oder, indem man den gemeinschaftlichen Factor γ oben und unten hebt:

$$1)\ x = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

$$2)\ y = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

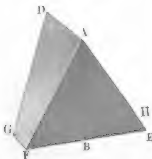
$$3)\ z = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}.$$

Man kann also statt der Gewichte die Volumina der einzelnen Theile eines Körpers einsetzen, und bringt dadurch die Bestimmung des Schwerpunktes in das Gebiet der reinen Geometrie.

Wenn Körper nach einer oder nach zwei Raumdimensionen wenig ausgedehnt sind, wie z. B. dünne Bleche, feine Drähte u. s. w., so kann man sie als Flächen oder Linien ansehen und nun mit Hülfe der letzteren drei Formeln ihre Schwerpunkte ebenfalls bestimmen, wenn man statt der Volumina V_1, V_2 u. s. w., Flächeninhalte F_1, F_2 u. s. w. oder Längen l_1, l_2 u. s. w. einführt.

§. 106 Bei regelmäßigen Räumen fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen, z. B. bei dem Würfel, der Kugel, dem gleichseitigen Dreiecke, Kreise u. s. w. Symmetrische Räume haben ihren Schwerpunkt in der Ebene oder Axe der Symmetrie. Die Ebene der Symmetrie $ABCD$ theilt einen Körper $ADFH$, Fig. 129, in zwei nur durch rechts und links verschiedene Hälften, es finden daher auf beiden Seiten dieser Ebene gleiche Verhältnisse statt; es sind also auch die Momente auf der einen Seite so groß, wie auf der anderen, und es fällt folglich der Schwerpunkt in diese Ebene selbst.

Fig. 129.



Weil ebenso die Axe EF der Symmetrie eine ebene Fläche $ABFCD$, Fig. 130, in zwei Theile zerschneidet, wovon der eine Spiegelbild des anderen ist, so sind auch hier die Verhältnisse

auf der einen Seite dieselben wie auf der anderen; es sind folglich auch die Momente auf beiden Seiten gleich, und es liegt der Schwerpunkt des Ganzen in dieser Linie selbst.

Endlich ist auch die Symmetrieaxe KL eines Körpers $ABGH$, Fig. 131, Schwerlinie desselben, weil sie aus dem Durchschnitt von zwei

Fig. 130.

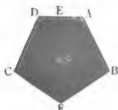
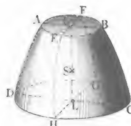


Fig. 131.

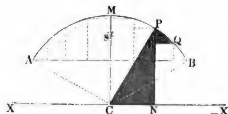


Symmetrieebenen $ABCD$ und $EFGH$ hervorgeht. Aus diesem Grunde fällt der Schwerpunkt eines Cylinders, eines Kegels und eines durch Umdrehung einer Fläche, oder durch Abdrehung auf der Drehbank entstandenen Rotationskörpers überhaupt, in die Axe dieser Körper.

Schwerpunkte von Linien. Der Schwerpunkt einer geraden §. 10
Linie liegt in der Mitte derselben.

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens $AMB = b$, Fig. 132, befindet sich in dem Halbmesser CM, welcher in der Mitte M des Bogens ausläuft, denn dieser Halbmesser ist Axe der Symmetrie dieses Bogens. Um aber die Entfernung $CS = y$ des Schwerpunktes S vom Mittelpunkte zu finden, theile man den Bogen in sehr viele Theile und bestimme die statischen Momente derselben in Beziehung auf eine durch den Mittelpunkt C und mit der Sehne $AB = s$ parallel gehende Axe $X\overline{X}$. Ist PQ ein Theil des Bogens und PN dessen Abstand von $X\overline{X}$, so ist das statische Moment dieses Bogentheiles $= PQ \,.\, PN$.

Fig. 132.



Zieht man nun den Halbmesser $PC = MC = r$, und die Projection QR von PQ parallel zu AB, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke PQR und CPN, für welche gilt:

$$PQ : QR = CP : PN,$$

und woraus sich das statische Moment eines Bogenelementes

$$PQ \,.\, PN = QR \,.\, CP = QR \,.\, r$$

bestimmt.

Nun ist aber für die statischen Momente aller übrigen Elemente der Halbmesser r ein gemeinschaftlicher Factor und die Summe aller Projectionen QR der Bogenelemente gleich der der Projection des ganzen Bogens entsprechenden Sehne; es folgt daher auch das Moment des ganzen Bogens = Sehne s mal Halbmesser r. Setzt man dieses Moment gleich Bogen b mal Abstand y, also $by = sr$, so erhält man:

$$\frac{y}{r} = \frac{s}{b}, \text{ und } y = \frac{sr}{b}.$$

Es verhält sich also der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte zum Halbmesser, wie die Sehne zum Bogen.

Ist der Centriwinkel ACB des Bogens b, $= \beta^0$, also der dem Halbmesser 1 entsprechende Bogen $\beta = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi$, so hat man $b = \beta r$ und $s = 2\, r\, sin. \frac{\beta}{2}$, weshalb auch folgt:

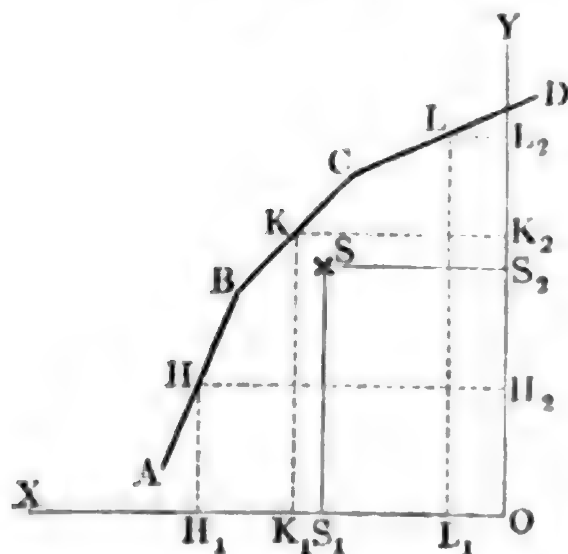
$$y = \frac{2\, sin. \, ^1/_2 \beta \,.\, r}{\beta}.$$

Für den Halbkreis ist $\beta = \pi$ und $sin. \frac{\beta}{2} = 1$, daher

$$y = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366 \ldots r, \text{ ungefähr } = \frac{7}{11} r.$$

108 Um den Schwerpunkt eines Polygons oder einer Linienverbindung $ABCD$, Fig. 133, zu finden, suche man die Abstände der Mittelpunkte H, K, M der Linien $AB = l_1$, $BC = l_2$, $CD = l_3$ u. s. w. von zwei Axen OX und OY, nämlich $HH_1 = y_1$, $HH_2 = x_1$, $KK_1 = y_2$, $KK_2 = x_2$ u. s. w.; die Abstände des gesuchten Schwerpunktes von eben diesen Axen sind dann:

Fig. 133.



$$OS_1 = SS_2 = x = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots}{l_1 + l_2 + \cdots},$$

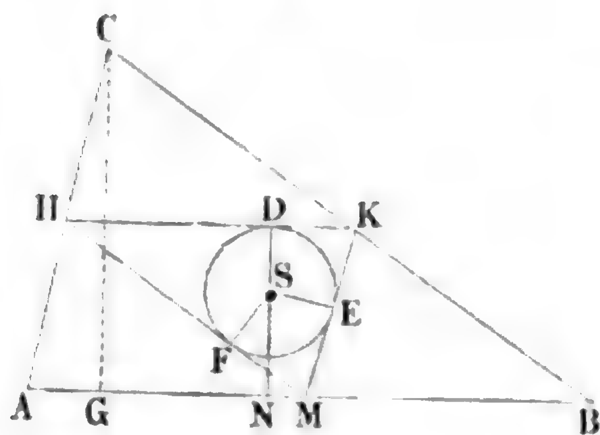
$$OS_2 = SS_1 = y = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots}{l_1 + l_2 + \cdots}.$$

Z. B. der Abstand des Schwerpunktes S eines im Triangel gebogenen Drahtes ABC, Fig. 134, von der Grundlinie AB ist:

$$NS = y = \frac{\frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} bh}{a+b+c} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2},$$

wenn die den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten durch a, b, c und die Höhe CG durch h bezeichnet werden.

Fig. 134.



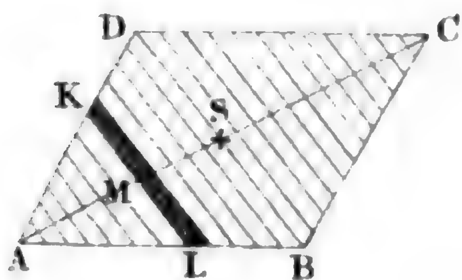
Verbindet man die Mittelpunkte H, K, M der Dreiecksseiten unter einander, und construirt man in das so erhaltene Dreieck einen Kreis, so fällt dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte S zusammen, denn der Abstand dieses Punktes von der einen Seite HK ist:

$$SD = ND - NS = \frac{h}{2} - \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{h}{2} = \frac{ch}{2(a+b+c)}$$

$= \frac{\triangle ABC}{a+b+c}$, also constant und daher $=$ den Abständen SE und SF von den anderen Seiten.

Schwerpunkte ebener Figuren. Der Schwerpunkt eines Parallelogrammes $ABCD$, Fig. 135, liegt im Durchschnittspunkte S seiner Diagonalen, denn alle Streifen, wie KL, welche durch Legung von zu einer Diagonale BD parallelen Linien sich ergeben, werden durch die andere Diagonale AC halbirt, es ist also jede von den Diagonalen eine Schwerlinie. §. 109

Fig. 135.



Bei einem Dreiecke ABC, Fig. 136 (a. f. S.), ist jede Linie CD von einer Spitze nach der Mitte D der Gegenseite AB eine Schwerlinie, denn es halbirt dieselbe alle Elemente KL des Dreieckes, welche sich ergeben, wenn man dasselbe durch Parallellinien zu AB zerschneidet. Zieht man von einem zweiten Ecke A nach der Mitte E der Gegenseite BC eine zweite Schwerlinie, so giebt der Durchschnitt S beider Schwerlinien den Schwerpunkt des ganzen Dreieckes.

Weil $BD = \frac{1}{2} BA$ und $BE = \frac{1}{2} BC$, so ist DE parallel zu AC und gleich $\frac{1}{2} AC$, auch $\triangle DES$ ähnlich dem Dreiecke CAS und endlich $CS = 2 SD$. Addirt man hierzu noch SD, so folgt $CS + SD$,

d. i. $CD = 3\,DS$, und demnach umgekehrt, $DS = \frac{1}{3}\,SD$. Es steht also der Schwerpunkt S um ein Drittel der Linie CD von dem Mittelpunkte D der Grundlinie und um zwei Drittel derselben von der Spitze C ab. Zieht man CH und SN winkelrecht zur Basis, so hat man auch SN

Fig. 136.

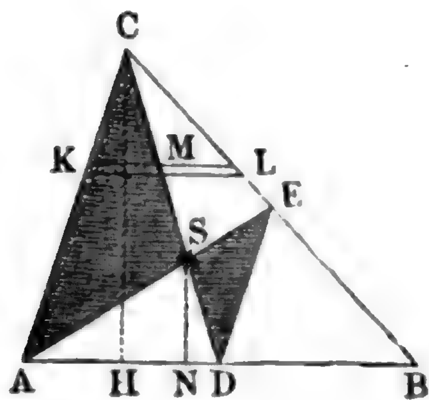
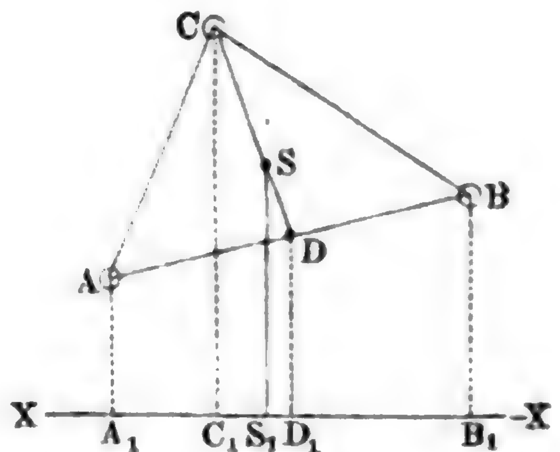


Fig. 137.



$= \frac{1}{3}\,CH$; es steht also der Schwerpunkt S auch um ein Drittel der Höhe von der Basis des Dreieckes ab.

Der Abstand des Schwerpunktes eines Dreieckes ABC, Fig. 137, von einer Axe $X\overline{X}$ ist $SS_1 = DD_1 + \frac{1}{3}\,(CC_1 - DD_1)$, aber $DD_1 = \frac{1}{2}\,(AA_1 + BB_1)$, folglich ist:

$$y = SS_1 = \frac{1}{3}\,CC_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\,(AA_1 + BB_1) = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3},$$

d. i. das arithmetische Mittel aus den Abständen der drei Eckpunkte von $X\overline{X}$.

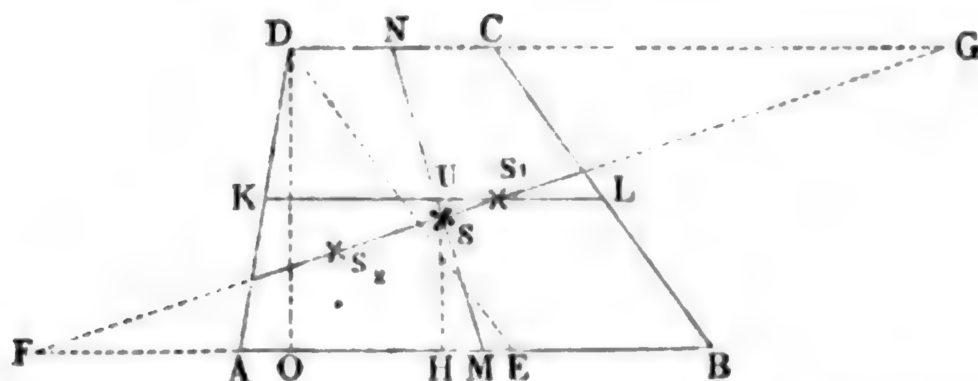
Da der Abstand des Schwerpunktes von drei gleichen, in den Eckpunkten eines Dreieckes angebrachten Gewichten auf dieselbe Weise bestimmt wird, so fällt der Schwerpunkt eines ebenen Dreieckes mit dem Schwerpunkte von diesen drei gleichen Gewichten zusammen.

§. 110 Die Bestimmung des Schwerpunktes S eines Trapezes $ABCD$, Fig. 138, läßt sich auf folgende Weise bewerkstelligen. Die gerade Linie MN, welche die Mittelpunkte der beiden Grundlinien AB und CD mit einander verbindet, ist Schwerlinie des Trapezes, denn viele gerade Linien, parallel zu den Grundlinien gezogen, zerlegen das Trapez in schmale Streifen, deren Mittel- oder Schwerpunkte in MN fallen. Um nun den Schwerpunkt S vollständig zu bestimmen, hat man nur noch dessen Abstand SH von der einen Basis AB zu finden.

Es bezeichne b_1 die eine und b_2 die andere der parallelen Seiten AB und CD des Trapezes, sowie h die Höhe oder den Normalabstand dieser Seiten. Zieht man nun DE parallel zur Seite BC, so erhält man ein Parallelogramm $BCDE$ mit dem Inhalte $b_2 h$ und dem Schwerpunkte S_1,

dessen Abstand von AB, $= \frac{h}{2}$, und ein Dreieck ADE mit dem Inhalte $\frac{(b_1 - b_2)h}{2}$ und dem Schwerpunkte S_2, dessen Abstand von $AB = \frac{h}{3}$ ist.

Fig. 138.



Das statische Moment des Trapezes hinsichtlich AB ist deshalb

$$Fy = b_2 h \cdot \frac{h}{2} + \frac{(b_1 - b_2)h}{2} \cdot \frac{h}{3} = (b_1 + 2b_2)\frac{h^2}{6},$$

aber der Inhalt des Trapezes ist $F = (b_1 + b_2)\frac{h}{2}$; es folgt daher der Normalabstand des Schwerpunktes S von der Basis:

$$HS = y = \frac{\frac{1}{6}(b_1 + 2b_2)h^2}{\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h} = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}.$$

Der Abstand dieses Punktes von der Mittellinie $KL = \frac{b_1 + b_2}{2}$ des Trapezes ist:

$$US = \frac{h}{2} - HS = \left(\frac{3(b_1 + b_2) - 2(b_1 + 2b_2)}{b_1 + b_2}\right)\frac{h}{6}, \text{ d. i.}$$

$$y_1 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{6}.$$

Um den Schwerpunkt construirend zu finden, verlängere man die beiden Grundlinien, mache die Verlängerung $CG = b_1$ und die Verlängerung $AF = b_2$, und verbinde die dadurch erhaltenen Endpunkte F und G durch eine Gerade; der Durchschnittspunkt S mit der Mittellinie MN ist der gesuchte Schwerpunkt, denn aus $HS = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}$ folgt auch:

$$MS = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{MN}{3} \text{ und } NS = \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{MN}{3}; \text{ also:}$$

$$\frac{MS}{NS} = \frac{b_1 + 2b_2}{2b_1 + b_2} = \frac{\frac{1}{2}b_1 + b_2}{b_1 + \frac{1}{2}b_2} = \frac{MA + AF}{CG + NC} = \frac{MF}{NG},$$

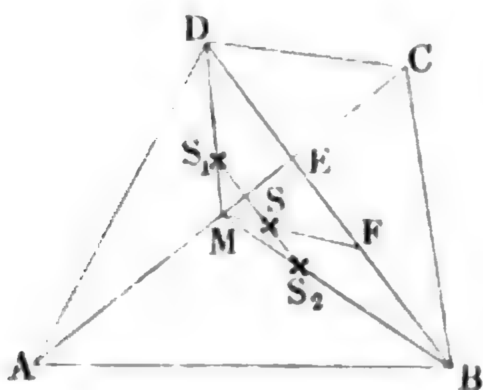
wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MSF und NSG wirklich hervorgeht.

Der Abstand des Schwerpunktes vom Eckpunkt A ist, wenn a die Projection AO der Seite AD auf AB bezeichnet, durch die Formel

$$AH = x = \frac{b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2 + a(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)} \text{ bestimmt.}$$

§. 111 Um den Schwerpunkt irgend eines anderen Viereckes $ABCD$, Fig. 139, zu ermitteln, kann man dasselbe durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke zerlegen, nach dem Vorhergehenden die Schwerpunkte S_1 und S_2 derselben angeben und dadurch eine Schwerlinie $S_1 S_2$ bestimmen. Zerlegt man nun noch das Viereck durch die Diagonale BD in zwei andere Dreiecke, und bestimmt deren Schwerpunkte, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie, deren Durchschnitt mit der ersteren den Schwerpunkt des ganzen Viereckes giebt.

Fig. 139.



Einfacher geht man aber zu Werke, wenn man die Diagonale AC in M halbirt, das größere Stück BE der zweiten Diagonale über das kleinere trägt, so daß $DF = BE$ wird; denn zieht man nun FM und theilt diese Linie in drei gleiche Theile, so liegt im ersten Theilpunkte S von M aus, der Schwerpunkt S, wie sich auf folgende Weise beweisen läßt. Es ist $MS_1 = \frac{1}{3} MD$ und $MS_2 = \frac{1}{3} MB$, folglich $S_1 S_2$ parallel zu BD, aber SS_1 mal $\triangle ACD = SS_2$ mal $\triangle ACB$, oder $SS_1 \,.\, DE = SS_2 \,.\, BE$, daher $SS_1 : SS_2 = BE : DE$. Nun ist noch $BE = DF$ und $DE = BF$, folglich auch $SS_1 : SS_2 = DF : BF$. Die Gerade MF schneidet demnach die Schwerlinie $S_1 S_2$ in dem Schwerpunkte S des ganzen Viereckes.

§. 112 Kommt es darauf an, den Schwerpunkt S eines Polygons $ABCDE$, Fig. 140, zu finden, so zerlege man dieses Polygon in Dreiecke und bestimme die statischen Momente derselben in Hinsicht auf zwei rechtwinkelige Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$.

Sind die Coordinaten $OA_1 = x_1$, $OA_2 = y_1$, $OB_1 = x_2$, $OB_2 = y_2$ u. s. w. der Eckpunkte gegeben, so lassen sich die statischen Momente der einzelnen Dreiecke ABO, BCO, CDO u. s. w. einfach auf folgende Weise ermitteln. Der Inhalt des Dreieckes ABO ist, nach der unten stehenden Anmerkung, $= D_1 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$, der Inhalt des folgenden Drei-

eckes BCO, $= D_2 = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$ u. s. w., die Abstände des Schwerpunktes des Dreieckes ABO von $Y\overline{Y}$, nach §. 109:

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3} = \frac{x_1 + x_2}{3},$$

von $X\overline{X} = v_1 = \frac{y_1 + y_2}{3}$, die des Schwerpunktes des Dreieckes BCO:

$$u_2 = \frac{x_2 + x_3}{2} \text{ und } v_2 = \frac{y_2 + y_3}{3} \text{ u. s. w.}$$

Multiplicirt man diese Abstände mit den Inhalten der Dreiecke, so erhält man die Momente der letzteren, und setzt man die so erhaltenen Werthe in die Formeln:

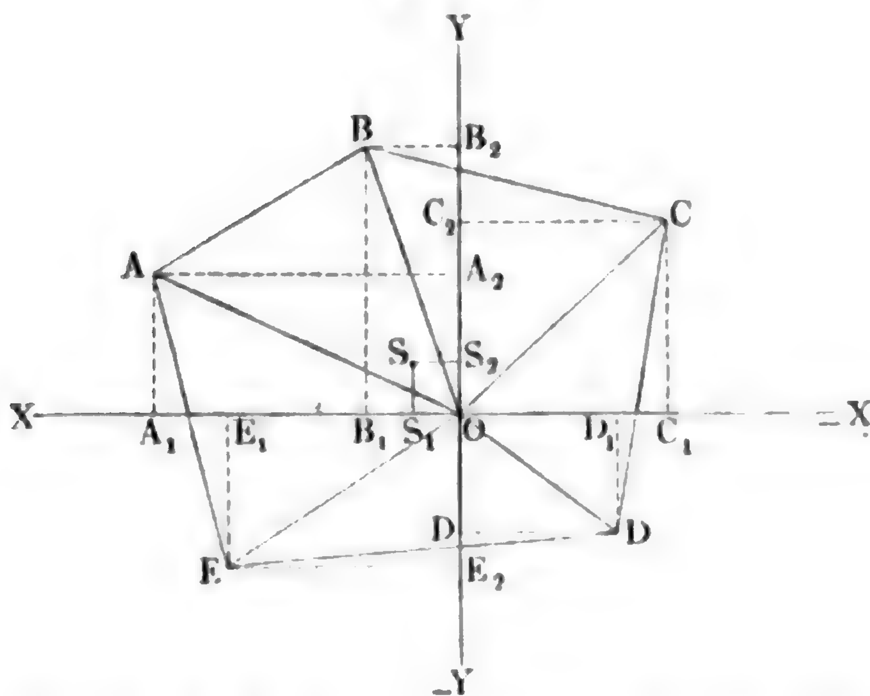
$$u = \frac{D_1 u_1 + D_2 u_2 + \cdots}{D_1 + D_2 + \cdots} \text{ und } v = \frac{D_1 v_1 + D_2 v_2 + \cdots}{D_1 + D_2 + \cdots},$$

so erhält man die Abstände $u = OS_1$ und $v = OS_2$ des gesuchten Schwerpunktes S von den Axen $Y\overline{Y}$ und $X\overline{X}$.

Wenn man ein $n$seitiges Polygon auf zweierlei Weise durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein $(n-1)$seitiges Polygon zerlegt, und jedes Mal den Schwerpunkt des ersteren mit dem des letzteren verbindet, so erhält man auf diese Weise zwei Schwerlinien des Polygons, welche sich in dem Schwerpunkt desselben schneiden. Durch wiederholte Anwendung dieser Bestimmung kann man den Schwerpunkt eines jeden Polygons auf dem Wege der Construction finden.

Beispiel. Ein Fünfeck $ABCDE$, Fig. 140, ist durch die folgenden Coor-

Fig. 140.



dinaten seiner Eckpunkte A, B, C u. s. w. gegeben, und man sucht die Coordinaten seines Schwerpunktes:

Gegebene Coordinaten.		Die zweifachen Inhalte der Dreiecke.	Die dreifachen Coordinaten der Schwerpunkte.		Die sechsfachen statischen Momente.	
x	y		$3u_n$	$3v_n$	$6D_n u_n$	$6D_n v_n$
24	11	24 . 21 − 7 . 11 = 427	31	32	13237	13664
7	21	7 . 15 + 21 . 16 = 441	− 9	36	− 3969	15876
− 16	15	16 . 9 + 12 . 15 = 324	− 28	6	− 9072	1944
− 12	− 9	12 . 12 + 18 . 9 = 306	+ 6	− 21	1836	− 6426
18	− 12	18 . 11 + 24 . 12 = 486	+ 42	− 1	20412	− 486
		Summe 1984	—	—	22444	24572

Der Abstand des Schwerpunktes von der Axe $\overline{YY}$ ist nun:

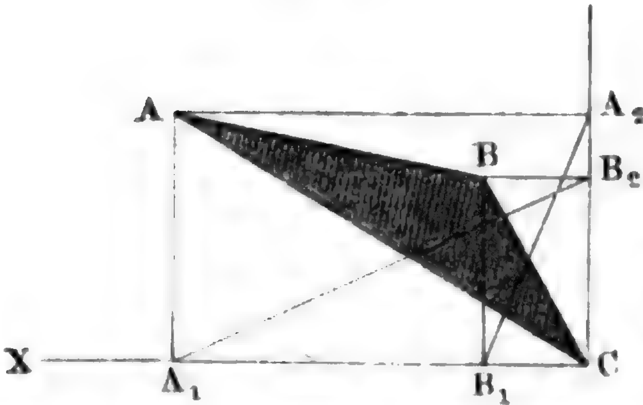
$$SS_2 = u = \frac{1}{3} \cdot \frac{22444}{1984} = 3,771$$

und von der Axe $\overline{XX}$:

$$SS_1 = v = \frac{1}{3} \cdot \frac{24572}{1984} = 4,128.$$

Anmerkung. Sind $CA = x_1$, $CB_1 = x_2$, $CA_2 = y_1$ und $CB_2 = y_2$ die Coordinaten von zwei Eckpunkten eines Dreieckes ABC, Fig. 141, deren dritter Eckpunkt C mit dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes zusammenfällt, so hat man den Inhalt desselben:

Fig. 141.



D = Trapez ABB_1A_1 + Dreieck CBB_1 − Dreieck CAA_1

$$= \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(x_1 - x_2) + \frac{x_2 y_2}{2} - \frac{x_1 y_1}{2}$$

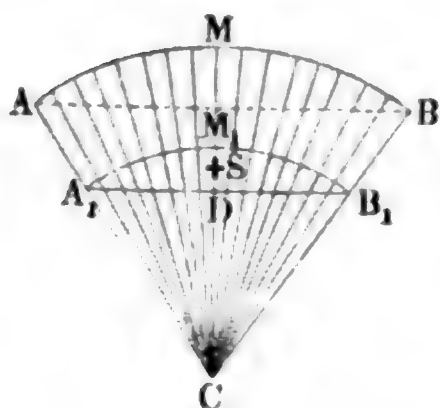
$$= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Es ist also der Inhalt dieses Dreieckes die Differenz von zwei anderen Dreiecken CB_2A_1 und CA_2B_1, und es ist die eine Coordinate eines Punktes Grundlinie des einen und die andere Coordinate Höhe des anderen Dreieckes, ebenso die eine Coordinate des anderen Punktes Höhe des einen und die andere Coordinate Grundlinie des anderen Dreieckes.

§. 113 Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes ACB, Fig. 142, fällt mit dem Schwerpunkte S eines Kreisbogens A_1B_1 zusammen, der mit dem Ausschnitte einerlei Centriwinkel hat und dessen Halbmesser CA_1 zwei Drittel von dem Halbmesser CA des Ausschnittes ist, denn es läßt sich der Ausschnitt durch unendlich viele Halbmesser in lauter schmale

Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte um zwei Drittel des Halbmessers von dem Centro C abstehen und deshalb in ihrer stetigen Folge den Bogen $A_1 M_1 B_1$ bilden. Es liegt also der Schwerpunkt S des Ausschnittes in dem dieses Flächenstück halbirenden Halbmesser CM und in der Entfernung

Fig. 142.



$$CS = y = \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3} \overline{CA}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{sin.\, {}^1\!/_2 \beta}{\beta} \cdot r,$$

insofern r den Halbmesser CA des Sectors und β den den Centriwinkel ACB desselben messenden Bogen bezeichnet.

Für die halbe Kreisfläche ist $\beta = \pi$, $sin.\, {}^1\!/_2 \beta = sin.\, 90^0 = 1$, daher:

$$y = \frac{4}{3\pi} r = 0{,}4244\, r \text{ oder ungefähr } \frac{14}{33} r.$$

Für einen Quadranten folgt:

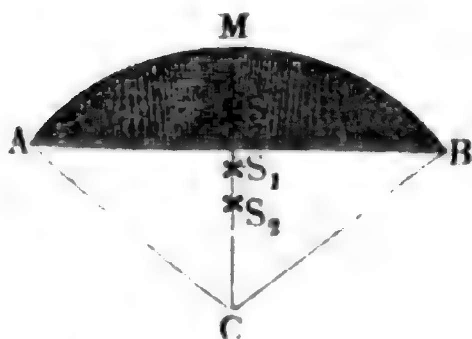
$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{{}^1\!/_2}}{{}^1\!/_2 \pi} r = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r = 0{,}6002\, r$$

und für einen Sextanten:

$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{{}^1\!/_2}{{}^1\!/_3 \pi} r = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366\, r.$$

Der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes ABM, Fig. 143, ergiebt sich, wenn man das Moment des Abschnittes ABM gleich setzt der Differenz der Momente des Ausschnittes $ACBM$ und des Dreieckes ACB. Ist r der Halbmesser CA, s die Sehne AB und A der Flächeninhalt des Segmentes ABM, so hat man das Moment des Ausschnittes: §. 114

Fig. 143.



$$= \text{Ausschnitt mal } \overline{CS_1} = \frac{r\,.\,\text{Bogen}}{2} \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3} r = \frac{1}{3} s r^2,$$

ferner das Moment des Dreieckes:

$$= \text{Dreieck mal } \overline{CS_2} = \frac{s}{2} \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{s r^2}{3} - \frac{s^3}{12},$$

und demnach das Moment des Abschnittes A:

$$A \,.\, \overline{CS} = Ay = \frac{1}{3} s r^2 - \left(\frac{s r^2}{3} - \frac{s^3}{12}\right) = \frac{s^3}{12}.$$

Es ist folglich der gesuchte Abstand: $y = \frac{s^3}{12\,A}$.

Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, daher:

$$y = \frac{8 r^3}{12 \,.\, \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4 r}{3 \pi},$$

wie oben gefunden wurde.

Auf gleiche Weise bestimmt sich auch der Schwerpunkt S eines Ringstückes $ABDE$, Fig. 144, denn dieses ist die Differenz zweier Sectoren ACB und DCE. Sind die Halbmesser $CA = r_1$ und $CE = r_2$ und die Sehnen $AB = s_1$ und $DE = s_2$, so erhält man die statischen Momente der Sectoren $\frac{s_1 r_1^2}{3}$ und $\frac{s_2 r_2^2}{3}$, daher das statische Moment des Ringstückes:

Fig. 144.

$$M = \frac{s_1 r_1^2 - s_2 r_2^2}{3}, \text{ oder, da } \frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1} \text{ ist,}$$

$$F = \frac{r_1^3 - r_2^3}{3} \cdot \frac{s_1}{r_1}.$$

Der Inhalt des Ringstückes ist $F = \frac{\beta r_1}{2} - \frac{\beta r_2^2}{2} = \beta \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2}\right)$, wofern β den dem Centriwinkel ACB entsprechenden Bogen bezeichnet; es folgt demnach der Schwerpunkt S des Ringstückes durch den Abstand

$$CS = y = \frac{M}{F} = \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{s_1}{r_1 \beta} = \frac{2}{3}\left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right) \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}}$$

$$= \frac{4}{3} \frac{sin.\, {}^1/_2\, \beta}{\beta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Beispiel. Sind die Halbmesser der Stirnfläche eines Gewölbes $r_1 = 5$ Fuß und $r_2 = 3^1/_2$ Fuß, und ist der Centriwinkel dieser Fläche $\beta^0 = 130^0$, so folgt der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Mittelpunkte:

$$y = \frac{4}{3} \frac{sin.\, 65^0}{arc.\, 130^0} \cdot \frac{5^3 - 3{,}5^3}{5^2 - 3{,}5^2} = \frac{4 \,.\, 0{,}9063}{3 \,.\, 2{,}2689} \cdot \frac{125 - 42{,}875}{25 - 12{,}25} = \frac{3{,}6252 \,.\, 82{,}125}{6{,}8067 \,.\, 12{,}75}$$
$= 3{,}430$ Fuß.

§. (115) **Schwerpunktsbestimmung durch den höheren Calcul.** Die Bestimmung des Schwerpunktes ebener Flächen läßt sich mit Hülfe des

höheren Calculs wie folgt bewirken. Es sei ANP, Fig. 145, die gegebene Fläche, $AN = x$ ihre Abscisse und $NP = y$ ihre Ordinate. Der Inhalt eines Elementes NMP derselben ist

$$\partial F = y \partial x$$ (vergl. analyt. Hülfslehren, Art. 29),

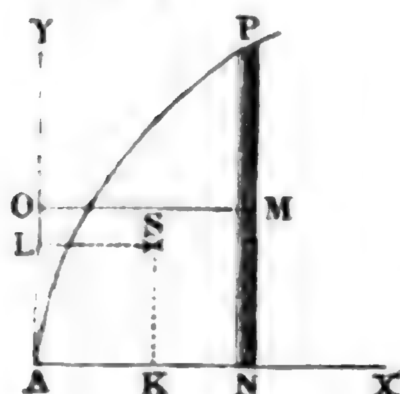


Fig. 145.

folglich das Moment desselben in Hinsicht auf die Ordinatenaxe OY:

$$\overline{OM} . \partial F = \overline{AN} . \partial F = xy\partial x;$$

setzt man daher den Abstand $LS = AK$ des Schwerpunktes S der ganzen Fläche F von der Axe AY, $= u$, so hat man:

$$Fu = \int xy\partial x.$$

und folglich:

$$1) \; u = \frac{\int xy\partial x}{F} = \frac{\int xy\partial x}{\int y\partial x}.$$

Da der Mittel- oder Schwerpunkt M des Elementes NMP von der Abscissenaxe AX um $NM = \frac{1}{2} y$ absteht, so ist das Moment von ∂F in Hinsicht auf diese Axe AX:

$$\overline{NM} . \partial F = \tfrac{1}{2} y \partial F = \tfrac{1}{2} y^2 \partial x;$$

setzt man daher den Abstand $KS = AL$ des Schwerpunktes S der ganzen Fläche F von der Axe AX, $= v$, so ist

$$Fv = \int \tfrac{1}{2} y^2 \partial x,$$ und daher

$$2) \; v = \frac{\tfrac{1}{2} \int y^2 \partial x}{F} = \tfrac{1}{2} \frac{\int y^2 \partial x}{\int y \partial x}.$$

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ oder $y = \sqrt{p} . x^{1/2}$ ist, hat man:

$$u = \frac{\int \sqrt{p} . x^{1/2} x \partial x}{\int \sqrt{p} . x^{1/2} \partial x} = \frac{\sqrt{p} \int x^{3/2} \partial x}{\sqrt{p} \int x^{1/2} \partial x} = \frac{\int x^{3/2} \partial x}{\int x^{1/2} \partial x}$$
$$= \frac{\tfrac{2}{5} x^{5/2}}{\tfrac{2}{3} x^{3/2}} = \tfrac{3}{5} x,$$

also:

$$LS = AK = \tfrac{3}{5} AN,$$ und dagegen

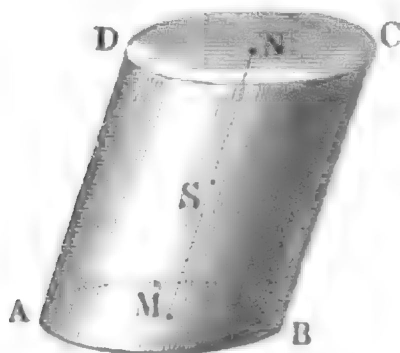
$$v = \tfrac{1}{2} \frac{\int px \partial x}{\sqrt{p} \int x^{1/2} \partial x} = \tfrac{1}{2} \sqrt{p} \frac{\int x \partial x}{\int x^{1/2} \partial x} = \tfrac{1}{2} \sqrt{p} \frac{\tfrac{1}{2} x^2}{\tfrac{2}{3} x^{3/2}}$$
$$= \tfrac{3}{8} \sqrt{px} = \tfrac{3}{8} y,$$

also:

$$KS = AL = \tfrac{3}{8} NP.$$

§. 116 **Schwerpunkte krummer Flächen.** Der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche (dem Mantel) eines Cylinders *ABCD*, Fig. 146, liegt in der Mitte *S* der Axe *MN* dieses Körpers; denn alle ringförmigen Elemente des Cylindermantels, welche man erhält, wenn man parallel zur Basis Schnitte durch den Körper führt, sind unter sich gleich und haben ihre Schwer- und Mittelpunkte in dieser Axe; es bilden also diese Schwerpunkte eine gleichförmig schwere Linie. Aus denselben Gründen liegt auch der Schwerpunkt von der Umfläche eines Prismas im Mittelpunkte der die Schwerpunkte der Umfänge beider Grundflächen verbindenden Geraden.

Fig. 146.



Der Schwerpunkt *S* des Mantels von einem geraden Kegel *ABC*, Fig. 147, liegt in der Axe des Kegels und ist um ein Drittel dieser Linie von der Basis oder um zwei Drittel von der Spitze *C* entfernt; denn diese krumme Fläche läßt sich durch gerade Linien, welche man Seiten des Kegels nennt, in unendlich viele, unendlich schmale Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte einen Kreis *HK* bilden, welcher um zwei Drittel der Axe von der Spitze *C* absteht, und dessen Schwer- oder Mittelpunkt *S* in die Axe *CM* fällt.

Fig. 147.

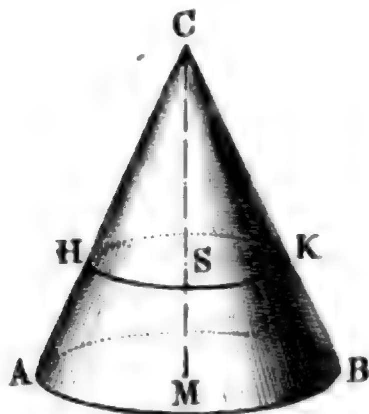
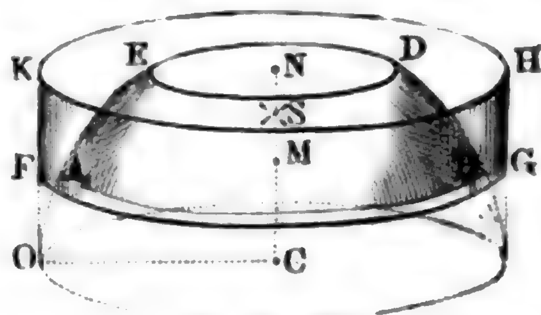


Fig. 148.

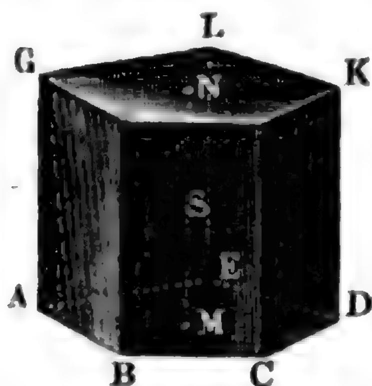


Der Schwerpunkt einer Kugelzone *ABDE*, Fig. 148, und ebenso der Schwerpunkt einer Kugelschale (Calotte) liegt im Mittelpunkte *S* ihrer Höhe *MN*; denn es hat, den Lehren der Geometrie zufolge, die Zone mit einem Cylindermantel *FGHK* gleichen Inhalt, dessen Höhe gleich ist der Höhe *MN* und dessen Halbmesser gleich ist dem Kugelhalbmesser *CO* der Zone, und es findet diese Gleichheit auch unter den ringförmigen Elementen statt, die man erhält, wenn man durch diese beiden krummen Flächen unendlich viele Ebenen parallel zu den Grundkreisen derselben legt; es fällt diesemnach der Schwerpunkt *S* der Zone mit dem des Cylindermantels zusammen.

Anmerkung. Der Schwerpunkt von dem Mantel eines schiefen Kegels oder einer schiefen Pyramide steht zwar um ein Drittel der Höhe von der Basis ab, befindet sich aber nicht in der von der Spitze nach dem Schwerpunkte des Umfanges der Basis gehenden Geraden, weil Schnitte parallel zur Basis den Mantel in Ringe zerlegen, die an verschiedenen Stellen ihres Umfanges verschieden breit sind.

Schwerpunkte von Körpern. Der Schwerpunkt eines Prismas *AK*, Fig. 149, ist der Mittelpunkt *S* derjenigen geraden Linie, welche die Schwerpunkte *M* und *N* der beiden Grundflächen *AD* und *GK* verbindet; denn das Prisma läßt sich durch Schnitte parallel zur Basis in lauter congruente Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte in *MN* fallen, und in ihrer stetigen Folge die gleichförmig schwere gerade Linie *MN* selbst bilden. §. 117

Fig. 149.



Aus demselben Grunde befindet sich auch der Schwerpunkt eines Cylinders in der Mitte der Axe desselben.

Der Schwerpunkt einer Pyramide *ADF*, Fig. 150, liegt in der geraden Linie *MF* von der Spitze *F* nach dem Schwerpunkte *M* der Basis; denn alle Schnitte, wie *NOPQR*, haben wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Basis *ABCDE* ihre Schwerpunkte in dieser Linie.

Fig. 150.

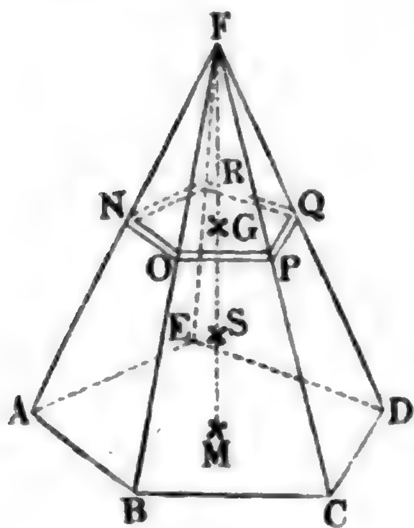
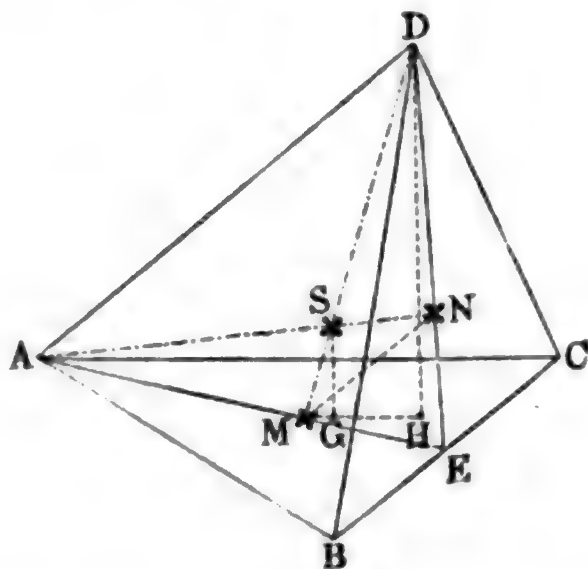


Fig. 151.

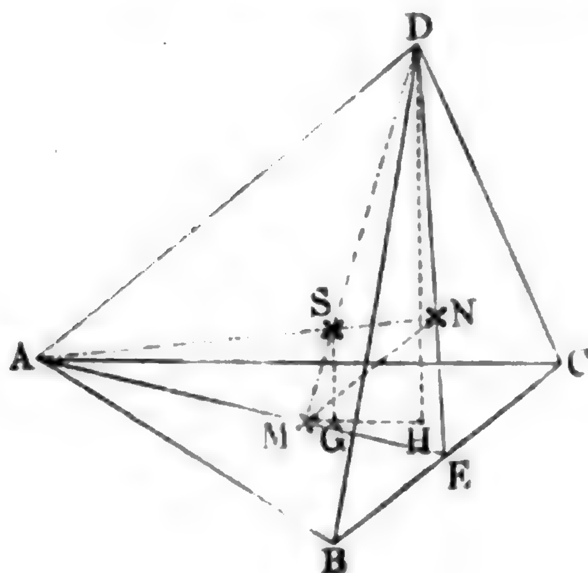


Ist die Pyramide dreiseitig, wie *ABCD*, Fig. 151, so läßt sich jeder der vier Eckpunkte als Spitze und die gegenüberliegende Fläche als Basis ansehen; es bestimmt sich daher der Schwerpunkt *S* in dem Durchschnitte von zwei aus den Ecken *D* und *A* nach den Schwerpunkten *M* und *N* der gegenüberliegenden Flächen *ABC* und *BCD* gehenden geraden Linien.

Giebt man noch die geraden Linien *EA* und *ED* an, so hat man (nach

§. 109) $EM = \frac{1}{3} EA$ und $EN = \frac{1}{3} ED$; es ist daher MN parallel zu AD und $= \frac{1}{3} AD$, sowie auch das Dreieck MNS ähnlich dem Dreiecke DAS. Dieser Aehnlichkeit zufolge hat man wieder $MS = \frac{1}{3} DS$, oder $DS = 3 MS$, also $MD = MS + SD = 4 MS$, und umgekehrt, $MS = \frac{1}{4} MD$. Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide liegt also um ein Viertel derjenigen Linie von der Basis ab, welche die Spitze D der Pyramide mit dem Schwerpunkte M ihrer Basis verbindet.

Fig. 152.



Giebt man noch die Höhenlinien DH und SG an und zieht man die Linie HM, so erhält man die ähnlichen Dreiecke DHM und SGM, in welchen nach dem Vorigen, $SG = \frac{1}{4} DH$ ist. Man kann also behaupten: der Abstand des Schwerpunktes S einer dreiseitigen Pyramide ist von der Basis gleich ein Viertel, und der von der Spitze gleich drei Viertel der Höhe von der ganzen Pyramide entfernt.

Da endlich jede Pyramide, und ebenso jeder Kegel, aus lauter gleich hohen dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt ist, so steht auch der Schwerpunkt aller Pyramiden und Kegel um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche, sowie um drei Viertel derselben von der Spitze ab.

Man findet also den Schwerpunkt einer Pyramide oder den eines Kegels, wenn man in dem Abstande, ein Viertel der Höhe von der Basis, eine Ebene parallel zu dieser legt und den Schwerpunkt des erhaltenen Querschnittes oder den Durchschnitt desselben mit der die Spitze und den Schwerpunkt der Basis verbindenden Geraden aufsucht.

§. 118 Kennt man die Abstände AA_1, BB_1 u. s. w. der vier Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$, Fig. 153, von einer Ebene HK, so erhält man den Abstand SS_1 des Schwerpunktes S von dieser Ebene durch den Mittelwerth:

$$SS_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4},$$

wie sich folgendergestalt beweisen läßt.

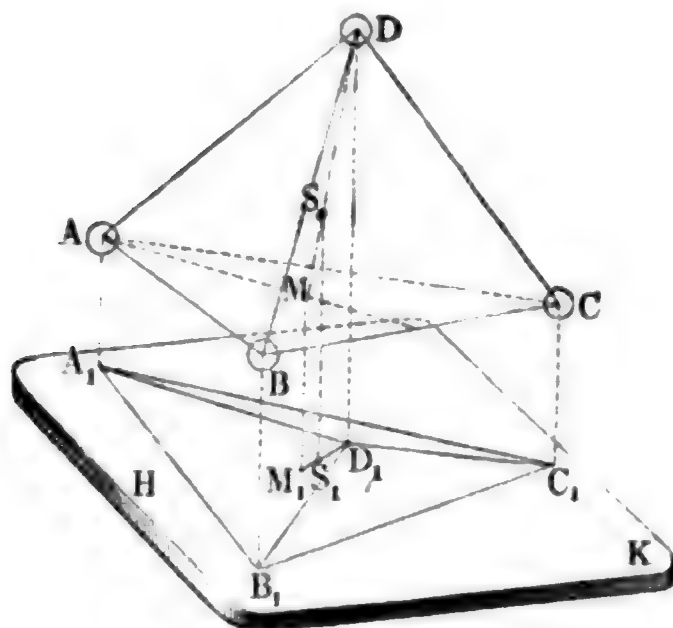
Der Abstand des Schwerpunktes M der Basis ABC von eben dieser Ebene ist (§. 109):

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3},$$

und der Abstand des Schwerpunktes S der Pyramide läßt sich setzen:

$$SS_1 = MM_1 + \frac{1}{4}(DD_1 - MM_1),$$

Fig. 153.



wofern DD_1 der Abstand der Spitze ist; es folgt daher aus der Verbindung der beiden letzten Gleichungen:

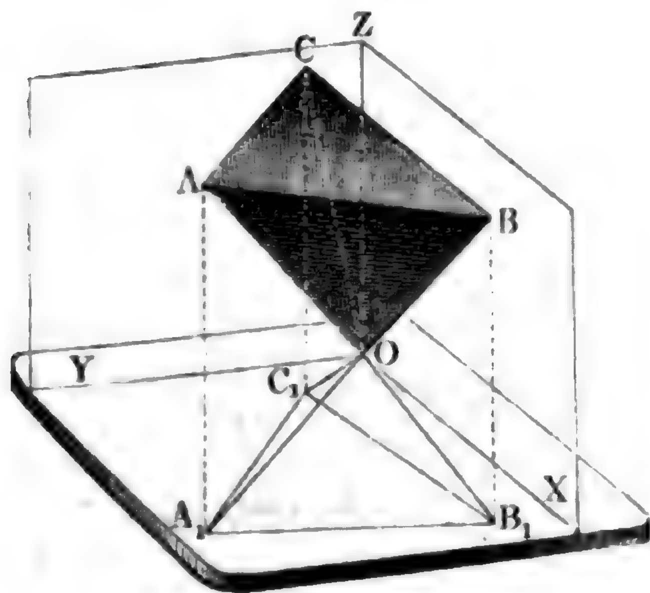
$$SS_1 = y = \frac{3}{4}\,MM_1 + \frac{1}{4}\,DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von vier gleichen, in den Eckpunkten der dreiseitigen Pyramide angebrachten Gewichten ist ebenfalls gleich dem arithmetischen Mittel

$$y = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4};$$

folglich fällt der Schwerpunkt der Pyramide mit dem Schwerpunkte von diesem Gewichtssysteme zusammen.

Fig. 154.



Anmerkung. Auch die Volumenbestimmung einer dreiseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte ist eine sehr einfache. Legen wir durch die Spitze O einer solchen Pyramide $ABCO$, Fig. 154, drei Grundebenen XY, XZ, YZ, und bezeichnen wir die Abstände der Eckpunkte A, B, C von diesen Ebenen durch z_1, z_2, z_3; y_1, y_2, y_3 und $x_1\, x_2\, x_3$, so ist das Volumen der Pyramide:

$$V = \pm \frac{1}{6}\,[x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - (x_1 y_3 z_2 + x_2 y_1 z_3 + x_3 y_2 z_1)],$$

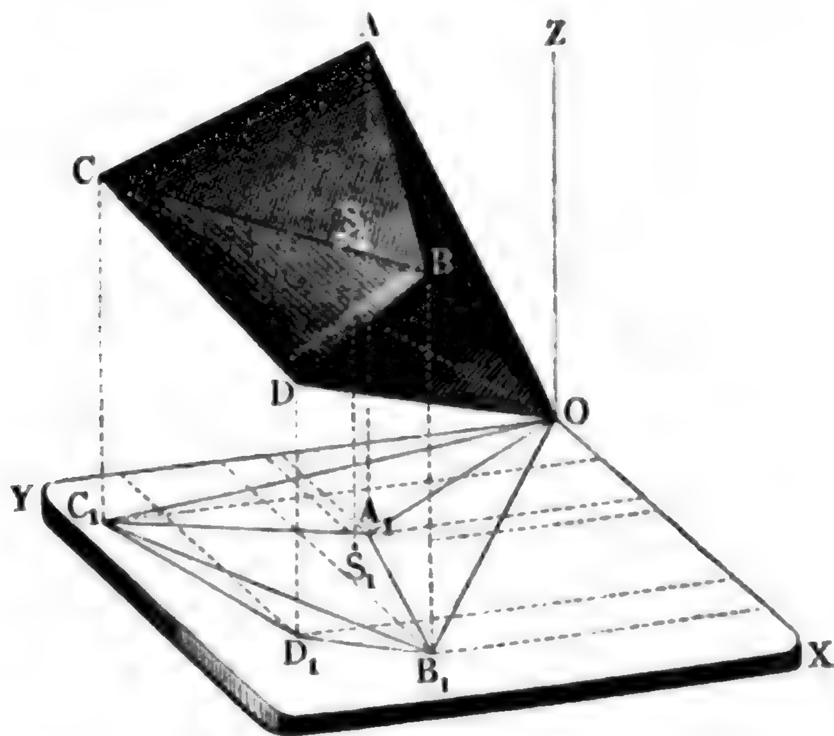
wie sich ergiebt, wenn man die Pyramide als das Aggregat von vier schief abgeschnittenen Prismen ansieht.

Die Abstände des Schwerpunktes dieser Pyramide von den drei Grundebenen yz, xz und xy sind:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4},\ \text{und}\ z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}.$$

§. 119 Da sich jedes Polyeder, wie $ABCDO$, Fig. 155, in lauter dreiseitige Pyramiden, wie $ABCO$, $BCDO$, zerlegen läßt, so kann man auch den

Fig. 155.



Schwerpunkt S desselben finden, wenn man die Volumina und statischen Momente der einzelnen Pyramiden berechnet.

Sind die Abstände der Eckpunkte A, B, C u. s. w. von den durch die gemeinschaftliche Spitze O aller Pyramiden gelegten Coordinatenebenen YZ, XZ und XY: x_1, x_2, x_3 u. s. w., y_1, y_2, y_3 u. s. w. und z_1, z_2, z_3 u. s. w., so hat man die Volumina der einzelnen Pyramiden:

$$V_1 = \pm {}^1\!/_6 (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1),$$

$$V_2 = \pm {}^1\!/_6 (x_2 y_3 z_4 + x_3 y_4 z_2 + x_4 y_2 z_3 - x_2 y_4 z_3 - x_3 y_2 z_4 - x_4 y_3 z_2)$$

u. s. w. und die Abstände ihrer Schwerpunkte von den gedachten Ebenen:

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\ v_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4},\ w_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4},$$

$$u_2 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{4},\ v_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{4},\ w_2 = \frac{z_2 + z_3 + z_4}{4}\ \text{u. s. w.}$$

Aus diesen Werthen berechnen sich endlich die Abstände u, v, w des Schwerpunktes S des ganzen Körpers mittelst der Formeln:

$$u = \frac{V_1 u_1 + V_2 u_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}, \quad v = \frac{V_1 v_1 + V_2 v_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}, \text{ und}$$

$$w = \frac{V_1 w_1 + V_2 w_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}.$$

Beispiel. Ein von sechs Dreiecken begrenzter Körper *ABCDO*, Fig. 155, ist durch folgende Coordinatenwerthe seiner Eckpunkte bestimmt, und man sucht die Coordinaten seines Schwerpunktes.

Gegebene Coordinaten.			Die sechsfachen Inhalte der dreiseitigen Pyramiden *ABCO* und *BCDO*.	Vierfache Coordinaten der Schwerpunkte.			Vierundzwanzigfache statische Momente.		
x	y	z		$4u_n$	$4v_n$	$4w_n$	$24 V_n u$	$24 V_n v_n$	$24 V_n w_n$
20 45	23 . 29	41 30	$6V = \begin{Bmatrix} 20.29.28 \\ 23.30.12 \\ 41.45.40 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 20.40.30 \\ 23.28.45 \\ 41.12.29 \end{Bmatrix} = 31072$	77	92	99	2392544	2858624	307612
12 38	40 35	28 20	$6V = \begin{Bmatrix} 45.35.28 \\ 29.20.12 \\ 30.38.40 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 45.40.20 \\ 29.28.38 \\ 30.12.35 \end{Bmatrix} = 17204$	95	104	78	1634380	1789216	134191
			Summe 48276	. . . . .			4026924	4647840	441804

Aus den Ergebnissen dieser Rechnung folgen nun die Abstände des Schwerpunktes S des ganzen Körpers von den Ebenen YZ, XZ und XY:

$$u = \frac{1}{4} \cdot \frac{4026924}{48276} = 20{,}853,$$

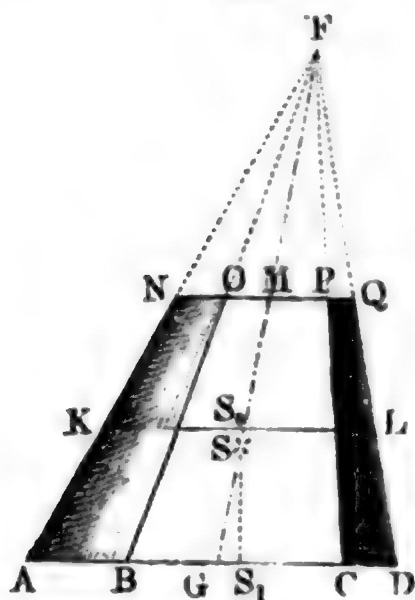
$$v = \frac{1}{4} \cdot \frac{4647840}{48276} = 24{,}069,$$

$$w = \frac{1}{4} \cdot \frac{4418040}{48276} = 22{,}879.$$

Anmerkung. Man kann natürlich den Schwerpunkt eines Polyeders auch dadurch finden, daß man dasselbe auf zweierlei Weise durch je eine Ebene in zwei Stücke zerlegt, die Schwerpunkte je zweier Stücke durch eine Gerade verbindet und den Durchschnitt von beiden Geraden angiebt. Da beide Geraden Schwerlinien des Polyeders sind, so ist natürlich ihr Durchschnitt auch Schwerpunkt des Körpers. Wenn das Polyeder sehr viele Ecken hat, so ist jedoch diese Bestimmungsweise sehr weitläufig, da man dann die Zerlegung des Körpers in Stücke sehr oft wiederholen muß. Bei dem fünfeckigen Körper in Fig. 155, welcher auf zweierlei Weise in je zwei dreiseitigen Pyramiden zu zerlegen ist, liegt der Schwerpunkt im Durchschnitt der Schwerlinien, welche die Schwerpunkte von je zwei dieser Pyramiden mit einander verbinden.

§. 120 Der Schwerpunkt einer abgestumpften Pyramide $ADQN$, Fig. 156, liegt in der Linie GM, welche die Schwerpunkte beider (parallelen) Grundflächen verbindet. Um noch den Abstand dieses Punktes von einer der Grundflächen zu bestimmen, hat man die Volumina und Momente der vollständigen Pyramide ADF und der Ergänzungspyramide NQF zu ermitteln. Sind die Inhalte der Grundflächen AD und NQ, $= G_1$ und G_2, und ist der Normalabstand beider von einander $= h$, so bestimmt sich die Höhe x der Ergänzungspyramide aus der Formel:

Fig. 156.



$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{(h+x)^2}{x^2},$$

welche $$\frac{h}{x} + 1 = \sqrt{\frac{G_1}{G_2}}, \text{ also } x = \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}},$$

sowie $$h + x = \frac{h\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} \text{ giebt.}$$

Das Moment der ganzen Pyramide in Beziehung auf die Basis G_1 ist nun:

$$\frac{G_1(h+x)}{3} \cdot \frac{h+x}{4} = {}^1/_{12} \cdot \frac{h^2 G_1^2}{(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2},$$

sowie das der Ergänzungspyramide:

$$\frac{G_2 x}{3}\left(h + \frac{x}{4}\right) = {}^1/_3 \frac{h^2 \sqrt{G_2^3}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}} + {}^1/_{12} \cdot \frac{h^2 G_2^2}{(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2};$$

es folgt daher das Moment der abgekürzten Pyramide:

$$\frac{h^2}{12(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2} \cdot [G_1^2 - 4(\sqrt{G_1 G_2^3} - G_2^2) - G_2^2]$$

$$= \frac{h^2 (G_1^2 - 4 G_2 \sqrt{G_1 G_2} + 3 G_2^2)}{12(G_1 - 2\sqrt{G_1 G_2} + G_2)} = \frac{h^2}{12} \cdot (G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3 G_2).$$

Nun ist noch der Inhalt der abgekürzten Pyramide:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)\frac{h}{3};$$

daher ergiebt sich endlich der Abstand SS_1 ihres Schwerpunktes S von der Basis:

$$y = \frac{G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3\,G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Der Abstand $S_0 S$ dieses Punktes von der Mittelebene KL, welche die Höhe h der Pyramide halbirt und mit den Grundflächen derselben parallel läuft, ist:

$$y_1 = \frac{h}{4} - y = \frac{[2(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) - (G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3\,G_2)]}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2} \frac{h}{4}$$

$$= \left(\frac{G_1 - G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2}\right) \frac{h}{4}.$$

Sind die Halbmesser der Grundflächen eines **abgekürzten Kegels** r_1 und r_2, ist also $G_1 = \pi r_1^2$ und $G_2 = \pi r_2^2$, so hat man für diesen

$$y = \frac{r_1^2 + 2\,r_1 r_2 + 3\,r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4} \text{ und}$$

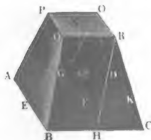
$$y_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Beispiel. Der Schwerpunkt eines abgekürzten Kegels von der Höhe $h = 20$ Zoll und den Halbmessern $r = 12$ und $r_1 = 8$ Zoll liegt, wie alle Mal, in der die Mittelpunkte beider kreisförmigen Grundflächen verbindenden Linie, und steht von der größeren um

$$y = {}^{20}/_4 \cdot \frac{12^2 + 2 \,.\, 12 \,.\, 8 + 3 \,.\, 8^2}{12^2 + 12 \,.\, 8 + 8^2} = \frac{5 \,.\, 528}{304} = \frac{2640}{304} = 8{,}684 \text{ Zoll ab.}$$

Ein **Obelisk**, d. i. ein von zwei unähnlichen rectangulären Grundflächen §. 121
und von vier Trapezen umschlossener Körper $ACOQ$, Fig. 157, läßt sich in ein Parallelepiped $AFRP$, in zwei dreiseitige Prismen $EHRQ$ und $GKRO$ und in eine vierseitige Pyramide HKR zerlegen; man kann daher mit Hülfe der Momente dieser Bestandtheile den Schwerpunkt des ganzen Körpers finden.

Fig. 157.



Es läßt sich sehr leicht einsehen, daß die gerade Linie von der Mitte der einen Basis nach der Mitte der anderen, Schwerlinie dieses Körpers ist; es bleibt also nur noch der Abstand des Schwerpunktes von der einen Basis zu bestimmen übrig. Bezeichnen wir die Länge BC und Breite AB der einen Basis durch l_1 und b_1, sowie die Länge QR und Breite PQ der anderen Basis durch l_2 und b_2, und die Höhe des Körpers oder den Abstand beider Grundflächen von einander, durch h. Dann

ist der Inhalt des Parallelepipeds $= b_2 l_2 h$, und das Moment desselben $b_2 l_2 h \cdot \frac{h}{2} = {}^1/_2\, b_2 l_2 h^2$, ferner der Inhalt der beiden dreiseitigen Prismen

$$= ([b_1 - b_2]\, l_2 + [l_1 - l_2]\, b_2) \frac{h}{2},$$

und deren Moment

$$= ([b_1 - b_2]\, l_2 + [l_1 - l_2]\, b_2) \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3},$$

endlich der Inhalt der Pyramide

$$= (b_1 - b_2)\, (l_1 - l_2) \frac{h}{3},$$

und deren Moment

$$= (b_1 - b_2)\, (l_1 - l_2) \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4}.$$

Hieraus folgt das Volumen des ganzen Körpers:

$$V = (6 b_2 l_2 + 3 b_1 l_2 + 3 l_1 b_2 - 6 b_2 l_2 + 2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 - 2 b_1 l_2 - 2 b_2 l_1) \cdot \frac{h}{6}$$

$$= (2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 + b_1 l_2 + l_1 b_2) \frac{h}{6},$$

sowie dessen Moment:

$$Vy = (6 b_2 l_2 + 2 b_1 l_2 + 2 l_1 b_2 - 4 b_2 l_2 + b_1 l_1 + b_2 l_2 - b_1 l_2 - l_1 b_2) \cdot \frac{h^2}{12}$$

$$= (3 b_2 l_2 + b_1 l_1 + b_1 l_2 + b_2 l_1) \frac{h^2}{12},$$

und es ergiebt sich der Abstand seines Schwerpunktes S von der Grundfläche $b_1 l_1$:

$$y = \frac{b_1 l_1 + 3 b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1}{2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1} \cdot \frac{h}{2}.$$

Es läßt sich auch (s. die Planimetrie und Stereometrie von C. Koppe):

$$V = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h + \frac{b_1 - b_2}{2} \cdot \frac{l_1 - l_2}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

setzen. Der Abstand des Schwerpunktes y_1 von der mittleren Querschnittsebene bestimmt sich durch die Formel:

$$y_1 = \frac{h}{2} - y = \frac{b_1 l_1 - b_2 l_2}{3 (b_1 + b_2)\, (l_1 + l_2) + (b_1 - b_2)\, (l_1 - l_2)} \cdot h.$$

Anmerkung. Diese Formel findet auch ihre Anwendung bei Körpern mit elliptischen Grundflächen. Sind die Halbaren der einen Grundfläche a_1 und b_1 und die der anderen a_2 und b_2, so ist das Volumen eines solchen Körpers (Kübels):

$$V = \frac{\pi h}{6} (2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

und der Abstand seines Schwerpunktes von der Basis $\pi a_1 b_1$:

$$y = \frac{a_1 b_1 + 3 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1}{2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1} \cdot \frac{h}{2}.$$

Beispiel. Ein Teichdamm *ACOQ*, Fig. 158, von 20 Fuß Höhe, ist unten 250 Fuß lang und 40 Fuß breit, dagegen oben 400 Fuß lang und 15 Fuß breit;

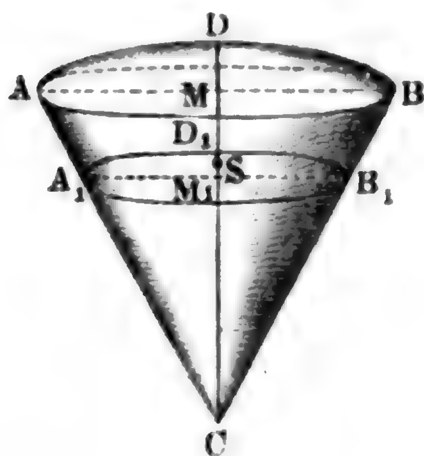
Fig. 158.

man sucht den Abstand seines Schwerpunktes von der Basis. Hier ist $b_1 = 40$, $l_1 = 250$, $b_2 = 15$, $l_2 = 400$, und $h = 20$, daher der gesuchte Verticalabstand:

$$y = \frac{40 \,.\, 250 + 3 \,.\, 15 \,.\, 400 + 40 \,.\, 400 + 15 \,.\, 250}{2\; 40 \,.\, 250 + 2 \,.\, 15 \,.\, 400 + 40 \,.\, 400 + 15 \,.\, 250} \cdot {}^{20}/_{2}$$
$$= \frac{4775}{5175} \cdot 10 = \frac{1910}{207} = 9{,}227 \text{ Fuß}.$$

Dreht sich ein Kreisausschnitt *ACD*, Fig. 159, um seinen Halbmesser *CD*, so entsteht ein **Kugelausschnitt** *ACB*, dessen Schwerpunkt wie folgt bestimmt wird. Man kann sich diesen Körper als einen Inbegriff von unendlich vielen und unendlich dünnen Pyramiden vorstellen, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt *C* ist und deren Grundflächen die Kugelmütze *ADB* bilden. Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden stehen um $^3/_4$ des Kugelhalbmessers *CD* vom Mittelpunkte *C* ab, es bilden daher dieselben eine zweite Kugelmütze $A_1 D_1 B_1$ vom Halbmesser $CD_1 = {}^3/_4\, CD$. Der Schwerpunkt *S* dieser krummen Fläche ist aber auch der Schwerpunkt des Kugelausschnittes, weil sich die Gewichte der Elementarpyramiden auf diese Fläche gleichförmig vertheilen, diese also gleichförmig schwer ausfällt. §. 12

Fig. 159.



Setzen wir nun den Halbmesser $CA = CD = r$ und die Höhe *DM* der äußeren Calotte $= h$, so erhalten wir für die innere Calotte $CD_1 = {}^3/_4\, r$, und $M_1 D_1 = {}^3/_4\, h$, folglich (§. 116) $SD_1 = {}^1/_2\, MD_1 = {}^3/_8\, h$ und den Abstand des Schwerpunktes des Kugelausschnittes vom Mittelpunkte *C*:

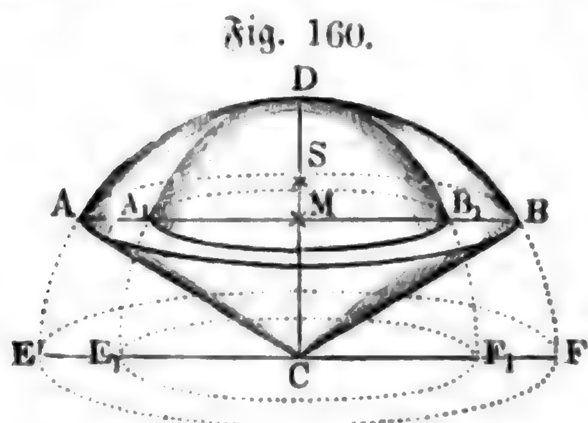
$$CS = CD_1 - SD_1 = {}^3/_4\, r - {}^3/_8\, h = {}^3/_4 \left(r - \frac{h}{2}\right).$$

Für die **Halbkugel** ist z. B. $h = r$, daher der Abstand ihres Schwerpunktes *S* vom Mittelpunkte *C*:

$$CS = {}^3/_4 \cdot \frac{r}{2} = {}^3/_8\, r.$$

123 Den Schwerpunkt S von einem Kugelsegmente ABD, Fig. 160, erhält man, indem man das Moment dieses Segmentes gleichsetzt der Differenz zwischen dem Momente des Ausschnittes $ADBC$ und dem des Kegels ABC. Bezeichnen wir wieder den Kugelhalbmesser CD durch r und die Höhe DM durch h, so erhalten wir das Moment des Ausschnittes

Fig. 160.



$$= {}^2/_3\,\pi r^2 h\,.\,{}^3/_8\,(2r-h) = {}^1/_4\,\pi r^2 h\,(2r-h).$$

und das des Kegels

$$= {}^1/_3\,\pi h\,(2r-h)\,.\,(r-h)\,.\,{}^3/_4\,(r-h) = {}^1/_4\,\pi h\,(2r-h)\,(r-h)^2;$$

daher ist das Moment des Kugelsegmentes

$$Vy = {}^1/_4\,\pi h\,(2r-h)\,(r^2-[r-h]^2) = {}^1/_4\,\pi h^2\,(2r-h)^2.$$

Der Inhalt dieses Segmentes ist aber

$$V = {}^1/_3\,\pi h^2\,(3r-h);$$

es folgt daher der in Frage stehende Abstand:

$$CS = y = \frac{{}^1/_4\,\pi h^2\,(2r-h)^2}{{}^1/_3\,\pi h^2\,(3r-h)} = {}^3/_4\,.\,\frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

Setzt man wieder $h = r$, so geht das Segment in eine Halbkugel über, und es folgt wie oben, $CS = {}^3/_8\,r$.

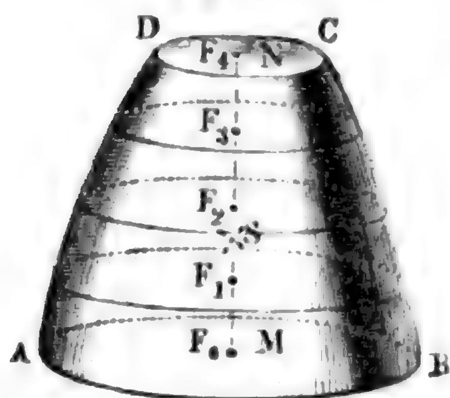
Diese Formel gilt selbst für das Segment eines Sphäroides $A_1 DB_1$, welches entsteht, wenn sich der elliptische Bogen DA_1 um die große Halbaxe $CD = r$ dreht; denn zerschneidet man beide Segmente durch Ebenen parallel zur Basis AB in lauter dünne Scheiben, so ist das Verhältniß von je zwei derselben unveränderlich $= \frac{\overline{MA_1}^2}{\overline{MA}^2} = \frac{\overline{CE_1}^2}{\overline{CE}^2} = \frac{b^2}{r^2}$, wenn b die kleine Halbaxe der Ellipse bezeichnet. Man muß also sowohl das Volumen, als auch das Moment des Kugelsegmentes durch $\frac{b^2}{r^2}$ multipliciren, um das Volumen und das Moment des Segmentes vom Sphäroid zu erhalten, und verändert dadurch den Quotienten $CS = \frac{\text{Moment}}{\text{Volumen}}$, um Nichts.

Es ist überhaupt $CS = y = {}^3/_4\,\frac{(2r-h)^2}{3r-h}$, wobei r die Größe derjenigen Halbaxe bezeichnet, um welches sich die Ellipse bei Entstehung des Sphäroides dreht.

124 **Anwendung der Simpson'schen Regel.** Um den Schwerpunkt eines ungesetzmäßigen Körpers $ABCD$, Fig 161, zu finden, zerlege

man denselben durch gleich viel von einander abstehende Ebenen in dünne Scheiben, bestimme die Inhalte der erhaltenen Durchschnitte und deren Momente in Hinsicht auf die als Basis dienende erste Parallelebene AB, und vereinige endlich beide durch die Simpson'sche Regel.

Fig. 161.



Sind die Inhalte dieser Durchschnitte F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 und ist die ganze Höhe oder der Abstand MN zwischen den äußersten Parallelebenen, $= h$, so hat man das Volumen des Körpers nach der Simpson'schen Regel (annähernd):

$$V = (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4)\frac{h}{12}.$$

Multiplicirt man noch in dieser Formel jede Fläche durch ihren Abstand von der Basis, so erhält man das Moment des Körpers, nämlich:

$$Vy = (0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4F_4)\frac{h}{4}\cdot\frac{h}{12},$$

und es giebt die Division beider Ausdrücke durch einander den gesuchten Abstand des Schwerpunktes S:

$$MS = y = \frac{(0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.F_4)}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4}\frac{h}{4}.$$

Ist die Zahl der plattenförmigen Elemente $= 6$, so hat man:

$$y = \frac{0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.2F_4 + 5.4F_5 + 6.F_6}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + 2F_4 + 4F_5 + F_6}\cdot\frac{h}{6}.$$

Es ist leicht zu erachten, wie man diese Formel umzuändern hat, wenn die Zahl der Schnitte eine andere ist. Nur fordert diese Regel, daß die Zahl der abgeschnittenen Stücke eine gerade, die Flächenzahl also eine ungerade ist.

In vielen Fällen der Anwendung genügt die Bestimmung eines Abstandes, weil außerdem noch eine Schwerlinie bekannt ist. Die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Körper sind auf der Drehbank erzeugte Rotationskörper, deren Rotationsaxe die Schwerlinie der Körper ist.

Endlich findet die Formel auch ihre Anwendung bei Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche, in welchem Falle die Querschnitte F_0, F_1, F_2 u. s. w. in Linien übergehen.

Fig. 162.

Beispiel 1. Für das parabolische Conoid ABC, Fig. 162, welches durch Umdrehung des Parabelstückes ABM um seine Axe AM entstanden ist, erhält man, wenn man nur einen Mittelschnitt DNE durchführt, Folgendes:

Es sei die Höhe $AM = h$, der Halbmesser $BM = r$, $AN = NM = \frac{h}{2}$ und daher der Radius $DN = r\sqrt{1/2}$. Der Inhalt des

Schnittes durch A ist $F_0 = 0$, durch N, $F_1 = \pi \overline{DN}^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ und durch M, $F_2 = \pi r^2$. Hiernach folgt das Volumen dieses Körpers:

$$V = \frac{h}{6}(0 + 4F_1 + F_2) = \frac{h}{6}(2\pi r^2 + \pi r^2) = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{2} F_2 h;$$

sowie das Moment desselben:

$$Vy = \frac{h^2}{12}(1 \cdot 2\pi r_2 + 2 \cdot \pi r^2) = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2 = \frac{1}{3} F_2 h^2,$$

und daher der Abstand seines Schwerpunktes S vom Scheitel:

$$AS = y = \frac{\frac{1}{3} F_2 h^2}{\frac{1}{2} F_2 h} = \frac{2}{3} h.$$

Fig. 163.

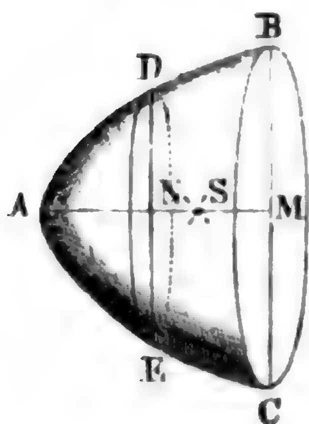
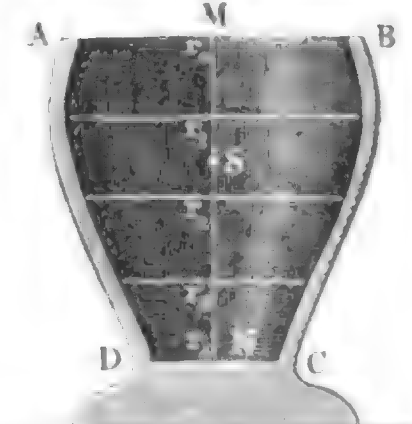


Fig. 164.



Beispiel 2. Das Gefäß $ABCD$, Fig. 164, hat die mittleren halben Weiten $r_0 = 1$ Zoll, $r_1 = 1{,}1$ Zoll, $r_2 = 0{,}9$ Zoll, $r_3 = 0{,}7$ Zoll, $r_4 = 0{,}4$ Zoll bei einer Höhe $MN = 2{,}5$ Zoll; man sucht den Schwerpunkt S seines Fassungsraumes. Die Querschnitte sind $F_0 = 1 \cdot \pi$, $F_1 = 1{,}21 \cdot \pi$, $F_2 = 0{,}81 \cdot \pi$, $F_3 = 0{,}49 \cdot \pi$, $F_4 = 0{,}16 \cdot \pi$, es ist daher der Abstand seines Schwerpunktes von der Horizontalebene AB:

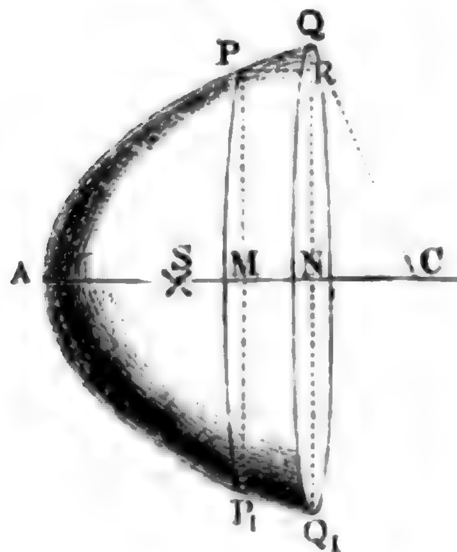
$$MS = \frac{0 \cdot 1\pi + 1 \cdot 4 \cdot 1{,}21 \cdot \pi + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}81\pi + 3 \cdot 4 \cdot 0{,}49\pi + 4 \cdot 0{,}16 \cdot \pi}{1\pi + 4 \cdot 1{,}21\pi + 2 \cdot 0{,}81\pi + 4 \cdot 0{,}49\pi + 0{,}16 \cdot \pi} \cdot \frac{2{,}5}{4}$$

$$= \frac{14{,}60}{9{,}58} \cdot \frac{2{,}5}{4} = \frac{36{,}50}{38{,}32} = 0{,}9502 \text{ Zoll}.$$

Der Fassungsraum ist $V = 9{,}58\pi \cdot \frac{2{,}5}{12} = 6{,}270$ Cub.-Zoll.

125) **Schwerpunktsbestimmung von Rotationsflächen und Rotationskörpern.** Die Schwerpunkte krummer Flächen und krummflächiger Körper von bestimmten Formen lassen sich allgemein nur mit Hülfe der Differenzial- und Integralrechnung bestimmen. In der Praxis kommen vorzüglich die Rotationsflächen und Rotationskörper vor, daher möge im Folgenden auch nur von der Bestimmung der Schwerpunkte dieser Gebilde die Rede sein. Dreht sich die ebene Curve AP, Fig. 165, um die Axe AC, so beschreibt sie eine sogenannte Rotationsfläche APP_1, und dreht sich die von der Curve AP und ihren

Fig. 165.



Coordinaten AM und MP begrenzte Fläche APM um eben diese Axe, so wird dadurch ein von der Rotationsfläche APP_1 und von einer Kreisfläche PMP_1 begrenzter Rotationskörper erzeugt.

Bezeichnen wir die Abscisse AM durch x, die entsprechende Ordinate MP durch y, sowie den zugehörigen Bogen AP durch s, ferner das Abscissenelement $MN = PR$ durch ∂x, das Ordinatenelement QR durch ∂y und das Curvenelement PQ durch ∂s, so haben wir den Inhalt des bei der Rotatoin von ∂s durchlaufenen gürtelförmigen Elementes PQQ_1P_1 der Rotationsfläche $APP_1 = O$,

$$\partial O = 2\pi . PM . PQ = 2\pi y \partial s,$$

und dagegen den Inhalt des von diesem Flächenelemente umgürteten Elementes des Rotationskörpers $APP_1 = V$:

$$\partial V = \pi \overline{PM}^2 . MN = \pi y^2 \partial x.$$

Weil beide Elemente um die Abscisse x von einer durch A gehenden und auf der Axe AC winkelrecht stehenden Ebene abstehen, so ist das Moment von ∂O:

$$x \partial O = 2\pi x y \partial s,$$

und das von ∂V:

$$x \partial V = \pi x y^2 \partial x.$$

Da nun
$$O = \int 2\pi y \partial s = 2\pi \int y \partial s, \text{ und}$$
$$V = \int \pi y^2 \partial x = \pi \int y^2 \partial x$$

ist, und dem letzteren zufolge das Moment von O:

$$\int 2\pi x y \partial s = 2\pi \int x y \partial s,$$

und das von V:

$$\int \pi x y^2 \partial x = \pi \int x y^2 \partial x$$

sich ergiebt, so ist demnach der Abstand $AS = y$ des Schwerpunktes S von dem Anfangspunkte A:

1) für die Rotationsfläche:

$$u = \frac{2\pi \int x y \partial s}{2\pi \int y \partial s} = \frac{\int x y \partial s}{\int y \partial s}, \text{ und dagegen}$$

2) für den Rotationskörper:

$$u = \frac{\pi \int x y^2 \partial x}{\pi \int y^2 \partial x} = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y^2 \partial x}.$$

Z. B. für eine Kugelcalotte mit dem Halbmesser $CQ = r$ hat man, da hier

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{CQ}{QN}, \text{ d. i. } \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{r}{y}, \text{ also } y \partial s = r \partial x \text{ ist:}$$

$$AS = u = \frac{\int x r \partial x}{\int r \partial x} = \frac{\int x \partial x}{\int \partial x} = \frac{1/_2\, x^2}{x} = 1/_2\, x = 1/_2\, AM.$$

(Vergleiche §. 116.)

Für das Kugelsegment ist dagegen, da sich $y^2 = 2rx - x^2$ setzen läßt:

$$AS = u = \frac{\int (2rx - x^2)\, x \partial x}{\int (2rx - x^2)\, \partial x} = \frac{\int 2 r x^2 \partial x - \int x^3 \partial x}{\int 2 r x \partial x - \int x^2 \partial x}$$

$$= \frac{2/_3\, r x^3 - 1/_4\, x^4}{r x^2 - 1/_3\, x^3} = \frac{(2/_3\, r - 1/_4\, x)\, x}{r - 1/_3\, x} = \left(\frac{8r - 3x}{3r - x}\right) \frac{x}{4},$$

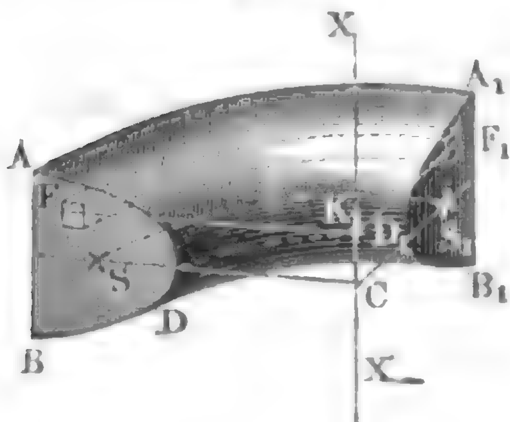
und folglich:

$$CS = r - u = 3/_4\, \frac{(2r - x)^2}{3r - x}.$$ (Vergl. §. 123.)

§. 126 **Guldinische Regel.** Eine interessante und zuweilen sehr nützliche Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist die Guldinische Regel oder die barycentrische Methode (franz. méthode centrobarique; engl. the properties of Guldinus). Dieser zufolge ist der Inhalt eines Rotationskörpers (oder einer Rotationsfläche) gleich dem Producte aus der Erzeugungsfläche (oder Erzeugungslinie) und dem bei der Erzeugung des Rotationskörpers (oder der Rotationsfläche) durchlaufenen Wege ihres Schwerpunktes. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun.

Dreht sich die ebene Fläche ABD, Fig. 166, um eine Axe $X\overline{X}$, so beschreibt jedes Element F_1, F_2 u. s. w. derselben einen Ring; sind die Entfernungen F_1K_1, F_2K_2 u. s. w. dieser Elemente von der Umdrehungsaxe $X\overline{X}_1 = r_1, r_2$ u. s. w. und ist der Umdrehungswinkel $FKF_1 = SCS_1 = \alpha^0$, also der entsprechende Bogen für den Halbmesser 1, $= \alpha$, so sind die bogenförmigen Wege der Elemente $= r_1\alpha$, $r_2\alpha$ u. s. w. Die von den Elementen F_1, F_2 u. s. w. durchlaufenen Räume lassen sich als krummgebogene Prismen von den Grundflächen F_1, F_2 u. s. w. und von den Höhen $r_1\alpha$, $r_2\alpha$ u. s. w. ansehen, haben also die Inhalte $F_1 r_1 \alpha$, $F_2 r_2 \alpha$ u. s. w., und es ist sonach das Volumen des ganzen Körpers $ABDD_1B_1A_1$:

Fig. 166.



$$V = F_1 r_1 \alpha + F_2 r_2 \alpha \ldots = (F_1 r_1 + F_2 r_2 + \ldots) \,.\, \alpha.$$

Ist $CS = y$, der Abstand des Schwerpunktes S der Erzeugungsfläche von der Umdrehungsaxe, so hat man auch:

$$(F_1 + F_2 + \cdots) y = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \cdots,$$

und folglich das **Volumen des ganzen Körpers**:

$$V = (F_1 + F_2 + \cdots) y \alpha.$$

Aber $F_1 + F_2 + \cdots$ ist der Inhalt der ganzen Fläche F und $y \alpha$ ist der vom Schwerpunkte S durchlaufene Kreisbogen $SS_1 = w$; es folgt daher $V = Fw$, wie oben behauptet wurde.

Diese Formel gilt auch für die Rotation einer Linie, weil sich dieselbe als eine Fläche von unendlich kleiner Breite ansehen läßt, es ist nämlich $F = lw$, d. h. die **Rotationsfläche** ist ein Product aus der Erzeugungslinie (l) und dem Wege (w) ihres Schwerpunktes.

Beispiel 1. Bei einem halben Ringe mit elliptischem Querschnitte $ABED$, Fig. 167, seien die Halbaxen des Querschnittes $CA = a$ und $CB = b$, und sei die Entfernung CM des Mittelpunktes C dieses Schnittes von der Axe $X\overline{X}. = r$. Dann ist die elliptische Erzeugungsfläche $F = \pi a b$, und der Weg ihres Schwerpunktes (C), $w = \pi r$; daher das Volumen dieses halben Ringes: $V = \pi^2 a b r$, und das des ganzen Ringes: $V_1 = 2V = 2 \pi^2 a b r$.

Sind die Dimensionen folgende: $a = 5$ Zoll, $b = 3$ Zoll, $r = 6$ Zoll, so ist das Volumen eines Viertelringes:

$$\tfrac{1}{2} . \pi^2 . 5 . 3 . 6 = 9{,}8696 . 5 . 9 = 444{,}132 \text{ Cubikzoll.}$$

Fig. 167.

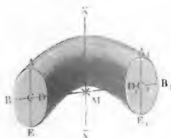
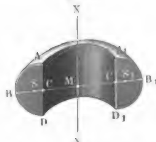


Fig. 168.



Beispiel 2. Für einen Ring mit halbkreisförmigem Querschnitte ABD, Fig. 168, ist, wenn $CA = CB = a$, den Halbmesser dieses Querschnittes und $MC = r$, den des hohlen Raumes oder Halses bezeichnet, das Volumen

$$V = \frac{\pi a^2}{2} \cdot 2\pi \left(r + \frac{4a}{3\pi}\right) = \pi a^2 \left(\pi r + \tfrac{4}{3} a\right).$$

Beispiel 3. Dreht sich ein Kreissegment ADB, Fig. 169 (a. f. S.), um den mit seiner Sehne AB parallel laufenden Durchmesser EF, so beschreibt es eine Kugel AD_1B mit einer cylindrischen Aushöhlung ABB_1A_1. Ist nun A der

Inhalt dieses Segmentes und s die Größe der Sehne $AB = A_1 B_1$ desselben, so hat man nach §. 114 den Abstand seines Schwerpunktes S vom Mittelpunkte C:

$$CS = y = \frac{s^3}{12\,A},$$

und daher das Volumen der erzeugten Hohlkugel:

$$V = 2\,\pi\,y\,A = 2\,\pi\,\frac{s^3}{12} = \frac{\pi\,s^3}{6}.$$

Bei der Vollkugel ist die Sehne oder Höhe der cylindrischen Bohrung dem Durchmesser d der Kugel gleich geworden, daher der Inhalt derselben:

$$V = \frac{\pi\,d^3}{6},$$

wie bekannt.

Beispiel 4. Es sei die Oberfläche und der Inhalt der Kuppel ADB, Fig. 170, eines Klostergewölbes zu finden, und zu diesem Zwecke die halbe Weite

Fig. 169.

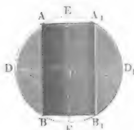
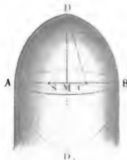


Fig. 170.



$MA = MB = a$ und die Höhe $MD = h$ gegeben. Aus beiden Dimensionen folgt der Halbmesser $CA = CD$ des Erzeugungskreises:

$$r = \frac{a^2 + h^2}{2\,a},$$

und der Centriwinkel $ACD = \alpha$, wenn man setzt:

$$sin.\,\alpha = \frac{h}{r}.$$

Der Schwerpunkt S eines Bogens

$$DAD_1 = 2\,AD$$

ist bestimmt durch die Entfernung:

$$CS = r\,.\,\frac{\text{Sehne } MD}{\text{Bogen } AD} = \frac{r\,sin.\,\alpha}{\alpha}, \text{ ferner } CM = r\,cos.\,\alpha,$$

es ist folglich der Abstand des Schwerpunktes S von der Axe MD:

$$MS = \frac{r\,sin\,\alpha}{\alpha} - r\,cos.\,\alpha = r\left(\frac{sin.\,\alpha}{\alpha} - cos.\,\alpha\right),$$

und der Weg des Schwerpunktes bei Erzeugung der Fläche ADB:

$$w = 2\,\pi\,r\left(\frac{sin.\,\alpha}{\alpha} - cos.\,\alpha\right).$$

Die Erzeugungslinie DAD_1 ist $2r\alpha$, folglich ihre Hälfte $AD, = r\alpha$, und die von der letzteren beschriebene Rotationsfläche ADB:

$$O = r\alpha . 2\pi r\left(\frac{sin.\,\alpha}{\alpha} - cos.\,\alpha\right) = 2\pi r^2 (sin.\,\alpha - \alpha\, cos.\,\alpha)$$

zu setzen.

Sehr gewöhnlich ist $\alpha^0 = 60^0$, also:

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\ sin.\,\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und } cos.\,\alpha = \frac{1}{2}:$$

daher folgt dann der gesuchte Inhalt:

$$O = \pi r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2{,}1515 . r^2.$$

Für das Segment $DAD_1 = A = r^2(\alpha - \frac{1}{2} sin.\,2\alpha)$ ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte C:

$$= \frac{(2 . MD)^3}{12 A} = \frac{2}{3} . \frac{r^3 sin.\,\alpha^3}{A},$$

daher Abstand von der Axe:

$$MS = CS - CM = \frac{2}{3}\frac{r^3 sin.\,\alpha^3}{A} - r\, cos.\,\alpha,$$

endlich der Weg dieses Schwerpunktes bei einer Umdrehung um MD:

$$w = \frac{2\pi r}{A}\left(\frac{2}{3} r^2 sin.\,\alpha^3 - A\, cos.\,\alpha\right) = \frac{2\pi r^3}{A}\left[\frac{2}{3} sin.\,\alpha^3 - (\alpha - \frac{1}{2} sin.\,2\alpha)\, cos.\,\alpha\right].$$

Das Volumen des ganzen durch das Segment DAD_1 erzeugten Körpers ergiebt sich, wenn man diesen Weg durch A multiplicirt, und das Volumen der Kuppel wird gefunden, wenn man hiervon die Hälfte nimmt, also:

$$V = \pi r^3\left[\frac{2}{3} sin.\,\alpha^3 - (\alpha - \frac{1}{2} sin.\,2\alpha)\, cos.\,\alpha\right].$$

Z. B. für $\alpha^0 = 60^0$, also:

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\text{ ist } sin.\,\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ sin.\,2\alpha = \frac{1}{2} \text{ und } cos.\,\alpha = \frac{1}{2}, \text{ daher:}$$

$$V = \pi r^3\left(\frac{3}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}3956 . r^3.$$

Die Guldini'sche Regel findet auch ihre Anwendung bei solchen Körpern, §. 127
welche entstehen, wenn sich die Erzeugungsfläche beim Fortrücken ihres Schwerpunktes längs irgend einer Curve stets winkelrecht gegen dieselbe stellt, weil sich jede Curve aus unendlich vielen und unendlich kleinen Kreisbögen zusammensetzen läßt. Es ist auch hier das Volumen des erzeugten Körpers das Product aus der Erzeugungsfläche und dem Wege ihres Schwerpunktes. Ebenso ist diese Regel noch dann anwendbar, wenn die Erzeugungsfläche bei ihrer Fortbewegung immer gegen die Projection des Weges ihres Schwerpunktes auf irgend eine Ebene, rechtwinkelig gerichtet bleibt. Es ist hier aber die Erzeugungsfläche nicht mit dem Wege, sondern mit der Projection des Weges zu multipliciren.

Hiernach wird z. B. das Volumen eines Schraubengewindes AHK, Fig. 171,

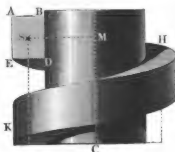
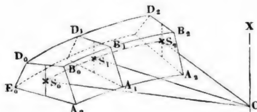


Fig. 171.

bestimmt, durch das Product aus dem Querschnitt $ABDE$ desselben und aus dem Umfang des Kreises, dessen Halbmesser der Abstand MS des Schwerpunktes S der Fläche $ABDE$ von der Axe CM der Schraubenspindel ist.

In manchen Fällen kann man auch bei Bestimmung körperlicher Räume die Guldini'sche Regel mit der Simpson'schen Regel vereinigt anwenden. Um z. B. den Inhalt des krummen Dammkörpers $A_0 D_0 B_1 D_2 A_2$, Fig. 172, zu finden, hat man nur nöthig, den Krümmungswinkel $S_0 C S_2 = 2 S_0 C S_1 = 2 S_1 C S_2 = \beta$,

Fig. 172.



ferner die Querschnitte $\overline{A_0 D_0} = F_0$, $A_1 D_1 = F_1$ und $A_2 D_2 = F_2$, sowie die Abstände $C S_0 = r_0$, $C S_1 = r_1$ und $C S_2 = r_2$ der Schwerpunkte S_0, S_1 und S_2 dieser Querschnitte von der verticalen Centralaxe CX zu kennen. Das Volumen V dieses Körpers bestimmt sich dann durch die Formel:

$$V = \beta \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right) = \frac{\beta^0 \pi}{180^0} \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right)$$

$$= 0{,}01745\, \beta^0 \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right).$$

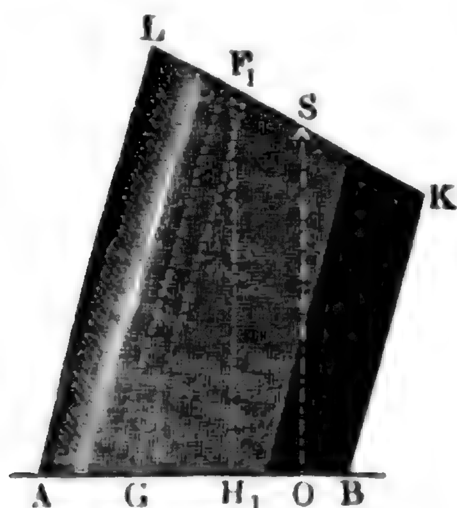
Sind die Halbmesser r_0, r_1 und r_2 einander gleich, oder wenig von einander verschieden, so kann man $r_0 = r_1 = r_2 = r$, und daher

$$V = 0{,}1745\, \beta^0 r \left(\frac{F_0 + 4 F_1 + F_2}{6}\right) \text{ setzen.}$$

§. 128 Eine andere, mit der letzten Regel in naher Verbindung stehende Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist folgende.

Man kann annehmen, daß jeder schief abgeschnittene, prismatische Körper $ABKL$, Fig. 173, aus lauter unendlich dünnen Prismen wie $\overline{F_1 G_1}$ bestehe. Sind nun G_1, G_2 u. s. w. die Grundflächen und h_1, h_2 u. s. w. die Höhen dieser prismatischen Elemente, so hat man ihre Inhalte:

Fig. 173.



$$G_1 h_1,\ G_2 h_2 \text{ u. s. w.},$$

und sonach das Volumen des ganzen schief abgeschnittenen Prismas:

$$V = G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots$$

Nun verhält sich aber ein Element F_1 des schiefen Schnittes KL zum Elemente G_1 der Basis $AB = G$, wie die ganze schiefe Fläche F zur Basis G; es folgt daher:

$$G_1 = \frac{G}{F} F_1,\ G_2 = \frac{G}{F} F_2 \text{ u. s. w., und}$$

$$V = \frac{G}{F}(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots).$$

Da endlich $F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots$ das Moment Fh des ganzen schiefen Schnittes ist, so ergiebt sich:

$$V = \frac{G}{F} \cdot Fh = Gh,$$

d. i. der Inhalt des schief abgeschnittenen Prismas ist gleich dem Inhalte eines vollständigen Prismas, welches mit demselben auf einerlei Grundfläche steht und dessen Höhe gleich ist dem Abstande SO des Schwerpunktes S des schiefen Schnittes von der Basis.

Bei einem geraden und schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma ist, wenn h_1, h_2 und h_3 die Seitenkanten desselben sind, der Abstand des Schwerpunktes des schiefen Schnittes von der Basis (s. §. 109):

$$h = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3},$$

daher folgt das Volumen dieses Prismas:

$$V = Gh = G\frac{(h_1 + h_2 + h_3)}{3}.$$

Drittes Capitel.

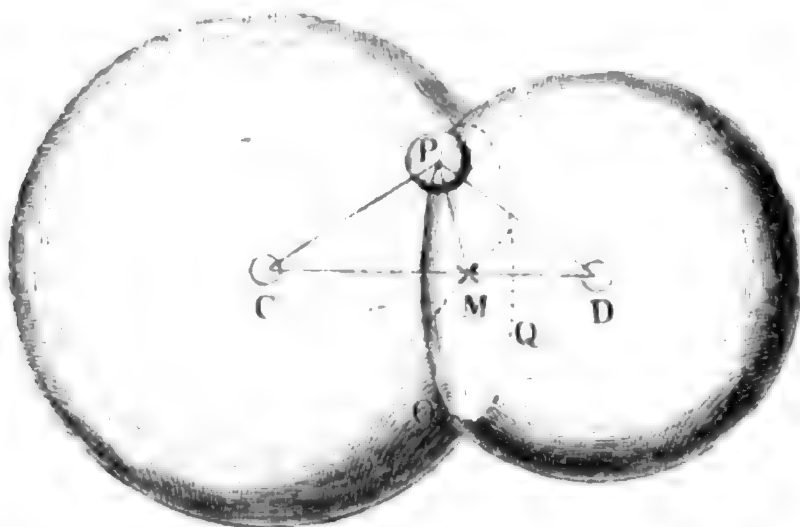
Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper.

§. 129 **Befestigungsarten.** Die im ersten Capitel dieses Abschnittes entwickelten Regeln über das Gleichgewicht fester Kräftesysteme finden ihre Anwendung auch auf feste, von Kräften ergriffene Körper, wenn man das Gewicht des Körpers als eine im Schwerpunkte desselben angreifende und vertical abwärts wirkende Kraft behandelt.

Die durch Kräfte im Gleichgewichte erhaltenen Körper sind entweder frei beweglich, d. h. sie können der Einwirkung der Kräfte folgen, oder sie sind in einem oder mehreren Punkten festgehalten, oder sie werden von anderen Körpern unterstützt.

Wird ein Punkt C, Fig. 174, eines festen Körpers festgehalten, so kann

Fig. 174.



jeder andere Punkt P eine Bewegung annehmen, deren Weg in die Oberfläche einer Kugel fällt, die sich aus dem festgehaltenen Punkte mit der Entfernung CP des anderen Punktes, als Halbmesser, beschreiben läßt. Hält man hingegen einen Körper in zwei Punkten C und D fest, so sind bei jeder noch möglichen Bewegung die Wege von den übrigen Punkten Kreise, die sich als die Durchschnitte OPQ von je zweien, aus den festgehaltenen Punkten beschriebenen Kugeloberflächen herausstellen. Diese Kreise sind unter sich parallel und winkelrecht auf der geraden Linie, welche die festen Punkte mit einander verbindet. Die Punkte der letzten Linie bleiben unbeweglich; es dreht sich also der Körper um diese Linie CD, die man deshalb auch Umdrehungsaxe des Körpers nennt. Die auf dieser Axe winkelrecht stehenden

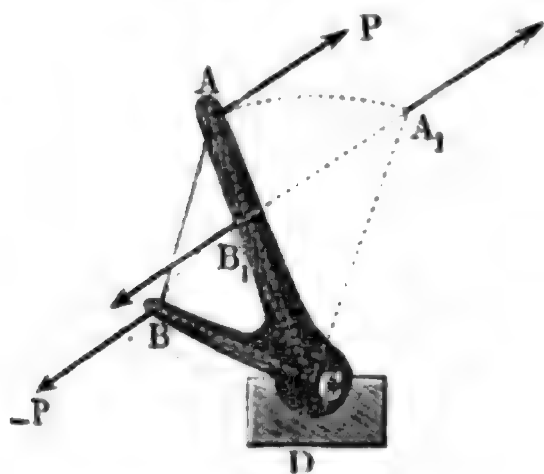
Ebenen, in welchen die verschiedenen Punkte umlaufen, heißen die **Umdrehungsebenen** des Körpers.

Man findet den Halbmesser MP des Kreises OPQ, in welchem sich jeder Punkt bewegt, wenn man von demselben ein Perpendikel gegen die Umdrehungsaxe CD fällt. Je größer dies ausfällt, desto größer ist also auch der Kreis, in welchem der Punkt um die Axe herumgeht.

Werden von einem Körper drei nicht in eine gerade Linie fallende Punkte festgehalten, so kann der Körper in keiner Beziehung eine Bewegung annehmen, weil sich die drei Kugeloberflächen, in welchen sich ein vierter Punkt bewegen müßte, nur in einem Punkte schneiden.

Gleichgewicht unterstützter Körper. Jede Kraft, welche durch §. 130
den festen Punkt eines Körpers, z. B. durch den Mittelpunkt eines Kugelgelenkes geht, wird von der Stütze des Körpers aufgenommen, und hat daher auf den Gleichgewichtszustand keinen Einfluß. Ebenso, wenn ein Körper in zwei Punkten oder Zapfen unterstützt ist, so wird jede Kraft, deren Richtung die Axe schneidet, welche sich durch diese festgehaltenen Punkte legen läßt, von den beiden Stützpunkten aufgenommen werden, ohne daß eine andere Wirkung auf den Körper übrig bleibt. Auch wird ein Kräftepaar von den Stützpunkten eines Körpers aufgenommen, wenn dessen Ebene die durch diese Punkte bestimmte Drehungsaxe enthält oder mit dieser Linie parallel läuft. Jedes andere Kräftepaar, z. B. $(P, -P)$ in Fig. 175, bringt dagegen eine Drehung des Körpers ACB um die Drehungsaxe C hervor, wenn es nicht durch ein anderes Kräftepaar (s. §. 95 und 97) im Gleichgewicht erhalten wird. Behält das Kräftepaar bei der Drehung seine Richtung bei, so ist der Hebelarm und folglich auch das Moment desselben veränderlich, und es fallen beide bei einer gewissen Stellung des Körpers sogar Null aus. Wenn bei dem Körper ACB, Fig. 175, welcher in einem Punkte C festgehalten wird, die Kraftrichtung um den Winkel $BAP = \alpha$ von der Linie AB durch beide Angriffspunkte A und B abweicht, so ist eine Drehung von $ACA_1 = \beta^0 = 180^0 - \alpha$ nöthig, um das Moment des Kräftepaares $(P, -P)$ zu annulliren; und ebenso ist es bei einem in der Axe festgehaltenen Körper, welcher von einem Kräftepaare ergriffen wird, dessen Ebene winkelrecht zur Axe steht.

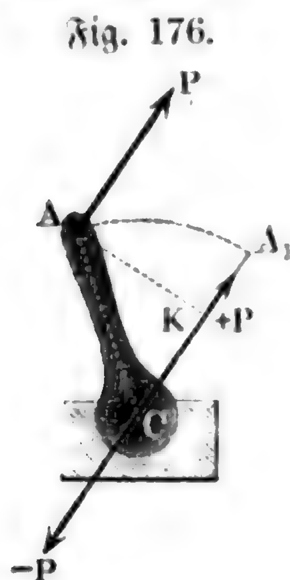
Fig. 175.



Wird ein in einem Punkte C festgehaltener Körper AB, Fig. 176 (a. f. S.), von einer Kraft P ergriffen, deren Richtung nicht durch C geht, so kann man

durch Hinzufügung zweier Gegenkräfte, $+P$ und $-P$, diese Kraft in ein Kräftepaar $(P, -P)$ und in eine in C angreifende und vom Stützpunkte aufzunehmende Kraft $+P$ zerlegen. Ebenso ist es, wenn ein Körper in einer Axe festgehalten wird, und die Kraft in einer Umdrehungsebene wirkt.

Fig. 176.



Hier vertheilt sich aber der Druck $+P$ auf beide Stützpunkte. Ist a die Entfernung CA des Angriffspunktes A der Kraft von der Axe C, und α der Winkel ACA_1, welchen die Linie CA von der Kraftrichtung abweicht, so hat man das Moment des Kräftepaares $(P, -P)$, welches den Körper um C umzudrehen sucht: $M = Pa \sin. \alpha$. Bleibt während der Drehung die Richtung der Kraft P unverändert, so ändert sich M mit α und ist für $\alpha = 90^0$ ein Maximum (Pa), sowie für $\alpha = 0$ oder 180^0, $=$ Null. Die mechanische Arbeit, welche bei Drehung des Körpers um $ACA_1 = \alpha$, die Kraft P, oder das Kräftepaar $(P, -P)$ verrichtet, ist $A = P . \overline{KA} = Pa (1 - cos. \alpha)$.

131 **Stabilität eines aufgehangenen Körpers.** Besteht die Kraft eines in einem Punkte oder einer Linie unterstützten Körpers nur im Gewichte desselben, so erfordert das Gleichgewicht dieses Körpers, daß sein Schwerpunkt unterstützt sei, d. i., daß die verticale Schwerlinie desselben durch den festen Punkt oder durch die feste Linie gehe.

Fällt der Schwerpunkt mit dem festgehaltenen oder sogenannten Aufhängepunkte zusammen, so hat man ein indifferentes Gleichgewicht (franz. équilibre indifférent; engl. indifferent equilibrium), weil der Körper im Gleichgewichte bleibt, man mag ihn um den festen Punkt drehen wie man will. Wird hingegen ein Körper AB, Fig. 177, in einem über

Fig. 177.

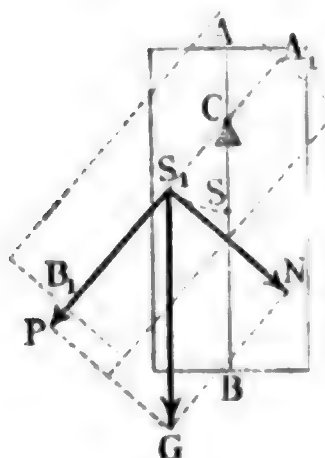
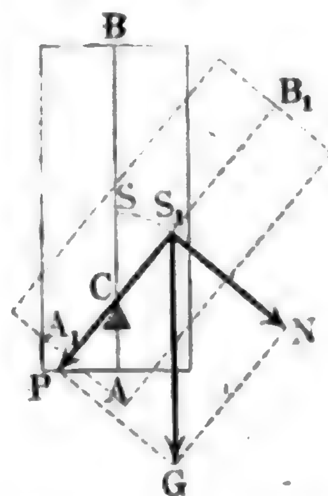


Fig. 178.



dem Schwerpunkte S liegenden Punkte C festgehalten oder unterstützt, so be-

findet sich der Körper in einem sicheren oder stabilen Gleichgewichte (franz. und engl. stable), weil, wenn man diesen Körper in eine andere Lage bringt, aus dem Gewichte G desselben eine Seitenkraft N hervorgeht, die den Körper in die erste Lage zurückführt, während die andere Seitenkraft P der feste Punkt C aufnimmt. Wird endlich der Körper AB, Fig. 178, in einem Punkte C festgehalten, der unter dem Schwerpunkte S liegt, so ist der Körper in einem unsicheren oder labilen Gleichgewichte (franz. éq. instable; engl. unstable eq.); denn wenn man den Schwerpunkt von der Verticalen durch C entfernt, so geht aus dem Gewichte G des Körpers eine Seitenkraft N hervor, die den Körper in seine erste Lage nicht nur nicht zurückführt, sondern denselben davon noch mehr abzieht, und ihn so weit umdreht, bis der Schwerpunkt unter den festen Punkt zu liegen kommt.

Dieselben Beziehungen finden auch bei einem in zwei Punkten oder in einer Axe festgehaltenen Körper statt; derselbe ist im indifferenten, stabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem der Schwerpunkt in, vertical unter oder vertical über der festen Axe befindlich ist.

Wenn der Körper in einem Punkte, oder in einer horizontalen Axe unterstützt wird, so ist das Moment, mit welchem sich der Körper in der stabilen Gleichgewichtslage zurückzudrehen sucht, $M = G a \sin. \alpha$, wobei G das Gewicht, a den Abstand CS_1 des Schwerpunktes S_1 von der Axe C, und α den Drehungswinkel SCS_1 bezeichnet. Die mechanische Arbeit, welche hierbei das Gewicht G verrichtet, ist $A = G a (1 - \cos. \alpha)$.

Druck auf die Stützpunkte eines Körpers. Wenn ein in zwei Punkten C und D oder einer Axe CD festgehaltener Körper CAD, §. 132

Fig. 179.

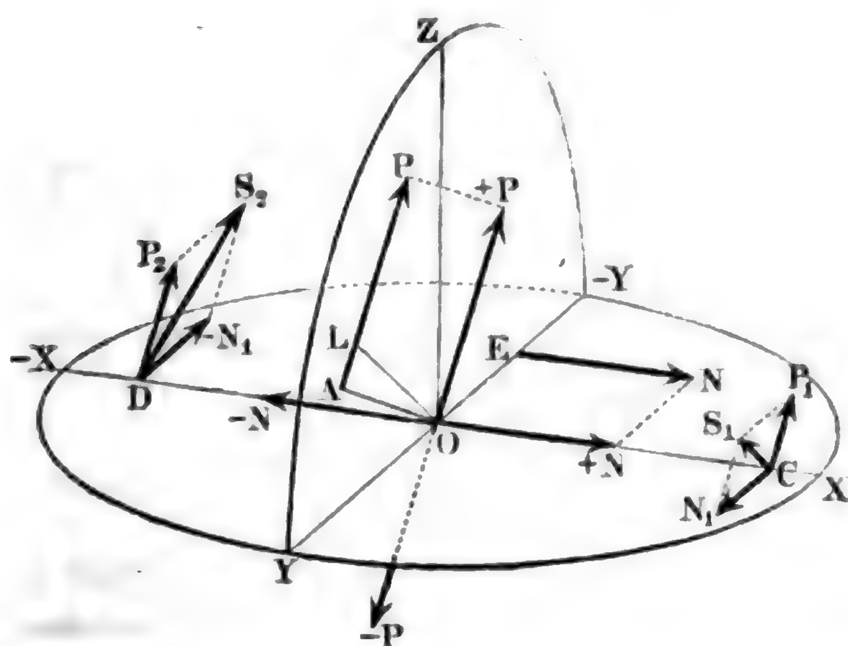


Fig. 179, von einem Kräftesysteme ergriffen wird, so führt man, um die Bedingungen seines Gleichgewichts zu ermitteln, nach §. 97, das ganze

System auf zwei Kräfte zurück, und zwar auf eine Kraft parallel zur Axe und auf eine Kraft, deren Richtung in einer Normalebene zu dieser Linie liegt. Es sei $\overline{EN} = N$, Fig. 180, die erstere, mit der durch die festen Punkte C und D gehenden Axe $X\overline{X}$ parallel wirkende Kraft, und $\overline{AP} = P$ die zweite Kraft, welche in einer auf $X\overline{X}$ normalstehenden Ebene $YZ\overline{Y}$ wirkt. Aus der ersteren resultirt eine Kraft $+N$, welche die Axe CD in ihrer eigenen Richtung fortzuschieben sucht, und ein Kräftepaar $(N, -N)$, welches sich als ein anderes Kräftepaar $(N_1, -N_1)$ auf die festen Punkte C und D fortpflanzt, dessen Componenten

$$N_1 = \frac{d}{l} N \text{ und } -N_1 = -\frac{d}{l} N$$

sind, wenn d den Abstand OE der Parallelkraft N von der Axe CD und l die Entfernung CD der beiden Stützpunkte C und D von einander bezeichnen.

Fig. 180.

Ebenso zerlege man die Kraft P in eine Kraft $+P$ und in ein Kräftepaar $(P, -P)$, und die erstere wieder in die Seitenkräfte P_1 und P_2, wovon die eine in C und die andere in D angreift. Bezeichnen wir wieder die Abstände CO und DO des Angriffspunktes O von den beiden Stützpunkten C und D durch l_1 und l_2, so haben wir:

$$P_1 = \frac{l_2}{l} P \text{ und } P_2 = \frac{l_1}{l} P,$$

und es läßt sich nun leicht aus N_1 und P_1 der Mitteldruck S_1 in C, sowie aus $-N_1$ und P_2 der Mitteldruck S_2 in D durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes bestimmen.

Setzen wir den Winkel $YO(+P)$, unter welchem die Ebene NOX von der Richtung der Kraft P oder $+P$ geschnitten wird, $= \alpha$, so ist auch

der Winkel $N_1 C P_1 = \alpha$, dagegen $\overline{N_1} D P_2 = 180^0 - \alpha$, und es ergeben sich daher die resultirenden Drücke in C und D:

$$S_1 = \sqrt{N_1^2 + P_1^2 + 2 N_1 P_1 \cos. \alpha} \text{ und}$$
$$S_2 = \sqrt{N_1^2 + P_2^2 - 2 N_1 P_2 \cos. \alpha}.$$

Bezeichnet endlich a das Loth OL auf die Richtung der Kraft P, so ist das Moment des Umdrehungskräftepaares $(P, -P)$, $M = Pa$.

Im Gleichgewichtszustande muß natürlich a = Null sein, und daher P durch die Axe CD hindurchgehen.

Beispiel. Es sei das ganze Kräftesystem eines in der Axe $X\overline{X}$ festgehaltenen Körpers auf die Normalkraft $P = 36$ Pfund und auf die Parallelkraft $N = 20$ Pfund zurückgeführt; es sei der Abstand der letzteren Kraft von der Axe, $OE = d = 1^1/_2$ Fuß, und der Abstand CD zwischen den festgehaltenen Punkten, $l = 4$ Fuß; man sucht die von der Axe oder von den festen Punkten C und D aufzunehmenden Kräfte, vorausgesetzt, daß die Richtung der Kraft P um den Winkel $\alpha = 65$ Grad von der Grundebene XY abweiche und ihr Angriffspunkt O um $CO = l_1 = 1$ Fuß von dem festen Punkte C abstehe.

Die Kraft $N = 20$ Pfund ertheilt der Axe in ihrer eigenen Richtung den Schub $N = 20$ Pfund, außerdem erzeugt sie noch die Kräfte:

$$N_1 = \frac{d}{l} N = \frac{1,5}{4} \cdot 20 = 7,5 \text{ Pfund und } - N_1 = -7,5 \text{ Pfund,}$$

welche die festen Punkte C und D aufnehmen. Aus der Kraft P entspringen die Kräfte:

$$P_1 = \frac{l_2}{l} P = \frac{4-1}{4} \cdot 36 = 27 \text{ Pfund und } P_2 = \frac{l_1}{l} P = {}^1/_4 \cdot 36 = 9 \text{ Pfund,}$$

aus welchen endlich durch Vereinigung mit den ersteren Kräften die Mittelkräfte:

$$S_1 = \sqrt{7,5^2 + 27^2 + 2 \,.\, 7,5 \,.\, 27 \,.\, \cos. 65^0} = \sqrt{56,25 + 729 + 171,160}$$
$$= \sqrt{956,410} = 30,926 \text{ Pfund, und}$$
$$S_2 = \sqrt{7,5^2 + 9^2 - 2 \,.\, 7,5 \,.\, 9 \,.\, \cos. 65^0} = \sqrt{56,25 + 81 - 57,054}$$
$$= \sqrt{80,196} = 8,955 \text{ Pfund}$$

entspringen.

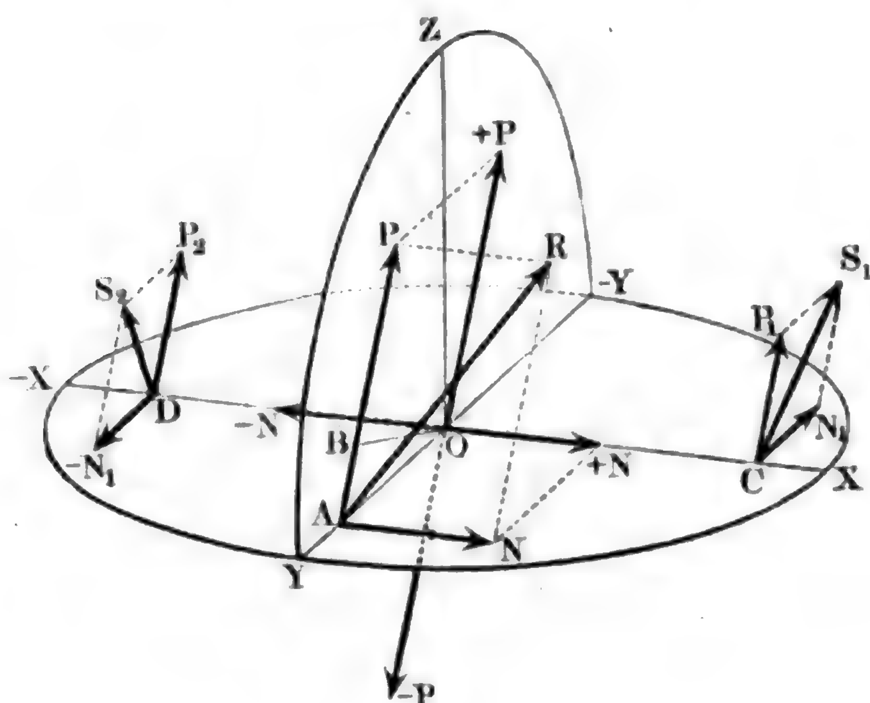
Wird ein in zwei Punkten C und D festgehaltener Körper CBD, Fig. 181 (a. f. S.), nur von einer Kraft R ergriffen, deren Richtung um den Winkel $PAR = \beta$ von der Umdrehungsebene YOZ abweicht, so zerlege man dieselbe in die Seitenkräfte: §. 133

$$\overline{AP} = P = R \cos. \beta \text{ und}$$
$$\overline{AN} = N = R \sin. \beta,$$

wovon die erstere in der Umdrehungsebene und die zweite parallel zur Axe wirkt, und behandele diese genau so wie die resultirenden Kräfte P und N eines ganzen Systemes im vorigen Paragraphen. Es ist hiernach die Kraft,

welche die Axe in ihrer Richtung aufzunehmen hat, und weshalb das eine Axenlager ein besonderes Widerlager erhalten muß: $N = R \sin. \beta$, sowie

Fig. 181.



jeder der Componenten des Kräftepaares $(N_1, -N_1)$, welches in C und D nach entgegengesetzten Richtungen winkelrecht gegen CD wirkt,

$$N_1 = \frac{d}{l} N = \frac{d}{l} R \sin. \beta \text{ und } -N_1 = -\frac{d}{l} R \sin. \beta,$$

wofern wieder l die Entfernung CD der beiden Stützpunkte C und D von einander, so wie d den Abstand OA des Angriffspunktes A der Kraft R vom Axpunkt O bezeichnet.

Ebenso ist die Kraft, welche in O winkelrecht auf CD wirkt:

$+ P = R \cos. \beta$, so wie der Component derselben in C:

$P_1 = \frac{l_2}{l} P = \frac{l_2}{l} R \cos. \beta$ und der in D:

$$P_2 = \frac{l_1}{l} P = \frac{l_1}{l} R \cos. \beta,$$

wenn wieder l_1 und l_2 die Abstände CO und DO der Punkte C und D von der Umdrehungsebene $YZ\overline{Y}$ bezeichnen.

Führt man diese Werthe von N_1, P_1 und P_2 in die Formeln:

$$S_1 = \sqrt{N_1^2 + P_1^2 + 2 N_1 P_1 \cos. \alpha} \text{ und}$$
$$S_2 = \sqrt{N_1^2 + P_2^2 - 2 N_1 P_2 \cos. \alpha}$$

für die Normaldrücke in C und D ein, wobei man wieder mit α den Winkel YAP bezeichnet, um welchen die Richtung der Seitenkraft P von der Ebene ACD abweicht, so erhält man:

$$S_1 = \frac{R}{l}\sqrt{(d\,sin.\beta)^2 + (l_2\,cos.\beta)^2 + 2\,d\,l_2\,sin.\beta\,cos.\beta\,cos.\alpha} \text{ und}$$

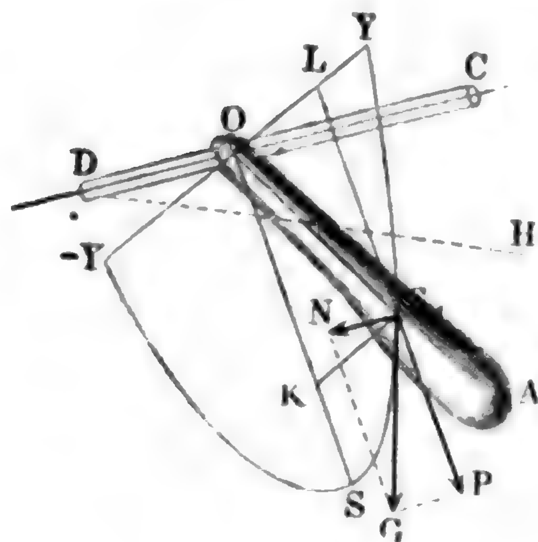
$$S_2 = \frac{R}{l}\sqrt{(d\,sin.\beta)^2 + (l_1\,cos.\beta)^2 - 2\,d\,l_1\,sin.\beta\,cos.\beta\,cos.\alpha}.$$

Das noch freibleibende Umdrehungskräftepaar $(P, -P)$ hat das Moment

$$P\,.\,\overline{OB} = Pa = Rd\ sin.\alpha\ cos.\beta.$$

Diese Formeln finden ihre Anwendung auf die Stabilität eines um eine geneigte Axe CD drehbaren Körpers OA, Fig. 182. Es ist hier R das Gewicht G des Körpers, d der Abstand $OS = OS_1$ seines Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe, α der Elongationswinkel $SOS_1 = OS_1L$, um welchen der Schwerpunkt S_1 von seiner Gleichgewichtslage S durch Drehung in der auf CD rechtwinkelig stehenden Ebene $YS\overline{Y}$ verrückt ist, und β der Winkel GS_1P, welchen die Umdrehungsebene $YS\overline{Y}$ mit der Verticalen, folglich auch die Drehungsaxe CD mit der Horizontalen DH einschließt.

Fig. 182.



Die mechanische Arbeit, mit welcher der Körper durch sein Gewicht in die Gleichgewichtslage und S_1 nach S zurückgeführt wird, ist

$$A = G\,.\,\overline{KS}\,cos.\beta = Gd\ cos.\beta\ (1 - cos.\alpha).$$

Gleichgewicht von Kräften um eine Axe. Die Mittelkraft P resultirt aus allen denjenigen Seitenkräften, deren Richtungen in einer oder mehreren Normalebenen zur Axe liegen. Nun ist aber in diesem Falle, nach §. 89, das statische Moment Pa der Mittelkraft gleich der Summe $P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots$ der statischen Momente der Seitenkräfte, und für den Gleichgewichtszustand des festgehaltenen Körpers, der Hebelarm a der Mittelkraft = Null, weil diese durch die Axe selbst geht; es ist daher auch die Summe §. 135

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots = 0,$$

d. h. ein in einer Axe festgehaltener Körper ist im Zustande des Gleichgewichtes, bleibt also ohne Umdrehung, wenn die Summe der statischen Momente seiner Kräfte hinsichtlich dieser Axe = Null, oder die Summe der Momente der nach der einen Umdrehungsrichtung wirkenden Kräfte eben so groß ist als die

Summe der Momente von den nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräften.

Mit Hülfe der letzten Formel läßt sich ein Element des im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystemes, entweder eine Kraft, oder ein Hebelarm finden, so wie eine Umdrehungskraft von einem Hebelarme auf einen andern reduciren.

Kommt es darauf an, einen um eine feste Axe drehbaren Körper, dessen Umdrehungsmoment Pa ist, ins Gleichgewicht zu setzen, so hat man nur noch nöthig, entweder eine Umdrehungskraft Q, oder ein Umdrehungskräftepaar mit dem Moment $Qb = Pa$ hinzuzufügen, wobei nur der Unterschied statthat, daß durch Hinzufügung eines Kräftepaares $(Q, -Q)$ der Axendruck nicht verändert wird, dagegen durch Anschließen einer Kraft Q zum Axendruck noch die Kraft $+Q$ hinzutritt.

Je nachdem man die Kraft Q oder den Hebelarm b derselben giebt, läßt sich $b = \frac{Pa}{Q}$, oder $Q = \frac{Pa}{b}$ berechnen.

Man nennt im letzteren Falle Q die **vom Hebelarm a auf den Hebelarm b reducirte Kraft P**, und kann hiernach die gegebene Umdrehungskraft P auf jeden beliebigen Hebelarm reduciren, also auch durch eine andere, an jedem beliebigen Hebelarm wirkende Kraft ersetzen, oder ins Gleichgewicht bringen.

Auch kann man durch die Formel $Q = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{b}$ ein ganzes System von Umdrehungskräften auf einen und denselben Hebelarm reduciren.

Beispiel. An einem um eine Axe drehbaren Körper wirken die Umdrehungskräfte $P_1 = 50$ Pfund und $P_2 = -35$ Pfund an den Armen $a_1 = 1\frac{1}{4}$ Fuß und $a_2 = 2\frac{1}{2}$ Fuß; man sucht die Kraft P_3, welche an einem Hebelarme $a_3 = 4$ Fuß wirken soll, um Gleichgewicht herzustellen, oder eine Umdrehung um die Axe zu verhindern. Es ist:

$$50 \,.\, 1{,}25 - 35 \,.\, 2{,}5 + 4\, P_3 = 0, \text{ daher:}$$

$$P_3 = \frac{87{,}5 - 62{,}5}{4} = 6{,}25 \text{ Pfund.}$$

§. 135 **Hebel.** Ein um eine feste Axe drehbarer und von Kräften ergriffener Körper hat den Namen **Hebel** (franz. levier; engl. lever) erhalten. Denkt man sich denselben gewichtslos, so heißt er ein **mathematischer Hebel**, außerdem aber ein **materieller** oder **physischer**.

In der Regel nimmt man an, daß die Kräfte eines Hebels in einer winkelrecht zur Axe stehenden Ebene wirken, und ersetzt die Axe durch einen festen Punkt, den man den **Ruhe-, Dreh-** oder **Stützpunkt** (franz. point d'appui; engl. fulcrum, hypomochlion) nennt. Die von diesem Punkte nach den Richtungen der Kräfte gefällten Perpendikel heißen (§. 89) **Hebelarme**. Sind die Richtungen der Kräfte eines Hebels unter sich parallel, so

bilden die Hebelarme eine einzige gerade Linie, und der Hebel heißt dann ein geradliniger oder gerader Hebel (franz. levier droit; engl. straight lever); stoßen aber die Hebelarme unter Winkeln zusammen, so heißt der Hebel ein Winkelhebel (franz. levier courbé; engl. bent lever). Der geradlinige von nur zwei Kräften ergriffene Hebel ist entweder einarmig oder doppelarmig, je nachdem die Angriffspunkte auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Stützpunktes liegen. Man unterscheidet auch wohl Hebel der ersten, zweiten und dritten Art von einander, indem man den doppelarmigen Hebel, Hebel der ersten Art, den einarmigen Hebel aber entweder Hebel der zweiten oder Hebel der dritten Art nennt, je nachdem die vertical abwärts wirkende Kraft (Last), oder die vertical aufwärts wirkende Kraft (Kraft) dem Stützpunkte näher liegt.

Die Theorie des Gleichgewichtes am Hebel ist im Vorhergehenden vollständig begründet, wir haben daher nur noch eine Specialisirung derselben nöthig. §. 136

Bei dem doppelarmigen Hebel ACB, Fig. 183, ist, wenn man den Hebelarm CA der Kraft P durch a und den Hebelarm CB der anderen Kraft Q, die man gewöhnlich Last nennt, mit b bezeichnet, nach der allgemeinen Theorie: $Pa = Qb$, d. i. Moment der Kraft gleich Moment der Last, oder auch: $P : Q = b : a$, d. i. die Kraft verhält

Fig. 183.

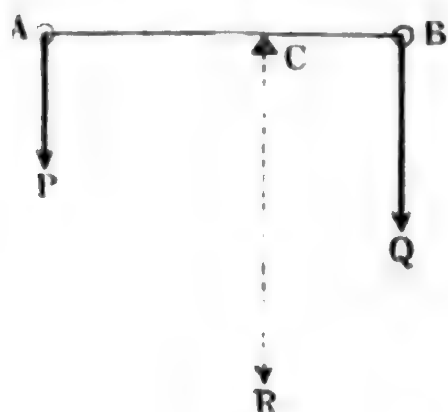
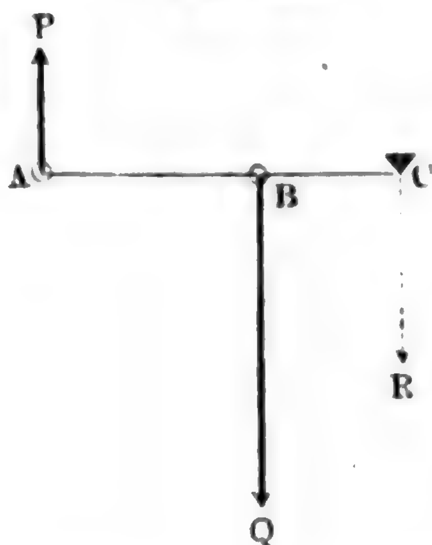


Fig. 184.



sich zur Last, wie der Hebelarm der letzteren zu dem Hebelarme der ersteren. Der Druck im Stützpunkte ist $R = P + Q$.

Bei den einarmigen Hebeln ABC, Fig. 184, und BAC, Fig. 185 (a. f. S.), findet dieselbe Beziehung zwischen Kraft (P) und Last (Q) statt, es ist hier aber die Kraft der Last entgegengesetzt gerichtet, und deshalb der Druck im Stützpunkte gleich der Differenz beider, und zwar im ersten Falle:

$R = Q - P$, und im zweiten Falle: $R = P - Q$.

Auch beim Winkelhebel ACB mit den Hebelarmen $CN = a$ und $CO = b$, Fig. 186, bleibt $P : Q = b : a$, nur ist hier der Druck im

Fig. 185.

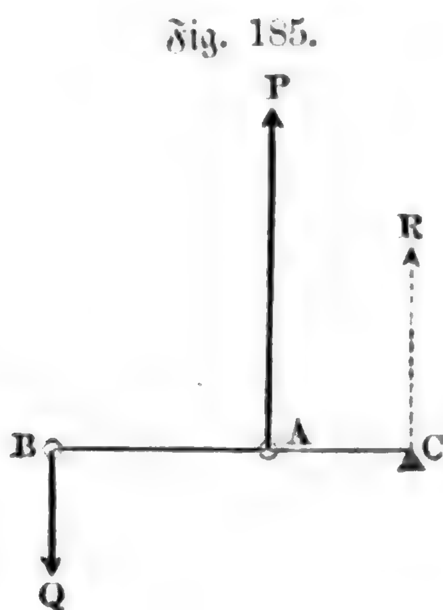
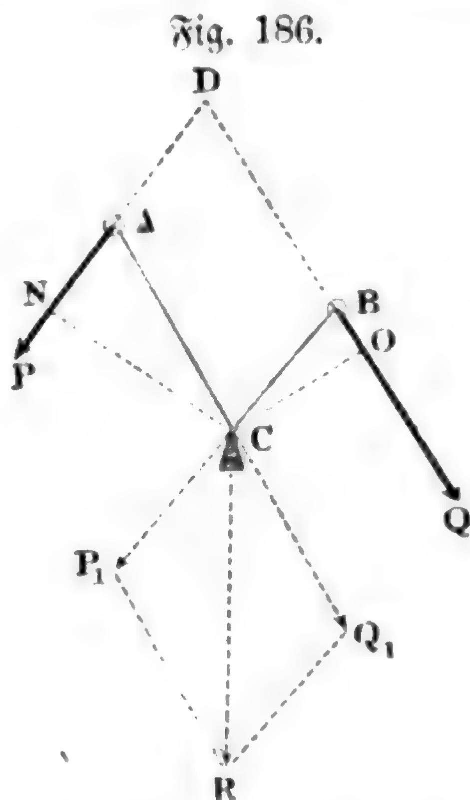


Fig. 186.



Stützpunkte gleich der Diagonale R desjenigen Parallelogrammes CP_1RQ_1, welches sich aus der Kraft P und Last Q und dem Winkel $P_1CQ_1 = PDQ = \alpha$, unter welchem die Richtungen derselben zusammenstoßen, construiren läßt.

Ist G das Gewicht des Hebels und $CE = e$, Fig. 187, der Abstand des Drehpunktes C von der Verticallinie SG durch den Schwerpunkt desselben, so hat man $Pa \pm Ge = Qb$ zu setzen und das Pluszeichen von G zu nehmen, wenn der Schwerpunkt auf der Seite der Kraft P liegt, das Minuszeichen aber, wenn er auf der Seite der Last Q sich befindet.

Die Theorie des Hebels findet bei vielen Werkzeugen und Maschinen ihre

Fig. 187.

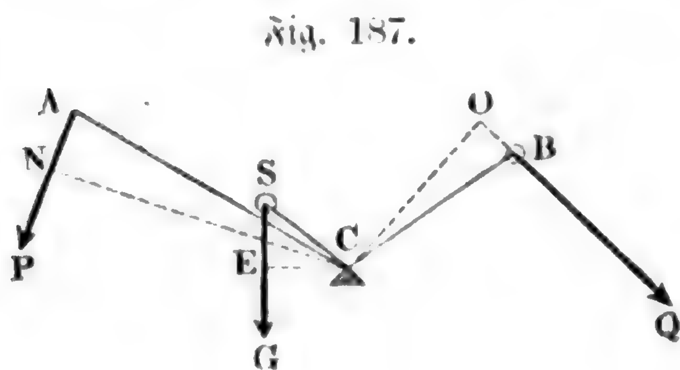
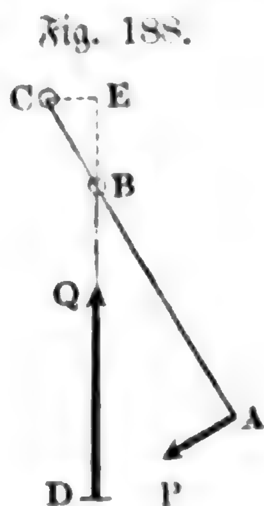


Fig. 188.



Anwendung. Der **Kniehebel** $ABCD$, Fig. 188, welcher zuweilen als ein besonderer Hebel aufgeführt wird, ist ein bloßer Winkelhebel. Der um die Axe C drehbare Arm wird an seinem Ende A von einer Kraft P ergriffen und wirkt mittels einer Stange BD auf die in D angreifende Last Q,

welche den Arm unter einem spitzen Winkel $ABD = CBE = \alpha$ schneidet. Bezeichnet a die Armlänge CA und b die Armlänge CB, so hat man den Hebelarm von Q:

$$\overline{CE} = b\, sin.\,\alpha, \text{ daher:}$$
$$Pa = Qb\, sin.\,\alpha, \text{ oder:}$$
$$P = \frac{b}{a}\, Q\, sin.\,\alpha, \text{ und umgekehrt:}$$
$$Q = \frac{a}{b}\, \frac{P}{sin.\,\alpha}.$$

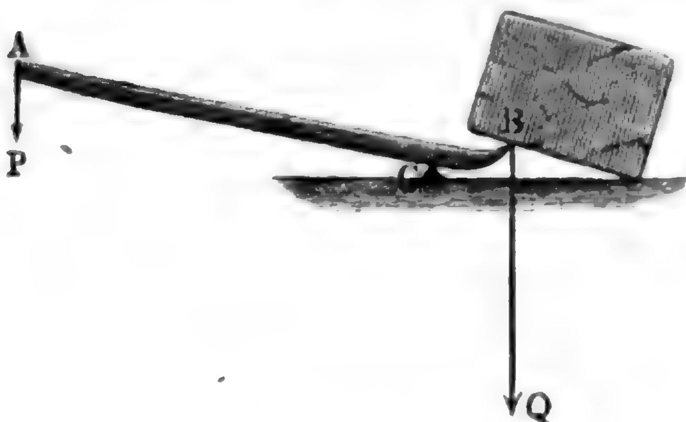
Man wendet diesen Hebel oft zum Zusammenpressen von Stoffen an. Die Preßkraft Q wächst hiernach direct wie P und $\frac{a}{b}$, dagegen umgekehrt wie $sin.\,\alpha$. Durch Verkleinern des Winkels α läßt sich also diese Kraft Q beliebig vergrößern.

Beispiele. 1) Wenn man das Ende A einer Brechstange ACB, Fig. 189, mit einer Kraft P von 60 Pfund niederdrückt, und es ist der Hebelarm CA der Kraft 12 mal so groß als der Hebelarm CB der Last, so wird diese, oder vielmehr die in B ausgeübte Kraft Q, 12mal so groß als P sein, also

$$Q = 12 \,.\, 60 = 720 \text{ Pfund}$$

betragen.

Fig. 189.

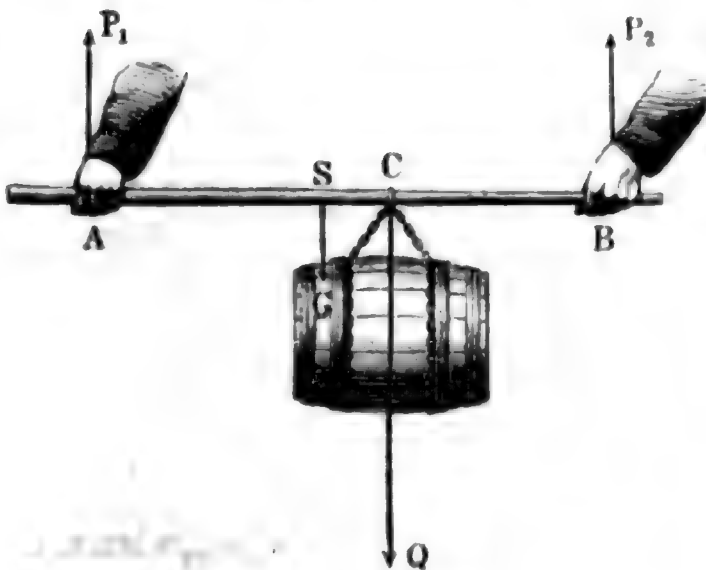


2) Wird eine an einer Stange hängende Last Q, Fig. 190, von zwei Arbeitern fortgetragen, von denen der eine in A und der andere in B angreift, so kann man ermitteln, wie viel Druck jeder der beiden Arbeiter auszuhalten hat. Es sei die Last $Q = 120$ Pfund, das Gewicht der Stange, $G = 12$ Pfund, die Entfernung AB der beiden Angriffspunkte von einander, $= 6$ Fuß, die Entfernung der Last von einem dieser Punkte B, $BC = 2^1/_2$ Fuß, und die Entfernung des Schwerpunktes S der Stange von eben demselben:

$$BS = 3^1/_2 \text{ Fuß.}$$

Sehen wir B als Stützpunkt an, so hat die Kraft P_1 in A den Lasten Q und G das Gleichgewicht zu halten; es ist also:

Fig. 190.



$P_1 . \overline{BA} = Q . \overline{BC} + G . \overline{BS}$, d. i.:
$6 P_1 = 2{,}5 . 120 + 3{,}5 . 12 = 300 + 42 = 342$, daher:

$$P_1 = \frac{342}{6} = 57 \text{ Pfund.}$$

Wird hingegen A als Stützpunkt angesehen, so ist zu setzen:

$$P_2 . \overline{AB} = Q . \overline{AC} + G . \overline{AS},$$

also in Zahlen:

$$6 P_2 = 3{,}5 . 120 + 2{,}5 . 12 = 420 + 30 = 450,$$

daher ist die Kraft des zweiten Arbeiters:

$$P_2 = \frac{450}{6} = 75 \text{ Pfund;}$$

auch ist, sehr richtig, die Summe der nach oben wirkenden Kräfte

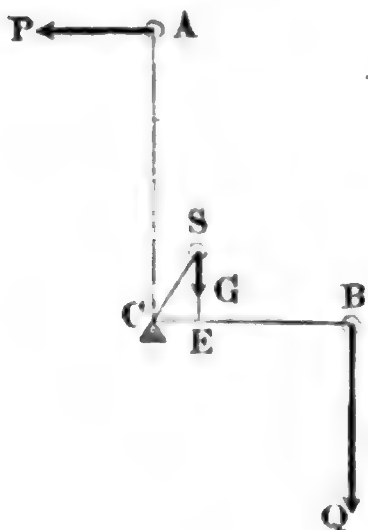
$$P_1 + P_2 = 57 + 75 = 132 \text{ Pfund}$$

so groß wie die Summe der nach unten wirkenden Kräfte

$$Q + G = 120 + 12 = 132 \text{ Pfund.}$$

3) Bei einem 150 Pfund schweren Winkelhebel ACB, Fig. 191, ist die vertical ziehende Last $Q = 650$ Pfund und ihr Hebelarm $CB = 4$ Fuß, dagegen der Hebelarm der Kraft P, $CA = 6$ Fuß und der Hebelarm des Gewichtes, $CE = 1$ Fuß. Wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft P und der Druck R im Zapfen? Es ist:

Fig. 191.



$$\overline{CA} . P = \overline{CB} . Q + \overline{CE} . G, \text{ d. i.:}$$
$$6 P = 4 . 650 + 1 . 150 = 2750,$$

folglich ist die Kraft:

$$P = \frac{2750}{6} = 458\tfrac{1}{3} \text{ Pfund;}$$

der Zapfendruck aber besteht aus der Verticalkraft $Q + G = 650 + 150 = 800$ Pfund und der Horizontalgewalt $P = 458\frac{1}{3}$ Pfund, ist also:

$$R = \sqrt{(Q + G)^2 + P^2}$$
$$= \sqrt{(800)^2 + (458\tfrac{1}{3})^2}$$
$$= \sqrt{850070} = 922 \text{ Pfund.}$$

§. 137 Es können an einem Hebel auch mehr als zwei Kräfte P und Q wirken; auch ist es nicht nöthig, daß die Kräfte eines Hebels in einer und derselben Umdrehungsebene wirken. Sind Q_1, Q_2, Q_3 die Lasten eines Hebels ACB, Fig. 192, so wie b_1, b_2, b_3 die Hebelarme CB_1, CB_2, CB_3 derselben, während die Kraft P am Hebelarme $\overline{CA} = a$ wirkt, so hat man

$$Pa = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + Q_3 b_3,$$

und wenn der Hebel ein geradliniger ist, den Druck im Stützpunkte:

$$R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Wirken die Kräfte eines Hebels in verschiedenen Umdrehungsebenen des Hebels $ACDB_1B_2$, Fig. 193, so ändert sich deshalb die Momentenformel

$Pa = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + \cdots$ nicht, nur findet hier eine besondere Vertheilung des gesammten Axendrucks $R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3$ auf die beiden

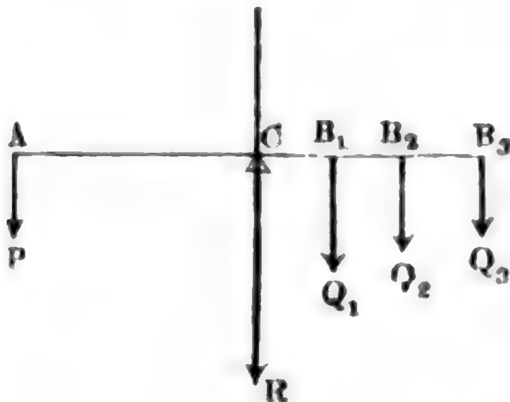


Fig. 192.

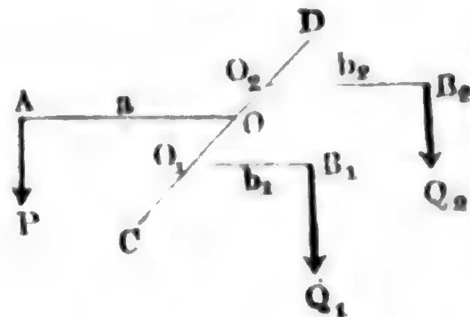


Fig. 193.

Stützpunkte oder sogenannten Zapfenlager C und D statt. Bezeichnet wieder l die Länge der Hebelaxe CD oder die Entfernung ihrer Stützpunkte von einander, und sind $l_0, l_1, l_2 \cdots$ die Abstände $CO, CO_1, CO_2 \cdots$ der Umdrehungsebenen der Kräfte vom Stützpunkt C, so hat man für die Zapfendrücke R_2 und R_1 in D und C folgende Formeln:

$$R_2 = \frac{Pl_0 + Q_1 l_1 + Q_2 l_2 + \cdots}{l}, \text{ und}$$

$$R_1 = R - R_2 = \frac{P(l - l_0) + Q_1(l - l_1) + Q_2(l - l_2)}{l}.$$

Bei einem Winkelhebel, wo die Kräfte nicht parallel wirken, bleibt zwar der Ausdruck $Pa = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + \cdots$ unverändert, nur wirken dann die auf die Stützpunkte reducirten Axendrücke, wie z. B. $\frac{Pl_0}{l}, \frac{Ql_1}{l}, \frac{Q_2 l_2}{2} \cdots$, in verschiedenen Richtungen und lassen sich daher nicht mehr durch Addition vereinigen, sondern müssen wie die in einem und demselben Punkte angreifenden und in einer Ebene wirkenden Kräfte vereinigt werden (s. §. 79 und §. 80).

Beispiel. Wenn der Hebel in Fig. 193 in den Abständen $CO_1 = l_1 = 12$ Zoll und $CO_2 = l_2 = 24$ Zoll vom Zapfen C die an den Hebelarmen $O_1 B_1 = b_1 = 16$ Zoll und $O_2 B_2 = b_2 = 10$ Zoll wirkenden Lasten $Q_1 = 300$ Pfund und $Q_2 = 480$ Pfund trägt, wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichts nöthige und an dem Hebelarm $OA = a = 60$ Zoll wirkende Kraft P, und wie groß sind die Zapfendrücke in C und D, vorausgesetzt, daß die Kraft im Abstande $CO = l_0 = 18$ Zoll vom Zapfen C wirkt, und die ganze Axenlänge $CD = l = 32$ Zoll mißt?

Es ist die Größe der erforderlichen Kraft:

$$P = \frac{Q_1 b_1 + Q_2 b_2}{a} = \frac{300 . 16 + 480 . 10}{60} = \frac{30 . 16 + 480}{6} = 80 + 80 = 160 \text{ Pfund},$$

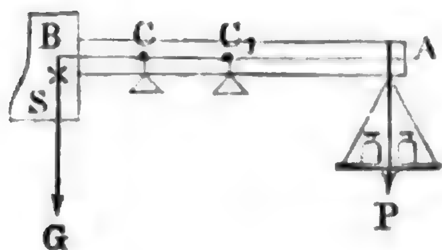
und es sind die Zapfendrücke

$$R_2 = \frac{160 . 18 + 300 . 12 + 480 . 24}{32} = 562,5 \text{ Pfund, und}$$

$$R_1 = R - R_2 = 300 + 480 + 160 - 562,5 = 377,5 \text{ Pfund.}$$

Anmerkung. Die Wirkung der Schwere am Hebel läßt sich mit Vortheil auch anwenden, um den Schwerpunkt S und das Gewicht G eines Körpers AB, Fig. 194, zu ermitteln. Man unterstütze den Körper erst in einem Punkte C und dann in einem Punkte C_1, welcher um $C C_1 = d$ vom ersten absteht, und bringe den Körper beide Mal durch eine in den Abständen $CA = a$ und $C_1 A = a_1 = a - d$ wirkende Kraft ins Gleichgewicht. Ist nun der Werth dieser Kraft das erste Mal $= P$ und das zweite Mal $= P_1$, ferner das Gewicht des Körpers, $= G$ und der Abstand seines Schwerpunktes S von A, $AB = x$, so hat man:

Fig. 194.



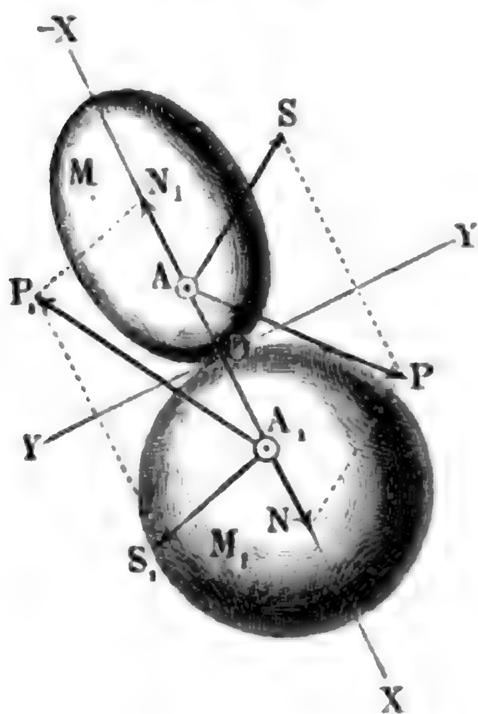
$$Pa = G(x - a) \text{ und } P_1 a_1 = G(x - a_1), \text{ woraus}$$

$$x = \frac{(P - P_1) a a_1}{Pa - P_1 a_1}, \text{ sowie}$$

$$G = \frac{Pa - P_1 a_1}{a_1 - a} \text{ folgt.}$$

§. 138 **Druck der Körper auf einander.** Das in §. 65 ausgesprochene Erfahrungsgesetz: „Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich,“ ist die Basis der ganzen Maschinenmechanik. Es ist an diesem Orte nöthig, die Bedeutung desselben noch näher auseinanderzusetzen. Wirken zwei Körper M und M_1, Fig. 195, mit den Kräften P und P_1 auf einander, deren Richtungen von der gemeinschaftlichen Normale $X\overline{X}$ zu den in Berührung befindlichen Oberflächentheilen beider Körper abweichen, so tritt stets eine Zerlegung der Kräfte ein; es geht nur diejenige Seitenkraft N oder N_1 von einem Körper auf den anderen über, welche die Richtung der Normale hat, die andere Seitenkraft S oder S_1 hingegen bleibt im Körper zurück und muß durch eine andere Kraft oder ein anderes Hinderniß aufgenommen werden, um die Körper im Gleichgewichte zu erhalten. Zwischen den normalen Seitenkräften N und N_1 aber findet, dem angeführten Principe zufolge, vollkommene Gleichheit statt.

Fig. 195.



Weicht die Richtung der Kraft P um den Winkel $NAP = \alpha$ von der Normale AX und um den Winkel $SAP = \beta$ von der Richtung der zweiten Seitenkraft S ab, so hat man (s. §. 78):

$$N = \frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}, \quad S = \frac{P \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}.$$

Bezeichnet man ebenso $N_1 A_1 P_1$ durch α_1 und $S_1 A_1 P_1$ durch β_1, so hat man auch:

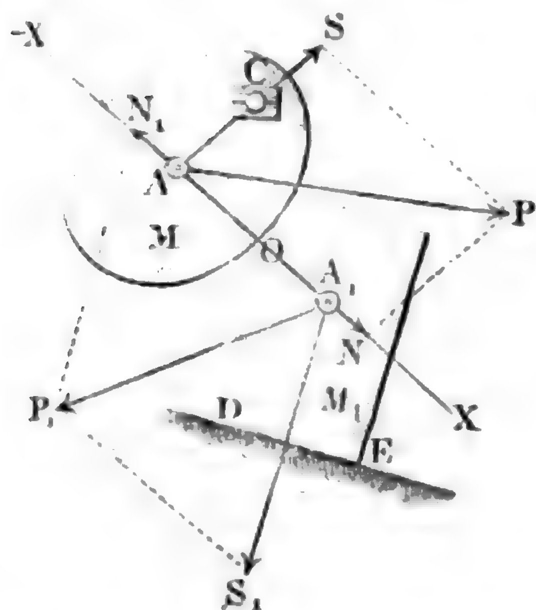
$$N_1 = \frac{P_1 \sin. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)} \text{ und } S_1 = \frac{P_1 \sin. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)};$$

endlich wegen der Gleichheit $N = N_1$:

$$\frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)} = \frac{P_1 \sin. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Beispiel. Welche Kraftzerlegungen treten ein, wenn der durch ein Hinderniß DE aufgehaltene Körper M_1, Fig. 196, durch einen anderen, um eine Axe C drehbaren Körper M mit einer Kraft $P = 250$ Pfund gedrückt wird, und die Richtungswinkel folgende sind:

Fig. 196.



$$PAN = \alpha = 35^0,$$
$$PAS = \beta = 48^0,$$
$$P_1 A_1 N_1 = \alpha_1 = 65^0,$$
$$P_1 A_1 S_1 = \beta_1 = 50^0.$$

Aus der ersten Formel bestimmt sich der Normaldruck zwischen den beiden Körpern:

$$N = N_1 = \frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)} = \frac{250 \sin. 48^0}{\sin. 83^0} = 187{,}18 \text{ Pfund};$$

aus der zweiten folgt ferner der Druck gegen die Axe oder den Zapfen C:

$$S = \frac{P \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)} = \frac{250 \sin. 35^0}{\sin. 83^0} = 144{,}47 \text{ Pfund};$$

endlich aus der Verbindung der dritten und vierten Gleichung ergiebt sich der Seitendruck gegen das Hinderniß DE:

$$S_1 = \frac{N_1 \sin. \alpha_1}{\sin. \beta_1} = \frac{187{,}18 \sin. 65^0}{\sin. 50^0} = 221{,}46 \text{ Pfund}.$$

Wegen der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung wird das Gleichgewicht eines unterstützten Körpers nicht gestört, wenn man statt der Stütze eine Kraft anbringt, welche den auf die Stütze übergehenden Druck oder Zug aufnimmt, und daher demselben an Größe gleich und der Richtung nach entgegengesetzt ist. Nach Einführung dieser Kräfte läßt sich daher jeder irgendwie unterstützter oder theilweise festgehaltener Körper auch als ein völlig freier Körper ansehen, und folglich auch der Gleichgewichtszustand desselben wie der eines freien Körpers oder eines festen Kräftesystemes behandeln. §. 139

Wenn z. B. bei dem um die Axe C drehbaren Körper M, Fig. 197, die Kraft N auf einen zweiten Körper M_1 übergeht, und die Kraft S von der Axe C aufgenommen wird, so kann man auch annehmen, daß derselbe ganz frei sei und außer der Kraft P noch von zwei Kräften $-N$ und $-S$ ergriffen werde. Wenn ebenso der Körper M_1 mit der Kraft N_1 auf M und mit der Kraft S_1 gegen die feste Ebene DE drückt, so wird deshalb das Gleichgewicht nicht gestört, wenn man statt dieser Stützen zwei Gegenkräfte $-N_1$ und $-S_1$ einführt, und dieselben mit den Kräften, welche überdies noch auf diesen Körper wirken, z. B. mit P_1, vereinigt. Beim Gleichgewichtszustande muß natürlich sowohl die Mittelkraft des einen Körpers,

Fig. 197.

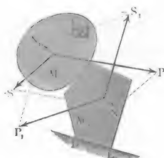
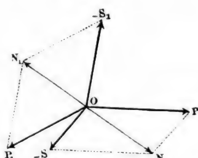


Fig. 198.



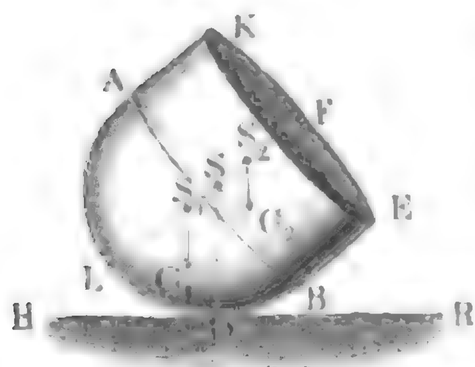
als auch die des anderen = Null sein, daher sowohl die Mittelkraft aus $-N$ und $-S$ durch P, als auch die aus $-N_1$ und $-S_1$ durch P_1 aufgehoben werden.

Da sich die Kräfte N und N_1, mit welchen die beiden Körper auf einander wirken, das Gleichgewicht halten, so werden folglich auch im Gleichgewichtszustande der Körperverbindung (M, M_1) die Kräfte P, $-S$, P_1 und $-S_1$ im Gleichgewicht sein. Man nennt jene Kräfte N, N_1 innere, und die Kräfte $P, -S, P_1$ und $-S_1$ äußere Kräfte der Körperverbindung oder des Kräftesystemes (M, M_1) und kann hiernach behaupten, daß im Gleichgewichtszustande des letzteren, sich nicht allein die inneren Kräfte das Gleichgewicht halten, sondern auch die äußeren Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn man dieselben, wie Fig. 198 darstellt, bei unveränderter Größe und Richtung, in irgend einem Punkte O angreifend annimmt.

§. 140 **Stabilität.** Wenn ein sich auf eine Horizontalebene stützender Körper außer der Schwerkraft von keiner anderen Kraft getrieben wird, so besitzt derselbe kein Bestreben zur fortschreitenden Bewegung, weil das vertical abwärts wirkende Gewicht von dieser Ebene vollständig aufgenommen wird; wohl aber

ist eine **Drehung** des Körpers möglich. Ruht der Körper *ADBF*, Fig. 199, mit einem Punkte *D* auf der Horizontalebene *HR*, so bleibt derselbe in Ruhe, wenn sein Schwerpunkt *S* unterstützt ist, d. h. in der durch den Stützpunkt *D* gehenden Verticallinie (verticalen Schwerlinie) liegt. Stützt sich aber ein Körper in zwei Punkten gegen die horizontale Oberfläche eines anderen, so erfordert das Gleichgewicht desselben, daß die verticale Schwerlinie die die beiden Stützpunkte verbindende Gerade durchschneide. Ruht endlich ein Körper in drei oder mehreren Punkten auf einer Horizontalebene auf, so besteht Gleichgewicht, wenn die verticale Schwerlinie durch das Dreieck oder Polygon hindurchgeht, welches entsteht, wenn man die Stützpunkte durch gerade Linien mit einander verbindet.

Fig. 199.



Uebrigens sind auch bei den unterstützten Körpern **stabiles** und **labiles Gleichgewicht** von einander zu unterscheiden. Das Gewicht *G* eines Körpers *AB*, Fig. 200, zieht den Schwerpunkt *S* desselben abwärts; stellt sich nun dieser Kraft kein Hinderniß entgegen, so bringt sie in dem Körper eine Drehung hervor, die so weit fortgeht, bis der Schwerpunkt seinen tiefsten Ort einnimmt und der Körper ins Gleichgewicht kommt. Es läßt sich aber behaupten, daß das Gleichgewicht **stabil** ist, wenn der Schwerpunkt die möglich tiefste Lage, Fig. 201, daß es nur **labil** ist, wenn er die höchste Lage einnimmt (Fig. 202), und daß es endlich ein **indifferentes** Gleichgewicht ist, wenn der Schwerpunkt bei jeder Stellung des Körpers auf einerlei Höhe bleibt (Fig. 203).

Fig. 200.

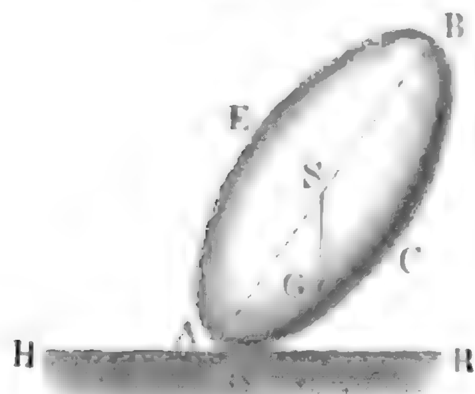


Fig. 201.

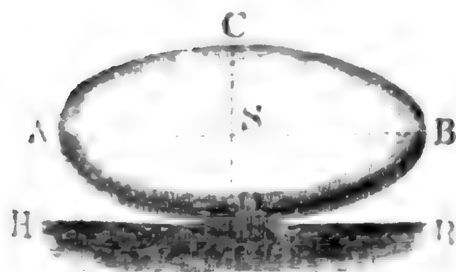


Fig. 202.

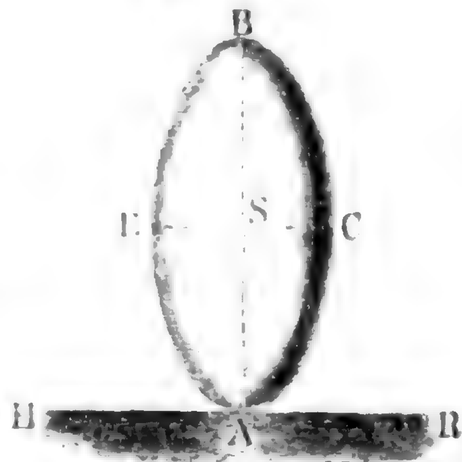
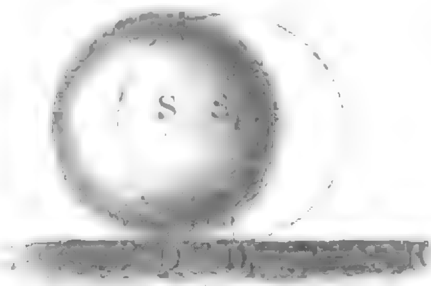
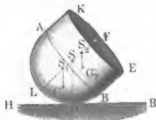


Fig. 203.



Beispiele. 1) Der homogene, aus einer Halbkugel und einem Cylinder bestehende Körper $ADBF$, Fig. 204, ruht auf einer Horizontalebene HR. Welche Höhe $SF = h$ muß der cylindrische Theil desselben haben, damit dieser Körper Gleichgewicht annehme? Der Halbmesser einer Kugel steht auf der entsprechenden Berührungsebene winkelrecht; nun ist aber die Horizontalebene eine solche Ebene, folglich muß auch der Halbmesser SD auf der Horizontalebene rechtwinkelig stehen und in ihm zugleich der Schwerpunkt des Körpers liegen. Die durch den Kugelmittelpunkt gehende Axe FSL des Körpers ist eine zweite Schwerlinie desselben; es ist daher der Mittelpunkt S, als Durchschnitt beider Schwerlinien, Schwerpunkt des Körpers.

Fig. 204.



Setzen wir den Kugel- und Cylinderhalbmesser $SA = SB = SL = r$ und die Cylinderhöhe $SF = BE = h$, so haben wir für das Volumen der Halbkugel: $V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$, für das Volumen des Cylinders: $V_2 = \pi r^2 h$, für den Abstand des Kugelschwerpunktes S_1, $SS_1 = \frac{3}{8} r$, und für den des Cylinderschwerpunktes S_2, $SS_2 = \frac{1}{2} h$. Damit nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers nach S falle, ist das Moment $\frac{2}{3}\pi r^3 . \frac{3}{8} r$ der Halbkugel gleichzusetzen dem Moment $\pi r^2 h . \frac{1}{2} h$ des Cylinders; hieraus aber ergiebt sich:

$$h^2 = \tfrac{1}{2} r^2, \text{ d. i. } h = r \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071 . r.$$

Ist der Körper nicht homogen, sondern hat der halbkugelförmige Theil desselben das specifische Gewicht ε_1 und der cylindrische Theil das specifische Gewicht ε_2, so sind die Momente dieser Theile, $\frac{2}{3}\pi r^3 . \varepsilon_1 \frac{3}{8} r$ und $\pi r^2 h \varepsilon_2 . \frac{1}{2}$, und es folgt durch Gleichsetzung derselben:

$$2 \varepsilon_2 h^2 = \varepsilon_1 r^2, \text{ d. i. } h = r \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_2}} = 0{,}7071 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cdot r.$$

2) Der Druck, welchen jedes der drei Beine A, B, C, Fig. 205, eines beliebig belasteten Tisches auszuhalten hat, bestimmt sich auf folgende Weise. Es sei S Schwerpunkt des belasteten Tisches, und es seien SE, CD Perpendikel auf AB. Bezeichnen wir nun das Gewicht des ganzen Tisches durch G und den Druck in C durch R, so können wir, AB als Axe behandelnd, setzen: Moment von R = Moment von G, d. i.:

Fig. 205.

$$R . \overline{CD} = G . \overline{SE},$$

und erhalten nun:

$$R = \frac{SE}{CD} \cdot G = \frac{\triangle ABS}{\triangle ABC} \cdot G; \text{ ebenso auch den Druck in } B:$$

$$Q = \frac{\triangle ACS}{\triangle ABC} \cdot G, \text{ und den in } A:$$

$$P = \frac{\triangle BCS}{\triangle ABC} \cdot G.$$

141 Beschäftigen wir uns mit dem Falle, wenn ein Körper mit einer **ebenen Basis** auf einer **horizontalen Ebene** ruht, etwas specieller. Ein solcher

Körper besitzt Stabilität oder ist im stabilen Gleichgewichte, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist, d. h. wenn das den Schwerpunkt enthaltende Loth durch die Basis des Körpers hindurchgeht, weil in diesem Falle die durch das Gewicht des Körpers angeregte Drehung durch die Festigkeit desselben verhindert wird. Geht das Loth durch den Umfang der Basis, so befindet sich der Körper im labilen Gleichgewichte, und geht endlich dasselbe gar nicht durch die Basis, so findet gar kein Gleichgewicht statt, der Körper dreht sich um eine Seite des Umfanges seiner Basis und stürzt um. Das dreiseitige Prisma *ABC*, Fig. 206, ist hiernach stabil, weil das Loth *SG* durch einen Punkt *N* der Basis *BC* hindurchgeht; das Parallelepiped *ABCD*, Fig. 207, ist im labilen Gleichgewichte, weil das Loth *SG* eine Seite *D* der Basis *CD* durchschneidet; der Cylinder *ABCD*, Fig. 208, ist endlich ohne Stabilität, weil das Loth *SG* dessen Basis *CD* nicht durchschneidet.

Fig. 206.

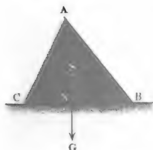
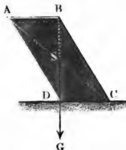
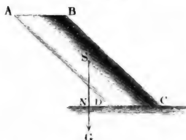


Fig. 207.



Stabilität oder Standfähigkeit (franz. stabilité; engl. stability) ist das Vermögen eines Körpers, durch sein Gewicht allein seine Stellung zu behaupten und einer Umdrehungsursache Widerstand entgegenzusetzen. Kommt es darauf an, ein Maß für die Stabilität eines Körpers auszuwählen, so muß unterschieden werden, ob nur auf eine Verrückung oder ob auf ein wirkliches Umstürzen Rücksicht genommen werden soll. Ziehen wir zunächst nur das erste Verhältniß in Betracht.

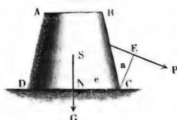
Fig. 208.



Stabilitätsformeln. Eine nicht vertical gerichtete Kraft *P* sucht einen Körper *ABCD*, Fig. 209 (a. f. S.), nicht allein umzustürzen, sondern auch fortzuschieben; nehmen wir indessen an, daß diesem Fortschieben, oder nach Befinden Fortziehen, ein Hinderniß entgegengesetzt sei, berücksichtigen wir also nur §. 142

das Umdrehen um eine Basiskante C. Fällen wir von dieser Kante ein Perpendikel $CE = a$ gegen die Kraftrichtung und ein anderes Perpendikel

Fig. 209.



$CN = e$ gegen die verticale Schwerlinie SG des Körpers, so haben wir es mit einem Winkelhebel ECN zu thun, für welchen gilt: $Pa = Ge$, also $P = \frac{e}{a} G$; ist folglich die äußere Kraft P wenig größer als $\frac{eG}{a}$, so nimmt der Körper eine Drehung um C an und verliert also seine Stabilität. Es hängt hiernach seine Stabilität von dem Producte (Ge) aus dem Gewichte des Körpers und aus dem kürzesten Abstande zwischen einer Seite des Umfanges der Basis und dem Lothe durch den Schwerpunkt ab, und es läßt sich daher Ge als **Maß der Stabilität** ansehen und deshalb auch schlechtweg Stabilität selbst nennen.

Man ersieht hieraus, daß die Stabilität mit dem Gewichte G und dem Abstande e gleichmäßig wächst, und schließt hiernach, daß unter übrigens gleichen Umständen eine doppelte, dreimal so schwere Mauer u. s. w. nicht mehr Standfähigkeit besitzt, als eine Mauer vom einfachen Gewichte und dem doppelten, dreifachen Abstande oder Hebelarme e u. s. w.

§. 143 1) Ein **Parallelepiped** $ABCD$, Fig. 210, von der Länge l, Breite $AB = CD = b$ und Höhe $AD = BC = h$ hat das Gewicht $G = V\gamma = bhl\gamma$, und die Stabilität

$$St = G.\overline{DN} = G.\tfrac{1}{2}\overline{CD} = \frac{Gb}{2} = \tfrac{1}{2} b^2 h l \gamma,$$

insofern γ die Dichtigkeit der Masse des Parallelepipedes bezeichnet.

Fig. 210.

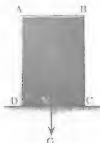
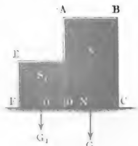


Fig. 211.



2) Bei einem aus zwei **Parallelepipeden** bestehenden Körper BDE, Fig. 211, sind die Stabilitäten in Hinsicht auf die beiden Basiskanten C und

F verschieden von einander. Sind die Höhen BC und $EF = h$ und h_1 und die Breiten CD und $DF = b$ und b_1, so hat man die Gewichte der Theile G und $G_1 = bhl\gamma$ und $b_1 h_1 l\gamma$; die Hebelarme in Beziehung auf C, $CN = \frac{1}{2} b$ und $CO = b + \frac{1}{2} b_1$, und in Beziehung auf F, $= b_1 + \frac{1}{2} b$ und $\frac{1}{2} b_1$; es ist demnach die Stabilität: erstens für eine Umdrehung um C:

$$St = \tfrac{1}{2} Gb + G_1 (b + \tfrac{1}{2} b_1), = (\tfrac{1}{2} b^2 h + bb_1 h_1 + \tfrac{1}{2} b_1^2 h_1) l\gamma,$$

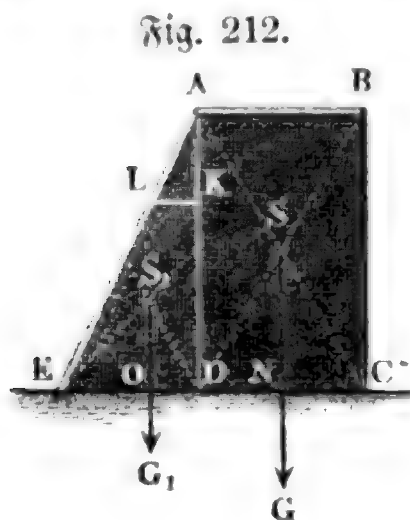
dagegen zweitens, in Beziehung auf F:

$$St_1 = G (b_1 + \tfrac{1}{2} b) + \tfrac{1}{2} G_1 b_1 = (\tfrac{1}{2} b_1^2 h_1 + bb_1 h + \tfrac{1}{2} b^2 h) l\gamma.$$

Die letztere Stabilität ist um $St_1 - St = (h - h_1) b b_1 l\gamma$ größer als die erstere; will man die Stabilität einer Mauer AC durch Banquets DE vergrößern, so sind diese demnach auf derjenigen Seite der Mauer anzubringen, wohin die Umdrehungskraft (Wind-, Wasser-, Erddruck u. s. w.) wirkt.

Von einer auf einer Seite geböschten Mauer $ABCE$, Fig. 212, ergiebt sich folgende Stabilität. Es sei die Länge dieser Mauer $= l$, die obere Breite derselben, $AB = b$, ihre Höhe $BC = h$, ferner die Böschung $= n$, d. h. auf $AK = 1$ Fuß Höhe, $KL = n$ Ausladung, also auf h Fuß: $DE = nh$. Das Gewicht des Parallelepipedes AC ist $G = bhl\gamma$, das des dreiseitigen Prismas $ADE = G_1 = \frac{1}{2} nh . hl\gamma$, die Hebelarme für eine Umdrehung um E sind $EN = ED + \frac{1}{2} b = nh + \frac{1}{2} b$ und $EO = \frac{2}{3} ED = \frac{2}{3} nh$;

Fig. 212.



es ist folglich die Stabilität:

$$St = G (nh + \tfrac{1}{2} b) + \tfrac{2}{3} G_1 nh = (\tfrac{1}{2} b^2 + nhb + \tfrac{1}{3} n^2 h^2) hl\gamma.$$

Eine parallelepipedische Mauer von gleichem Volumen hat die Breite $b + \frac{1}{2} nh$, daher die Stabilität:

$$St_1 = \tfrac{1}{2} (b + \tfrac{1}{2} nh)^2 hl\gamma = (\tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} nhb + \tfrac{1}{8} n^2 h^2) hl\gamma;$$

ihre Stabilität ist daher um $St - St_1 = (b + \frac{5}{12} nh) . \frac{1}{2} nh^2 l\gamma$ kleiner als die der geböschten Mauer.

Für eine auf der entgegengesetzten Seite geböschte Mauer ist die Stabilität:

$$St_2 = (b^2 + nhb + \tfrac{1}{3} n^2 h^2) . \tfrac{1}{2} hl\gamma,$$

demnach auch kleiner als St, und zwar um

$$St - St_2 = (b + \tfrac{1}{3} nh) . \tfrac{1}{2} nh^2 l\gamma,$$

wiewohl um $St_2 - St_1 = \frac{1}{24} n^2 h^3 l\gamma$ größer als die Stabilität der parallelepipedischen Mauer.

Beispiel. Wie groß ist die Stabilität einer Bruchsteinmauer von 10 Fuß Höhe und $1\frac{1}{4}$ Fuß oberer Breite für jeden Fuß Länge, bei $\frac{1}{5}$ füßiger Böschung

an der Rückseite? Das specifische Gewicht dieser Mauer (§. 61) = 2,4 angenommen, folgt die Dichtigkeit derselben $\gamma = 61,75 \,.\, 2,4 = 148,2$ Pfund, nun ist $l = 1$, $h = 10$, $b = 1,25$ und $n = \frac{1}{5} = 0,2$; es folgt daher die gesuchte Stabilität:

$$St = [\tfrac{1}{2} \,.\, (1,25)^2 + 0,2 \,.\, 1,25 \,.\, 10 + \tfrac{1}{3} \,.\, (0,2)^2 \,.\, 10^2]\, 10 \,.\, 1 \,.\, 148,2$$
$$= (0,78125 + 2,5 + 1,3333) \,.\, 1482 = 4,6146 \,.\, 1482 = 6839 \text{ Fußpfund.}$$

Bei derselben Menge an Material und unter übrigens gleichen Umständen wäre die Stabilität einer parallelepipedischen Mauer:

$$St_1 = [\tfrac{1}{2} \,.\, (1,25)^2 + \tfrac{1}{2} \,.\, 0,2 \,.\, 1,25 \,.\, 10 + \tfrac{1}{3} \,.\, 0,2^2 \,.\, 10^2] \,.\, 1482$$
$$= (0,78125 + 1,25 + 0,5) \,.\, 1482 = 2,531 \,.\, 1482 = 3751 \text{ Fußpfund.}$$

Endlich hätte dieselbe Mauer mit geböschter Vorderseite Stabilität:

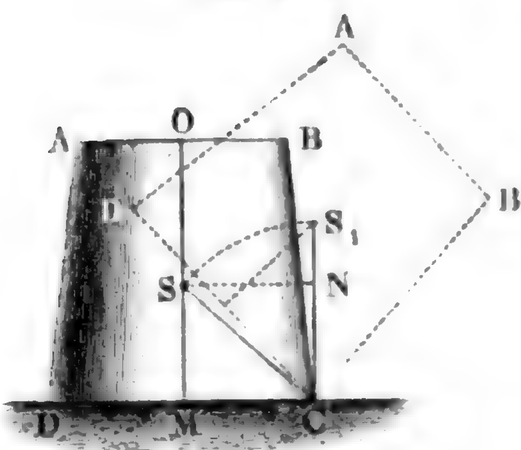
$$St_2 = [\tfrac{1}{2} \,.\, (1,25)^2 + \tfrac{1}{4} \,.\, 0,2 \,.\, 1,25 \,.\, 10 + \tfrac{1}{6} \,.\, (0,2)^2 \,.\, 10^2] \,.\, 1482$$
$$= (0,78125 + 1,25 + 0,666\ldots) \,.\, 1482 = 2,6979 \,.\, 1482 = 3998 \text{ Fußpfund.}$$

Anmerkung. Man ersieht aus dem Vorhergehenden, daß es eine Ersparung an Material gewährt, die Mauern zu böschen, oder mit Pfeilern zu versehen, ihnen Banquets zu geben, sie auf Plinten zu setzen u. s. w. Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes giebt der zweite Theil, wo vom Erddruck, von den Gewölben, Brücken u. s. w. gehandelt wird.

144 **Dynamische Stabilität.** Von dem im letzten Paragraphen abgehandelten Maße der Stabilität eines Körpers ist ein anderes Maß derselben zu unterscheiden, wobei wir die zum Umstürzen eines Körpers erforderliche mechanische Arbeit in Betracht ziehen. Es ist die Leistung oder Arbeit einer Kraft gleich dem Producte aus Kraft und Weg, ferner die Kraft eines schweren Körpers ist das Gewicht G und der Weg desselben die Verticalprojection des vom Schwerpunkte durchlaufenen Weges, folglich kann auch im letzteren Sinne zum Maße der Stabilität eines Körpers das Product Gs dienen, wenn s die senkrechte Höhe ist, auf welche der Schwerpunkt des Körpers steigen muß, um den Körper aus seinem stabilen Gleichgewichtszustande in einen labilen zu bringen.

Es sei C die Drehungsaxe und S der Schwerpunkt eines Körpers $ABCD$, Fig. 213, dessen dynamische Stabilität wir angeben wollen. Drehen wir den Körper, so daß sein Schwerpunkt S nach S_1, d. h. senkrecht über C kommt, so ist der Körper im labilen Gleichgewichte, denn wenn er nur noch wenig weiter gedreht wird, so gelangt er zum Umsturz. Ziehen wir die Horizontale SN, so schneidet diese die Höhe $NS_1 = s$ ab, auf welche der Schwerpunkt gestiegen ist, und aus welcher sich die Stabilität Gs ergiebt. Ist nun

Fig. 213.



$$CS = CS_1 = r,\ CM = NS = e$$

und die Höhe $CN = MS = a$, so folgt der Weg:

$$S_1 N = s = r - a = \sqrt{a^2 + e^2} - a,$$

und die Stabilität im letzteren Sinne:

$$St = G(\sqrt{a^2 + e^2} - a).$$

Der Factor $s = \sqrt{a^2 + e^2} - a$ giebt für $a = 0$, $s = e$, für $a = e$, $s = e(\sqrt{2} - 1) = 0{,}414\,e$, für $a = ne$ aber $s = (\sqrt{n^2 + 1} - n)e$, annähernd $= (n + \frac{1}{2n} - n)e = \frac{e}{2n}$, also für $a = 10\,e$, $s = \frac{e}{20}$ und für $a = \infty$, $s = \frac{e}{\infty} = 0$; es ist also die Arbeits-Stabilität um so größer, je tiefer der Schwerpunkt liegt, und sie nähert sich immer mehr und mehr der Null, je höher sich der Schwerpunkt über der Basis befindet. Schlitten, Wagen, Schiffe u. s. w. sind deshalb so zu beladen, daß der Schwerpunkt des Ganzen nicht nur möglichst tief, sondern auch nahe über die Mitte der Basis zu liegen kommt.

Ist der Körper ein Prisma mit symmetrisch trapezoidalem Querschnitte, wie Fig. 213 im Durchschnitt vorstellt, und sind die Dimensionen folgende: Länge $= l$, Höhe $MO = h$, untere Breite $CD = b_1$ und obere Breite $AB = b_2$, so hat man:

$$MS = a = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} \text{ (§. 110) und}$$

$$CM = e = \tfrac{1}{2} b_1, \text{ daher:}$$

$$CS = r = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2},$$

und die dynamische Stabilität oder die zum Umstürzen dieses Körpers nöthige mechanische Arbeit:

$$St = G\left[\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2} - \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right].$$

Beispiel. Wie groß ist die Stabilität oder die mechanische Arbeit zum Umstürzen des Obelisken $ABCD$, Fig. 214, aus Granit, wenn dessen Höhe $h = 30$ Fuß, obere Länge und Breite $l_1 = 1\tfrac{1}{2}$ und $b_1 = 1$ Fuß und untere Länge und Breite $l_2 = 4$ Fuß und $b_2 = 3\tfrac{1}{2}$ Fuß betragen? Das Volumen dieses Körpers ist (§. 121):

Fig. 214.

$$V = (2b_1 l_1 + 2b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1)\frac{h}{6}$$
$$= (2 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{7}{2} + 1 \cdot 4 + \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{7}{2}) \cdot \tfrac{30}{6}$$
$$= 40{,}25 \cdot 5 = 201{,}25 \text{ Cubikfuß;}$$

wiegt nun 1 Cubikfuß Granit, $\gamma = 3 \cdot 61{,}74 = 185{,}22$ Pfund, so ist das ganze Gewicht dieses Körpers:

$$G = 201{,}25 \cdot 185{,}22 = 37275 \text{ Pfund.}$$

Die Höhe seines Schwerpunktes über der Basis beträgt:

$$a = \frac{b_2 l_2 + 3 b_1 l_1 + b_2 l_1 + b_1 l_2}{2 b_2 l_2 + 2 b_1 l_1 + b_2 l_1 + b_1 l_2} \cdot \frac{h}{2}$$
$$= \frac{4 \cdot {}^7/_2 + 3 \cdot {}^3/_2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + {}^3/_2 \cdot {}^7/_2}{40{,}25} \cdot {}^{30}/_2 = \frac{27{,}75 \cdot 15}{40{,}25} = 10{,}342 \text{ Fuß.}$$

Eine Umdrehung um die längere Basiskante vorausgesetzt, ist der Horizontalabstand des Schwerpunktes von dieser Kante, $e = {}^1/_2\, b_2 = {}^1/_2 \cdot {}^7/_2 = {}^7/_4$ Fuß, daher die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe:

$$CS = r = \sqrt{a^2 + e^2} = \sqrt{(1{,}75)^2 + (10{,}342)^2} = \sqrt{110{,}002} = 10{,}489;$$

und die Höhe, auf welche der Schwerpunkt zu heben ist, um ein Umstürzen herbeizuführen:

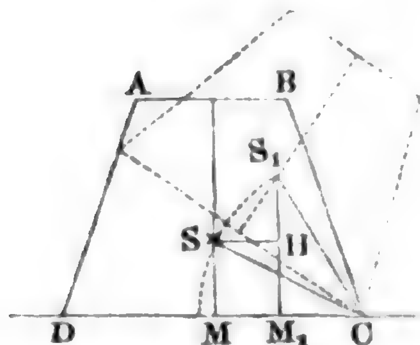
$$s = r - a = 10{,}489 - 10{,}342 = 0{,}147 \text{ Fuß,}$$

endlich die entsprechende Arbeit oder Stabilität:

$$St = G s = 37275 \cdot 0{,}147 = 5479 \text{ Fußpfund.}$$

§. 145 **Arbeit beim Fortschaffen eines schweren Körpers.** Um die mechanische Arbeit zu finden, welche nöthig ist, um den Ort eines schweren Körpers durch Drehung zu verändern, hat man einen ähnlichen Weg einzuschlagen, wie bei der Berechnung der Arbeitsstabilität desselben. Dreht man einen schweren Körper AC, Fig. 215, um eine horizontale Axe C so viel, daß sich die Neigung $MCS = \alpha$ der Schwerlinie $CS = r$ in $MCS_1 = \alpha_1$ umändert, so legt hierbei der Schwerpunkt S in verticaler Richtung den Weg $HS_1 = M_1 S_1 - MS = s = r(sin.\,\alpha_1 - sin.\,\alpha)$ zurück, und es ist daher, wenn G das Gewicht des Körpers bezeichnet, die hierzu nöthige mechanische Arbeit:

Fig. 215.



$$A_1 = G s_1 = G r (sin.\,\alpha_1 - sin.\,\alpha).$$

Wäre die Drehungsaxe nicht horizontal, sondern um den Winkel β gegen den Horizont geneigt, so würde

$$s_1 = r \cos.\beta\,(sin.\,\alpha_1 - sin.\,\alpha) \text{ und}$$
$$A_1 = G r \cos.\beta\,(sin.\,\alpha_1 - sin.\,\alpha) \text{ sein.}$$ (Vergl. §. 133.)

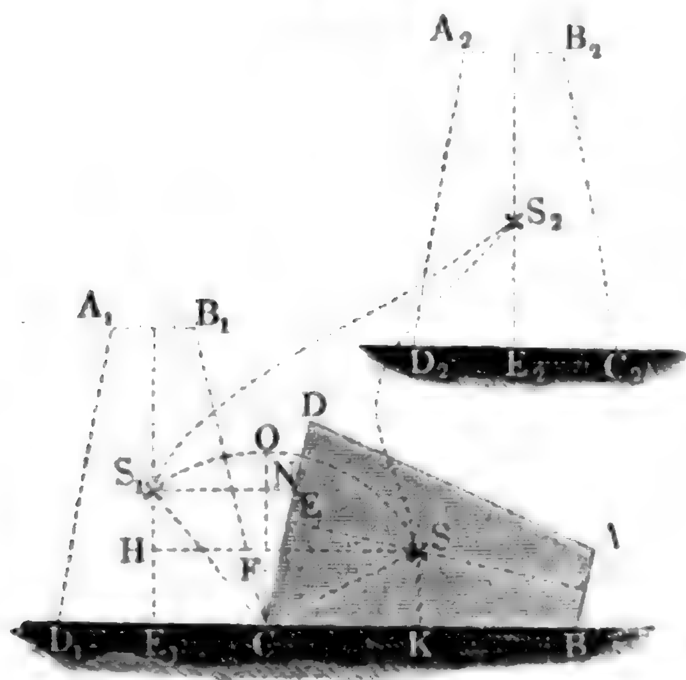
Wird der Körper außerdem noch so fortbewegt, daß er seine Lage gegen die Richtung der Schwere nicht ändert, aber sein Schwerpunkt sowie alle seine Theile einen und denselben Weg durchlaufen, dessen Verticalprojection $= s_2$ ist, so erfordert die Verrückung oder Fortbewegung des Körpers, die mechanische Arbeit, noch den Zusatz $A_2 = G s_2$, und es ist daher die gesammte mechanische Arbeit:

$$A = A_1 + A_2 = G\,[r \cos.\beta\,(sin.\,\alpha_1 - sin.\,\alpha) + s_2].$$

Der Weg des Körpers in horizontaler Richtung kommt natürlich ganz außer Betracht, wenn man eine sehr langsame Bewegung voraussetzt, wobei die Arbeit der Trägheit Null zu setzen ist.

Bei dem Körper $A\,C$, Fig. 216, welcher auf einer horizontalen Ebene aufruht, und auf eine andere Horizontalebene $C_2\,D_2$ gestellt werden soll, hat man $\beta = 0^0$, also $cos.\,\beta = 1$; ferner wenn a und e die verticalen und horizontalen Coordinaten vom Schwerpunkt S_1 des Körpers in aufgerichteter Stellung bezeichnen, den Radius $C\,S_1 = r = \sqrt{a^2 + e^2}$, und die Höhe $E_1\,S_1 = a = r\,sin.\,\alpha_1$. Ist α der Neigungswinkel $B\,C\,S$ der Seitenfläche $B\,C$ des Körpers gegen die Schwerlinie $C\,S$, so ergiebt sich die anfängliche Höhe des Schwerpunktes S über der Auflagerungsfläche:

Fig. 216.



$$KS = CS\,sin.\,B\,C\,S = r\,sin.\,\alpha$$
$$= \sqrt{a^2 + e^2}\,.\,sin.\,\alpha,$$

und es folgt die Höhe, auf welche der Schwerpunkt S des Körpers beim Aufrichten steigt:

$$H\,S_1 = s_1 = E_1\,S_1 - E_1\,H = a - \sqrt{a^2 + e^2}\,.\,sin.\,\alpha.$$

Ist nun noch s_2 die senkrechte Höhe der Standebene $C_2\,D_2$ über der ersten Lagerebene $B\,C$, so hat man die ganze mechanische Arbeit zum Aufheben des Körpers von $B\,C$ auf $C_2\,D_2$:

$$A = G\,(a - \sqrt{a^2 + e^2}\,.\,sin.\,\alpha + s_2).$$

Diese Bestimmung der Arbeit zum Fortschaffen eines Körpers hat nur dann ihre volle Richtigkeit, wenn der Schwerpunkt stetig von S nach S_2 gehoben wird; in dem Falle hingegen, wo der Körper erst aufgerichtet und dann emporgehoben wird, ist die erforderliche mechanische Arbeit:

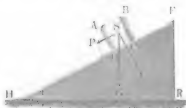
$$A = G(\overline{FO} + s_2) = G(\overline{CO} - KS + s_2) = G[\sqrt{a^2 + e^2}\,(1 - sin.\,\alpha) + s_2],$$

weil die Arbeit $G\,.\,\overline{O\,N} = G\,(\sqrt{a^2 + e^2} - a)$, welche der Körper beim Niedersinken des Schwerpunktes von O nach S_1 verrichtet, verloren geht.

Stabilität eines Körpers auf der geneigten Ebene. Ein Körper §. 146
AC, Fig. 217 (a. f. S.), auf einer schiefen, d. h. gegen den Horizont geneigten Ebene (franz. plan incliné; engl. inclined plane) kann zwei Bewegungen annehmen, er kann von der schiefen Ebene herabgleiten, er kann sich auch um eine seiner Basiskanten umdrehen und umstürzen. Ist der Körper sich selbst überlassen, so zerlegt sich das Gewicht G des Körpers in eine Kraft N normal und eine Kraft P parallel zur Basis; die erstere nimmt die schiefe Ebene vollkommen auf, die

letztere aber treibt den Körper auf der Ebene abwärts. Setzen wir den Neigungswinkel FHR der schiefen Ebene gegen den Horizont $= \alpha$, so haben wir auch den Winkel $GSN = \alpha$, und daher den **Normaldruck**:

Fig. 217.



$$N = G \cos. \alpha,$$

sowie die **Kraft zum Herabgleiten**:

$$P = G \sin. \alpha.$$

Geht die verticale Schwerlinie SG durch die Basis CD, wie Fig. 217 zeigt, so kann nur eine gleitende Bewegung entstehen, geht aber, wie in Fig. 218, diese Schwerlinie außerhalb der Basis vorbei, so tritt auch noch ein Umstürzen ein, es ist also der Körper ohne Stabilität. Uebrigens hat

Fig. 218.

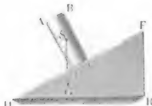
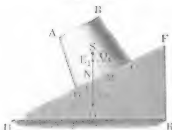


Fig. 219.



ein Körper AC auf der schiefen Ebene FH, Fig. 219, eine andere Stabilität als auf der Horizontalebene HR. Sind $DM = e$ und $MS = a$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Schwerpunktes S, so hat man den Hebelarm der Stabilität:

$$DE = DO - MN = e \cos. \alpha - a \sin. \alpha,$$

während er $= e$ ist, wenn der Körper auf der Horizontalebene steht. Da $e > e \cos. \alpha - a \sin. \alpha$ ist, so fällt die Stabilität in Beziehung auf die untere Kante D auf der schiefen Ebene kleiner aus, als auf der horizontalen Ebene; sie ist sogar Null für $e \cos. \alpha = a \sin. \alpha$, d. i. für $tang. \alpha = \frac{e}{a}$.

Wenn also der auf einer Horizontalebene mit der Stabilität Ge stehende Körper auf eine schiefe Ebene zu stehen kommt, deren Neigungswinkel α dem Ausdrucke $tang. \alpha = \frac{e}{a}$ entspricht, so verliert derselbe seine Stabilität. Auf der anderen Seite kann aber auch ein Körper auf der schiefen Ebene zur Stabilität gelangen, die ihm mangelt, wenn er auf der Horizontalebene steht. Für eine Drehung um die obere Kante C ist der Hebelarm $CE_1 = CO_1 + MN = e_1 \cos. \alpha + a \sin. \alpha$, während er beim Stande auf der Horizon-

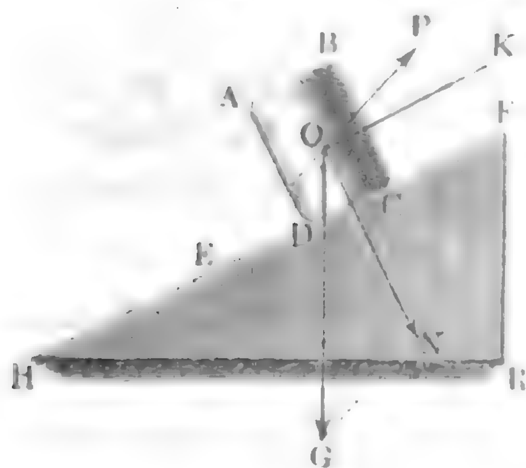
talebene, $= CM = e_1$ ausfällt. Ist nun e_1 negativ, so hat der Körper keine Stabilität, so lange er auf der Horizontalebene steht; ruht er aber auf einer geneigten Ebene, für deren Neigungswinkel α, $tang.\alpha = \frac{e_1}{a}$ ist, so gelangt der Körper in eine stabile Gleichgewichtslage.

Wirkt außer der Schwerkraft noch eine andere Kraft P auf den Körper $ABCD$, Fig. 209, so behält derselbe seine Stabilität, wenn die Mittelkraft N aus dem Gewichte G des Körpers und aus der Kraft P eine Richtung hat, welche die Basis CD des Körpers durchschneidet.

Beispiel. Bei dem Obelisken im Beispiele des Paragraphen 141 ist $e = \frac{7}{4}$ Fuß und $a = 10{,}342$ Fuß, es verliert folglich derselbe seine Stabilität, wenn er auf eine schiefe Ebene zu stehen kommt, für deren Neigungswinkel ist: $tang.\alpha = \frac{7}{4\,.\,10{,}342} = \frac{7000}{41368} = 0{,}16922$, deren Neigung folglich $\alpha = 9^0 36'$ beträgt.

Theorie der schiefen Ebene. Da die schiefe Ebene nur denjenigen Druck in sich aufnimmt, welcher winkelrecht gegen sie gerichtet ist, so bestimmt sich die Kraft P, welche nöthig ist, um einen übrigens vor dem Umstürzen geschützten Körper auf der schiefen Ebene zu erhalten, indem man die Bedingung festsetzt, daß die aus P und G hervorgehende Mittelkraft N, Fig. 220, winkelrecht zur schiefen Ebene stehe. Der Theorie des Parallelogrammes der Kräfte zufolge hat man: §. 147

Fig. 220.



$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\,PNO}{sin.\,PON};$$

nun ist aber der Winkel $PNO =$ Winkel $GON = FHR = \alpha$, und der Winkel $PON = POK + KON = \beta + 90^0$, insofern man den Winkel $PEF = POK$, um welchen die Kraftrichtung von der schiefen Ebene abweicht, mit β bezeichnet; man erhält daher:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,(90 + \beta)}, \text{ d. i. } \frac{P}{G} = \frac{sin.\,\alpha}{cos.\,\beta},$$

also die Kraft, welche den Körper auf der schiefen Ebene erhält:

$$P = \frac{G\,sin.\,\alpha}{cos.\,\beta}.$$

Für den Normaldruck N ist

$$\frac{N}{G} = \frac{sin.\,OGN}{sin.\,ONG},$$

aber Winkel $OGN = 90^0 - (\alpha + \beta)$ und $ONG = PON = 90 + \beta$, daher folgt

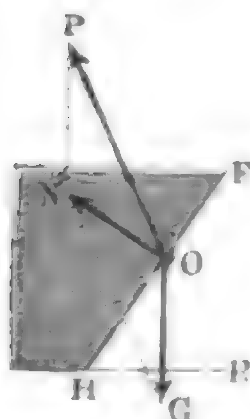
$$\frac{N}{G} = \frac{sin.[90^0 - (\alpha + \beta)]}{sin.(90^0 + \beta)} = \frac{cos.(\alpha + \beta)}{cos.\beta},$$

und der Normaldruck gegen die schiefe Ebene:

$$N = \frac{G\, cos.(\alpha + \beta)}{cos.\beta}.$$

Ist $\alpha + \beta > 90$ Grad, also $\beta > 90 - \alpha$, so fällt N negativ aus, und es ist dann, wie Fig. 221 darstellt, die schiefe Ebene HF über den von der Kraft P ergriffenen Körper O zu legen.

Fig. 221.



Geht die Kraft P mit der schiefen Ebene parallel, so ist $\beta = 0$ und $cos.\beta = 1$, daher

$$P = G\, sin.\alpha \text{ und } N = G\, cos.\alpha.$$

Wirkt die Kraft P vertical, so ist $\alpha + \beta = 90^0$, daher

$$cos.\beta = sin.\alpha, \text{ ferner } cos.(\alpha + \beta) = 0,$$

und $P = G$ sowie $N = 0$; dann hat also die schiefe Ebene keinen Einfluß auf den Körper.

Wirkt endlich die Kraft horizontal, so ist $\beta = -\alpha$ und $cos.\beta = cos.\alpha$, daher

$$P = \frac{G\, sin.\alpha}{cos.\alpha} = G\, tang.\alpha, \text{ sowie } N = \frac{G\, cos.0}{cos.\alpha} = \frac{G}{cos.\alpha}.$$

Beispiel. Um einen Körper von 500 Pfund auf einer schiefen Ebene von 50° Neigung gegen den Horizont zu erhalten, wird eine Kraft aufgewendet, deren Richtung 75° mit dem Horizonte einschließt; wie groß ist diese Kraft und wie stark drückt der Körper gegen die schiefe Ebene? Die Kraft ist:

$$P = \frac{500\, sin.50^0}{cos.(75 - 50)} = \frac{500\, sin.50^0}{cos.25^0} = 422{,}6 \text{ Pfund},$$

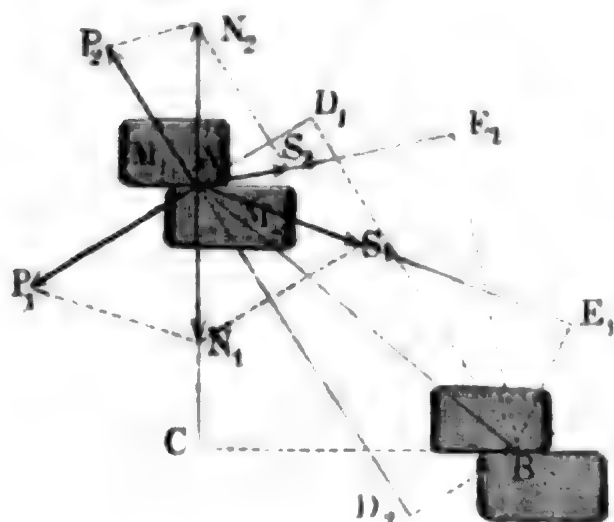
und der Druck gegen die Ebene:

$$N = \frac{500\,.\,cos.75^0}{cos.25^0} = 142{,}8 \text{ Pfund}.$$

§. 148 **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.** Bringt man das in §. 138 näher auseinandergesetzte Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 83 und §. 98) in Verbindung, so stellt sich folgende Regel heraus: Halten zwei Körper, M_1 und M_2, Fig. 222, einander das Gleichgewicht, so ist für eine endliche geradlinige und auch für eine unendlich kleine krummlinige Bewegung des Druck- oder Berührungspunktes A, nicht allein die Summe der mechanischen Arbeiten von den Kräften jedes

einzelnen Körpers, sondern auch die Summe der mechanischen Arbeiten von den äußeren Kräften beider Körper, zusammengenommen, gleich Null. Sind P_1 und S_1 die Kräfte des einen Körpers, P_2 und S_2 die des anderen, so entsprechen denselben bei einer Verrückung des Berührungspunktes von A nach B die Wege AD_1, AE_1, AD_2 und AE_2, und es ist nach dem oben ausgesprochenen Gesetze:

Fig. 222.



$$P_1 . \overline{AD_1} + S_1 . \overline{AE_1} + P_2 \overline{AD_2} + S_2 . \overline{AE_2} = 0.$$

oder ohne Rücksicht auf die Richtung,

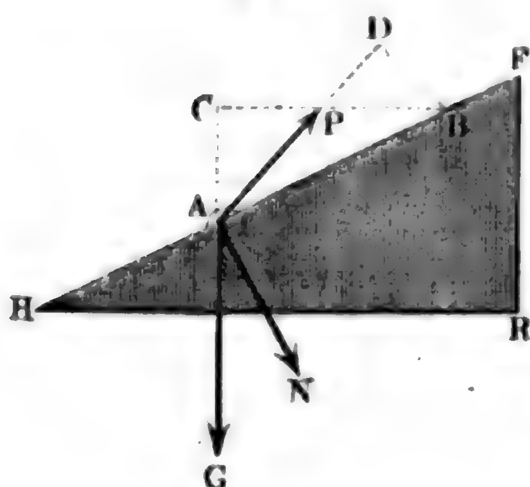
$$P_1 \overline{AD_1} + S_1 . \overline{AE_1} = P_2 . \overline{AD_2} + S_2 . \overline{AE_2}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun. Da die Normaldrücke N_1 und N_2 einander gleich sind, so findet auch Gleichheit zwischen ihren Arbeiten $N_1 . \overline{AC}$ und $N_2 . \overline{AC}$ statt, nur mit dem Unterschiede, daß die Arbeit der einen Kraft positiv und die der anderen negativ ist. Nun hat man aber nach dem Früheren, die Arbeit $N_1 . \overline{AC}$ der Mittelkraft N_1 gleich der Summe $P_1 . \overline{AD_1} + S_1 . \overline{AE_1}$ der Arbeiten ihrer Componenten P_1 und S_1, und ebenso $N_2 . \overline{AC} = P_2 . \overline{AD_2} + S_2 . \overline{AE_2}$: es ist daher auch:

$$P_1 . \overline{AD_1} + S_1 . \overline{AE_1} = P_2 . \overline{AD_2} + S_2 . \overline{AE_2}.$$

Die Anwendung des so allgemeiner gemachten Principes der virtuellen Geschwindigkeiten gewährt bei statischen Untersuchungen oft große Vortheile, indem durch sie die Entwickelung der Gleichgewichtsformeln sehr vereinfacht wird. Verrückt man z. B. einen Körper A auf der schiefen Ebene FH, Fig. 223, um den Weg AB, so ist der entsprechende Weg seines Gewichtes G, $= AC = AB . sin. ABC = AB . sin. FHR = AB . sin. \alpha$, dagegen der Weg der Kraft P, $= AD = AB . cos. BAD = AB . cos. \beta$ und endlich der Weg der Normalkraft N, $= 0$; nun ist aber die Arbeit von N gleich der Arbeit von G plus der Arbeit von P, man hat daher zu setzen:

Fig. 223.



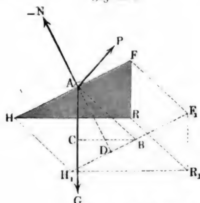
$$N . 0 = - G . \overline{AC} + P . \overline{AD},$$

und findet auf diese Weise die **Kraft**, welche den Körper auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht erhält:

$$P = \frac{A\,C}{A\,D} \cdot G = \frac{G \sin.\alpha}{\cos.\beta},$$

ganz in Uebereinstimmung mit dem vorigen Paragraphen.

Fig. 224.



Um dagegen den **Normaldruck** N zu finden, rücken wir diese schiefe Ebene HF, Fig. 224, um einen beliebigen Weg AB rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung AP fort, bestimmen die entsprechenden Wege der äußeren Kräfte und setzen die Arbeit des Gewichtes G und die der Kraft P des Körpers A gleich der Arbeit der Kraft N der schiefen Ebene oder des Druckes zwischen beiden Körpern.

Der Weg von N ist:

$$A\,D = A\,B \cos.B\,A\,D = A\,B \cos.\beta,$$

der Weg von G ist:

$$A\,C = A\,B \cos.B\,A\,C = A\,B \cos.(\alpha + \beta)$$

und der Weg von P ist $= 0$, daher Arbeit:

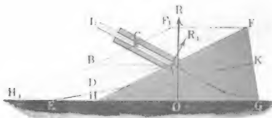
$$N.\overline{A\,D} = G.\overline{A\,C} + P.0,$$

und $$N = \frac{G.\overline{A\,C}}{A\,D} = G \cdot \frac{\cos.(\alpha + \beta)}{\cos.\beta}.$$

wie im vorigen Paragraphen ebenfalls gefunden worden ist.

149 **Theorie des Keiles.** Sehr einfach entwickelt sich hiernach die Theorie des Keiles. Der **Keil** (franz. coin; engl. wedge) ist eine durch ein dreiseitiges Prisma FHG, Fig. 225, gebildete, bewegliche schiefe Ebene. In der

Fig. 225.



Regel wirkt die Kraft $\overline{KP} = P$ rechtwinkelig auf den **Rücken** FG des Keiles und hält einer anderen Kraft oder Last $AQ = Q$, welche gegen die

eine Seitenfläche FH desselben drückt, das Gleichgewicht. Ist der die Schärfe des Keiles messende Winkel $FHG = \alpha$, ferner der Winkel, um welchen die Kraftrichtung KP oder AD von der Seitenfläche GH abweicht, also $GEK = BAD, = \delta$, und endlich der Winkel LAH, um den die Richtung der Last Q von der Seitenfläche FH abweicht, $= \beta$, so ergeben sich die Wege, welche beim Verrücken des Keiles aus der Lage FHG in die Lage $F_1 H_1 G_1$ zurückgelegt werden, auf folgende Weise. Der Weg des Keiles ist:

$$AB = FF_1 = HH_1,$$

ferner der Weg der Kraft ist:

$$AD = AB\cos. BAD = AB\cos.\delta,$$

und der Weg der Stange AL oder Last Q mißt:

$$AC = \frac{AB\sin. ABC}{\sin. ACB} = \frac{AB\sin.\alpha}{\sin. HAC} = \frac{AB\sin.\alpha}{\sin.\beta}.$$

Dagegen ist der Weg der dem Drucke auf die Grundfläche EG entsprechenden Reaction R, so wie der Weg von der dem Drucke gegen die Leitung der Stange AC entgegengesetzten Reaction R_1, $=$ Null. Setzt man nun die Summe der Arbeiten der äußeren Kräfte P, Q, R und R_1 $=$ Null, also:

$$P.\overline{AD} - Q.\overline{AC} + R.0 + R_1.0 = 0,$$

so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$P = \frac{Q.\overline{AC}}{AD} = \frac{Q.\overline{AB}\sin.\alpha}{\overline{AB}\cos.\delta\sin.\beta} = \frac{Q\sin.\alpha}{\sin.\beta\cos.\delta},$$

wie sich allerdings auf dem Wege der Kraftzerlegung ebenfalls finden läßt.

Wenn die Kraftrichtung KE durch die Kante H des Keiles geht, und die Schärfe FHG halbirt, so hat man $\delta = \frac{a}{2}$, und daher

$$P = \frac{Q\sin.\alpha}{\sin.\beta\cos.\frac{\alpha}{2}} = \frac{2Q\sin.\frac{\alpha}{2}}{\cos.\beta}.$$

Geht die Kraftrichtung parallel zur Basis oder Seitenfläche GH, so ist $\delta = 0$, daher:

$$P = \frac{Q\sin.\alpha}{\sin.\beta},$$

und ist noch die Lastrichtung winkelrecht zur Seitenfläche FH, also $\beta = 90^0$, so folgt:

$$P = Q\sin.\alpha.$$

Beispiel. Die Schärfe $FHG = \alpha$ eines Keiles betrage 25^0, die Kraft sei parallel zur Basis HG gerichtet, es sei also $\delta = 0$, und die Last Q wirke win-

kelrecht zur Seitenfläche FH, also β sei $= 90^0$, in welchem Verhältnisse stehen Kraft und Last zu einander? Es ist:

$$P = Q \sin. \alpha, \text{ also } \frac{P}{Q} = \sin. 25^0 = 0,4226.$$

Für eine Last Q von 130 Pfund stellt sich hiernach die Kraft:

$$P = 130 \cdot 0,4226 = 54,938 \text{ Pfund}$$

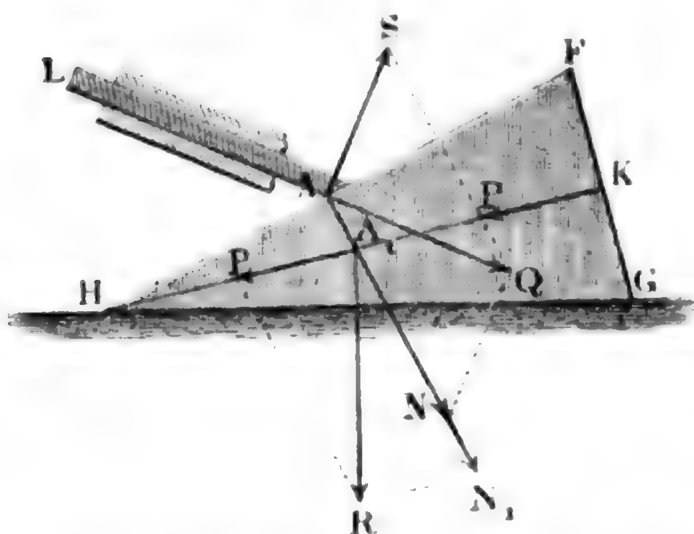
heraus. Um die Last oder Stange einen Fuß fortzuschieben, muß der Keil den Weg

$$AB = \frac{AC}{\sin. \alpha} = \frac{1}{0,4226} = 2,3662 \text{ Fuß}$$

zurücklegen.

Anmerkung 1. Durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes bestimmt sich das Verhältniß zwischen Kraft P und Last Q des Keiles FGH, Fig. 226, wie folgt. Die Stangenlast $\overline{AQ} = Q$ zerlegt sich in eine Seitenkraft $\overline{AN} = N$ normal auf die Seitenfläche FH des Keiles, und in eine Seitenkraft $\overline{AS} = S$ normal auf die Stangenaxe LA. Während S von der Leitung der Stange aufgenommen wird, geht $\overline{AN} = N$ auf den Keil über und vereinigt sich hier als $\overline{A_1 N_1}$ mit der Kraft $\overline{KP} = \overline{A_1 P} = P$ des Keiles zu einer Mittelkraft $\overline{A_1 R} = R$, deren Richtung winkelrecht auf der Grundfläche GH des Keiles stehen muß, damit sie vollständig auf die Unterstützung des Keiles übergeht. Das Kräfteparallelogramm $A_1 P R N_1$ giebt:

Fig. 226.



$$\frac{P}{N_1} = \frac{\sin. R A_1 N_1}{\sin. A_1 R N_1} = \frac{\sin. FHG}{\sin. P A_1 R} = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \delta},$$

und dem Kräfteparallelogramme $ANQS$ zufolge ist:

$$\frac{N}{Q} = \frac{\sin. NQA}{\sin. ANQ} = \frac{\sin. QAS}{\sin. LAH} = \frac{1}{\sin. \beta};$$

da nun $N_1 = N$ ist, so ergiebt sich hiernach durch Multiplication dieser Proportionen:

$$\frac{P}{N} \cdot \frac{N}{Q} = \frac{P}{Q} = \frac{\sin. \alpha}{\sin. \beta \cos. \delta}, \text{ also:}$$

$$P = \frac{Q \sin. \alpha}{\sin. \beta \cos. \delta},$$

wie auch im Haupttext gefunden worden ist.

Anmerkung 2. Die Theorien des Hebels, der schiefen Ebene und des Keiles finden eine weitere Entwickelung im fünften Capitel, wo noch der Einfluß der Reibung in Betracht gezogen wird.

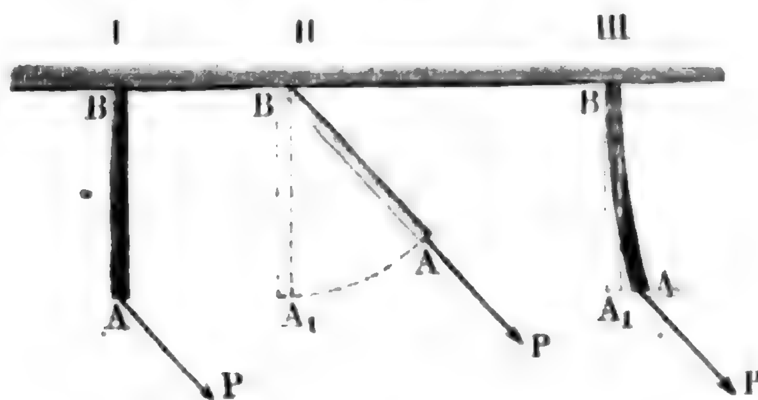
Viertes Capitel.

Gleichgewicht an den Seilmaschinen.

Seilmaschine. Wir haben seither die festen Körper als vollkommen starre oder steife Körper (franz. corps rigides; engl. rigid, stiff bodies), d. i. als solche angesehen, welche durch die Einwirkung äußerer Kräfte weder in Form noch im Volumen verändert werden; bei manchen Körpern und in vielen Fällen der Anwendung der Mechanik auf die Praxis ist jedoch die Annahme der vollkommenen Starrheit fester Körper nicht mehr zulässig, und deshalb nöthig, diese Körper insbesondere noch in zwei anderen Zuständen zu betrachten. Diese Zustände sind die vollkommene Biegsamkeit und die Elasticität, und wir unterscheiden hiernach noch die biegsamen Körper (franz. corps flexibles; engl. flexible bodies), und die elastischen Körper (franz. corps élastiques; engl. elastic bodies). Die biegsamen Körper nehmen nur Kräfte von einer gewissen Richtung ohne Formveränderung auf, folgen dagegen den Kräften, welche nach anderen Richtungen hinwirken, vollständig; die elastischen Körper hingegen geben bis zu einer gewissen Grenze jeder auf sie wirkenden Kraft nach. §. 1

Ein starrer Körper AB, Fig. 227, I, widersteht einer Kraft P vollständig, ein biegsamer Körper AB, Fig. 227, II, folgt dagegen der auf ihn wirkenden Kraft P, wobei seine Axe die Richtung der Kraft annimmt, und ein

Fig. 227.



elastischer Körper AB, Fig. 227, III, widersteht der Kraft P nur bis zu einem gewissen Grade, wobei seine Axe eine gewisse Biegung erleidet. Schnüre, Seile, Riemen, und in gewisser Beziehung auch Ketten, sind die Repräsentanten der biegsamen Körper, wiewohl sie eine vollkommene Biegsamkeit nicht

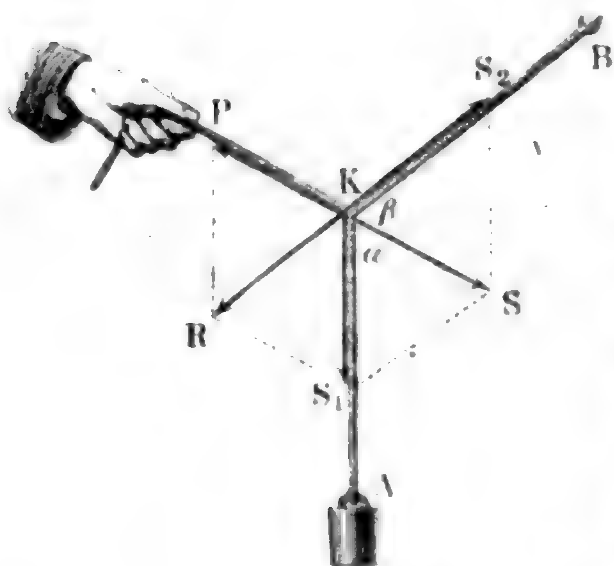
besitzen. Diese Körper sind der Gegenstand dieses Capitels; von den elastischen Körpern, oder vielmehr von der Elasticität der festen Körper wird dagegen erst im sechsten Capitel gehandelt.

Wir verstehen in der Folge unter einer **Seilmaschine** (franz. machine funiculaire; engl. machine of strings) ein Seil oder eine Verbindung von Seilen (das Wort Seil im allgemeinen Sinne genommen), welche von Kräften angespannt wird, und beschäftigen uns in diesem Capitel mit der Theorie des Gleichgewichtes dieser Maschinen. Derjenige Punkt einer Seilmaschine, wo eine Kraft angreift und deshalb das Seil einen Winkel bildet oder eine Richtungsveränderung erleidet, heißt ein **Knoten** (franz. noeud; engl. knot). Derselbe ist entweder **fest** (franz. fixe; engl. fixed), oder **beweglich** (franz. coulant; engl. moveable). **Spannung** (franz. und engl. tension) ist die Kraft, welche ein gespanntes Seil in der Richtung seiner Axe fortpflanzt. Die Spannungen an den Enden eines geraden Seiles oder Seilstückes sind gleich und entgegengesetzt (§. 86); auch kann das gerade Seil andere Kräfte als die in der Axenrichtung wirkende Spannung nicht fortpflanzen, weil es sich sonst biegen müßte, also nicht gerade bleiben könnte.

151 **Gleichgewicht in einem Knoten.** Gleichgewicht einer Seilmaschine findet statt, wenn in jedem Knoten derselben Gleichgewicht vorhanden ist. Es sind daher zunächst die Verhältnisse des Gleichgewichts an einem Knoten kennen zu lernen.

In einem Knoten K, welchen ein Seilstück AKB, Fig. 228, bildet, findet Gleichgewicht statt, wenn die sich aus den Seilspannungen $\overline{KS_1} = S_1$ und $\overline{KS_2} = S_2$ ergebende Mittelkraft $\overline{KS} = S$ gleich und entgegengesetzt gerichtet ist der im Knoten angreifenden Kraft P, denn die Seilspannungen S_1 und S_2 bringen im Knoten K dieselben Wirkungen hervor wie zwei ihnen gleiche und gleichgerichtete Kräfte, und drei Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn die eine von ihnen gleich ist und entgegengesetzt wirkt der Mittelkraft aus den beiden anderen (§. 87). Ebenso ist aber auch die Mittelkraft R aus der Kraft P und der einen Spannung S_1 gleich und entgegengesetzt gerichtet der zweiten Seilspannung S_2 u. s. w. Jedenfalls läßt sich diese Gleichheit dazu benutzen, zwei Bestimmungsstücke, z. B. die Spannung und Richtung des einen Seiles, zu

Fig. 228.



ermitteln. Ist z. B. die Kraft P, sowie die Spannung S_1 und der von beiden eingeschlossene Winkel

$$AKP = 180 - AKS = 180^0 - \alpha$$

gegeben, so hat man für die zweite Spannung

$$S_2 = \sqrt{P^2 + S_1^2 - 2PS_1 \cos. \alpha}$$

und für ihre Richtung oder Abweichung $BKS = \beta$, von KS:

$$\sin. \beta = \frac{S_1 \sin. \alpha}{S_2}.$$

Beispiel. Wenn das Seil AKB, Fig. 228, am Ende B aufgehangen, am Ende A aber durch ein Gewicht $G = 135$ Pfund und in der Mitte K durch eine Kraft $P = 109$ Pfund, welche unter einem Neigungswinkel von 25 Grad aufwärts zieht, angespannt wird, so ist die Frage nach der Richtung und Spannung des Seilstückes KB. Die Größe der gesuchten Spannung ist:

$$S_2 = \sqrt{109^2 + 135^2 - 2 . 109 . 135 \cos. (90^0 - 25^0)}$$
$$= \sqrt{11881 + 18225 - 29430 . \cos. 65^0} = \sqrt{17668,3} = 132,92 \text{ Pfund}.$$

Für den Winkel β ist:

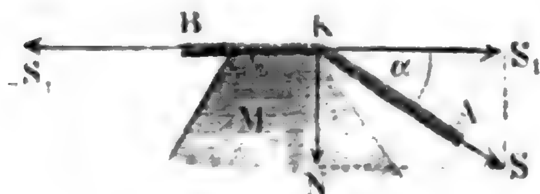
$$\sin. \beta = \frac{S_1 \sin. \alpha}{S_2} = \frac{135 . \sin. 65^0}{132,92}, \; Log. \sin. \beta = 0,96401 - 1,$$

daher $\beta = 67^0\, 0'$, und die Neigung des Seilstückes KB gegen den Horizont:

$$\beta^0 - 25^0 = 67^0, 0' - 25^0, 0' = 42^0, 0'.$$

Wenn ein Seil AKB, Fig. 229, dadurch einen festen Knoten K bildet, daß sich das eine Seilstück BK gegen eine feste Stütze M anlegt, während das andere Seilstück AK durch eine Kraft $\overline{KS} = S$ gespannt wird, deren Richtung um einen gewissen Winkel $SKS_1 = \alpha$ von der Richtung des ersteren abweicht, so ist die Spannung des Seilstückes KB: §. 153

Fig. 229.



$$\overline{KS_1} = S_1 = S \cos. \alpha,$$

weil der zweite Component $\overline{KN} = N = S \sin. \alpha$ der Spannung S von der Stütze M aufgenommen wird.

Uebrigens ist auch

$$S_1 = S \sqrt{1 - (\sin. \alpha)^2},$$

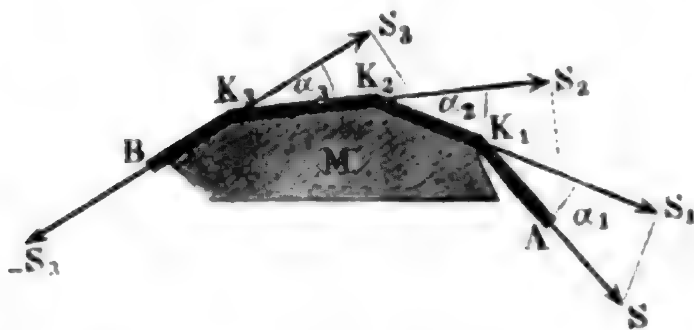
und daher für einen kleinen Ablenkungswinkel α:

$$S_1 = \left(1 - \frac{1}{2} (\sin. \alpha)^2\right) S = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) S, \text{ dagegen}$$

$$S = \frac{S}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) S_1 \text{ zu setzen.}$$

Wenn sich ein Seil AB, Fig. 230, um einen prismatischen Körper M legt, und dabei in seiner Richtung um die Winkel α_1, α_2, α_3 abgelenkt wird, so wiederholt sich die vorige Kraftzerlegung, so daß im Knoten K_1 die Spannung S in:

Fig. 230.



$$S_1 = S \cos. \alpha,$$

im Knoten K_2 die Spannung S_1 in:

$$S_2 = S_1 \cos. \alpha_2$$
$$= S \cos. \alpha_1 \cos. \alpha_2,$$

und im Knoten K_3 die Spannung S_2 in:

$$S_3 = S_2 \cos. \alpha_3 = S \cos. \alpha_1 \cos. \alpha_2 \cos. \alpha_3 \text{ übergeht.}$$

Sind die Winkel α_1, α_2, $\alpha_3 = \alpha$, also einander gleich, so hat man:

$S_3 = S\,(\cos. \alpha)^3$, oder allgemein, bei n Ablenkungen:

$S_n = S\,(\cos. \alpha)^n$.

Geht das Prisma M in einen Cylinder über, so ist α unendlich klein, und n unendlich groß, daher:

$$S_n = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)^n S = \left(1 - \frac{n\alpha^2}{2}\right) S,$$

oder wenn man den ganzen Ablenkungswinkel $n\alpha$ durch β bezeichnet:

$$S_n = \left(1 - \frac{\alpha\beta}{2}\right) S, \text{ d. i.:}$$

$S_n = S$, weil α und folglich auch $\frac{\alpha\beta}{2}$ unendlich klein gegen 1 ist.

Wenn also ein Seil so um einen glatten Körper gelegt ist, daß es einen Theil vom Umfang seines Querschnittes bedeckt, so wird dadurch seine Spannung nicht geändert, es sind also auch im Gleichgewichtszustande, die Spannungen an den beiden Enden desselben einander gleich.

§. 153 Ist der Knoten K ein loser oder beweglicher, wirkt z. B. die Kraft P mittels eines Ringes auf das durchgezogene Seil AKB, Fig. 231, so ist zwar wieder die Mittelkraft S aus den Seilspannungen S_1 und S_2 gleich und entgegengesetzt gerichtet der Kraft P am Ringe: außerdem sind aber noch die Seilspannungen unter sich gleich. Diese Gleichheit folgt

zwar schon aus §. 152, läßt sich aber auch leicht auf folgende Weise nachweisen. Zieht man das Seil um einen gewissen Weg s in dem Ringe fort, so legt die eine Spannung S_1 den Weg s und die andere Spannung S_2 den Weg $-s$, die Kraft P aber den Weg Null zurück; es ist folglich, vollkommene Biegsamkeit vorausgesetzt, die Arbeit:

$$P.0 = S_1 . s - S_2 . s, \text{ d. i. } S_1 s = S_2 s \text{ und } S_1 = S_2.$$

Aus dieser Gleichung der Spannungen folgt wieder die Gleichheit der Winkel AKS und BKS, unter welchen die Richtung der Mittelkraft S von den Seilrichtungen abweicht; setzen wir diese Winkel $= \alpha$, so giebt die Auflösung des Rhombus $KS_1 SS_2$:

$$S = P = 2 S_1 \cos. \alpha, \text{ und umgekehrt:}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2 \cos. \alpha}.$$

Fig. 231.

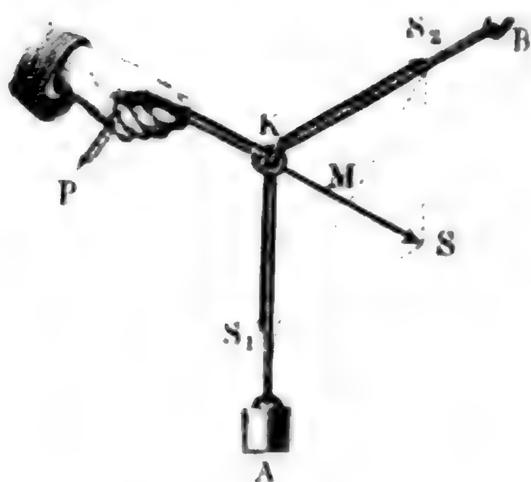
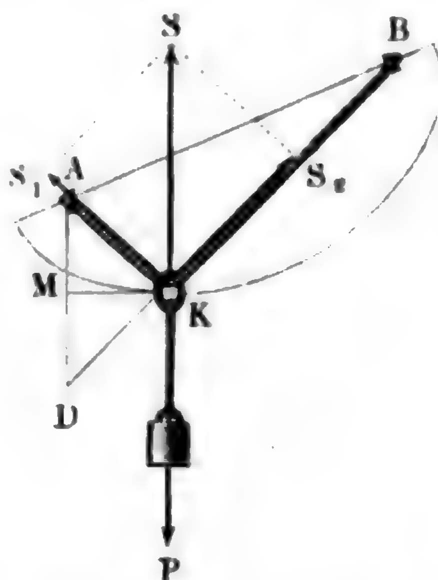


Fig. 232.

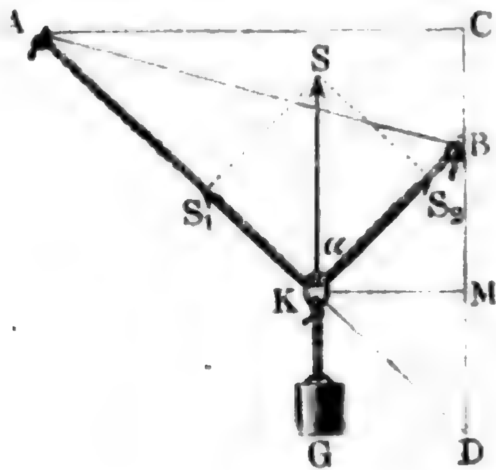


Sind A und B, Fig. 232, feste Punkte eines Seiles AKB von gegebener Länge ($2a$) mit einem beweglichen Knoten K, so findet man den Ort dieses Knotens, wenn man eine Ellipse construirt, deren Brennpunkte A und B sind und deren große Axe der Seillänge $2a$ gleich ist, und hierauf eine Tangente an diese Curve winkelrecht zur gegebenen Kraftrichtung legt: der sich ergebende Berührungspunkt ist der Ort des Knotens, weil bei der Ellipse die Normale KS mit den Fahrstrahlen KA und KB gleiche Winkel einschließt, gerade so wie die Mittelkraft S mit den Seilspannungen S_1 und S_2.

Zieht man AD parallel zur gegebenen Kraftrichtung, macht BD gleich der gegebenen Seillänge, halbirt AD in M und errichtet hierauf das Perpendikel MK, so erhält man den Ort des Knotens K auch ohne eine Ellipsenconstruction, denn da dann Winkel $AKM =$ Winkel DKM und $AK = DK$ ist, so folgt auch Winkel $AKS =$ Winkel BKS und $AK + KB = DK + KB = DB$.

Beispiel. Zwischen den Punkten A und B, Fig. 233, ist ein Seil von 9 Fuß Länge durch ein mittels eines Ringes angehängtes Gewicht G von 170 Pfund ausgespannt; die Horizontalentfernung AC beider Punkte ist $6^1/_2$ Fuß und der Verticalabstand $CB = 2$ Fuß; man sucht den Ort des Knotens sowie die Seilspannungen und Seilrichtungen.

Fig. 233.



Aus der Länge $AD = 9$ Fuß als Hypotenuse und der Horizontalen $AC = 6^1/_2$ Fuß folgt die Verticale:

$$CD = \sqrt{9^2 - 6{,}5^2} = \sqrt{81 - 42{,}25}$$
$$= \sqrt{38{,}75} = 6{,}225 \text{ Fuß};$$

und hieraus die Basis des gleichschenkligen Dreieckes BDK:

$BD = CD - CB = 6{,}225 - 2 = 4{,}225$ Fuß.

Die Aehnlichkeit der Dreiecke DKM und DAC giebt nun:

$$DK = BK = \frac{DM}{DC} \cdot DA = \frac{4{,}225 \,.\, 9}{2 \,.\, 6{,}225} = 3{,}054 \text{ Fuß};$$

hieraus folgt:

$$AK = 9 - 3{,}054 = 5{,}946 \text{ Fuß},$$

und für den Winkel α, um welchen die Seilstücke von der Verticalen abweichen:

$$cos.\, \alpha = \frac{BM}{BK} = \frac{2{,}1125}{3{,}054} = 0{,}6917, \text{ daher } \alpha = 46^0\, 14',$$

und endlich die Spannung der Seile:

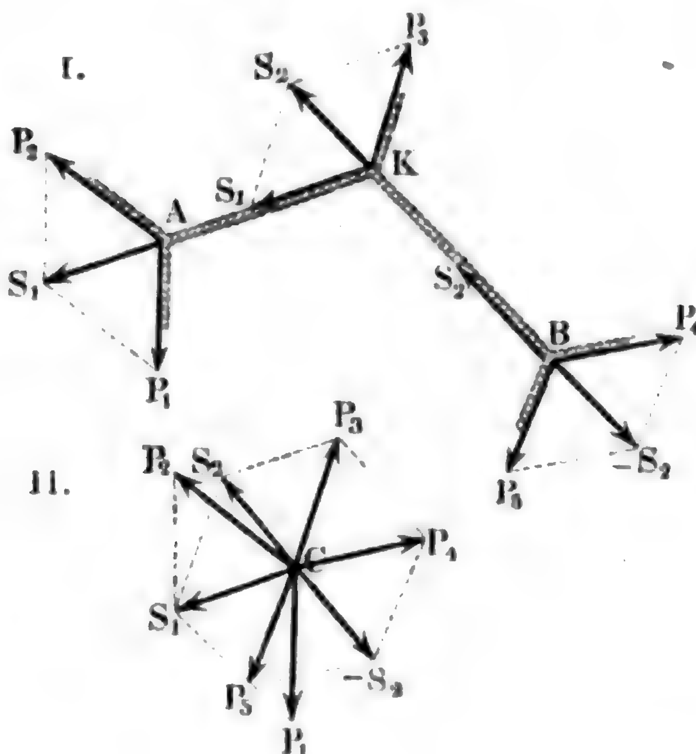
$$S_1 = S_2 = \frac{G}{2\, cos.\, \alpha} = \frac{170}{2 \,.\, 0{,}6917} = 122{,}9 \text{ Pfund}.$$

154 **Gleichgewicht des ganzen Seilpolygons.** Die Verhältnisse des Gleichgewichtes an einem Seilpolygone, d. i. an einem angespannten Seile, welches an verschiedenen Punkten von Kräften ergriffen wird, sind in Uebereinstimmung mit den Verhältnissen des Gleichgewichtes von Kräften, welche in einem Punkte angreifen. Es sei AKB, Fig. 234 I, ein von den Kräften

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

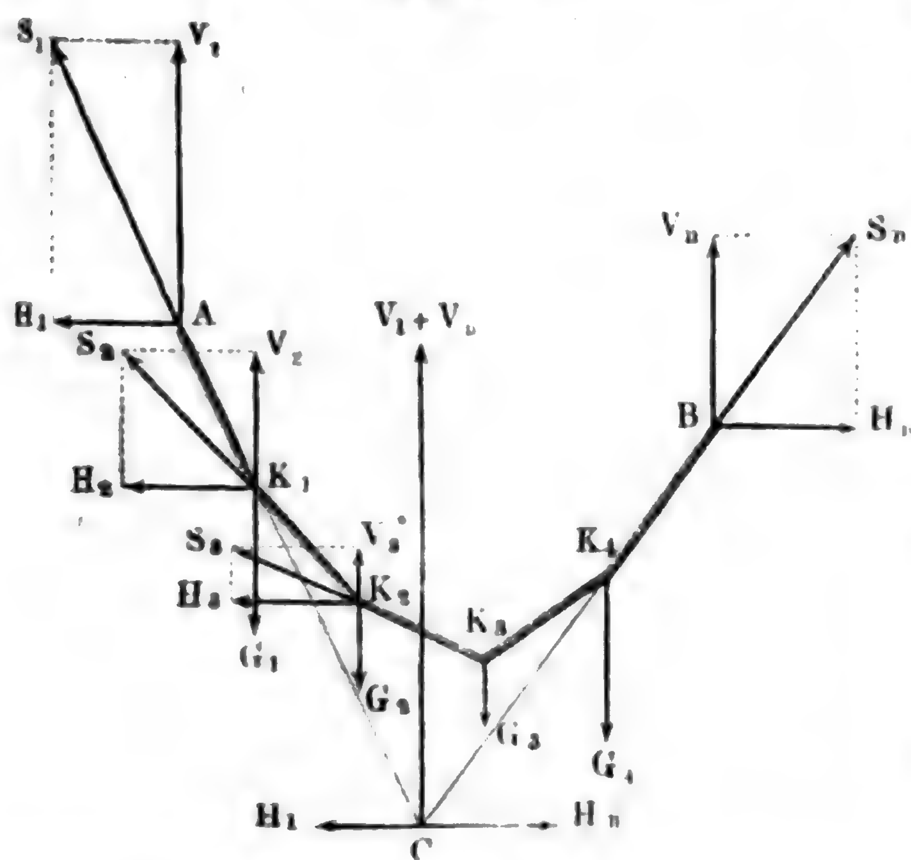
angespanntes Seil, P_1 und P_2 greifen in A, P_3 in K und P_4 und P_5 in B an. Setzen wir die Spannung des Seilstückes $AK, = S_1$

Fig. 234.



und die des Stückes $BK, = S_2$, so erhalten wir S_1 als Mittelkraft von den in A angreifenden Kräften P_1 und P_2, und tragen wir den Angriffspunkt A dieser Spannung von A auf K, so ergiebt sich wieder S_2 als Mittelkraft von S_1 und P_3 oder von P_1, P_2 und P_3; transportiren wir endlich den Angriffspunkt der Kraft S_2 von K nach B, so erhalten wir in S_2, P_4 und P_5, oder, da S_2 Mittelkraft von P_1, P_2 und P_3 ist, auch in P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ein sich das Gleichgewicht haltendes Kräftesystem. Wir können hiernach behaupten: wenn gewisse Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. ein Seilpolygon im Gleichgewichte erhalten, so werden sie sich auch selbst das Gleichgewicht halten, wenn man sie bei unveränderter Richtung und Größe, in einem einzigen Punkte, z. B. in C (II.), angreifen läßt.

Fig. 235.



Wird das Seil $AK_1 K_2 \ldots B$, Fig. 235, in den Knoten K_1, K_2 durch Gewichte G_1, $G_2 \ldots$ angespannt, und werden die Endpunkte A und B durch die Verticalkräfte V_1 und V_n und die Horizontalkräfte H_1 und H_n festgehalten, so ist die Summe der Verticalkräfte:

$$V_1 + V_n - (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots)$$

und die Summe der Horizontalkräfte: $H_1 - H_n$. Der Gleichgewichtszustand fordert aber beide Summen = Null; es ist daher

$$1)\ V_1 + V_n = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots \text{ und}$$

$$2)\ H_1 = H_n; \text{ d. h.}$$

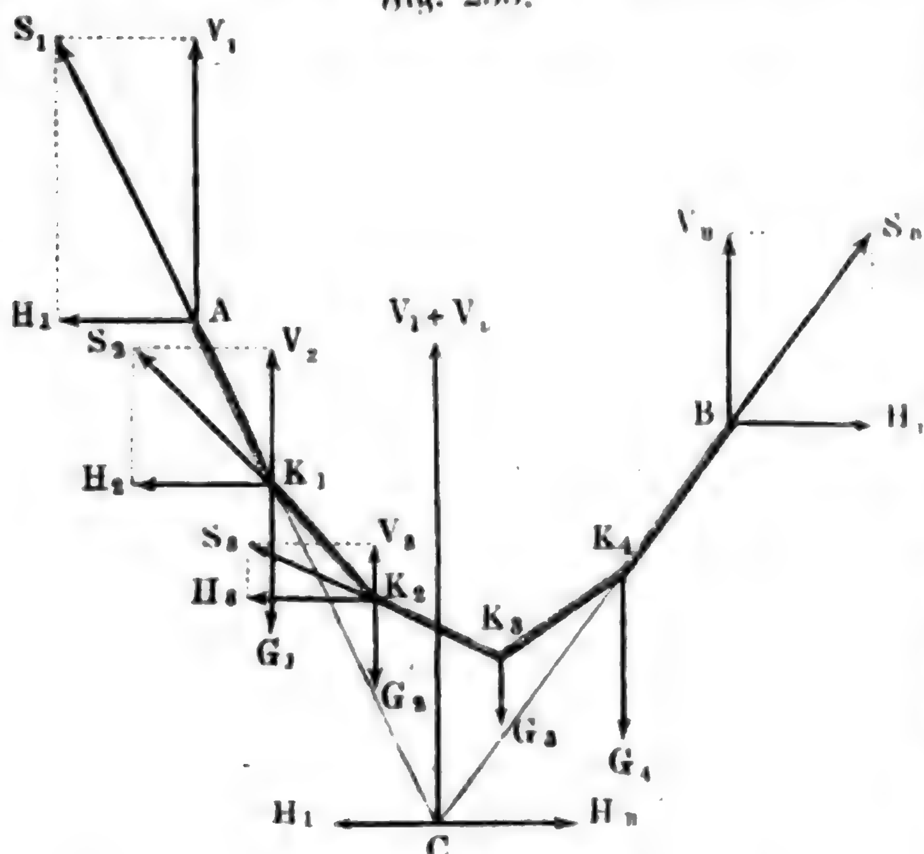
bei einem durch Gewichte angespannten Seilpolygone ist die Summe der Verticalkräfte oder Verticalspannungen in den End- oder Aufhängepunkten gleich der Summe der angehängten Gewichte, und es ist die Horizontalspannung des einen Endes gleich und entgegengesetzt gerichtet der Horizontalspannung im anderen Endpunkte.

Verlängert man die Richtungen der Spannungen S_1 und S_n in den Endpunkten A und B bis zu ihrem Durchschnitte C und verlegt man die Angriffspunkte jener Spannungen nach diesem Punkte, so erhält man eine

einzige Kraft $P = V_1 + V_n$, weil sich die Horizontalkräfte H_1 und H_n aufheben. Da diese Kraft der Summe $G_1 + G_2 + G_3 + \cdots$ von den angehängten Gewichten das Gleichgewicht hält, so muß der Angriffs- oder Schwerpunkt dieser Gewichte in der Richtung derselben, d. i. in der durch C gehenden Verticallinie, enthalten sein.

§. 155 Aus der Spannung S_1 des ersten Seilstückes AK_1 und dessen Neigungs- oder Fallwinkel $S_1 A H_1 = \alpha_1$ folgt die Verticalspannung $V_1 = S_1 \, sin. \, \alpha_1$ und die Horizontalspannung $H_1 = S_1 \, cos. \, \alpha_1$. Transportirt man nun den Angriffspunkt dieser Kräfte von A nach dem ersten Knoten K_1, so kommt zu diesen Spannungen das vertical abwärts ziehende Gewicht G_1, und es ist nun für das folgende Seilstück $K_1 K_2$ die Verticalspannung

Fig. 235.



$$V_2 = V_1 - G_1 = S_1 \, sin. \, \alpha_1 - G_1,$$

wogegen die Horizontalspannung unverändert $H_2 = H_1 = H$ bleibt. Beide Kräfte geben vereinigt die Axenspannung des zweiten Seilstückes:

$$S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2}$$

und die Neigung α_2 desselben durch die Formel:

$$tang. \, \alpha_2 = \frac{V_2}{H} = \frac{S_1 \, sin. \, \alpha_1 - G_1}{S_1 \, cos. \, \alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang. \, \alpha_2 = tang. \, \alpha_1 - \frac{G_1}{H}.$$

Trägt man den Angriffspunkt der Kräfte V_2 und H_2 von K_1 nach K_2, so erhält man in dem hinzukommenden Gewichte G_2 noch eine neue Verticalkraft, und es entsteht so die Verticalkraft des dritten Seilstückes:

$$V_3 = V_2 - G_2 = V_1 - (G_1 + G_2) = S_1 \, sin. \, \alpha_1 - (G_1 + G_2),$$

während die Horizontalkraft $H_3 = H$ bleibt. Die Gesammtspannung dieses dritten Seilstückes ist mithin:

$$S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2},$$

und für den Neigungswinkel α_3 desselben hat man:

$$tang.\,\alpha_3 = \frac{V_3}{H} = \frac{S_1\,sin.\,\alpha_1 - (G_1 + G_2)}{S_1\,cos.\,\alpha_1},\text{ d. i.}$$

$$tang.\,\alpha_3 = tang.\,\alpha_1 - \frac{G_1 + G_2}{H}.$$

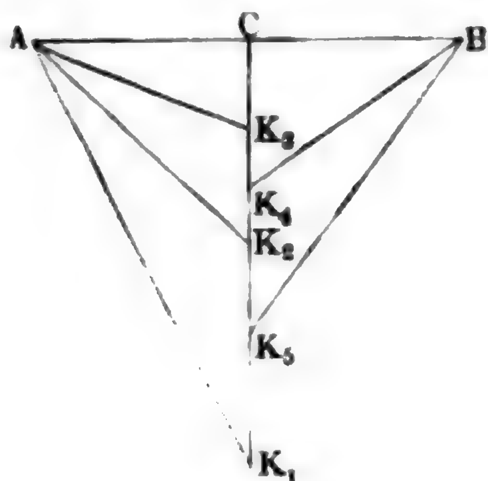
Für den Neigungswinkel des vierten Seilstückes ist:

$$tang.\,\alpha_4 = tang.\,\alpha_1 - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{H}\text{ u. s. w.}$$

Fällt $\frac{G_1 + G_2 + G_3}{H} > tang.\,\alpha_1$ oder $G_1 + G_2 + G_3 > V_1$ aus, so wird $tang.\,\alpha_4$ und folglich auch α_4 negativ, so daß die entsprechende Polygonseite $K_3 K_4$ nicht mehr abwärts gerichtet ist, sondern aufsteigt. Dasselbe Verhältniß tritt natürlich auch in jedem anderen Punkte ein, für welchen $G_1 + G_2 + G_3 + \cdots > V_1$ ist.

Uebrigens lassen sich die Spannungen S_1, S_2, S_3 u. s. w., sowie die Neigungswinkel α_1, α_2, α_3 u. s. w. der einzelnen Seiltrümer leicht geometrisch darstellen. Machen wir die Horizontale $CA = CB$, Fig. 236, = der Horizontalspannung H und die Verticale CK_1 = der Verticalspannung V_1 im Aufhängepunkte A, so giebt die Hypotenuse AK_1 die Totalspannung S_1 des ersten Seilstückes und der Winkel CAK_1 die Neigung desselben gegen den Horizont an; tragen wir nun noch die Gewichte G_1, G_2, G_3 u. s. w. als Theile $K_1 K_2$, $K_2 K_3$ u. s. w. auf CK auf und ziehen die Transversalen AK_2, AK_3 u. s. w., so erhalten wir in ihnen die Spannungen der folgenden Seilstücke und durch die Winkel CAK_2, CAK_3 u. s. w. auch die Neigungswinkel α_2, α_3 u. s. w. dieser Seilstücke.

Fig. 236.



Aus den Untersuchungen im vorigen Paragraphen stellt sich als Gesetz für das Gleichgewicht der durch Gewichte gespannter Seile heraus: §. 15

1) die Horizontalspannung ist an allen Stellen des Seiles eine und dieselbe, nämlich:

$$H = S_1\,cos.\,\alpha_1 = S_n\,cos.\,\alpha_n;$$

2) die Verticalspannung an irgend einer Stelle ist gleich der Verticalspannung am darüber befindlichen Ende minus der Summe der darüberhängenden Gewichte, also:

$$V_m = V_1 - (G_1 + G_2 + \cdots G_{m-1}).$$

Allgemeiner läßt sich dieser Satz auch so ausdrücken: Die Verticalspannung an irgend einer Stelle ist gleich der Verticalspannung an irgend einer tieferen oder höheren Stelle plus oder minus der Summe von den zwischen beiden Punkten hängenden Gewichten.

Kennt man außer den Gewichten den Winkel α_1 und die Horizontalspannung H, so erhält man die Verticalspannung am Ende A:

$$V_1 = H \, . \, tang. \, \alpha_1,$$

und demnach die am Ende B:

$$V_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n) - V_1.$$

Sind hingegen die Neigungswinkel α_1 und α_n an beiden Aufhängepunkten A und B bekannt, so ergeben sich die Horizontal- und Verticalspannungen zugleich; es ist nämlich:

$$\frac{V_n}{V_1} = \frac{tang. \, \alpha_n}{tang. \, \alpha_1},$$

und daher:

$$V_n = \frac{V_1 \, tang. \, \alpha_n}{tang. \, \alpha_1}.$$

Da man noch $V_1 + V_n = G_1 + G_2 + \cdots$, d. i.:

$$\left(\frac{tang. \, \alpha_1 + tang. \, \alpha_n}{tang. \, \alpha_1}\right) V_1 = G_1 + G_2 \cdots$$

hat, so folgt:

$$V_1 = \frac{(G_1 + G_2 + \cdots) \, tang. \, \alpha_1}{tang. \, \alpha_1 + tang. \, \alpha_n} = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{sin. \, \alpha_1 \, cos \, \alpha_n}{sin. (\alpha_1 + \alpha_n)},$$

$$V_n = \frac{(G_1 + G_2 + \cdots) \, tang. \, \alpha_n}{tang. \, \alpha_1 + tang. \, \alpha_n} = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{sin. \, \alpha_n \, cos. \, \alpha_1}{sin. (\alpha_1 + \alpha_n)},$$

und hieraus:

$$H = V_1 \, cotg. \, \alpha_1 = V_n \, cotg. \, \alpha_n = (G_1 + G_2 + \cdots) \frac{cos. \, \alpha_1 \, cos. \, \alpha_n}{sin. (\alpha_1 + \alpha_n)}.$$

Haben die beiden Seilenden einerlei Neigung, ist also $\alpha_n = \alpha_1$, so hat man $V_1 = V_n = \dfrac{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}{2}$; dann trägt also das eine Ende A eben so viel wie das andere Ende B.

Diese Formeln gelten natürlich auch für jedes beliebige Paar Punkte oder Knoten des Seilpolygons, wenn man nur statt $G_1 + G_2 + \cdots$ die Summe der zwischenhängenden Gewichte u. s. w. einsetzt. Für die Verticalspannungen der Seile, welche ein und dasselbe Gewicht G_m zwischen sich halten und die Neigungswinkel α_m und α_{m+1} haben, ist z. B.:

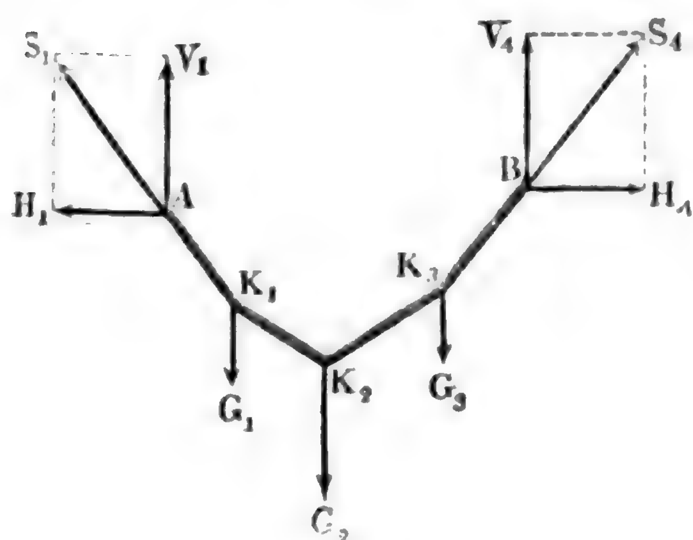
$$V_m = G_m \frac{sin.\, \alpha_m\, cos.\, \alpha_{m+1}}{sin.(\alpha_m + \alpha_{m+1})} = \frac{G_m}{1 + cotg.\, \alpha_m\, tang.\, \alpha_{m+1}} \text{ und}$$

$$V_{m+1} = G_m \frac{sin.\, \alpha_{m+1}\, cos.\, \alpha_m}{sin.(\alpha_m + \alpha_{m+1})} = \frac{G_m}{1 + tang.\, \alpha_m\, cotg.\, \alpha_{m+1}}.$$

Uebrigens gelten diese Gesetze auch für durch Parallelkräfte angespannte Seilpolygone überhaupt, wenn man statt der Verticalen die Kraftrichtungen einführt.

Beispiel. Das Seilpolygon $A K_1 K_2 K_3 B$, Fig. 237, ist durch drei Gewichte $G_1 = 20$, $G_2 = 30$ und $G_3 = 16$ Pfund, sowie durch die Horizontalkraft $H_1 = 25$ Pfund gespannt, man sucht die Axenspannungen und Neigungswinkel der Seiten unter der Voraussetzung, daß die Seilenden in A und B einerlei Neigung haben. Die Verticalspannungen in beiden Enden sind hier gleich, nämlich:

Fig. 237.



$$V_1 = V_4 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2}$$
$$= \frac{20 + 30 + 16}{2}$$
$$= 33 \text{ Pfund},$$

die Verticalspannung des zweiten Seilstückes ist dagegen:

$$V_2 = V_1 - G_1 = 33 - 20 = 13 \text{ Pfund},$$

und die des dritten:

$$V_3 = V_4 - G_3 \text{ (oder } G_1 + G_2 - V_1) = 33 - 16 = 17 \text{ Pfund};$$

die Neigungswinkel α_1 und α_4 der Seilenden sind bestimmt durch:

$$tang.\, \alpha_1 = tang.\, \alpha_4 = \frac{V_1}{H} = \frac{33}{25} = 1,32,$$

die der zweiten und dritten Seilstücke aber durch:

$$tang.\, \alpha_2 = tang.\, \alpha_1 - \frac{G_1}{H} = 1,32 - \frac{20}{25} = 0,52 \text{ und}$$

$$tang.\, \alpha_3 = tang.\, \alpha_4 - \frac{G_3}{H} = 1,32 - \frac{16}{25} = 0,68;$$

es ist hiernach:

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 52^0\, 51',\ \alpha_2 = 27^0\, 28',\ \alpha_3 = 34^0\, 13';$$

endlich sind die Axenspannungen:

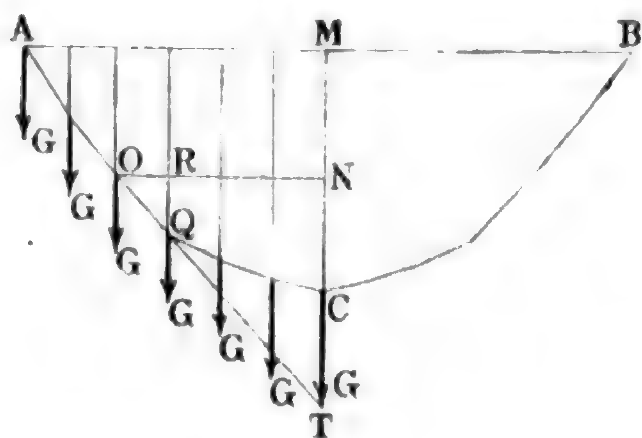
$$S_1 = S_4 = \sqrt{V_1^2 + H^2} = \sqrt{33^2 + 25^2} = \sqrt{1714} = 41,40 \text{ Pfund},$$

$$S_2 = \sqrt{V_2^2 + H^2} = \sqrt{13^2 + 25^2} = \sqrt{794} = 18,18 \text{ Pfund, und}$$

$$S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2} = \sqrt{17^2 + 25^2} = 30,23 \text{ Pfund}.$$

157 **Die Parabel als Kettenlinie.** Setzen wir jetzt voraus, daß das Seil ACB, Fig. 238, durch lauter gleiche, in gleichen Horizontalabständen aufgehängte Gewichte G_1, G_2, G_3 u. s. w. gespannt sei. Bezeichnen wir den Horizontalabstand AM zwischen dem Aufhängepunkte A und dem tiefsten Punkte C durch b, sowie den Verticalabstand CM durch a; setzen wir ferner für einen anderen Punkt O des Seilpolygons die gleichliegenden Coordinaten $ON = y$ und $CN = x$.

Fig. 238.



Ist nun die Verticalspannung in A, $= V$, so folgt die in O, $= \frac{y}{b} \cdot V$, und daher für den Neigungswinkel $NOT = ROQ = \varphi$ des Seilstückes OQ gegen den Horizont:

$$tang. \varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H},$$

wo H die constante Horizontalspannung ausdrückt.

Es ist hiernach $QR = \overline{OR} . tang. \varphi = \overline{OR} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H}$ der Höhenabstand zweier benachbarten Eckpunkte des Seilpolygons. Setzen wir y der Reihe nach $\overline{OR}$, $2\overline{OR}$, $3\overline{OR}$ u. s. w., so giebt nun die letzte Gleichung die entsprechenden Höhenabstände des ersten, zweiten dritten Eckpunktes u. s. w., von unten nach oben gezählt; und addiren wir endlich alle diese Werthe, deren Anzahl $= m$ sein möge, so erhalten wir die Höhe CN des Punktes O über dem Fußpunkte C. Es ist nämlich:

$$x = CN = \frac{V}{H} \cdot \frac{\overline{OR}}{b} (\overline{OR} + 2\overline{OR} + 3\overline{OR} + \cdots + m . \overline{OR})$$

$$= \frac{V}{H} \cdot \frac{\overline{OR^2}}{b} (1 + 2 + 3 + \cdots + m) = \frac{V}{H} \cdot \frac{m(m+1)}{1 . 2} \cdot \frac{\overline{OR^2}}{b}$$

der Theorie der arithmetischen Reihen zufolge.

Endlich $OR = \frac{y}{m}$ gesetzt, erhält man:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{m(m+1)}{2m^2} \cdot \frac{y^2}{b},$$

oder, wenn man für den Neigungswinkel α des Seilendes A,

$tang. \alpha = \frac{V}{H}$ einsetzt:

$$x = \frac{m(m+1)\, y^2 \, tang.\, \alpha}{2 m^2 b}.$$

Ist die Zahl der Gewichte sehr groß, so kann $m + 1 = m$ angenommen werden, weshalb man erhält:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{y^2}{2b} = \frac{y^2}{2b} tang.\, \alpha.$$

Für $x = a$ ist $y = b$, daher hat man auch:

$$a = \frac{V}{H} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b \, tang.\, \alpha}{2}$$

und hiernach einfacher: $\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2}$,

welche Gleichung nur der Parabel zukommt.

Wird also ein übrigens gewichtsloses Seil durch unendlich viele gleiche, in gleichen Horizontalabständen angreifende Gewichte gespannt, so geht das Seilpolygon in eine **Parabel** über.

Für den Neigungswinkel φ hat man hiernach:

$$tang.\, \varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{2a}{b} = 2y \cdot \frac{a}{b^2} = 2y \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{2x}{y}, \text{ sowie}$$

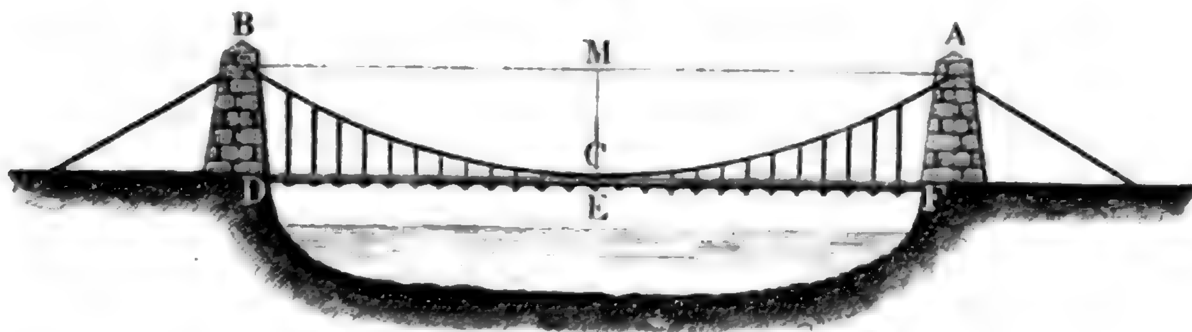
$$tang.\, \alpha = \frac{2a}{b}.$$

Die **Subtangente** für den Punkt O ist:

$$\overline{NT} = \overline{ON}\, tang.\, \varphi = y \frac{2x}{y} = 2x = 2\overline{CN}.$$

Wären die Ketten und Hängeisen einer **Kettenbrücke** $ABDF$, Fig. 239,

Fig. 239.



gewichtslos, oder sehr leicht in Hinsicht auf das deshalb nur zu berücksichtigende Gewicht der belasteten Brücke DEF, so würde die Kette ACB eine Parabel bilden.

Beispiel. Es sei die ganze Belastung der Kettenbrücke in Fig. 239, $G = 2V = 320000$ Pfund, die Spannweite $AB, = 2b = 150$ Fuß, die Bogenhöhe $CM, = a = 15$ Fuß, man sucht die Spannungen und übrigen Verhältnisse der Kette. Die Neigung der Kettenenden gegen den Horizont ist bestimmt durch die Formel:

$$tang.\, \alpha = \frac{2a}{b} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5} = 0{,}4, \text{ es ist also dieselbe } \alpha = 21^0\, 48'.$$

Die Verticalspannung an jedem Aufhängepunkte ist:

$$V = \tfrac{1}{2}\,\text{Gewicht} = 160000 \text{ Pfund};$$

die Horizontalspannung:

$$H = V \; cotg. \, \alpha = 160000 \cdot \frac{1}{0,4} = 400000 \text{ Pfund},$$

endlich die Gesammtspannung an einem Ende:

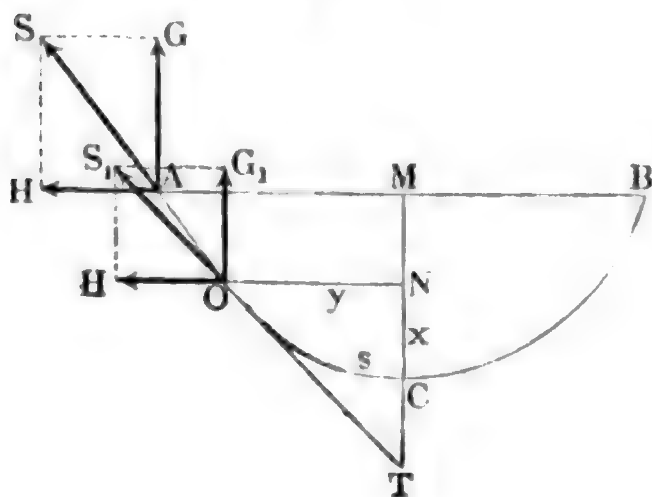
$$S = \sqrt{V^2 + H^2} = V \sqrt{1 + cotg. \, \alpha^2} = 160000 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{0,4}\right)^2}$$

$$= 160000 \sqrt{\frac{29}{4}} = 80000 \sqrt{29} = 430813 \text{ Pfund}.$$

158 **Die Kettenlinie.** Wird ein an zwei Punkten aufgehängtes vollkommen biegsames und unausdehnbares Seil, oder eine aus kurzen Gliedern bestehende Kette, durch das eigene Gewicht gespannt, so bildet die Axe derselben eine krumme Linie, die den Namen Kettenlinie (franz. chainette; engl. catenary) erhalten hat. Die unvollkommen elastischen und ausdehnbaren Schnüre, Seile, Bänder, Ketten u. s. w., wie sie im praktischen Leben vorkommen, geben krumme Linien, welche sich der Kettenlinie nur annähern, meist aber als solche behandelt werden können. Nach dem Vorhergehenden ist die Horizontalspannung der Kettenlinie an allen Punkten gleich stark, dagegen die Verticalspannung in einem Punkte gleich der Verticalspannung im darüber befindlichen Aufhängepunkte minus Gewicht des darüber befindlichen Kettenstückes. Da die Verticalspannung im Scheitel, wo die Kettenlinie horizontal ist, sich vernullt, also die Verticalspannung im Aufhängepunkte gleich ist dem Gewichte der Kette vom Aufhängepunkte bis zum Scheitel, so ist die Verticalspannung an jeder Stelle auch gleich dem Gewichte des darunter befindlichen Seil- oder Kettenstückes.

Sind gleich lange Stücke der Kette gleich schwer, so entsteht die sogenannte gemeine Kettenlinie, von welcher hier nur die Rede ist. Wiegt ein Seil- oder Kettenstück von 1 Fuß Länge, γ, und ist der den Coordinaten $CM = a$ und $MA = b$, Fig. 240, entsprechende Bogen $AOC = l$, so hat man das Gewicht des Kettenstückes AOC,

Fig. 240.



$$G = l\gamma;$$

ist dagegen die Länge des den Coordinaten $CN = x$ und $NO = y$ angehörigen Bogens $= s$, so hat man für das Gewicht dieses Bogens, $V = s\gamma$. Setzen wir endlich die Länge eines gleichartigen Kettenstückes, dessen Gewicht gleich ist der Horizontalspannung H, $= c$, so haben wir noch $H = c\gamma$,

und daher für die Neigungswinkel α und φ in den Punkten A und O:

$$tang.\, \alpha = tang.\, S\,A\,H = \frac{G}{H} = \frac{l\,\gamma}{c\,\gamma} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$tang.\, \varphi = tang.\, N\,O\,T = \frac{V}{H} = \frac{s\,\gamma}{c\,\gamma} = \frac{s}{c}.$$

Macht man die Horizontale $C\,H$, Fig. 241, gleich der Länge c des die Ho- §. 1
rizontalspannung messenden Kettenstückes und $C\,G$ gleich der Länge l des Kettenbogens von der einen Seite, so bekommt man, in Uebereinstimmung mit §. 155, in der Hypotenuse $G\,H$ die Größe und die Richtung der Seilspannung im Aufhängepunkte A, denn es ist:

$$tang.\, C\,H\,G = \frac{C\,G}{C\,H} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$\overline{G\,H} = \sqrt{\overline{C\,G}^2 + \overline{C\,H}^2} = \sqrt{l^2 + c^2}, \text{ oder}$$

$$S = \sqrt{G^2 + H^2} = \sqrt{l^2 + c^2} \cdot \gamma = \overline{G\,H} \,.\, \gamma.$$

Theilt man nun $C\,G$ in gleiche Theile und zieht von H nach den Theilpunkten 1, 2, 3 u. s. w. gerade Linien, so geben diese die Maße und Richtungen der Spannungen derjenigen Punkte in der Kettenlinie an, welche man erhält, indem man die Länge des Kettenbogens $A\,C$ in ebenso viel gleiche Theile theilt. So giebt z. B. die Linie $H\,K$ die Größe und Richtung der Spannung oder die Tangente im Theilpunkte (P) des Bogens $A\,P\,C$ an, weil in diesem Punkte die Verticalspannung $= \overline{C\,K} \,.\, \gamma$ ist, während die Horizontalspannung unverändert $= c \,.\, \gamma$ bleibt, also für diesen Punkt

Fig. 241.

$$tang.\, \varphi = \frac{\overline{C\,K} \,.\, \gamma}{c\,\gamma} = \frac{C\,K}{C\,H}$$

ist, wie die Figur auch wirklich giebt.

Diese Eigenthümlichkeit der Kettenlinie läßt sich benutzen, um diese Curve annähernd genau mechanisch zu construiren. Nachdem man die gegebene Länge $C\,G$ des zu construirenden Kettenlinienbogens in sehr viele gleiche Theile getheilt, die die Horizontalspannung messende Linie $C\,H = c$ aufgetragen und die Transversalen $H\,1$, $H\,2$, $H\,3$ u. s. w. gezogen hat, trage man auf $C\,H$ einen Theil $\overline{C\,1}$ als $C\,a$ des Kettenbogens auf, ziehe nun durch den erhaltenen Theilpunkt (a) mit der Transversalen $\overline{H\,1}$ eine Parallele und schneide von ihr wieder einen Theil $a\,b = \overline{C\,1}$ ab, ebenso

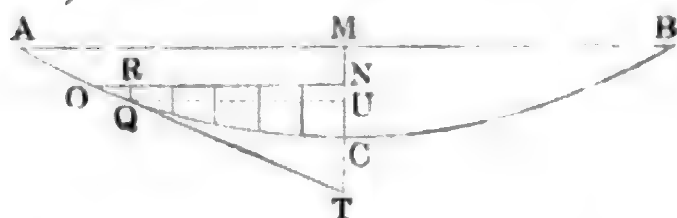
ziehe man durch den erhaltenen Eckpunkt (b) eine Parallele zur Transversalen $\overline{H2}$ und schneide von ihr $bc = \overline{C1}$ gleich einem Bogentheile ab; jetzt ziehe man durch den neuen Endpunkt c eine Parallele zu $\overline{H3}$, mache cd wieder gleich einem Bogenstück und fahre auf diese Weise fort, bis man das Polygon $C\,a\,b\,c\,d\,e\,f$ erhält. Nun construire man ein anderes Polygon $C\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varphi$ dadurch, daß man $C\alpha$ parallel $\overline{H1}$, $\alpha\beta$ parallel $\overline{H2}$, $\beta\gamma$ parallel $\overline{H3}$ u. s. w. legt und $C\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma$ u. s. w., $= \overline{C1} = \overline{12} = \overline{23}$ u. s. w. macht. Führt man endlich durch die Mittelpunkte von $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ ... $f\varphi$ einen Zug CPA, so erhält man in demselben annähernd die gesuchte Kettenlinie.

Durch Aufhängen einer feingegliederten Kette an einer senkrechten Wand läßt sich für praktische Bedürfnisse oft genau genug eine Kettenlinie ebenfalls finden, welche gewissen Bedingungen, z. B. einer gegebenen Bogenweite und Bogenhöhe, oder einer gegebenen Bogenweite und Bogenlänge u. s. w. entspricht.

160 **Angenäherte Gleichung der Kettenlinie.** In vielen Fällen, und namentlich auch bei Anwendungen in der Architektur und in dem Maschinenwesen, ist die Horizontalspannung der Kettenlinie sehr groß und deshalb ihre Bogenhöhe klein gegen die Weite. Unter dieser Voraussetzung ermittelt sich eine Gleichung dieser Curve auf folgende Weise.

Bezeichnet s die Länge, x die Abscisse CN und y die Ordinate NO eines sehr gedrückten Bogens CO, Fig. 242, so können wir der beigefügten Anmerkung zufolge, annähernd

Fig. 242.



$$s = \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y,$$

daher die Verticalspannung in einem Punkte O eines niedrigen Kettenlinienbogens:

$$V = \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y\,\gamma,$$

und für den Tangentenwinkel $TON = \varphi$ desselben:

$$tang.\,\varphi = \frac{s}{c} = \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] \frac{y}{c} \text{ setzen.}$$

Theilen wir die Ordinate y in m gleiche Theile, so finden wir das einem solchen Theile OR entsprechende Stück $RQ = NU$ der Abscisse x, indem wir setzen:

$$\overline{RQ} = \overline{OR}\,.\,tang.\,\varphi = \overline{OR}\,.\,\frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right].$$

Da x klein sein soll gegen y, so ist annähernd $\overline{RQ} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}$.

Setzt man nun $OR = \frac{y}{m}$ und successiv für y die Werthe $\frac{y}{m}$, $\frac{2y}{m}$, $\frac{3y}{m}$ u.s.w., so bekommt man nach und nach sämmtliche Theile von x, deren Summe nun

$x = \frac{y^2}{c\,m^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + m) = \frac{y^2}{c\,m^2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$ (§. 157) $= \frac{y^2}{2c}$

ist und wieder der Gleichung der Parabel entspricht.

Gehen wir aber noch genauer, setzen wir in

$$\overline{QR} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right],$$

statt x den letztgefundenen Werth $\frac{y^2}{2c}$ ein, so erhalten wir:

$$\overline{QR} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}\left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{OR}{c}\left(y + \frac{1}{6} \cdot \frac{y^3}{c^2}\right).$$

Nehmen wir nun wieder nach einander $y = \frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. s. w., und setzen wir statt $\overline{OR}$ ebenfalls $\frac{y}{m}$, so finden wir nach und nach sämmtliche Theile von x und hieraus die Summe selbst:

$$x = \frac{y}{c\,m}\left[\frac{y}{m}(1+2+3+\cdots+m) + \frac{1}{6c^2} \cdot \left(\frac{y}{m}\right)^3 (1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3)\right].$$

Für eine sehr große Anzahl von Gliedern ist aber die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis m, $= \frac{m^2}{2}$ und die Summe ihrer Cuben, $= \frac{m^4}{4}$ (s. „Ingenieur", Seite 88); es ist demnach:

$$x = \frac{y}{c}\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{6c^2} \cdot \frac{y^3}{4}\right), \text{ d. i.}$$

$$1)\quad x = \frac{y^2}{2c} + \frac{y^4}{24\,c^3} = \frac{y^2}{2c}\left[1 + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{y}{c}\right)^2\right],$$

die Gleichung einer stark gespannten Kettenlinie.

Durch Umkehrung folgt:

$$y^2 = 2cx - \frac{y^4}{12c^2} = 2cx - \frac{4c^2x^2}{12c^2} = 2cx - \frac{x^2}{3},$$

daher:

$$2)\quad y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}}, \text{ oder annähernd,}$$

$$y = \sqrt{2cx}\left(1 - \frac{x}{12c}\right).$$

Das Maß der Horizontalspannung ergiebt sich ferner:

$$c = \frac{y^2}{2x} + \frac{y^4}{2x \cdot 12 c^2} = \frac{y^2}{2x} + \frac{y^4}{24x} \cdot \frac{4x^2}{y^4}, \text{ d. i.}$$

$$3)\ c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6}.$$

Der Tangentenwinkel φ wird bestimmt durch die Formel

$$tang.\, \varphi = \frac{y}{c}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = \frac{y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}{\frac{y^2}{2x}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{2x}{y}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right], \text{ d. i.}$$

$$4)\ tang.\, \varphi = \frac{2x}{y}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right].$$

Hierzu ist endlich noch die Rectificationsformel:

$$5)\ s = y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = y\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{y}{c}\right)^2\right] \text{ zu setzen.}$$

Beispiele. 1) Für eine Spannweite $2b = 16$ Fuß und Bogenhöhe $a = 2\frac{1}{2}$ Fuß ist die Länge der Kettenlinie:

$$2l = 2b\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 16 \cdot \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2,5}{8}\right)^2\right]$$

$$= 16 + 16 \cdot 0,065 = 17,04 \text{ Fuß},$$

ferner die Länge des die Horizontalspannung messenden Kettenstückes:

$$c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{64}{5} + \frac{5}{12} = 12,8 + 0,417 = 13,217 \text{ Fuß};$$

die Tangente des Aufhängewinkels:

$$tang.\, \alpha = \frac{2a}{b}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \frac{5}{8} \cdot \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{16}\right)^2\right] = \frac{5 \cdot 1,03255}{8} = 0,6453 \ldots$$

hiernach der Aufhängewinkel selbst, $\alpha = 32^0\, 50'$.

2) Eine Kette von 10 Fuß Länge und $9\frac{1}{2}$ Fuß Spannweite hat die Bogenhöhe:

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}(l - b)\, b} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{(10 - 9\frac{1}{2})}{2} \cdot \frac{9\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{19}{16}} = \sqrt{\frac{57}{32}}$$

$$= \sqrt{1,7812} = 1,335 \text{ Fuß},$$

und das Maß der Horizontalspannung:

$$c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{1,75^2}{2 \cdot 1,335} + \frac{1,335}{6} = 8,673 \text{ Fuß}.$$

3) Wenn eine 30 Fuß lange und 8 Pfund schwere Schnur mit einer Kraft von 20 Pfund so viel wie möglich horizontal ausgespannt wird, so ist die Verticalspannung:

$$V = \tfrac{1}{2} G = 4 \text{ Pfund},$$

die Horizontalkraft:

$$H = \sqrt{S^2 - V^2} = \sqrt{20^2 - 4^2} = \sqrt{384} = 19{,}596 \text{ Pfund},$$

die Tangente des Aufhängewinkels:

$$tang.\, \varphi = \frac{V}{H} = \frac{4}{19{,}596} = 0{,}20412,$$

der Winkel φ selbst $= 11^0\, 32'$; ferner das Maß der Horizontalspannung:

$$c = \frac{H}{\gamma} = H \cdot \frac{8}{30} = \frac{30}{8}\, H = 73{,}485 \text{ Fuß},$$

die Spannweite:

$$2b = 2l\left[1 - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{l}{c}\right)^2\right] = 30.\left[1 - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{15}{73{,}48}\right)^2\right] = 30 - 0{,}208 = 29{,}792 \text{ Fuß}$$

und die Bogenhöhe:

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}\, b\,(l - b)} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{29{,}792 \,.\, 0{,}208}{2 \,.\, 2}} = \sqrt{29{,}792 \,.\, 0{,}078} = 1{,}524 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Man findet aus dem Halbmesser $CA = CB = CD = r$ und der Ordinate $AM = y$ eines Kreisbogens AB, Fig. 243, die Ordinate $AN = BN = y_1$ des halben Bogens $AD = BD$, wenn man setzt:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 + (CB - CM)^2$$

$$= \overline{AM}^2 + \left(CB - \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2}\right)^2 = 2\,CA^2 - 2\,CA\sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2},$$

Fig. 243.

d. i.:

$$4\,y_1^2 = 2\,r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Es ist hiernach:

$$y_1 = \sqrt{\frac{r^2 - r\sqrt{r^2 - y^2}}{2}}, \text{ oder annähernd, wenn}$$

y klein ist gegen r:

$$y_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[r^2 - r\left(r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{y^2}{4}\left(1 + \frac{y^2}{4r^2}\right)} = \frac{y}{2}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel findet man die Ordinate des Viertelbogens:

$$y_2 = \frac{y_1}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{8r^2}\right) = \frac{y}{4}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{8r^2}\right),$$

ferner die des Achtelbogens:

$$y_3 = \frac{y_2}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{8r^2}\right) = \frac{y}{8}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + (\tfrac{1}{4})^2\,\frac{y^2}{8r^2}\right)$$

$$= \frac{y}{8}\left(1 + [1 + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2]\,\frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Da die Ordinaten sehr kleiner Bögen den Bogen gleichgesetzt werden können, so erhalten wir hiernach den Bogen AB annähernd:

$s = 8 . y_3 = y\left(1 + [1 + {}^1/_4 + ({}^1/_4)^2]\frac{y^2}{8r^2}\right)$, oder genauer:

$$= y\left(1 + [1 + {}^1/_4 + ({}^1/_4)^2 + ({}^1/_4)^3 + \cdots]\frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Aber $1 + {}^1/_4 + ({}^1/_4)^2 + ({}^1/_4)^3 + \cdots$ ist (nach „Ingenieur" Seite 82) $= \frac{1}{1 - {}^1/_4} = {}^4/_3$, daher folgt:

$$s = \left(1 + \frac{y^2}{6r^2}\right)y;$$

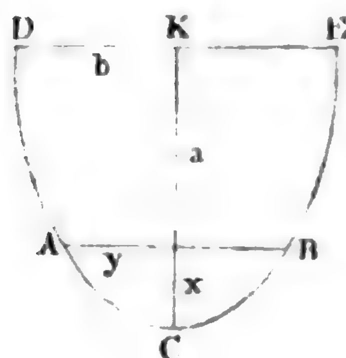
oder wenn man statt r die Abscisse $\overline{BM} = x$ einführt, und $2rx = y^2$ setzt:

$$s = \left[1 + {}^2/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]y.$$

Diese Formel ist nicht bloß auf Kreisbögen, sondern auch auf alle gedrückte Curvenbögen anzuwenden.

Anmerkung 2. Vergleicht man die gefundene Gleichung

Fig. 244.



$$y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}}$$

mit der Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

einer Ellipse (s. „Ingenieur" Seite 169), so findet man:

$$\frac{b^2}{a} = c \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = {}^1/_3, \text{ folglich}$$

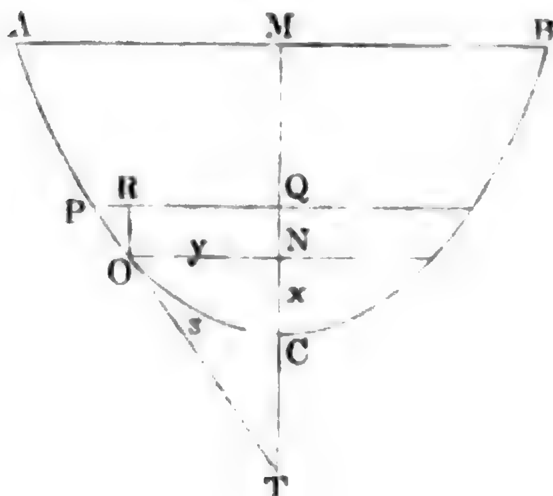
$$a = 3c \text{ und } b = a\sqrt{{}^1/_3} = c\sqrt{3}.$$

Es läßt sich also eine stark gespannte Kettenlinie als ein Bogen ACB, Fig. 244, einer Ellipse ansehen, deren große Halbaxen $KC = a = 3c$ und kleine Halbaxe $KD = KE = b = c\sqrt{3} = a\sqrt{{}^1/_3} = 0,577\, a$ ist.

161) **Gleichung der Kettenlinie.** Die vollständige Gleichung einer gemeinen Kettenlinie läßt sich mittels des höheren Calculs auf folgende Weise finden.

Nach §. 158 ist für den Aufhängewinkel $TON = \varphi$, Fig. 245, welchen die Berührungslinie OT eines Punktes O der Kettenlinie ACB mit der horizontalen Ordinate ON einschließt, wenn der Bogen CO durch s bezeichnet und die Horizontalspannung $H = c\gamma$ gesetzt wird:

Fig. 245.



$$tang.\, \varphi = \frac{s}{c}.$$

Nun ist aber φ auch gleich dem Winkel OPR, welchen ein Bogenelement $OP = \partial s$ mit einem Ele-

mente $PR = \partial y$ der Ordinate $ON = y$ einschließt, und

$$tang.\, OPR = \frac{OR}{PR} = \frac{\partial x}{\partial y},$$

da OR als ein Element ∂x der Abscisse $CN = x$ anzusehen ist; demnach folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{s}{c}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2}.$$

Auch ist $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, also $\partial y^2 = \partial s^2 - \partial x^2$,

und daher: $$\frac{\partial s^2 - \partial x^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2}.$$

Durch weitere Umformung ergiebt sich:

$$\partial x^2 (s^2 + c^2) = s^2 \partial s^2, \text{ oder } \partial x = \frac{s \partial s}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Setzt man $s^2 + c^2 = u$, so erhält man:

$$2 s \partial s = \partial u, \text{ und } \partial x = \frac{1/_2 \partial u}{u^{1/_2}} = 1/_2\, u^{-1/_2} \partial u;$$

und durch Integration folgt nun (nach Art. 18 der analyt. Hülfslehren):

$$x = 1/_2 \int u^{-1/_2} \partial u = 1/_2 \cdot \frac{u^{1/_2}}{1/_2} + Const. = \sqrt{u} + Const.$$

$$= \sqrt{s^2 + c^2} + Const.,$$

endlich, da x und s zugleich Null sind, also $0 = \sqrt{c^2} + Const.$, d. i. $Const. = -c$ ist:

1) $x = \sqrt{s^2 + c^2} - c$; sowie umgekehrt,

$s = \sqrt{(x + c)^2 - c^2} = \sqrt{2cx + x^2}$, und

$c = \dfrac{s^2 - x^2}{2x}$.

Beispiel. Wenn eine 10 Fuß lange und 30 Pfund schwere Kette ACB so aufgehangen wird, daß die Bogenhöhe $CM = 4$ Fuß beträgt, so hat man:

$$\gamma = {}^{30}/_{10} = 3 \text{ Pfund},$$
$$c = \frac{s^2 - x^2}{2x} = \frac{5^2 - 4^2}{8} = {}^9/_8,$$

und daher die Horizontalspannung:

$$H = c\gamma = 3 \cdot {}^9/_8 = 3^3/_8 \text{ Pfund}.$$

Sowie wir im vorigen Paragraphen durch Entfernung von ∂y auf eine (§. 16? Gleichung zwischen dem Bogen s und der Abscisse gestoßen sind, ebenso können wir nun durch Eliminirung von ∂x eine Gleichung zwischen dem Bogen s und der Ordinate y finden. Man setzt zu diesem Zwecke in der Gleichung:

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2}, \ \partial x^2 = \partial s^2 - \partial y^2,$$

und erhält so die Gleichung:

$$\frac{s^2}{c^2} = \frac{\partial s^2 - \partial y^2}{\partial y^2}, \text{ oder } \partial y^2 (s^2 + c^2) = c^2 \partial s^2, \text{ also}$$

$$\partial y = \frac{c \partial s}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Dividirt man im Zähler und Nenner durch c und setzt $\frac{s}{c} = v$, so erhält man:

$$\partial y = \frac{c \partial \left(\frac{s}{c}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}} = \frac{c \partial v}{\sqrt{1 + v^2}},$$

und es liefert nun die Formel XIII. im Art. 26 der analytischen Hülfslehren das entsprechende Integral:

$$y = c \int \frac{\partial v}{\sqrt{1 + v^2}} = c \,.\, Log.\, nat.\, (v + \sqrt{1 + v^2}), \text{ d. i.}$$

$$2)\ y = c \,.\, Log.\, nat.\, \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}\right).$$

Setzt man in dieser Formel $s = \sqrt{2cx + x^2}$, so erhält man die eigentliche **Coordinatengleichung der gemeinen Kettenlinie**:

$$3)\ y = c \,.\, Log.\, nat.\, \left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right),$$

auch ist:

$$4)\ y = c\ Log.\, nat.\, \left(\frac{s + x}{s - x}\right) = \frac{s^2 - x^2}{2x}\ Log.\, nat.\, \left(\frac{s + x}{s - x}\right).$$

Endlich folgt aber durch Umkehrung von 2. und 3.:

$$5)\ s = \left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right) \cdot \frac{c}{2} \text{ und}$$

$$6)\ x = \left[\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right) - 1\right] c,$$

und es bezeichnet e die Grundzahl 2,71828 . . . des natürlichen Logarithmensystemes (s. Art. 19 der analyt. Hülfslehren).

Beispiel. Zwei zusammengehörige Coordinaten einer Kettenlinie sind $x = 2$ Fuß und $y = 3$ Fuß, man sucht die Horizontalspannung c dieser Curve?

Annähernd ist nach Nro. 3 des Paragraphen 160:

$$c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6} = \frac{9}{4} + \frac{2}{6} = 2{,}58.$$

Nach Nro. 3 dieses Paragraphen (162) ist aber genau:

$$y = c \, Ln. \left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right), \text{ d. i.:}$$

$$3 = c \, Ln. \left(\frac{c + 2 + \sqrt{4c + 4}}{c}\right).$$

Hierin $c = 2{,}58$ gesetzt, bekommt man den Fehler:

$$f = 3 - 2{,}58 \, Ln. \left(\frac{4{,}58 + 2\sqrt{3{,}58}}{2{,}58}\right) = 3 - 2{,}58 \, Ln. \left(\frac{8{,}3642}{2{,}58}\right)$$
$$= 3 - 3{,}035 = -0{,}035;$$

nimmt man aber $c = 2{,}53$, so erhält man den Fehler:

$$f_1 = 3 - 2{,}53 \, Ln. \left(\frac{4{,}53 + 2\sqrt{3{,}53}}{2{,}53}\right) = 3 - 2{,}53 \, Ln. \left(\frac{8{,}2876}{2{,}53}\right)$$
$$= 3 - 3{,}002 = -0{,}002.$$

Um nun den wahren Werth von c zu finden, setzen wir nach einer bekannten Regel (s. „Ingenieur", Seite 76):

$$\frac{c - 2{,}58}{c - 2{,}53} = \frac{f}{f_1} = \frac{0{,}035}{0{,}002} = 17{,}5,$$

auf diese Weise folgt: $16{,}5 \,.\, c = 17{,}5 \,.\, 2{,}53 - 2{,}58 - 41{,}69$, daher:

$$c = \frac{41{,}69}{16{,}5} = 2{,}527 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Sehr einfach lassen sich für die gemeine Kettenlinie s, x und y durch den Aufhängewinkel φ ausdrücken; es ist nämlich nach dem Vorstehenden:

$$s = c \; tang. \varphi = \frac{c \, sin. \varphi}{cos. \varphi}, \text{ ferner:}$$

$$x = c \left(\sqrt{1 + tang. \varphi^2} - 1\right) = \frac{c \, (1 - cos. \varphi)}{cos. \varphi} \text{ und}$$

$$y = c \, Log. nat. \left(tang. \varphi + \sqrt{1 + tang. \varphi^2}\right) = c \, Log. nat. \left(\frac{1 + sin. \varphi}{cos. \varphi}\right).$$

Mittels dieser Formeln kann man die Bogen- und Coordinatenlängen für verschiedene Neigungs- oder Aufhängewinkel berechnen, und es läßt sich hierzu leicht eine zweckmäßige Tabelle, wie im „Ingenieur" S. 353, anfertigen. Hierbei hat man nur eine einzige Kettenlinie, am besten diejenige, bei welcher das Maß c der Horizontalspannung $= 1$ ist, zu Grunde zu legen; für eine andere Kettenlinie, welche der Horizontalspannung c entspricht, findet man dann s, x und y, indem man die durch die Tabelle angegebenen Werthe von s, x und y mit c multiplicirt.

Wäre $tang. \varphi$ nicht $= \frac{s}{c}$, sondern $= \frac{y}{c}$, so hätte man es mit der gemeinen Parabel zu thun, für welche

$$s = \frac{c}{2} \left[\frac{sin. \varphi}{cos. \varphi^2} + Ln. \, tang. \left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \varphi}{2}\right)\right],$$

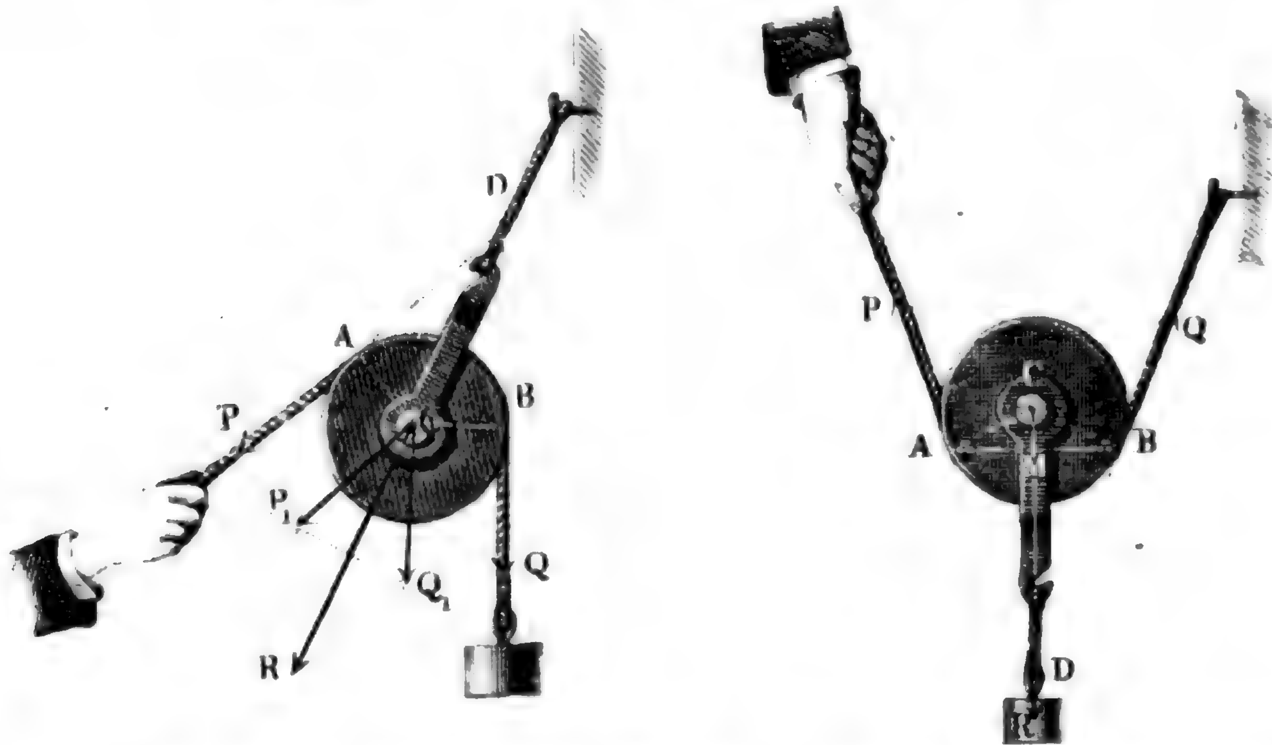
$$x = \frac{c}{2} \, tang. \varphi^2 = \frac{c}{2} \left(\frac{sin. \varphi}{cos. \varphi}\right)^2 \text{ und}$$

$$y = c \, tang. \varphi = \frac{c \, sin. \varphi}{cos. \varphi} \text{ ist.}$$

163 **Gleichgewicht der Rolle.** Seile, Riemen u. s. w. sind auch die gewöhnlichsten Mittel, wodurch Kräfte auf Rollen und Radwellen übertragen werden. Von den Theorien dieser beiden Vorrichtungen möge deshalb hier noch das Allgemeinste, so viel es ohne Berücksichtigung der Reibung und Steifigkeit möglich ist, entwickelt werden.

Eine Rolle (franz. poulie; engl. pulley) ist eine um eine Axe drehbare kreisförmige Scheibe ABC, Fig. 246 und Fig. 247, um deren Umfang

Fig. 246. Fig. 247.



ein Seil liegt, dessen Enden durch Kräfte P und Q angespannt werden. Bei einer festen Rolle (franz. p. fixe; engl. fixed p.) ist das Gehäuse oder Lager (franz. chape; engl. block), worin ihre Axen oder Zapfen ruhen, unbeweglich, bei einer losen Rolle (franz. p. mobile; engl. moveable p.) hingegen ist das Zapfengehäuse beweglich.

Im Gleichgewichtszustande einer jeden Rolle sind die Kräfte P und Q an den Seilenden gleich groß, denn jede Rolle ist ein gleicharmiger Winkelhebel, den man erhält, wenn man von der Axe C Perpendikel CA und CB auf die Kräfte- oder Seilrichtungen DP und DQ fällt. Auch ist klar, daß die Kräfte P und Q bei irgend einer Drehung um C einerlei Weg, nämlich $r\beta$, zurücklegen, wenn r den Halbmesser $CA = CB$ und β^0 den Umdrehungswinkel bezeichnet, und daß sich auch hieraus auf die Gleichheit zwischen P und Q schließen läßt. Aus den Kräften P und Q entspringt noch eine vom Zapfenlager aufzunehmende Mittelkraft $\overline{CR} = R$, die von dem Winkel $ADB = \alpha$, unter welchem die Seilrichtungen zusammenstoßen, abhängig ist und sich als Diagonale des aus P und α zu construirenden Rhombus CP_1RQ_1,

$$R = 2\, P \cos. \frac{\alpha}{2} \text{ ergiebt.}$$

Bei der festen Rolle, Fig. 246, wirkt die zu hebende Last oder der zu §. 164
überwindende Widerstand Q an einem Seilende genau wie die Kraft P; es ist daher hier Kraft gleich Last, und es bewirkt die Anwendung dieser Rolle nichts weiter als eine Richtungsveränderung, weshalb man sie auch eine Leitrolle nennt. Bei der losen Rolle, Fig. 247, hingegen wirkt die Last R an dem hakenförmigen Ende des Zapfenlagers, während das eine Seilende an einem unbeweglichen Gegenstande befestigt ist; hier ist also die Kraft

$$P = \frac{R}{2 \cos. \frac{\alpha}{2}}$$

zu setzen. Bezeichnen wir die Sehne AMB, welche dem mit Seil bedeckten Bogen entspricht, durch a und den Halbmesser $CA = CB$, wie vorhin, durch r, so ist:

$$a = 2 \overline{AM} = 2 . \overline{CA} \cos. CAM = 2 \overline{CA} \cos. ADM = 2 r \cos. \frac{\alpha}{2},$$

es läßt sich daher

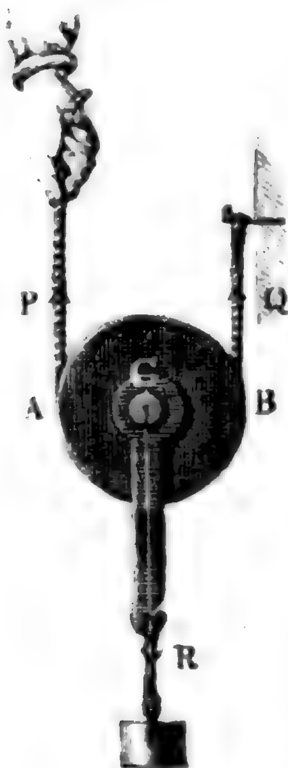
$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2 \cos. \frac{\alpha}{2}} \text{ und ebenso}$$

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{a}$$

setzen. Diesem nach verhält sich also bei der losen Rolle die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des Seilbogens.

Ist $a = 2r$, bedeckt also das Seil einen Halbkreis, Fig. 248, so fällt die Kraft am kleinsten, nämlich $P = \frac{1}{2} R$ aus; ist $a = r$, also 60° von der Rolle mit Seil bedeckt, so hat man $P = R$. Je kleiner nun a ausfällt, desto größer wird P, und für ein unendlich kleines a, d. h. für eine unendlich kleine Seilbedeckung ist die Kraft P unendlich groß. Bei den Wegen tritt ein umgekehrtes Verhältniß ein; ist s der Weg von P, welcher einem Wege h von R entspricht, so hat man $Ps = Rh$, daher:

Fig. 248.



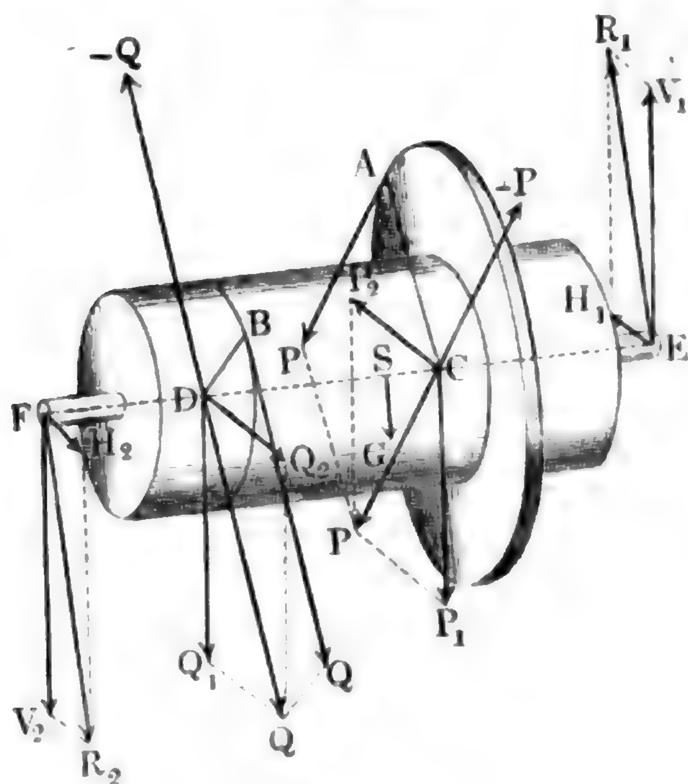
$$\frac{s}{h} = \frac{a}{r}.$$

Die lose Rolle ist also ein Mittel zur Kraftveränderung, weshalb sie auch die Kraftrolle genannt wird; es läßt sich durch dieselbe z. B. eine gegebene Last durch eine kleinere Kraft heben; in dem Verhältnisse aber, um welches man an Kraft gewinnt, verliert man an Weg.

Anmerkung. Von der Zusammensetzung der Rollen zu Rollen- und Flaschenzügen, sowie von dem Einflusse der Reibung und des Steifigkeitswiderstandes auf das Gleichgewicht der Rollen ist im dritten Bande die Rede.

§. 165 **Radwelle.** Die Radwelle (franz. roue sur l'arbre; engl. wheel and axle) ist eine feste, um eine gemeinschaftliche Axe drehbare Verbindung, $ABFE$, Fig. 249, von zwei festen Rollen oder Rädern. Das kleinere von diesen Rädern heißt Welle (franz. arbre; engl. axle), das größere aber Rad (franz. roue; engl. wheel). Die runden Enden E und F, womit die Vorrichtung aufruht, heißen Zapfen (franz. tourillons; engl. trunnions). Die Umdrehungsaxe einer Radwelle ist entweder horizontal, oder vertical, oder schief. Hier soll zunächst nur von derjenigen Radwelle die Rede sein,

Fig. 249.



welche sich um eine horizontale Axe dreht; auch wollen wir hier voraussetzen, daß die Kräfte P und Q oder die Kraft P und die Last Q an den Enden vollkommen biegsamer Seile wirken, welche um die Umfänge des Rades und der Welle gelegt sind. Die zu beantwortenden Fragen sind: in welchem Verhältnisse stehen Kraft P und Last Q zu einander, und welche Drücke haben die Zapfenlager bei E und F aufzunehmen?

Denkt man sich in dem Punkte C, wo die Umdrehungsebene der Kraft P die Axe EF der Maschine schneidet, noch zwei Gegenkräfte $CP = P$ und $C\overline{P} = -P$ wirksam, welche der in A angreifenden Umdrehungskraft gleich und ihr parallel gerichtet sind, so erhält man aus der Zusammensetzung dieser drei Kräfte eine Axenkraft $CP = P$ und ein Kräftepaar $(P, -P)$, dessen Moment $= P \,.\, \overline{CA} = Pa$ ist, wenn a den Hebelarm der Kraft $AP = P$, oder den Halbmesser $\overline{CA}$ des Rades bezeichnet; und denken wir uns gleichfalls im Punkte D, wo die Umdrehungsebene der Last Q von der Axe EF geschnitten wird, die Gegenkräfte $DQ = Q$ und $D\overline{Q} = -Q$ angebracht, so erhalten wir auch noch eine Axenkraft $DQ = Q$ und ein Kräftepaar $(Q, -Q)$, dessen Moment $= Q \,.\, \overline{DB} = Qb$ ist, wenn b

den Hebelarm der in B angreifenden Last Q oder den Halbmesser $\overline{DB}$ der Welle bezeichnet.

Da die Axenkräfte $CP = P$ und $DQ = Q$ von der Axe aufgenommen werden, und folglich gar keinen Einfluß auf die Umdrehung der Maschine ausüben, so ist zur Herstellung des Gleichgewichts nöthig, daß die beiden in parallelen Ebenen wirkenden Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (vergl. §. 94) gleiche Momente haben, daß also

$$Pa = Qb, \text{ oder}$$
$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$$

ist.

Es ist also bei jeder beliebig langen Radwelle, wie bei jedem Hebel, im Gleichgewichtszustande, das Moment Pa der Kraft gleich dem Momente Qb der Last, oder das Verhältniß der Kraft zur Last gleich dem des Lastarmes zu dem Kraftarme.

Wirken mehr als zwei Kräfte an einer Radwelle, so ist natürlich auch die Summe der Momente der Kräfte, welche nach der einen Umdrehungsrichtung wirken, gleich der Summe der Momente der Kräfte mit der anderen Umdrehungsrichtung zu setzen.

Die **Axenkräfte** $CP = P$ und $DQ = Q$ lassen sich nur noch in die Verticalkräfte $CP_1 = P_1$ und $DQ_1 = Q_1$, und in die Horizontalkräfte $CP_2 = P_2$ und $DQ_2 = Q_2$ zerlegen; es geben nun die ersteren Kräfte in Vereinigung mit dem im Schwerpunkte S der Maschine angreifenden Gewichte G der Maschine den gesammten verticalen Zapfendruck, d. i.: §. 166

$$V_1 + V_2 = P_1 + P_2 + G,$$

während aus den Horizontalkräften P_2 und Q_2 seitliche Zapfendrücke H_1 und H_2 hervorgehen. Ist α der Neigungswinkel PCP_2 der Richtung der Kraft P gegen den Horizont, und β der Neigungswinkel QDQ_2 der Last, so hat man:

$$P_1 = P \sin.\alpha \text{ und } P_2 = P \cos.\alpha, \text{ sowie}$$
$$Q_1 = Q \sin.\beta \text{ und } Q_2 = Q \cos.\beta.$$

Ist ferner l die ganze Axenlänge $\overline{EF}$, d der Abstand $\overline{CE}$, e der Abstand $\overline{DE}$ und c der Abstand $\overline{SE}$ der Axenpunkte C, D und S von dem einen Axenende E, so hat man der Theorie des Hebels (§. 137) zufolge:

1) Wenn man E als Stützpunkt des von den Kräften P_1, Q_1 und G ergriffenen Hebels EF ansieht:

$$V_2 \,.\, \overline{EF} = P_1 \,.\, \overline{EC} + Q_1 \,.\, \overline{ED} + G \,.\, \overline{ES}, \text{ d. i.:}$$
$$V_2 l = P_1 d + Q_1 e + G s,$$

wonach sich der Verticaldruck:

$$V_2 = \frac{P_1 d + Q_1 e + G s}{l}$$

ergiebt, und

2) wenn man F als Stützpunkt des gedachten Hebels behandelt:

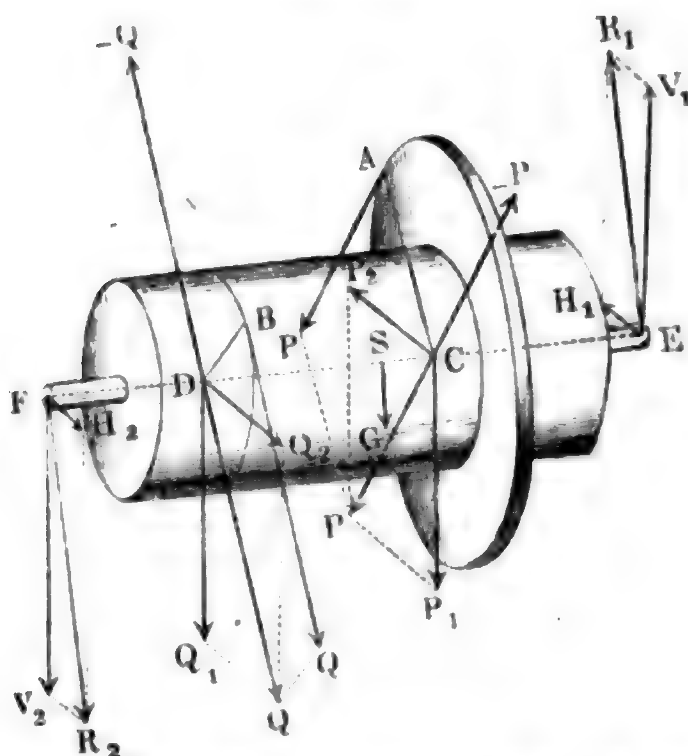
$$V_1 \,.\, \overline{FE} = P_1 \,.\, \overline{FC} + Q_1 \,.\, \overline{FD} + G \,.\, \overline{FS}, \text{ d. i.:}$$
$$V_1 l = P_1 (l - d) + Q_1 (l - e) + G (l - s),$$

so daß der Verticaldruck:

$$V_1 = \frac{P_1 (l - d) + Q_1 (l - e) + G (l - s)}{l}$$

folgt.

Fig. 249.



Die Horizontaldrücke H_1 und H_2 ergeben sich aus den Horizontalkräften P_2 und Q_2 wie folgt.

1) Wenn man E als Stützpunkt des von P_2 und Q_2 ergriffenen Hebels EF annimmt, und hiernach

$$H_2 \,.\, \overline{EF} = P_2 \,.\, \overline{EC} - Q_2 \,.\, \overline{ED}, \text{ d. i.:}$$
$$H_2 l = P_2 d - Q_2 c$$

setzt, folgt der Horizontaldruck: $H_2 = \dfrac{P_2 d - Q c}{l}$, und

2) wenn man F als Stützpunkt behandelt:

$$H_1 \,.\, \overline{FE} = P_2 \,.\, \overline{FC} - Q_2 \,.\, \overline{FD}, \text{ d. i.:}$$
$$H_1 l = P_2 (l - d) - Q_2 (l - e),$$

ergiebt sich der Horizontaldruck:

$$H_1 = \frac{P_2 (l - d) - Q_2 (l - e)}{l}.$$

Durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes erhält man nun die gesammten Drücke R_1 und R_2 an den Zapfen E und F, und zwar:

$$R_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} \text{ und } R_2 = \sqrt{V_2^2 + H_2^2}.$$

Sind endlich noch δ_1 und δ_2 die Winkel $R_1 E H_1$ und $R_2 F H_2$, um welche diese Drücke von dem Horizonte abweichen, so hat man:

$$tang.\ \delta_1 = \frac{R_1}{H_1} \text{ und } tang.\ \delta_2 = \frac{R_2}{H_2}.$$

Beispiel. Die Last Q einer Radwelle zieht senkrecht nieder und beträgt 365 Pfund; der Halbmesser des Rades ist $a = 1\frac{3}{4}$ Fuß; der Halbmesser der Welle, $b = \frac{3}{4}$ Fuß; das Gewicht der leeren Radwelle beträgt 200 Pfund; ihr Schwerpunkt steht von dem Zapfenlager E um $s = 1\frac{1}{2}$ Fuß ab, das Radmittel ist um $d = \frac{3}{4}$ Fuß von diesem Zapfen E und die Verticalebene, in welcher die Last wirkt, ist um $e = 2$ Fuß von demselben entfernt, während die ganze Axenlänge $EF = l = 4$ Fuß beträgt; wenn nun die zur Herstellung des Gleichgewichts nöthige Kraft P am Rade, unter einem Winkel α von 50 Grad vom Horizonte abweichend, niederzieht, wie groß wird dieselbe ausfallen und welches werden die Zapfendrücke sein? Es ist $Q = 365$, $\beta = 90^0$, folglich $Q_1 = Q\ sin.\ \beta = Q$ und $Q_2 = Q\ cos.\ \beta = 0$, ferner P unbekannt und $\alpha = 50^0$, daher $P_1 = P\ sin.\ \alpha = 0{,}7660 \,.\, P$ und $P_2 = P\ cos.\ \alpha = 0{,}6428 \,.\, P$; nun ist aber $a = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ und $b = \frac{3}{4}$, es folgt daher:

$$P = \frac{b}{a} Q = \tfrac{3}{7} \,.\, 365 = 156{,}4 \text{ Pfd.}, \quad P_1 = 119{,}8 \text{ und } P_2 = 100{,}5 \text{ Pfd.}$$

Weil ferner $l = 4$, $d = \frac{3}{4}$, $e = 2$ und $s = \frac{3}{2}$ ist, so folgt $l - d = \frac{13}{4}$, $l - e = 2$ und $l - s = \frac{5}{2}$. Nun ergiebt sich:

1) Für den Zapfen F:

der Verticaldruck

$$V_2 = \frac{119{,}8 \,.\, \frac{3}{4} + 365 \,.\, 2 + 200 \,.\, \frac{3}{2}}{4} = 280{,}0 \text{ Pfund},$$

und der Horizontaldruck:

$$H_2 = \frac{100{,}5 \,.\, \frac{3}{4} - 0 \,.\, 2}{4} = 18{,}8 \text{ Pfund},$$

folglich der Mitteldruck:

$$R_2 = \sqrt{V_2^2 + H_2^2} = \sqrt{280^2 + 18{,}8^2} = 280{,}6 \text{ Pfund},$$

und für dessen Neigung δ_2 gegen den Horizont:

$$tang.\ \delta_2 = \frac{280{,}0}{18{,}8}, \quad Log.\ tang.\ \delta_2 = 1{,}17300, \text{ also } \delta_2 = 86^0\, 9',5.$$

2) Für den Zapfen E:

$$V_1 = \frac{119{,}8 \,.\, \frac{13}{4} + 365 \,.\, 2 + 200 \,.\, \frac{5}{2}}{4} = 404{,}8 \text{ Pfund},$$

$$H_1 = \frac{100{,}5 \,.\, \frac{13}{4} - 0}{4} = 81{,}7 \text{ Pfund},$$

folglich der Mitteldruck:

$$R_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = \sqrt{404{,}8^2 + 81{,}7^2} = 413{,}0 \text{ Pfund},$$

und für dessen Neigung δ_1 gegen den Horizont:

$$tang.\ \delta_1 = \frac{413,0}{81,7},\ Log.\ tang.\ \delta_1 = 0,69502,\ \delta_1 = 78^0\ 35'.$$

Uebrigens ist sehr richtig:

$$V_1 + V_2 = 280 + 404,8 = 684,8 = P_1 + Q_1 + G,$$ und ebenso
$$H_1 + H_2 = 81,7 + 18,8 = 100,5 = P_2 + Q_2.$$

Fünftes Capitel.

Die Widerstände der Reibung und Steifigkeit der Seile.

§. 167 **Widerstand der Reibung.** Wir haben seither angenommen (§. 138), daß zwei Körper nur durch Kräfte winkelrecht zur gemeinschaftlichen Berührungsebene auf einander wirken können. Wären diese Körper vollkommen starr und ihre Oberflächen an den Stellen der Berührung vollkommen mathematische, d. h. auch nicht von den kleinsten ungesetzmäßigen Erhabenheiten und Vertiefungen unterbrochen, so würde dieses Gesetz auch durch die Erfahrung vollkommen bestätigt werden: weil aber jeder materielle Körper einen gewissen Grad von Elasticität, oder nach Befinden Weichheit, besitzt, und weil die Oberfläche eines jeden Körpers, selbst wenn sie polirt oder in hohem Grade geglättet ist, noch kleine Erhöhungen und Vertiefungen hat und in Folge der Porosität der Materie kein Continuum bildet, so findet bei der gegenseitigen Wirkung zweier sich berührenden Körper auch immer ein gegenseitiges Eindrücken und Eingreifen der Theile an der Berührungsstelle statt, wodurch sich ein Zusammenhang zwischen beiden Körpern bildet, der nur durch eine besondere Kraft, deren Richtung in die Berührungsebene selbst fällt, aufgehoben werden kann.

Dieser, durch das Eindringen und Ineinandergreifen der sich berührenden Körper hervorgebrachte Zusammenhang und der daraus entspringende, in der Berührungsebene wirkende Widerstand ist es, welcher den Namen **Reibung** (franz. frottement; engl. friction) erhalten hat. Die Reibung tritt bei der Bewegung der Körper als eine **passive Kraft** oder als **Widerstand** (Reibungswiderstand) auf, weil sie nur Bewegungen verhindert oder hemmt, dieselben aber nie erzeugt oder befördert. Sie läßt sich bei Untersuchungen in der Mechanik als eine Kraft einführen, die jeder Bewegung, deren Richtung in die Ebene der Berührung beider Körper fällt, entgegenwirkt. In welcher Richtung man auch einen auf einer horizontalen oder geneigten Ebene ruhenden Körper fortbewegt, immer wird die Reibung in der Richtung der Bewegung entgegenwirken, sie wird z. B. dem Hinabsinken auf der schiefen Ebene

ebenso viel hinderlich sein als dem Hinaufgleiten auf derselben. Bei einem im Gleichgewichtszustande befindlichen Kräftesysteme erzeugt der kleinste Zusatz an Kraft Bewegung, so lange die Reibung außer Spiel bleibt; influirt aber dieselbe, so ist zur Störung des Gleichgewichtes ein größerer, von der Reibung abhängiger Zusatz an Kraft nöthig.

Während der Ueberwindung der Reibung werden die in Berührung gekommenen Theile zusammengedrückt, die vorstehenden Theile umgebogen, nach Befinden abgerissen, abgebrochen u. s. w. Es hängt deshalb die Reibung nicht nur von der Rauhigkeit oder Glätte der reibenden Flächen, sondern auch von der materiellen Beschaffenheit der Körper selbst ab. Härtere Metalle geben z. B. meist weniger Reibung als weichere. Uebrigens lassen sich über die Abhängigkeit der Reibung von den natürlichen Eigenschaften der Körper a priori keine allgemeinen Regeln aufstellen; es ist vielmehr nöthig, mit Körpern von verschiedenen Materien Reibungsversuche anzustellen, um daraus die unter anderen Verhältnissen stattfindenden Reibungen zwischen Körpern von denselben Materien ermitteln zu können. §. 168

Einen besonderen Einfluß auf die Reibung und auf das daraus hervorgehende Abreiben und Abnutzen der sich berührenden Körper üben die Schmieren (franz. les enduits; engl. the ungents) aus, mit denen man die sich reibenden Flächen bestreicht. Durch die ganz- oder halbflüssigen Schmiermittel, wie Oel, Unschlitt, Fett, Seife u. s. w., werden die Poren der Körper ausgefüllt und andere Rauhheiten vermindert, und wird überhaupt das tiefere Eindringen der Körper in einander verhindert, weshalb sie meist eine bedeutende Verminderung der Reibung herbeiführen.

Uebrigens ist die Reibung nicht mit der Adhäsion, d. h. mit demjenigen Zusammenhängen zweier Körper zu verwechseln, welches eintritt, wenn Körper in vielen Punkten in Berührung kommen und ein gegenseitiger Druck nicht stattfindet. Die Adhäsion wächst mit der Größe der Berührungsfläche und ist vom Drucke unabhängig, während bei der Reibung das Gegentheil statt hat. Bei kleinen Pressungen tritt sie in Beziehung auf die Reibung bedeutend hervor; sind aber die Pressungen groß, so ist sie nur ein kleiner Theil der Reibung und in der Regel ganz zu vernachlässigen. Schmieren, wie überhaupt alle flüssigen Körper, vermehren die Adhäsion, weil sie eine größere Anzahl von Berührungspunkten herstellen.

Reibungsarten. Man unterscheidet zwei Arten der Reibung von einander, nämlich die gleitende und rollende oder wälzende. Die gleitende Reibung (franz. f. de glissement; engl. f. of sliding) ist derjenige Reibungswiderstand, welcher sich herausstellt, wenn sich ein Körper gleitend, d. h. so bewegt, daß alle Punkte desselben parallele Linien beschreiben. Die §. 169

rollende oder wälzende Reibung (franz. f. de roulement; engl. f. of rolling) hingegen ist derjenige Widerstand, welcher beim Wälzen, d. h. bei derjenigen Bewegung eines Körpers entsteht, wo sich jeder Punkt progressiv und drehend zugleich bewegt und der Berührungspunkt auf dem bewegten Körper einen eben so großen Weg zurücklegt als auf dem ruhenden Körper. Ein gegen die Ebene HR sich stützender Körper M, Fig. 250, geht z. B.

Fig. 250.

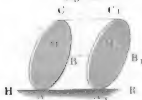
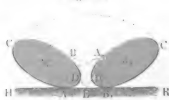


Fig. 251.



gleitend über die Ebene hin und hat somit gleitende Reibung zu überwinden, wenn alle Punkte desselben, wie A, B, C u. s. w., die parallen Wege $A A_1$, $B B_1$, $C C_1$ u. s. w. zurücklegen und deshalb immer nur dieselben Punkte des bewegten Körpers mit anderen der Unterlage in Berührung kommen. Der Körper M, Fig. 251, rollt oder wälzt sich dagegen auf der Ebene HR und hat dabei wälzende Reibung zu überwinden, wenn sich die Punkte A, B u. s. w. seiner Oberfläche so bewegen, daß der Weg $A E B_1$ = dem Wege $A D B = A_1 D_1 B_1$, ebenso der Weg $A E$ = dem Wege $A D$, der Weg $B_1 E = B_1 D_1$ u. s. w. ist.

Eine besondere Art der gleitenden Reibung ist die Axen- oder Zapfenreibung, welche entsteht, wenn sich ein cylindrischer Zapfen in seinem Lager herumdreht. Man unterscheidet aber zweierlei Zapfen, liegende und stehende. Der liegende Zapfen (franz. tourillon; engl. axle, auch gudgeon) reibt sich an seinem Umfange oder Mantel, indem nach und nach andere Punkte desselben immer mit denselben Punkten des Lagers oder der Pfanne in Berührung kommen. Der stehende Zapfen (franz. und engl. pivot) hingegen drückt mit seiner kreisförmigen Basis gegen das Lager, während die Punkte der letzteren in concentrischen Kreisen herumgehen.

Besondere Reibungen entstehen noch, wenn ein Körper über einer Schneide oscillirt, wie z. B. beim Wagebalken, oder wenn ein schwingender Körper in einer Spitze aufliegt, wie z. B. die Magnetnadel.

Ferner ist die Reibung einzutheilen in unmittelbare Reibung (franz. f. immédiat; engl. immediate f.) und in mittelbare Reibung (franz. f. médiat; engl. mediate f.). Bei jener sind die sich reibenden Körper in unmittelbarer Berührung; bei dieser sind sie hingegen durch Schmieren, z. B. durch eine dünne Oelschicht u. s. w. von einander getrennt.

Endlich unterscheidet man noch die **Reibung der Ruhe** (franz. f. de répos; engl. f. of quiescence), welche zu überwinden ist, wenn ein ruhender Körper in Bewegung gesetzt wird, von **Reibung der Bewegung** (franz. f. de mouvement; engl. f. of motion), welche sich der Fortsetzung einer Bewegung entgegensetzt.

Reibungsgesetze. Die allgemeinen Gesetze, welchen die Reibung unterworfen ist, sind folgende: §. 171

1) Die Reibung ist **proportional dem Normaldrucke** zwischen den sich reibenden Körpern. Wenn man einen Körper jetzt noch einmal so stark gegen seine Unterlage drückt als vorher, so fällt die Reibung auch noch einmal so groß aus; der dreifache Druck giebt auch eine dreifache Reibung u. s. w. Wenn dieses Gesetz bei kleinen Drücken Abweichungen von den Beobachtungen giebt, so hat man diese dem hier verhältnißmäßig größeren Einflusse der Adhäsion beizumessen.

2) Die Reibung ist **unabhängig** von der Größe der **Reibungs- oder Berührungsflächen**. Je größer die Reibungsflächen sind, desto größer ist zwar die Zahl der sich reibenden Theile, allein desto kleiner ist auch der Druck und deshalb auch die Reibung eines jeden Theiles; die Summe der Reibungen aller Theile ist deshalb bei einer größeren Fläche dieselbe wie bei einer kleineren, insofern der Druck und die übrigen Verhältnisse dieselben sind. Sind die Seitenflächen eines parallelepipedischen Ziegelsteines von gleicher materieller Beschaffenheit, so ist die Kraft zum Fortschieben desselben auf einer horizontalen Ebene dieselbe, man mag ihn mit der kleinsten oder mit der mittleren oder mit der größten Seitenfläche aufruhen lassen. Nur bei sehr großen Seitenflächen und kleinen Drücken scheint diese Regel in Folge des Einflusses der Adhäsion eine Ausnahme zu erleiden.

3) Die Reibung der Ruhe ist zwar meist größer als die der Bewegung, letztere aber ist von der Geschwindigkeit nicht abhängig; sie ist bei großen Geschwindigkeiten dieselbe wie bei kleinen Geschwindigkeiten.

4) Die Reibung eingeschmierter Flächen (mittelbare Reibung) ist in der Regel kleiner als die uneingeschmierter Flächen (unmittelbare Reibung), und hängt weniger von den sich reibenden Körpern als von der Schmiere selbst ab.

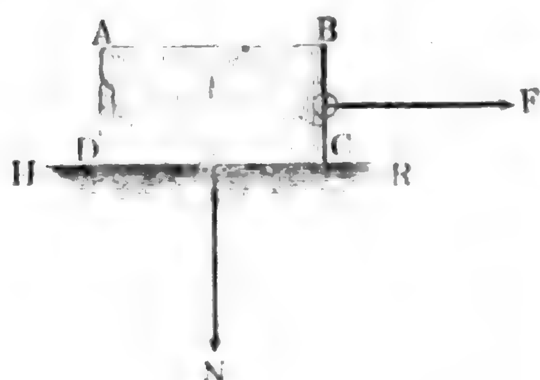
5) Die drehende oder Zapfenreibung ist kleiner als die gemeine gleitende oder schiebende Reibung; die wälzende Reibung zwischen glatten Flächen ist in den meisten Fällen so klein, daß sie in Rücksicht auf die gleitende Reibung nicht in Betracht zu ziehen ist.

Anmerkung. Die vorstehenden Regeln gelten streng nur dann, wenn der Zapfendruck auf die Flächeneinheit ein mittlerer ist, und wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens gewisse Grenzen nicht überschreitet. Dieser mittlere Druck auf

den Quadratzoll ist etwa 250 bis 500 Pfund, und die mittlere Umfangsgeschwindigkeit 2 bis 10 Zoll. Bei viel kleineren Drücken bildet die Adhäsion einen ansehnlichen Theil des Widerstandes, welcher dann auch von der Größe der Reibungsfläche mit abhängt, und bei sehr großen Drücken und Geschwindigkeiten findet eine so große Wärmeentwickelung statt, daß die Schmiere schnell verdampft, und der Zapfen, sowie das Lager desselben, der Zerstörung entgegeneilt. Lassen sich große Geschwindigkeiten nicht umgehen, wie z. B. bei Eisenbahnwagen, Turbinen u. s. w., so muß man der Erhitzung der Zapfen durch Vergrößerung der Reibungsfläche, d. i. durch größere Stärke und Länge der Zapfen, entgegenwirken.

171 **Der Reibungscoefficient.** Aus dem ersten der im vorigen Paragraphen aufgeführten Gesetze läßt sich zunächst Folgendes ableiten. Ein Körper $A\,C$, Fig. 252, drücke gegen seine Unterlage ein Mal mit der Kraft N und erfordere zum Fortziehen, d. h. zur Ueberwindung seiner Reibung, die Kraft F, und ein zweites Mal mit der Kraft N_1 und mache dann die Kraft F_1 nothwendig, um aus der Ruhe in Bewegung überzugehen. Nach dem Vorigen ist nun:

Fig. 252.



$$\frac{F}{F_1} = \frac{N}{N_1}, \text{ und daher } F = \frac{F_1}{N_1} \cdot N.$$

Hat man durch einen Versuch die einem gewissen Drucke N_1 entsprechende Reibung F_1 gefunden, so findet man hiernach, wenn die sich reibenden Körper und die übrigen Umstände dieselben sind, die einem anderen Drucke N entsprechende Reibung F, indem man diesen Druck durch das Verhältniß $\left(\frac{F_1}{N_1}\right)$ zwischen den der ersten Beobachtung entsprechenden Werthen F_1 und N_1 multiplicirt.

Dieses Verhältniß der Reibung zum Drucke oder die Reibung für den Druck = Eins, z. B. 1 Pfund, heißt der Reibungscoefficient (franz. coëfficient du frottement; engl. coefficient of friction) und soll in der Folge immer durch φ ausgedrückt werden, weshalb sich allgemein

$F = \varphi \,.\, N$ setzen läßt.

Der Reibungscoefficient ist bei verschiedenen Materien und verschiedenen Zuständen der Reibung verschieden und muß deshalb durch besonders hierzu angestellte Versuche ermittelt werden.

Wird der Körper $A\,C$ um den Weg s auf der Unterlage fortgezogen, so hat man die Arbeit Fs zu verrichten; es ist also die von der Reibung beanspruchte mechanische Arbeit $\varphi N s$ gleich dem Producte aus Reibungscoefficient, Normaldruck und Weg auf der Berührungsebene. Ist die Unterlage

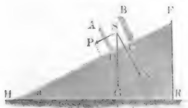
ebenfalls beweglich, so hat man unter $s = s_1 - s_2$ den relativen Weg des Körpers zu verstehen und es ist dann $Fs = \varphi N s$ die Arbeit der Reibung für beide Körper zusammengenommen. Der schneller gehende Körper nimmt beim Durchlaufen des Weges s_1 die Arbeit $\varphi N s_1$ in Anspruch und der langsamer gehende Körper gewinnt bei Zurücklegung des Weges s_2 durch die Reibung die Arbeit $\varphi N s_2$; es ist also der durch die Reibung zwischen beiden Körpern entstehende Arbeitsverlust:

$$\varphi N s_1 - \varphi N s_2 = \varphi N (s_1 - s_2) = \varphi N s.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einem Drucke von 260 Pfund die Reibung 91 Pfund beträgt, so ist der entsprechende Reibungscoefficient $\varphi = {}^{91}/_{260} = {}^{7}/_{20} = 0{,}35$. 2) Um einen 500 Pfund schweren Schlitten auf einer horizontalen und sehr glatten Schneebahn fortzuziehen, ist bei dem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}04$, die nöthige Kraft $F = 0{,}04 \,.\, 500 = 20$ Pfund. 3) Wenn der Reibungscoefficient einer auf dem Straßenpflaster fortgezogenen Schleife 0,45 und die Belastung dieser Schleife 500 Pfund beträgt, so ist die erforderliche Arbeit, um diese Schleife 480 Fuß fortzuziehen, $\varphi N s = 0{,}45 \,.\, 500 \,.\, 480 = 108000$ Fußpfund.

Der Reibungswinkel und Reibungskegel. Liegt ein Körper AC, Fig. 253, auf einer schiefen Ebene FH, deren Neigungswinkel $FHR = \alpha$ ist, so läßt sich dessen Gewicht G in den Normaldruck $N = G \cos. \alpha$ und in die Parallelkraft $S = G \sin. \alpha$ zerlegen. Aus der ersteren Kraft entspringt nun die Reibung $F = \varphi G \cos. \alpha$, welche jeder Bewegung auf der Ebene entgegenwirkt, weshalb die Kraft zum Hinaufschieben auf der Ebene: §. 172

Fig. 253.



$$P = F + S = \varphi G \cos. \alpha + G \sin. \alpha$$

$= (\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)\, G$, dagegen die Kraft zum Hinabschieben:

$$P_1 = F - S = (\varphi \cos. \alpha - \sin. \alpha)\, G$$

ausfällt. Die letztere Kraft fällt Null aus, d. h. der Körper erhält sich durch seine Reibung auf der schiefen Ebene, wenn $\sin. \alpha = \varphi \cos. \alpha$, d. i. wenn $tang. \alpha = \varphi$ ist. So lange die schiefe Ebene einen Neigungswinkel α hat, dessen Tangente kleiner als φ ist, so lange bleibt der Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe; ist aber die Tangente des Neigungswinkels wenig größer als φ, so gleitet der Körper auf der schiefen Ebene herab. Man nennt diesen Winkel, d. i. denjenigen, dessen Tangente dem Reibungscoefficienten gleich ist, Reibungs-, auch Ruhewinkel (franz. angle du frottement; engl. angle of friction, angle of resistance). Es ergiebt sich hiernach durch Beobachtung des Reibungswinkels ϱ, der Reibungscoefficient (für die Reibung der Ruhe), wenn man setzt: $\varphi = tang. \varrho$.

In Folge der Reibung nimmt die Oberfläche FH, Fig. 254, eines Körpers nicht nur den Normaldruck N eines anderen Körpers AB, sondern auch dessen schiefen Druck P auf, wenn nur die Abweichung $NBP = \alpha$ der Richtung dieses Druckes von der Normale BN nicht den Reibungswinkel überschreitet; denn da die Kraft P den Normaldruck:

Fig. 254.

$$\overline{BN} = P \cos. \alpha$$

und den Seiten- oder Tangentialdruck:

$$\overline{BS} = S = P \sin. \alpha$$

giebt und aus dem Normaldrucke $P \cos. \alpha$ die jeder Bewegung in der Ebene FH entgegenwirkende Reibung $\varphi P \cos. \alpha$ entsteht, so wird S eine Bewegung nicht hervorbringen können, also im Gleichgewicht bleiben, so lange

$$\varphi P \cos. \alpha > P \sin. \alpha \text{ oder } \varphi \cos. \alpha > \sin. \alpha, \text{ d. i.}$$
$$\tang. \alpha < \varphi \text{ oder } \alpha < \varrho$$

ist. Dreht man den Ruhewinkel $CBD = \varrho$ um die Normale CB, so beschreibt er einen Kegel, den man **Reibungskegel** (franz. cone de fr.; engl. cone of resistance) nennen kann. Der Reibungskegel umschließt alle diejenigen Kraftrichtungen, bei welchen eine vollständige Aufnahme des schiefen Druckes stattfindet.

Beispiel. Um einen gefüllten und 200 Pfund schweren Kübel auf einer unter 50 Grad ansteigenden Holzbahn hinaufzuziehen, ist bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}48$ die nöthige Kraft:

$$P = (\varphi \cos. \alpha + \sin. \alpha)\, G = (0{,}48 \cos. 50^0 + \sin. 50^0) \,.\, 200$$
$$= (0{,}308 + 0{,}766) \,.\, 200 = 215 \text{ Pfund};$$

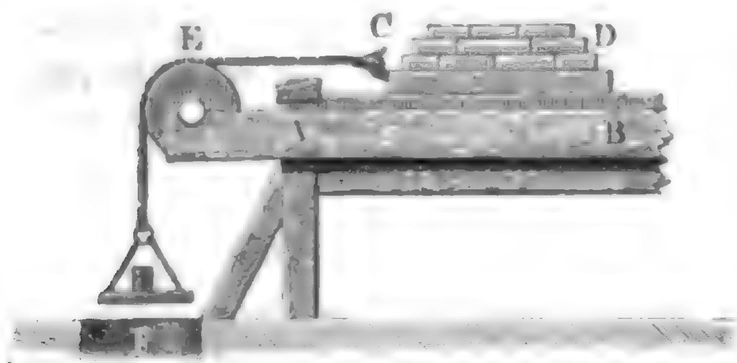
um ihn hinunterzulassen, oder sein Hinuntergehen zu verhindern, ist dagegen die erforderliche Kraft:

$$P = (\varphi \cos. \alpha - \sin. \alpha)\, G = -(\sin. 50^0 - 0{,}48 \,.\, \cos. 50^0) \,.\, 200$$
$$P_1 = -(0{,}766 - 0{,}308) \,.\, 200 = -91{,}5 \text{ Pfund}.$$

173 **Reibungsversuche.** Versuche über die Reibung sind von Vielen angestellt worden; am ausgedehntesten und im größten Maßstabe ausgeführt sind aber die Versuche von Coulomb und Morin. Beide wendeten zur Erforschung der Reibungscoefficienten für die gleitende Bewegung einen auf einer horizontalen Bahn fortgleitenden Schlitten an, der durch ein über eine feste Rolle weggelegtes und durch Gewichte angespanntes Seil fortgezogen wurde, wie in Fig. 255, wo AB die Bahn, CD den Schlitten, E die Rolle und F das sinkende Gewicht vorstellt, zu ersehen ist. Um die Reibungscoefficienten für verschiedene Materien zu erhalten, wurden nicht nur die Schlittenläufe, sondern die die Unterlage bildenden Balken mit möglichst abgeglätteten Schienen aus den zu untersuchenden Substanzen, wie Holz, Eisen u. s. w. bekleidet.

Die Coefficienten für die Reibung der Ruhe ergaben sich aus dem Gewichte, welches nöthig war, um den Schlitten aus der Ruhe in Bewegung zu setzen; und die Coefficienten für die Reibung der Bewegung ließen sich mit Hülfe der Zeit t berechnen, welche der Schlitten brauchte, um einen gewissen Weg s zu durchlaufen. Ist G das Gewicht des Schlittens und P das Gewicht zum Fortziehen desselben, so hat man die Reibung $= \varphi G$, die bewegende Kraft $= P - \varphi G$ und die Masse $M = \frac{P + G}{g}$, es folgt daher nach §. 68 die Acceleration der entstehenden gleichförmig beschleunigten Bewegung:

Fig. 255.



$$p = \frac{P - \varphi G}{P + G} g,$$

und, durch Umkehrung, der Reibungscoefficient:

$$\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P + G}{G} \cdot \frac{p}{g}.$$

Es ist aber noch $s = \frac{1}{2} p t^2$ (§. 11), daher $p = \frac{2 s}{t^2}$ und

$$\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P + G}{G} \cdot \frac{2 s}{g t^2}.$$

Läßt man den Schlitten von einer schiefen Ebene herabgleiten, so ist die bewegende Kraft $= G (sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)$, und die beschleunigte Masse $= \frac{G}{g}$, daher die Beschleunigung

$$p = \frac{2 s}{t^2} = \frac{G (sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)}{g} = g (sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha),$$

oder: $\frac{2 s}{g t^2} = sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha$, und daher der Coefficient der gleitenden Reibung

$$\varphi = tang. \alpha - \frac{2 s}{g t^2 \cos. \alpha}.$$

Bezeichnet h die Höhe, l die Länge und a die Basis der geneigten Ebene, so hat man auch

$$\varphi = \frac{h}{a} - \frac{2 s l}{g a t^2 \cos. \alpha}.$$

Zur Ausmittelung der Reibungscoefficienten für die Zapfenreibung wurde eine feste Rolle $A C B$, Fig. 256 (a. f. S.), mit einem umgelegten und durch

Gewichte P und Q angespannten Seile angewendet. Aus der Summe $P + Q$ der Gewichte ergab sich der Druck R, und aus der Differenz $P - Q$ die Kraft am Umfang der Rolle, welche der Reibung $F = \varphi (P + Q)$ am Umfang des Zapfens das Gleichgewicht hält; ist nun $CA = a$ der Rollenhalbmesser und $CD = r$ der Zapfenhalbmesser, so hat man wegen der Gleichheit der statischen Momente:

$$(P - Q)\, a = Fr = \varphi\, (P + Q)\, r,$$

und daher für die Reibung der Ruhe:

$$\varphi = \frac{P - Q}{P + Q} \cdot \frac{a}{r},$$

dagegen für die der Bewegung, wenn das Gewicht P in der Zeit t um s sinkt und Q eben so viel steigt:

$$\varphi = \left(\frac{P - Q}{P + Q} - \frac{2s}{gt^2}\right) \frac{a}{r}.$$

Zu den neuesten Versuchen über die Zapfenreibung hat der Ingenieur Hirn den in Fig. 257 abgebildeten Apparat, welchen er eine Reibungswage

Fig. 256.

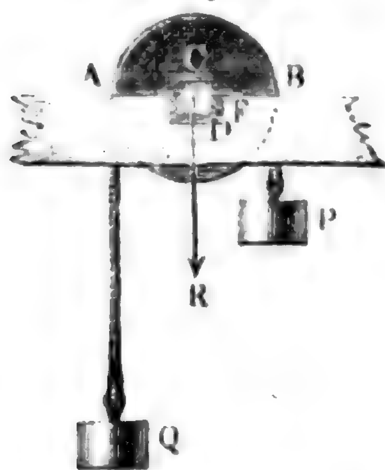
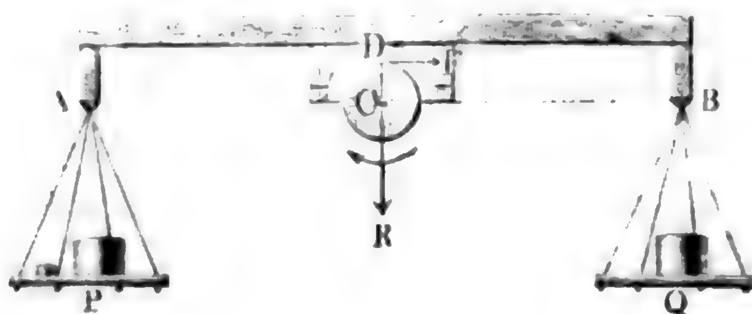


Fig. 257.



(balance de frottement) nennt, angewendet. Es ist hier C der durch irgend eine Maschine, z. B. durch ein Wasserrad, in stetige Umdrehung zu setzende Zapfen, D das Zapfenlager und ADB ein gleicharmiger Hebel, welcher mittels der Gewichte P und Q dieses Lager auf den Zapfen aufdrückt. Der Zapfendruck $R = P + Q$ erzeugt die Reibung

$$F = \varphi R = \varphi\, (P + Q)$$

zwischen dem Zapfen und seinem Lager. Mit dieser Kraft sucht der in der Richtung des Pfeiles umlaufende Zapfen das Lager sammt dem mit ihm fest verbundenen Hebel ADB umzudrehen, und es ist daher, um denselben in horizontaler Lage zu erhalten, auf der einen Seite A desselben das Gewicht P so viel größer zu nehmen, als das Gewicht Q auf der anderen Seite, bis $P - Q$ der Reibung F das Gleichgewicht hält. Nun wirkt aber die Reibung F an dem dem Zapfenhalbmesser gleichen Hebelarme $CD = r$, und die Gewichtsdifferenz $P - Q$ an dem Arme $CA = a$, welche dem Horizontalabstande der Axe C des Zapfens von der Verticalen durch den Aufhängepunkt A gleich ist; daher hat man:

$$F r = \varphi R r = \varphi (P + Q) r = (P - Q) a.$$

und den gesuchten Reibungscoefficienten wieder

$$\varphi = \frac{P - Q}{P + Q} \cdot \frac{a}{r}.$$

Anmerkung. Vor Coulomb hatten sich schon Amontons, Camus, Bülfinger, Muschenbroek, Fergusen, Vince u. A. mit der Reibung beschäftigt und Versuche über die Reibung angestellt. Die Ergebnisse aller dieser Untersuchungen haben jedoch für die Praxis wenig Werth, weil sie in zu kleinem Maßstabe angestellt worden sind. Denselben Mangel haben selbst noch die Versuche von Ximenes, welche mit denen von Coulomb fast gleichzeitig angestellt wurden. Die Ergebnisse des Ximenes findet man in dem Werke „Teoria e Pratica delle resistenze de' solidi ne' loro attriti, Pisa 1782". Die Versuche Coulomb's sind ausführlich beschrieben in dem Werke: „Théorie des machines simples etc. par Coulomb. Nouv. édit. 1821". Einen Auszug hiervon findet man in der Preisschrift von Metternich „vom Widerstande der Reibung, Frankfurt und Mainz 1789". Die neueren Versuche über die Reibung wurden von Rennie und Morin angestellt. Rennie wendete bei seinen Versuchen theils einen Schlitten auf horizontaler Bahn, theils auch eine schiefe Ebene an, von welcher er die Körper herabgleiten ließ und wobei er aus dem Reibungswinkel auf die Größe der Reibung schloß. Die Versuche Rennie's erstrecken sich auf mannigfaltige in der Technik vorkommende Stoffe, als Eis, Tuch, Leder, Holz, Steine und Metalle; sie liefern auch wichtige Ergebnisse über die Abnutzung der Körper, allein der Apparat und die Art der Ausführung dieser Versuche lassen eine hinreichende Sicherheit, wie sie zumal die Versuche Morin's erreicht zu haben scheinen, nicht erwarten. Eine deutsche Bearbeitung der Rennie'schen Versuche liefert der 17. Band (1832) der Wiener Jahrbücher des K. K. polytechnischen Institutes, auch der 34. Band (1829) von Dingler's polytechnischem Journal. Die ausgedehntesten und einen hohen Grad von Sicherheit versprechenden Versuche sind von Morin zur Ausführung gebracht worden, obgleich nicht abgeleugnet werden kann, daß sie einige Zweifel und Unsicherheiten, und noch dies und jenes zu wünschen übrig lassen. Es ist hier nicht der Ort, die Methoden und Apparate bei diesen Versuchen zu beschreiben, wir können hier nur auf Morin's Schriften: „Nouvelles Expériences sur le frottement" u. s. w. verweisen. Eine vortreffliche Bearbeitung des Artikels „Reibung" und eine ziemlich ausführliche Beschreibung aller Versuche über die Reibung, namentlich auch der Morin'schen, giebt Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 16. und 17. Jahrgang, Berlin 1837 und 1838. Neuere Versuche über die mittelbare Reibung, namentlich mit Berücksichtigung der verschiedenen Schmiermittel, von M. G. Ad. Hirn, sind beschrieben im Bulletin de la société industrielle de Mulhouse, No. 128 und 129, 1855, unter dem Titel: „Etudes sur les principaux phénomènes que présentent les frottements médiats etc."; im Auszuge: „polytechnisches Centralblatt, 1855, Lieferung 10". Die neuesten Versuche über die Reibung von Bochet sind unter der Ueberschrift: „Nouv. Recherches expérimentales sur le frottement de glissement, par M. Bochet" in den Annales des Mines, Cinq. Série, Tome XIX, Paris 1861, beschrieben. Ueber die Versuche mit Waltjen's Reibungswage giebt Herr Prof. Rühlmann im polytechnischen Centralblatt 1861, Heft 10 einige Nachrichten.

Reibungstafeln. Folgende Tabellen enthalten eine gedrängte Zusammenstellung der im Praktischen vorzüglich brauchbaren Coefficienten der gleitenden Reibung. §. 17.

Tafel I.

Reibungscoefficienten der Ruhe.

Namen der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen und Natur der Schmieren.							
		Trocken.	Mit Wasser benetzt.	Mit Olivenöl.	Schweineschmalz.	Talg.	Trockene Seife.	Polirt und fettig.	Fettig und benetzt.
Holz auf Holz . . .	kleinster Werth	0,30	0,65	—	—	0,14	0,22	0,30	
	mittlerer „	0,50	0,68	—	0,21	0,19	0,36	0,35	
	größter „	0,70	0,71	—	—	0,25	0,44	0,40	
Metall auf Metall	kleinster Werth	0,15	—	0,11					
	mittlerer „	0,18	—	0,12	0,10	0,11	—	0,15	
	größter „	0,24	—	0,16					
Holz auf Metall		0,60	0,65	0,10	0,12	0,12	—	0,10	
Hanf in Seilen, Zöpfen oder Gurten auf Holz . . .	kleinster Werth	0,50							
	mittlerer „	0,63	0,87						
	größter „	0,80							
Dickes Sohlenleder zu Liderungen auf Holz od. Gußeisen	hochkantig . . .	0,43	0,62	0,12					
	flach	0,62	0,80	0,13	—	—	—	—	0,27
Schwarze Lederriemen über Trommeln . . .	von Holz . .	0,47							
	von Metall .	0,54	—	—	—	—	—	0,28	0,38
Steine oder Ziegel auf Steinen oder Ziegeln, glatt bearbeitet	kleinster Werth	0,67							
	größter „	0,75							
Steine auf Schmiedeeisen	kleinster Werth	0,42							
	größter „	0,49							
Hirnholz auf Steinen		0,64							

Tafel II.

Reibungscoefficienten der Bewegung.

Namen der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen und Art der Schmieren. Trocken.	Mit Wasser.	Olivenöl.	Schweineschmalz.	Talg.	Schweinefett u. Graphit.	Reine Wagenschmiere.	Trockene Seife.	Fettig.
Holz auf Holz	kleinster Werth	0,20	—	—	0,06	0,06	—	—	0,14	0,08
	mittlerer „	0,36	0,25	—	0,07	0,07	—	—	0,15	0,12
	größter „	0,48	—	—	0,07	0,08	—	—	0,16	0,15
Metall auf Metall	kleinster Werth	0,15	—	0,06	0,07	0,07	0,06	0,12	—	0,11
	mittlerer „	0,18	0,31	0,07	0,09	0,09	0,08	0,15	0,20	0,13
	größter „	0,24	—	0,08	0,11	0,11	0,09	0,17	—	0,17
Holz auf Metall	kleinster Werth	0,20	—	0,05	0,07	0,06	—	—	—	0,10
	mittlerer „	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08	0,08	0,10	0,20	0,14
	größter „	0,62	—	0,08	0,08	0,10			—	0,16
Hanfseile, Zöpfe u. s. w.	auf Holz ..	0,45	0,33							
	auf Eisen .	—	—	0,15	—	0,19				
Sohlenleder, flach auf Holz oder Metall	roh	0,54	0,36	0,16	—	0,20				
	geklopft ...	0,30	—							
	fettig	—	0,25							
Desgl. hochkantig, für Kolbenliderung	trocken ...	0,34	0,31	0,14	—	0,14				
	fettig	—	0,24							

Anmerkung. Vollständigere Tabellen der Reibungscoefficienten enthält der „Ingenieur", Seite 403 u. s. w. Die Reibungscoefficienten lockerer Massen u. s. w. werden im zweiten Theile, bei der Theorie des Erddruckes, mitgetheilt.

§. 175 **Die neuesten Reibungsversuche.** Durch Bochet's Versuche über die gleitende Reibung erhalten die im Vorstehenden enthaltenen Ergebnisse älterer Versuche von Coulomb und Morin noch einige wesentliche Ergänzungen. Diese wurden auf einer söhligen Eisenbahnstrecke mit Eisenbahnwagen von 6 bis 10 Tonnen Gewicht angestellt, welche entweder mittels ihrer festgekeilten Räder, oder mittels besonderer Schuhe (patins) auf der Schienenbahn fortglitten. Diese Schuhe waren vor, hinter und zwischen den Rädern an dem Wagengestelle befestigt und bei verschiedenen Versuchsreihen mit verschiedenen Sohlen von Holz, Leder, Eisen u. s. w. bekleidet, wobei der Druck pro Quadratcentimeter nach Belieben auf 2, 4, 6, 10 und 15 Kilogramm gebracht werden konnte. Die Bewegung dieses zu einem Schlitten umgeschaffenen Vehikels erfolgte durch einen vorgespannten Dampfwagen, und ein zwischen beiden eingeschaltetes Federdynamometer gab mittels eines Zeichnenapparates die der gleitenden Reibung des Schlittens gleichzusetzende Zugkraft an. Um den Widerstand der Luft so viel wie möglich zu beseitigen, gab man dem Wagen, welcher dem Schlitten voranslief, einen Querschnitt, welcher den des letzteren noch übertraf.

Durch diese Versuche wird die Richtigkeit der Formel $F = \varphi N$, wonach die Reibung F dem Druck proportional ist, von Neuem bestätigt; was aber den Reibungscoefficienten betrifft, so ist derselbe nicht allein von der Art und dem Zustande der Reibungsflächen, sondern auch von anderen Verhältnissen, namentlich auch von der Geschwindigkeit des Gleitens und nächstdem von dem specifischen Drucke, d. i. dem Drucke pro Flächeneinheit, abhängig. Herr Bochet setzt:

$$\varphi = \frac{\varkappa - \gamma}{1 + \alpha v} + \gamma,$$

wobei v die Geschwindigkeit der Bewegung, $\varkappa$ den Werth von φ für eine unendlich langsame und dagegen γ den Werth von φ für eine sehr schnelle Bewegung bezeichnet. Hiernach nimmt also der Reibungscoefficient mit dem Wachsen der Geschwindigkeit allmälig von $\varkappa$ auf γ ab. Der Coefficient α ist im Mittel $= 0{,}3$ zu setzen, wenn man v in Meter ausdrückt, dagegen $= 0{,}094$, wenn man v in Fußen giebt. Man kann hiernach nur bei Geschwindigkeiten von 0 bis höchstens 1 Fuß den Reibungscoefficienten bei übrigens gleichen Verhältnissen als constant annehmen. Die Coefficienten $\varkappa$ und γ sind verschieden bei verschiedenen Stoffen, und abhängig von dem Grade der Glätte der Reibungsflächen, von der Schmiere, von dem specifischen Drucke u. s. w.

Den größten Werth hat der Reibungscoefficient $\varkappa$ beim Gleiten von Holz, zumal weichem, sowie von Leder und Guttapercha auf trockenen und ungeschmierten Eisenschienen. Hier ist $\varkappa = 0{,}40$ bis $0{,}70$; im Mittel für weiches Holz, $\varkappa = 0{,}60$ und für hartes, $\varkappa = 0{,}55$.

Für die Reibung von Eisen auf Eisen ist $\varkappa$ ebenfalls sehr verschieden ausgefallen, sind die Reibungsflächen nicht polirt, so hat man: $\varkappa = 0{,}25$ bis 0,60, dagegen bei polirten Reibungsflächen: $\varkappa = 0{,}12$ bis 0,40. Die Reibung von Eisen auf Eisen wird durch das Benetzen mit Wasser nicht vermindert, dagegen fällt die Reibung von Holz, Leder und Guttapercha auf nassen Eisenschienen beträchtlich kleiner aus als auf trockenen Eisenschienen. Bei eingeölten Flächen sinkt $\varkappa$ bis auf 0,05 bis 0,20.

Der Coefficient γ ist stets kleiner als $\varkappa$; bei großen Geschwindigkeiten, großer Glätte der Flächen, gehörig angewendeter Schmiere und mäßigem specifischen Drucke nähert sich für alle Stoffe γ einem und demselben Werthe.

Die Reibung der Ruhe ist nur in den Fällen größer und zwar doppelt so groß, als die der Bewegung, wenn Holz oder Leder auf benetzten oder eingeschmierten Eisenschienen gleitet.

Nach diesen Versuchen ist:

1) für trockenes weiches Holz, bei mindestens 10 Kilogramm Druck pro Quadratcentimeter, oder 137 Pfund pro Quadratzoll:

$$\varphi = \frac{0{,}30}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}30;$$

2) für trockenes hartes Holz, bei demselben Drucke:

$$\varphi = \frac{0{,}30}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}25;$$

3) für halbpolirtes Eisen, trocken oder naß, bei mehr als 300 Kilogramm Druck pro Quadratcentimeter oder 4103 Pfund pro Quadratzoll.

$$\varphi = \frac{0{,}15}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}15;$$

4) für dasselbe, entweder trocken unter dem Drucke von wenigstens 100 Kilogramm pro Quadratcentimeter, oder polirt und geschmiert, bei einem specifischen Drucke von mindestens 20 Kilogramm, so wie für nicht harziges Holz beim Schmieren mit reinem Wasser, unter demselben Drucke:

$$\varphi = \frac{0{,}175}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}075;$$

5) für Holz mit fettigem Wasser oder Fett geschmiert, bei gehöriger Politur und unter dem Drucke von mindestens 20 Kilogramm pro Quadratcentimeter (274 Pfund pro Quadratzoll):

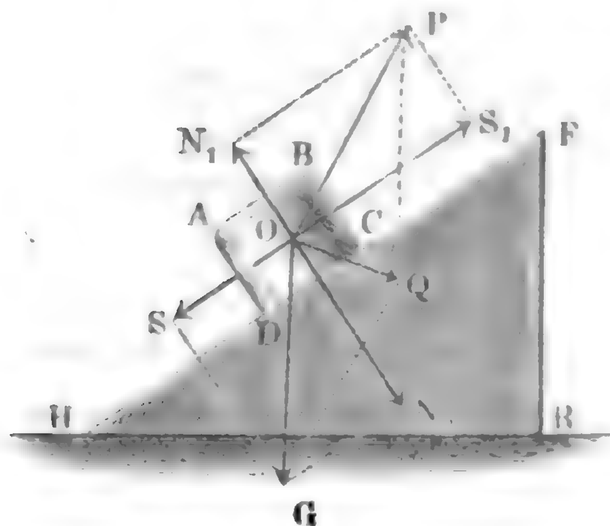
$$\varphi = \frac{0{,}10}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}06.$$

Ist v in Fußen gegeben, so muß man im Nenner statt $0{,}3\,v$, $0{,}094\,v$ setzen.

Anmerkung. Es ist sehr zu wünschen, daß diese in sehr großem Maßstabe ausgeführten Versuche, welche zum größten Theil von dem seither Bekannten ganz abweichende Resultate gegeben haben, noch von Anderen wiederholt werden.

§. 176 **Schiefe Ebene.** Die Theorie der gleitenden Reibung findet ihre vorzüglichste Anwendung bei der Untersuchung des Gleichgewichtes von einem Körper AC auf der schiefen Ebene FH, Fig. 258. Ist, in Uebereinstimmung mit §. 146, $FHR = \alpha$ der Neigungswinkel der schiefen Ebene, und $POS_1 = \beta$, der Winkel, welchen die Kraft P mit der schiefen Ebene einschließt, so hat man die aus dem Gewichte G des Körpers entspringende Normalkraft

Fig. 258.



$$N_0 = G\ cos.\ \alpha,$$

dagegen die Kraft zum Herabgleiten $= S = G\ sin.\ \alpha$, ferner die Kraft N_1, mit welcher P den Körper von der Ebene abzuziehen sucht, $= P sin.\ \beta$, und die Kraft S_1, mit welcher sie den Körper auf der Ebene hinaufzieht, $= P\ cos.\ \beta$. Der übrig bleibende Normaldruck ist:

$$N = N_0 - N_1 = G\ cos.\ \alpha - P\ sin.\ \beta,$$

folglich die Reibung:

$$F = \varphi\,(G\ cos.\ \alpha - P\ sin.\ \beta).$$

Kommt es darauf an, die Kraft P zum Hinaufziehen des Körpers auf der schiefen Ebene zu finden, so ist die Reibung zu überwinden, es muß also sein:

$$S_1 = S + F, \text{ d. i. } P\, cos.\ \beta = G\, sin.\ \alpha + \varphi\,(G\, cos.\ \alpha - P\, sin.\ \beta).$$

Soll aber die Kraft bestimmt werden, welche den Körper am Herabgleiten verhindert, so kommt die Reibung der Kraft zu Hülfe, es ist also:

$$S_1 + F = S, \text{ d. i. } P\, cos.\ \beta + \varphi\,(G\, cos.\ \alpha - P\, sin.\ \beta) = G\, sin.\ \alpha.$$

Hiernach bestimmt sich die Kraft für den ersten Fall:

$$P = \frac{sin.\ \alpha + \varphi\ cos.\ \alpha}{cos\ \beta + \varphi\ sin.\ \beta} \cdot G, \text{ und für den zweiten:}$$

$$P = \frac{sin.\ \alpha - \varphi\ cos.\ \alpha}{cos.\ \beta - \varphi\ sin.\ \beta} \cdot G.$$

Führt man den Reibungswinkel ϱ ein, indem man

$$\varphi = tang.\ \varrho = \frac{sin.\ \varrho}{cos.\ \varrho} \text{ setzt, so erhält man:}$$

$$P = \frac{sin.\ \alpha\ .\ cos.\ \varrho \pm cos.\ \alpha\ .\ sin.\ \varrho}{cos.\ \beta\ .\ cos.\ \varrho \pm sin.\ \beta\ .\ sin.\ \varrho} \cdot G,$$

oder, nach bekannten Sätzen der Trigonometrie:

$$P = \frac{sin.(\alpha \pm \varrho)}{cos.(\beta \mp \varrho)} \cdot G;$$

und es gelten die oberen Zeichen, wenn es darauf ankommt, Bewegung hervorzubringen, dagegen die unteren, wenn Bewegung zu verhindern ist.

So lange $P > \frac{sin.(\alpha - \varrho)}{cos.(\beta + \varrho)} G$ und

$< \frac{sin.(\alpha + \varrho)}{cos.(\beta - \varrho)}$ ist,

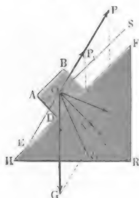
kann natürlich der Körper weder auf- noch abwärts gleiten.

Ist $\alpha < \varrho$, so erfordert das Herabschieben die Kraft:

$$P = \frac{G\, sin.(\varrho - \alpha)}{cos.(\varrho + \beta)}.$$

Die letzte Formel findet man auch durch eine einfache Anwendung des Kräfteparallelogrammes $OPQG$, Fig. 259. Da ein Körper noch diejenige Kraft eines anderen Körpers aufnimmt, welche um den Reibungswinkel ϱ von der Normale einer Oberfläche abweicht (§. 172), so findet in dem vorliegenden Falle Gleichgewicht statt, wenn die Mittelkraft $\overline{OQ} = Q$ aus den Kräften P und G mit der Normale ON den Winkel $NOQ = \varrho$ einschließt. Setzt man nun in der allgemeinen Formel:

Fig. 259.



$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\,GOQ}{sin.\,POQ},$$

$GOQ = GON + NOQ = \alpha + \varrho$, und

$POQ = POS + SOQ = \beta + 90^0 - \varrho$, so erhält man:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin.(\alpha + \varrho)}{sin.(\beta - \varrho + 90^0)} = \frac{sin.(\alpha + \varrho)}{cos.(\beta - \varrho)}.$$

Wenn die Kraft P_1 das Herabgleiten von der schiefen Ebene verhindern soll, so fällt die Mittelkraft Q_1 auf die untere Seite der Normale ON, und es ist der Reibungswinkel ϱ negativ in Rechnung zu bringen, wonach dann folgt:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin.(\alpha - \varrho)}{cos.(\beta + \varrho)},$$

ganz in Uebereinstimmung mit dem Obigen.

Ruht der Körper auf einer Horizontalebene, so ist $\alpha = 0$, daher die Kraft zum Fortschieben:

$$P = \frac{\varphi G}{cos. \beta + \varphi sin. \beta} = \frac{G sin. \varrho}{cos. (\beta - \varrho)}.$$

Wirkt die Kraft parallel zur schiefen Ebene, d. h. in der Richtung ihrer Falllinie, so hat man $\beta = 0$, und daher:

$$P = (sin. \alpha \pm \varphi cos. \alpha) G = \frac{sin. (\alpha \pm \varrho)}{cos. \varrho} \cdot G \text{ (vergl. §. 172).}$$

Wirkt endlich die Kraft horizontal, so hat man:

$\beta = - \alpha$; $cos. \beta = cos. \alpha$ und $sin. \beta = - sin. \alpha$, daher:

$$P = \frac{sin. \alpha \pm \varphi cos. \alpha}{cos. \alpha \mp \varphi sin. \alpha} \cdot G = \frac{tang. \alpha \pm \varphi}{1 \mp \varphi tang. \alpha} \cdot G, \text{ d. i.}$$

$P = tang. (\alpha \pm \varrho) G$, wie auch die Auflösung des Parallelogrammes $OPQG$ unmittelbar giebt.

Uebrigens fällt die Kraft zum Hinaufschieben am kleinsten aus, wenn der Nenner $cos. (\beta - \varrho)$ am größten, nämlich $= 1$, also $\beta - \varrho = 0$, d. i. $\beta = \varrho$ ist. Wenn also die Kraftrichtung um den Reibungswinkel von der schiefen Ebene abweicht, so ist die Kraft selbst am kleinsten, und zwar:

$$P = sin. (\alpha + \varrho) . G.$$

Beispiel. Welchen Axendruck hat die Spreize AE, Fig. 260, auszuhalten, wenn dieselbe einen Felsblock (eine Wand) $ABCD$ vom Gewichte $G = 5000$ Pfund von dem Herabgleiten von einer schiefen Ebene CD (dem Liegenden) abhalten soll, vorausgesetzt, daß die Neigung der Spreize gegen den Horizont 35^0, die der schiefen Ebene CD aber 50^0 und der Reibungscoefficient $\varphi = 0,75$ beträgt? Es ist hier:

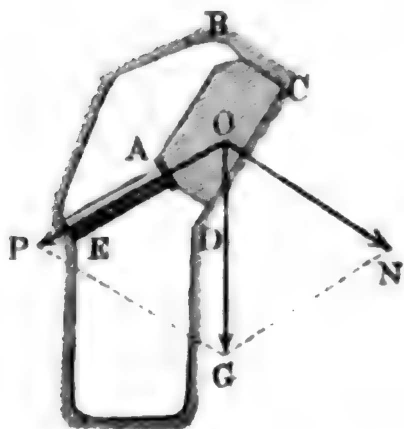
$$G = 5000, \alpha = 50^0, \beta = 35^0 - 50^0 = - 15^0 \text{ und } \varphi = 0,75,$$

daher giebt die Formel:

$$P = \frac{sin. \alpha - \varphi cos. \alpha}{cos. \beta - \varphi sin. \beta} . G = \frac{sin. 50^0 - 0,75 cos. 50^0}{cos. 15^0 + 0,75 sin. 15^0} \cdot 5000$$

$$= \frac{0,766 - 0,482}{0,966 + 0,194} \cdot 5000 = \frac{1420}{1,160} = 1224 \text{ Pfund.}$$

Fig. 260.



Wäre die Spreize horizontal, so hätte man $\beta = -50^0$, und $tang. \varrho = 0,75$, daher: $\varrho = 36^0 52'$, endlich:

$$P = G tang. (\alpha - \varrho)$$
$$= 5000 tang. (50^0 - 36^0 52')$$
$$= 5000 tang. 13^0 8'$$
$$= 5000 . 0,2333 = 1166 \text{ Pfund.}$$

Um dieselbe Wand durch eine horizontale Kraft auf dem Liegenden hinaufzuschieben, wäre unter übrigens gleichen Umständen die Kraft:

$$P = G tang. (\alpha + \varrho)$$
$$= 5000 tang. 86^0 52'$$
$$= 5000 . 18,2676 = 91338 \text{ Pfd.}$$

nöthig.

Der **Normaldruck**, welchen der Körper $A\,C$ auf der schiefen Ebene FH, §. 177 Fig. 261, ausübt, ist beim **Hinaufschieben**:

$$N = Q\,cos.\,\varrho = \frac{G\,sin.\,OPQ}{sin.\,POQ}\,cos.\,\varrho = \frac{G\,sin.(90^0 - \alpha - \beta)}{sin.(\beta + 90^0 - \varrho)}\,cos.\,\varrho$$

$$= \frac{G\,cos.(\alpha + \beta)\,cos.\,\varrho}{cos.(\beta - \varrho)},$$

und dagegen in den Fällen, wenn der Körper am **Herabgleiten** verhindert wird:

$$N_1 = Q_1\,cos.\,Q_1 O N_1 = Q_1\,cos.\,\varrho = \frac{G\,cos.(\alpha + \beta)\,cos.\,\varrho}{cos.(\beta + \varrho)}.$$

Ist die Richtung der Kraft parallel zur Falllinie der Ebene, so hat man $\beta = 0$, und $N = G\,cos.\,\alpha$; ist dagegen die Richtung derselben horizontal, so hat man $\beta = -\alpha$ und daher

$$N = \frac{G\,cos.\,\varrho}{cos.\,(\alpha \pm \varrho)} \text{ zu setzen.}$$

Fig. 261.

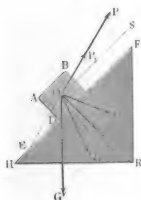
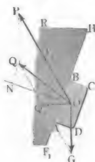


Fig. 262.

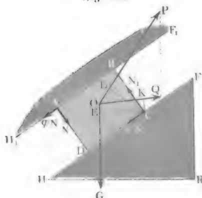


Der **Normaldruck** fällt = Null aus, wenn $cos.\,(\alpha + \beta) = 0$, also $\alpha + \beta = 90$ Grad ist, und wird negativ, wenn $\alpha + \beta > 90^0$, oder $\beta > 90 - \alpha$ wird. Im letzteren Falle ist natürlich die schiefe Ebene nicht unter, sondern, wie Fig. 262 darstellt, **über den Körper** zu legen. Es finden natürlich auch hier wieder die beiden extremen Fälle des Gleichgewichtes statt, wobei die Richtung der auf die schiefe Ebene FH übergehenden Mittelkraft Q oder Q_1 entweder auf der oberen oder auf der unteren Seite von der Normalen um den Reibungswinkel $NOQ = NOQ_1 = \varrho$ abweicht.

Bei den vorstehenden Entwickelungen der Formeln für das Gleichgewicht eines Körpers auf der schiefen Ebene ist noch vorauszusetzen, daß die Mittelkraft Q vollkommen vom Körper $A\,C$ auf die eine schiefe Ebene bildende

Stütze FHR übergehen könne; dies ist jedoch (nach §. 146) nur dann möglich, wenn die Richtung dieser Kraft die Auflagersfläche CD des Körpers AC selbst durchschneidet. Außerdem hat der Körper, wie z. B. AC, Fig. 263, in Folge der Kraft Q ein Bestreben zum Drehen oder Kippen um die äußerste Kante C, welches um so größer ausfällt, je größer der Abstand $CK = e$ dieser Kante von der Richtung OQ der Mittelkraft Q ist.

Fig. 263.



Bezeichnet a den Abstand CL der Kraftrichtung OP, und b den Abstand CE der verticalen Schwerlinie OG des Körpers von der äußersten Kante C desselben, so ist das Moment, mit welchem sich der Körper von links nach rechts um C zu drehen sucht:

$$Qe = Pa - Gb.$$

Wäre nun $Pa = Gb$, oder $\frac{P}{G} = \frac{b}{a}$, so ginge die Mittelkraft Q gerade durch C, wobei sie eben noch von der schiefen Ebene aufgenommen würde; und wäre $Pa < Gb$, so würde sich der Körper um C von rechts nach links zu drehen suchen, woran ihn aber die Undurchdringlichkeit seiner Masse verhindert.

Wenn dagegen $Pa > Gb$ ist, so muß der Körper noch eine zweite Unterstützung erhalten, z. B. noch von einer zweiten geneigten Ebene $F_1 H_1$ geleitet werden. Wenn diese zweite Ebene in A einen Druck N und die daraus erwachsende Reibung φN aufnimmt, also die geneigte Ebene $F_1 H_1$ mit den Gegenkräften $- N$ und $- \varphi N$ auf den Körper in A zurückwirkt, welche die Umdrehung des Körpers um C verhindern, so muß die Summe der Momente dieser Kräfte gleich sein dem Umdrehungsmomente von Q, also: $Nl + \varphi Nd = Qe = Pa - Gb$, oder

1) $N(l + \varphi d) = Pa - Gb$,

wobei l und d die Abstände CD und CB der Kante A von C in den Richtungen parallel und winkelrecht zur geneigten Ebene bezeichnen.

Ist überdies noch N_1 der Druck des Körpers auf die geneigte Ebene FH in C, so wie φN_1 die demselben entsprechende Reibung, so kann man setzen:

2) $P \cos. \beta = G \sin. \alpha + \varphi (N + N_1)$ und

3) $P \sin. \beta = G \cos. \alpha + N - N_1$.

Eliminirt man aus den letzten beiden Gleichungen N_1, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$P(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) = G(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) + 2\varphi N,$$

und wenn man hierein den Werth $N = \frac{Pa - Gb}{l + \varphi d}$ aus Gleichung (1) einsetzt, so folgt die Gleichung:

$$P(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) = G(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) + \frac{2\varphi(Pa - Gb)}{l + \varphi d},$$

oder:

$$P\left(\frac{l + \varphi d}{2}(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) - \varphi a\right)$$

$$= G\left(\frac{l + \varphi d}{2}(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) - \varphi b\right),$$

woraus sich endlich ergiebt:

$$P = \frac{(l + \varphi d)(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) - 2\varphi b}{(l + \varphi d)(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) - 2\varphi a} G$$

$$= \frac{(l + \varphi d)\sin.(\alpha + \varrho) - 2\varphi b \cos.\varrho}{(l + \varphi d)\cos.(\beta - \varrho) - 2\varphi a \cos.\varrho} \cdot G.$$

Soll $N =$ Null sein, so hat man $Pa = Gb$ und

$$\frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)} = \frac{b}{a},$$

daher, wie auch oben gefunden worden ist:

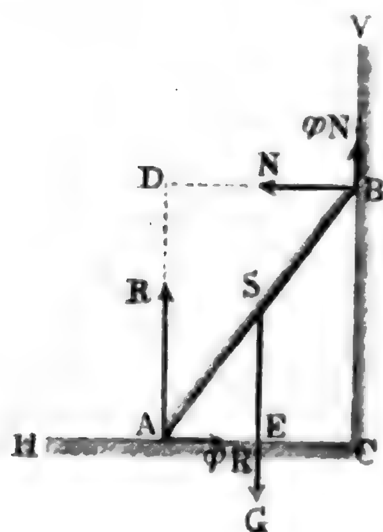
$$P = \frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)} G.$$

Zurückführung der Theorie des Gleichgewichtes unterstützter Körper auf die des Gleichgewichtes freier Körper. §. 178 Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes eines Körpers mit Berücksichtigung der Reibung gelangt man auch sicher zum Ziele, wenn man sich den Körper ganz frei denkt, und annimmt, daß jeder andere Körper, mit welchem er in Berührung ist, zwei Kräfte auf ihn ausübt, und zwar eine Kraft N, normal von der Berührungsfläche desselben ausgehend, und eine andere Kraft φN, der vorausgesetzten Bewegung des Berührungspunktes in dieser Fläche entgegengesetzt und der Reibung zwischen beiden Körpern entsprechend. Dadurch erhält man ein festes System von Kräften, dessen Gleichgewichtszustand nach den Regeln in §. 90 u. s. w. zu beurtheilen ist, wie im folgenden speciellen Falle gezeigt werden soll.

Eine prismatische Stange AB, Fig. 264 (a. f. S.), stützt sich unten auf einen horizontalen Boden CH und lehnt sich oben gegen eine verticale Wand CV; bei welcher Neigung $BAC = \alpha$ verliert dieselbe ihre Gleichgewichtslage? Hier können wir die Rückwirkung des Bodens auf den Körper durch eine Verticalkraft R und durch die horizontal wirkende Reibung φR, und dagegen die Rückwirkung der Wand durch eine Horizontalkraft N und durch eine von unten

nach oben wirkende Reibung φN ausdrücken. Ist folglich G das im Schwerpunkte S niederziehende Gewicht der Stange, so haben wir es mit einem Systeme von den Verticalkräften $G, R, \varphi N$ und einem solchen von den Horizontalkräften N und φR zu thun.

Fig. 264.



Der Gleichgewichtszustand unter diesen Kräften fordert nun, daß

1) $G = R + \varphi N$,
2) $\varphi R = N$ und
3) $G . \overline{AE} = N . \overline{AD} + \varphi N . \overline{AC}$ sei.

Nun ist aber der Hebelarm AE
$= AS \cos. \alpha = \frac{1}{2} AB \cos. \alpha$,
ferner der Hebelarm AD
$= AB \sin. \alpha$,
und der Hebelarm AC
$= AB \cos. \alpha$, daher ist die dritte Gleichung einfach:
$\frac{1}{2} G \cos. \alpha = N (\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)$ zu schreiben.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$G = R + \varphi^2 R = (1 + \varphi^2) R, \text{ also}$$

$$R = \frac{G}{1 + \varphi^2} \text{ und } N = \frac{\varphi G}{1 + \varphi^2}$$

und setzt man diesen Werth von N in die Gleichung (3) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{2} G \cos. \alpha = \frac{\varphi G}{1 + \varphi^2} (\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha), \text{ oder}$$

$$\frac{1 + \varphi^2}{2 \varphi} = \operatorname{tang}. \alpha + \varphi,$$

also für den gesuchten Neigungswinkel:

$$\operatorname{tang}. \alpha = \frac{1 + \varphi^2 - 2 \varphi^2}{2 \varphi} = \frac{1 - \varphi^2}{2 \varphi} = \frac{1 - \operatorname{tang}. \varrho^2}{2 \operatorname{tang}. \varrho}$$

$$= \frac{\cos. \varrho^2 - \sin. \varrho^2}{2 \sin. \varrho \cos. \varrho} = \frac{\cos. 2 \varrho}{\sin. 2 \varrho} = \operatorname{cotg}. 2 \varrho$$

$$= \operatorname{tang}. (90^0 - 2 \varrho); \text{ daher ist}$$

$$\angle BAC = \alpha = 90^0 - 2 \varrho, \text{ und } \angle ABC = \beta = 2 \varrho.$$

179 **Theorie des Keiles.** Auch bei dem Keile (s. §. 149) hat die Reibung einen großen Einfluß auf die Gleichgewichtsverhältnisse. Setzen wir voraus, daß der Querschnitt desselben ein gleichschenkliges Dreieck ABS, Fig. 265, mit der Schärfe $ASB = \alpha$ bilde, daß die Kraft P in der Mitte M des Keilrückens AB und winkelrecht gegen denselben wirke, und daß ebenso der Körper CHK

mit einer gewissen Kraft N rechtwinklig gegen die Keilfläche BS drücke, während der Keil mit der Fläche AS auf einer horizontalen Ebene aufruht.

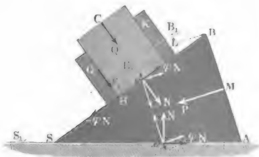


Fig. 265.

Uebrigens soll der Körper CHK von zwei Backen G und K umgeben sein, welche ihn nöthigen, sammt der Last Q beim Fortschieben des Keiles auf der Horizontalebene, in der gegen die Keilfläche BS rechtwinklig stehenden Richtung EC aufzusteigen.

Da die Richtung der Kraft P von den Keilflächen AS und BS gleichviel abweicht, so sind die Normaldrücke N, N gegen beide Flächen und folglich auch die aus denselben entspringenden Reibungen $\varphi N, \varphi N$ in denselben einander gleich, und es müssen daher auch die Kräfte $P, N, N, \varphi N$ und φN einander das Gleichgewicht halten. Zerlegt man die letzten vier Kräfte parallel und rechtwinklig zur Richtung der Kraft P in je zwei Seitenkräfte, so muß folglich auch die Summe derjenigen dieser Kräfte, welche mit P gleichgerichtet sind, mit P allein im Gleichgewichte sein. Nun weichen aber die Richtungen von N, N um $90 - \frac{\alpha}{2}$, und die von $\varphi N, \varphi N$ um $\frac{\alpha}{2}$ von der Richtung MS der Kraft P ab, daher sind die Componenten von N, N in der Richtung MS, $N\, sin. \frac{\alpha}{2}$ und $N\, sin. \frac{\alpha}{2}$, sowie die von φN und φN, $\varphi N\, cos. \frac{\alpha}{2}$ und $\varphi N\, cos. \frac{\alpha}{2}$, und es ist zu setzen:

$$P = 2 N sin. \frac{\alpha}{2} + 2 \varphi N cos. \frac{\alpha}{2} = 2 N \left(sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi\, cos. \frac{\alpha}{2} \right).$$

In Folge der Reibung φN zwischen der Keilfläche BS und der Grundfläche des Körpers CHK wird dieser Körper noch mit einer gleichen Gegenkraft $- \varphi N$ gegen den Leitbacken GH gedrückt, woraus eine Reibung $F_1 = \varphi_1 . \varphi N = \varphi \varphi_1 N$ entsteht, welche dem Aufschieben des Körpers CHK entgegenwirkt, und weshalb

$$N - F_1 = Q, \text{ oder } N(1 - \varphi \varphi_1) = Q, \text{ also}$$

$$N = \frac{Q}{1 - \varphi \varphi_1} \text{ zu setzen ist.}$$

Führt man nun diesen Ausdruck für N in die obigen Formeln ein, so erhält man die zum Aufheben der Last Q nöthige Kraft:

$$P = \frac{2\,Q}{1 - \varphi\,\varphi_1}\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\;cos.\frac{\alpha}{2}\right), \text{ annähernd}$$

$$= 2\,Q\,(1 + \varphi\,\varphi_1)\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\frac{\alpha}{2}\right)$$

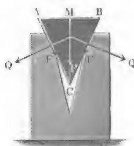
$$= 2\,Q\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,\varphi_1\,sin.\frac{\alpha}{2}\right),$$

oder wenn man den Coefficienten φ_1 der Reibung längs GH gleich dem Coefficienten φ der Reibung an den Seitenflächen AS und BS setzt:

$$P = \frac{2\,Q}{1 - \varphi^2}\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\frac{\alpha}{2}\right), \text{ annähernd}$$

$$= 2\,Q\left((1 + \varphi^2)\,sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 266.



Bei einem Keile ABC, Fig. 266, wie er zum Zerspalten und Zerdrücken der Körper gebraucht wird, ist die dem Normaldruck Q gegen die Seitenflächen AC und BC entsprechende Kraft auf den Rücken AB:

$$P = 2\,Q\left(sin.\frac{\alpha}{2} + \varphi\,cos.\frac{\alpha}{2}\right).$$

Beispiel. Es sei die Last des in Fig. 265 abgebildeten Keiles: $Q = 650$ Pfund, die Schärfe des Keiles: $\alpha = 25^0$, und der Reibungscoefficient: $\varphi = \varphi_1$; man sucht die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um die Last Q in ihrer Leitung um $\frac{1}{2}$ Fuß fortzubewegen.

Die Kraft ist:

$$P = \frac{2\,.\,650}{1 - (0{,}36)^2}\,(sin.\,12\tfrac{1}{2}{}^0 + 0{,}36\;cos.\,12\tfrac{1}{2}{}^0)$$

$$= \frac{1300}{1 - 0{,}1296}\,(0{,}2164 + 0{,}36\,.\,0{,}9763)$$

$$= \frac{1300}{0{,}8704}\,(0{,}2164 + 0{,}3515) = \frac{738{,}27}{0{,}8704} = 848{,}2 \text{ Pfund}.$$

Dem Lastwege $EE_1 = s_1 = \frac{1}{2}$ Fuß entspricht der Kraftweg:

$$BL = s = BB_1\,cos\,\frac{\alpha}{2} = \frac{E\,E_1}{sin.\,\alpha}\,cos.\,\frac{\alpha}{2} = \frac{s_1}{2\,sin.\frac{\alpha}{2}} = \frac{0{,}25}{sin.\,12\tfrac{1}{2}{}^0}$$

$$= \frac{0{,}25}{0{,}2164} = 1{,}155 \text{ Fuß},$$

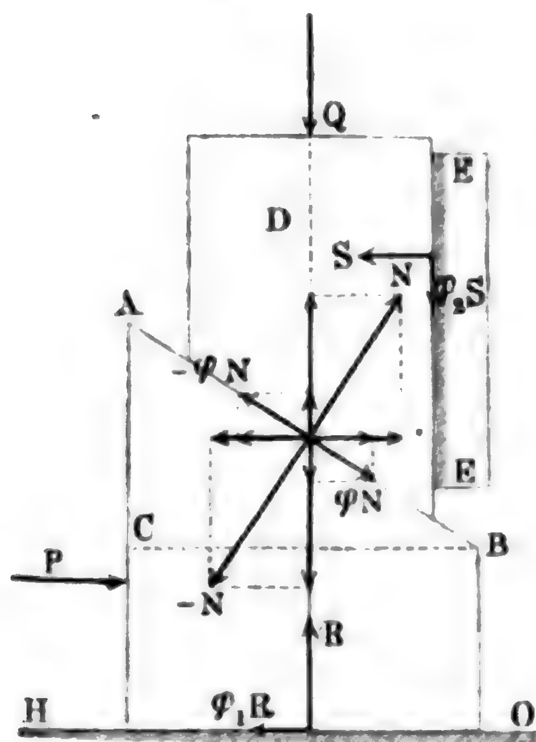
demnach ist die gesuchte mechanische Arbeit:

$$Ps = 848{,}2\;.\;1{,}155 = 979{,}6 \text{ Fußpfund}.$$

Ohne Rücksicht auf Reibung wäre $Ps = Qs_1 = \frac{1}{2}\,.\,650 = 325$ Fußpfund, es wird also in Folge der Reibung der Arbeitsaufwand beim Heben von Q_1 nahe verdreifacht.

Auf gleiche Weise läßt sich die Kraft P eines Keiles $A\,B\,C$, Fig. 267, bestimmen, durch welchen eine Last Q emporgehoben wird, während der Keil sich auf der horizontalen Ebene $H\,O$ fortschiebt. Nehmen wir an, daß der Normaldruck zwischen dem Keile $A\,B\,C$ und dem Blocke D, welcher durch die Last Q vertical abwärts gedrückt wird, $= N$ sei, daß ferner der Normaldruck des Keiles auf die Unterlage $H\,O$, $= R$ und der Normaldruck des Blockes auf die Seitenführung $E\,E$, $= S$ betrage. Dann muß P den Kräften R, $\varphi_1 R$, $- N$ und $- \varphi N$, und ebenso Q den Kräften S, $\varphi_2 S$, N und φN das Gleichgewicht halten. §. 180

Fig. 267.



Ist nun noch α der Neigungswinkel $A\,B\,C$ der Keilfläche $A\,B$ gegen den Horizont, so läßt sich N in die Verticalkraft $N \cos.\alpha$ und Horizontalkraft $N \sin \alpha$, und φN in die Verticalkraft $\varphi N \sin.\alpha$ und Horizontalkraft $\varphi N \cos.\alpha$ zerlegen, und daher setzen:

1) $P = \varphi_1 R + N \sin.\alpha + \varphi N \cos.\alpha$,

2) $R = N \cos.\alpha - \varphi N \sin.\alpha$,

3) $Q = N \cos.\alpha - \varphi N \sin.\alpha - \varphi_2 S$

sowie

4) $S = N \sin.\alpha + \varphi N \cos.\alpha$.

Aus den beiden ersten Gleichungen resultirt:

$$P = [(1 - \varphi\varphi_1) \sin.\alpha + (\varphi + \varphi_1) \cos.\alpha]\, N,$$

und aus den beiden letzteren:

$$Q = [(1 - \varphi\varphi_2) \cos.\alpha - (\varphi + \varphi_2) \sin.\alpha]\, N;$$

und es ergiebt sich durch Division dieser Formeln:

$$\frac{P}{Q} = \frac{(1 - \varphi\varphi_1) \sin.\alpha + (\varphi + \varphi_1) \cos.\alpha}{(1 - \varphi\varphi_2) \cos.\alpha - (\varphi + \varphi_2) \sin.\alpha}.$$

Wäre $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, so hätte man, da $\varphi = tang.\,\varrho$ und

$$\frac{2\varphi}{1 - \varphi_2} = tang.\,2\varrho \text{ ist,}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin.\alpha + \cos.\alpha\, tang.\,2\varrho}{\cos.\alpha - \sin.\alpha\, tang.\,2\varrho} = \frac{tang.\,\alpha + tang.\,2\varrho}{1 - tang\,\alpha\, tang\,2\varrho}$$

$$= tang.(\alpha + 2\varrho).$$

Sieht man von den Reibungen an den Unterstützungspunkten ab, so kann man φ_1 und φ_2 = Null setzen, und es folgt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}{cos.\,\alpha - \varphi\, sin.\,\alpha} = \frac{tang.\,\alpha + \varphi}{1 - \varphi\, tang.\,\alpha} = tang.\,(\alpha + \varrho).$$ (Vergl. §. 176.)

Wenn die Last Q rechtwinklig gegen die Keilfläche wirkt, so sind die Gleichungen (3) und (4) durch folgende zu ersetzen:

$$Q = N - \varphi_2\, S \text{ und}$$
$$S = \varphi\, N.$$

Es folgt dann $Q = (1 - \varphi\, \varphi_2)\, N$, daher umgekehrt:

$$N = \frac{Q}{1 - \varphi\, \varphi_2} \text{ und}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{(1 - \varphi\varphi_1)\, sin.\,\alpha + (\varphi + \varphi_1)\, cos.\,\alpha}{1 - \varphi\, \varphi_2}.$$

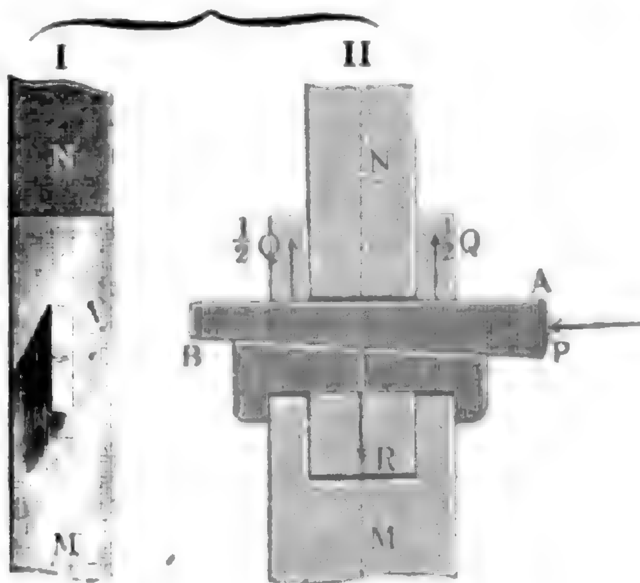
Wäre $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, so würde dann

$$\frac{P}{Q} = sin.\,\alpha + cos.\,\alpha\,.\,tang.\,2\,\varrho$$

ausfallen.

Die Formel $P = Q\, tang.\, (\alpha + 2\,\varrho)$ findet ihre Anwendung bei Beurtheilung der Befestigung zweier Körper M und N durch einen Keil $A\,B$. Fig. 268, I. und II. Aus der Kraft P gegen den Rücken des Keiles folgt die Spannung, mit welcher die beiden Körper gegen einander gezogen werden:

Fig. 268.



$$Q = P\, cotg.\, (\alpha + 2\,\varrho).$$

Dagegen ist die Kraft, welche auf den Fuß B des Keiles drücken muß, um den Keil zu lösen, d. i. in der Richtung $B\,A$ zurückzutreiben, weil hier α negativ ist:

$$P_1 = Q\, tang.\, (2\,\varrho - \alpha),$$

oder wenn man den letzten Werth für Q einsetzt:

$$P_1 = P\, \frac{tang.\, (2\,\varrho - \alpha)}{tang.\, (2\,\varrho + \alpha)}.$$

Damit der Keil nicht von selbst zurückgehe, muß natürlich $\alpha < 2\,\varrho$ sein.

§. 181 **Zapfenreibungscoefficienten.** Bei Zapfen ist nur die Reibung der Bewegung von Wichtigkeit, weshalb auch nur über diese Beobachtungsresultate vorliegen.

Tafel III.

Coefficienten der Zapfenreibung, nach Morin.

Angabe der sich reibenden Körper.	Zustand der Reibungsflächen und Gattung der Schmieren.							
	Trocken oder wenig fettig.	Fettig und mit Wasser benetzt.	Geschmiert und mit Wasser benetzt.	Oel, Talg oder Schweinefett.		Sehr weiche u. gereinigte Wagenschmiere.	Schweineschmalz mit Graphit.	Fettig.
				Auf gewöhnliche Art.	Gut unterhalten.			
Glockengut auf Glockengut .	—	—	—	0,097	—	—	—	—
Glockengut auf Gußeisen . .	—	—	—	—	0,049	—	—	—
Schmiedeeisen auf Glockengut	0,251	0,189	—	0,075	0,054	0,090	0,111	—
Schmiedeeisen auf Gußeisen .	—	—	—	0,075	0,054	—	—	—
Gußeisen auf Gußeisen . . .	—	0,137	0,079	0,075	0,054	—	—	0,137
Gußeisen auf Glockengut . .	0,194	0,161	—	0,075	0,054	0,065	—	0,166
Schmiedeeisen auf Guajakholz	0,188	—	—	0,125	—	—	—	—
Gußeisen auf Guajakholz . .	0,185	—	—	0,100	0,092	—	0,109	0,140
Guajak auf Gußeisen	—	—	—	0,116	—	—	—	0,153
Guajak auf Guajak	—	—	—	—	0,070	—	—	—

Aus dieser Tabelle ist folgendes für die Praxis sehr wichtige Verhältniß zu entnehmen: bei Zapfen aus Schmiede- oder Gußeisen, laufend in Lagern aus Gußeisen oder Glockengut (Messing), geschmiert mit Oel, Talg oder Schweineschmalz, ist der Reibungscoefficient:

bei ununterbrochener guter Unterhaltung, = 0,054,

bei gewöhnlicher Abwartung, = 0,070 bis 0,080.

Die von Coulomb gefundenen Werthe weichen hiervon zum Theil ab.

Anmerkung. Durch die Versuche über die mittelbare Zapfenreibung mit Hülfe der Reibungswaage sind vom Herrn Hirn mehrere, zum Theil von dem bis dahin Bekannten abweichende Resultate erlangt worden. Der Zapfen, welchen er

hierzu anwendete, bestand in einer hohlen gußeisernen Trommel von 0,23 Meter Durchmesser und 0,22 Meter Länge, und wurde von außen durch Eintauchen in Oel geschmiert, sowie von innen mittels durchfließenden Wassers abgekühlt. Das bronzene Zapfenlager (8 Kupfer, 1 Zinn) wurde mittels eines $1\frac{1}{8}$ Meter langen Hebels von 50 Kilogramm Gewicht aufgedrückt, während der Zapfen 50 bis 100 Umdrehungen pro Minute machte. Es ist leicht zu ermessen, daß bei den mit diesem Apparate angestellten Versuchen die Flüssigkeit und Adhäsion der als Schmiere dienenden Oele eine große Rolle spielen mußten, da hier nicht allein die Umfangsgeschwindigkeit, sondern auch die Reibungsfläche in Hinsicht auf den Druck eine sehr große war.

Die Umfangsgeschwindigkeit der Trommel betrug, da die letztere einen Umfang von 72 Centimeter hatte, und in der Secunde $\frac{5}{6}$ bis $\frac{10}{6}$ mal umlief, 60 bis 120 Centimeter = 23 bis 46 Zoll, während sie bei den gewöhnlichen Maschinen nur 2 bis 6 Zoll mißt. Ferner der horizontale Axenschnitt der Trommel betrug $22 . 23 = 506$ Quadratcentimeter, folglich kam auf ein Quadratcentimeter dieses Schnittes nur ein Druck von $\frac{50}{506} = 0,1$ Kilogramm, d. i. auf einen Quadratzoll $6,86 . 0,214 = 1,5$ Pfund, während dieser Druck bei gewöhnlichen Arbeitsmaschinen mehrere hundert Pfund beträgt. Die Verhältnisse der Versuche des Herrn Hirn waren daher zum großen Theil abweichend von den Reibungsverhältnissen, wie sie bei großen und starken Maschinen vorkommen, und wie sie auch bei anderen Versuchen, z. B. bei denen von Morin, stattfanden, und es sind folglich die sich bei denselben herausgestellten Abweichungen vollständig erklärlich. Die Hauptergebnisse der Hirn'schen Versuche bestehen ungefähr in Folgendem.

Die mittelbare Reibung hängt nicht allein von dem Drucke und der Natur und Beschaffenheit der sich reibenden Körper und des Schmiermittels, sondern auch von der Geschwindigkeit und von der Temperatur der Reibungsflächen und der Umgebung, sowie auch von der Größe dieser Flächen ab. Es ist bei constanter Temperatur die Reibung der Geschwindigkeit direct proportional, und es wächst dagegen dieselbe nur wie die Quadratwurzel aus der Geschwindigkeit, wenn die Temperaturen unbeachtet gelassen werden. Aus anderen Versuchen folgert endlich auch noch Herr Hirn, daß die mittelbare Reibung der Quadratwurzel aus der Reibungsfläche, sowie auch der Quadratwurzel aus dem Drucke proportional ist.

Was insbesondere den Einfluß der Temperatur anlangt, so ließ sich aus den angeführten Versuchen die Formel:

$$F = \frac{F_0}{1,0492^t}$$

folgern, in welcher t die Temperatur der Reibungsfläche, F_0 die Reibung bei 0° und F die bei t Grad Temperatur bezeichnen.

Ein Hauptergebniß dieser Versuche ist noch die Ermittelung des Arbeitsvermögens der Wärme. Hiervon wird erst weiter unten, und zwar bei der Theorie der Wärme gehandelt.

§. 182 **Arbeit der Zapfenreibung.** Kennt man den Druck R zwischen einem Zapfen und seinem Lager, und ist noch der Halbmesser r des Zapfens, Fig. 269, gegeben, so läßt sich die Arbeit, welche die Zapfenreibung bei jeder Umdrehung des Zapfens in Anspruch nimmt, leicht ermitteln. Die Reibung F ist $= \varphi R$, und der ihr entsprechende Weg der Umfang $2 \pi r$ des

Zapfens; es folgt daher die bei einer Umdrehung durch die Reibung verloren gehende mechanische Leistung $A = \varphi R \,.\, 2 \pi r = 2 \pi \varphi R r$. Macht der Zapfen in einer Minute u Umdrehungen, so ist die in jeder Secunde verbrauchte Arbeit

$$L = 2 \pi \varphi R r \cdot \frac{u}{60} = \frac{\pi u \varphi R r}{30} = 0{,}105 \,.\, u \varphi R r.$$

Die Arbeit der Reibung wächst also mit dem Zapfendrucke, dem Zapfenhalbmesser und der Umdrehungszahl gleichmäßig. Es ist daher eine praktische Regel, bei rotirenden Maschinen den Zapfendruck nicht unnöthig durch große Gewichte zu erhöhen, die Zapfen nur so stark zu machen, als die Festigkeit auf die Dauer es verlangt, und endlich auch nicht sehr viel Umdrehungen in einer Minute zuzulassen, wenigstens dann nicht, wenn es nicht andere Verhältnisse erfordern.

Fig. 269.

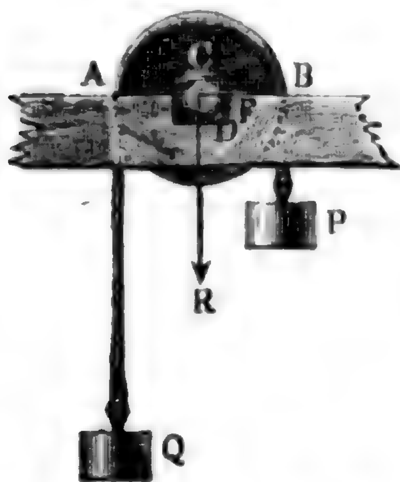
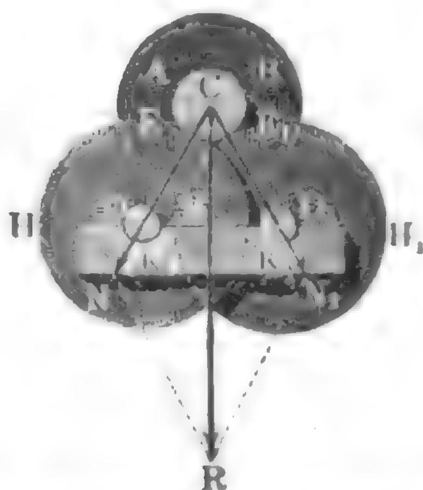


Fig. 270.



Durch Anwendung von Frictionsrädern, welche man statt der Zapfenlager anwendet, wird die Arbeit der Reibung vermindert. In Fig. 270 ist AB eine Welle, die mit ihrem Zapfen CEE_1 auf den Umfängen EH, $E_1 H_1$ dicht hinter einander liegender und um D und D_1 drehbarer Räder (Frictionsräder) ruht. Aus dem gegebenen Drucke R der Welle folgen die Pressungen.

$$N = N_1 = \frac{R}{2 \cos. \frac{\alpha}{2}},$$

wofern α den Winkel DCD_1 bezeichnet, welchen die Central- oder Drucklinien CD und CD_1 zwischen sich einschließen. Vermöge der wälzenden Reibung zwischen dem Zapfen C und den Radumfängen laufen die Räder mit diesem Zapfen um, und es entstehen in den Lagern von D und D_1 die Reibungen φN und φN_1, welche zusammen

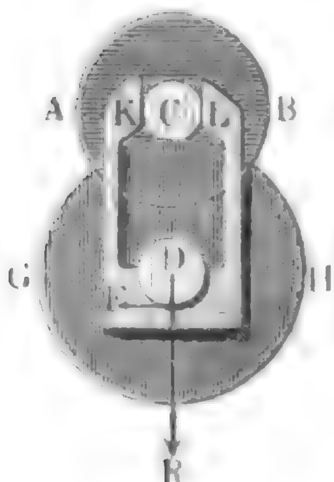
$$F = \varphi (N + N_1) = \frac{\varphi R}{\cos. \frac{\alpha}{2}}$$

betragen. Werden nun die Radhalbmesser $DE = D_1 E_1$ durch a_1 und die Zapfenhalbmesser $DK = D_1 K_1$ durch r_1 bezeichnet, so erhalten wir die Kraft am Umfange der Räder oder auch am Umfange des auf diesen liegenden Zapfens C, welche zur Ueberwindung von F nöthig ist:

$$F_1 = \frac{r_1}{a_1} F = \frac{r_1}{a_1} \cdot \frac{\varphi R}{cos. \frac{\alpha}{2}},$$

während dieselbe $= \varphi R$ beträgt, wenn der Zapfen C unmitttelbar in einer Pfanne ruht.

Fig. 271.



Wenn man die Gewichte der Frictionsräder unberücksichtigt läßt, so ist folglich die Arbeit der Reibung bei Anwendung von diesen Rädern,

$$\psi = \frac{r_1}{a_1\, cos. \frac{\alpha}{2}}$$ mal so groß, als ohne dieselben.

Stellt man dem Zapfendruck R ein einziges Frictionsrad GH, Fig. 271, entgegen und verhindert man die zufälligen, übrigens nicht zu beachtenden Seitenkräfte durch feste Backen K und L, so fällt $\alpha = 0$, $cos. \frac{\alpha}{2} = 1$ und obiges Verhältniß $\psi = \frac{r_1}{a_1}$ aus.

Beispiel. Ein Kunstrad wiegt 30000 Pfund, der Halbmesser a seines Umfanges ist 16 Fuß und sein Zapfenhalbmesser $r = 5$ Zoll, wie groß ist die Kraft am Umfange des Rades, um die Zapfenreibung zu überwinden, um dieses Rad also leer in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten, und wie groß ist der entsprechende Arbeitsaufwand, wenn es in einer Minute 5 Umdrehungen macht? Den Reibungscoefficienten φ können wir hier $= 0{,}075$ annehmen, weshalb die Reibung $\varphi R = 0{,}075 \,.\, 30000 = 2250$ Pfund beträgt. Da der Radhalbmesser $\frac{16 \,.\, 12}{5} = \frac{192}{5} = 38{,}4$ mal so groß ist, als der Zapfenhalbmesser oder Hebelarm der Reibung, so ist die auf den Radumfang reducirte Zapfenreibung:

$$= \frac{\varphi R}{38{,}4} = \frac{2250}{38{,}4} = 58{,}59 \text{ Pfund.}$$

Der Zapfenumfang ist $\frac{2 \,.\, 5 \,.\, \pi}{12} = 2{,}618$ Fuß; folglich der Weg der Reibung in einer Secunde:

$$= \frac{2{,}618 \,.\, 5}{60} = 0{,}2182 \text{ Fuß},$$

und die Arbeit der Reibung während einer Secunde:

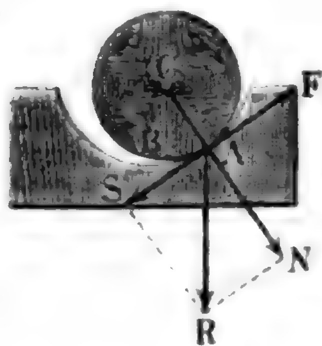
$$L = 0{,}2182 \,.\, \varphi R = 0{,}2182 \,.\, 2250 = 491 \text{ Fußpfund.}$$

Lägen die Zapfen dieses Rades auf Frictionsrädern, deren Halbmesser nur 5 mal so groß sind als die Halbmesser ihrer Zapfen, wäre also $\frac{r_1}{a_1} = \frac{1}{5}$, so würde die Kraft

am Radumfange nur $^1/_5 \cdot 58{,}59 = 11{,}72$ Pfund und die von der Reibung consumirte Arbeit nur $^{491}/_5 = 98{,}2$ Fußpfund betragen. Allerdings würde aber dann auch das Rad weit unsicherer aufliegen.

Reibung in ausgelaufenen Zapfenlagern. Die Reibung eines Zapfens ACB, Fig. 272, in einem ausgelaufenen Zapfenlager, welches nur in einem Punkte A aufliegt, ist kleiner als die bei einem neuen, noch in allen Punkten des Lagers aufruhenden Zapfen. Findet keine Umdrehung statt, so drückt der Zapfen in dem Punkte B, wo die Richtung des Mitteldruckes R hindurchgeht; tritt aber Umdrehung nach der Richtung AB ein, so wird der Zapfen vermöge seiner Reibung im Zapfenlager so weit in die Höhe steigen, bis sich die Kraft S zum Herabgleiten mit der Reibung F ins Gleichgewicht setzt. Der Mitteldruck R zerlegt sich in eine Normalkraft N und in eine Tangentialkraft S, N geht auf das Lager über und erzeugt die tangential wirkende Reibung $F = \varphi N$, S aber setzt sich mit F ins Gleichgewicht; es ist also auch $S = \varphi N$. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist $R^2 = N^2 + S^2$, daher hier: §. 183

Fig. 272.



$$R^2 = (1 + \varphi^2)\, N^2,$$

umgekehrt der Normaldruck:

$$N = \frac{R}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \text{ und die Reibung } F = \frac{\varphi R}{\sqrt{1 + \varphi^2}},$$

oder, wenn man den Reibungswinkel ϱ einführt, also $\varphi = tang.\, \varrho$ setzt:

$$F = \frac{R\, tang.\, \varrho}{\sqrt{1 + tang.\, \varrho^2}} = R\, tang.\, \varrho\, cos.\, \varrho = R\, sin.\, \varrho.$$

Wenn der Zapfen anfängt sich zu bewegen, so rückt folglich der Druckpunkt B um den Reibungswinkel $ACB = \varrho$ im Lager nach der entgegengesetzten Richtung fort.

Uebrigens ist natürlich das Moment $F . \overline{CA} = Fr$ der Zapfenreibung gleich dem Momente $Rr\, sin.\, \varrho$ des Zapfendruckes R, beide auf die Drehungsaxe C bezogen. Fände das Fortrücken nicht statt, so wäre

$$F = \varphi R = R\, tang.\, \varrho = \frac{R\, sin.\, \varrho}{cos.\, \varrho};$$

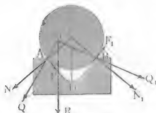
es ist folglich die Reibung nach dem Fortrücken $cos.\, \varrho$ mal so groß, als die vor dem Fortrücken. In der Regel ist $\varphi = tang.\, \varrho$ noch nicht $^1/_{10}$ und $cos.\, \varrho > 0{,}995$, also die Differenz noch nicht $^5/_{1000} = {^1/_{200}}$; man hat daher in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung auf den Einfluß dieses Fortrückens nicht Rücksicht zu nehmen.

Läuft das Rad AB mit einer Nabe oder einem Auge, Fig. 273, um eine feste Axe AC, so ist die Reibung dieselbe, als wenn sich die Axen in Pfannen bewegen, nur ist bei einem ausgelaufenen Auge der Hebelarm der Reibung nicht der Halbmesser des festen Zapfens, sondern der des Auges.

Fig. 273.

§. 184 **Reibung in einem dreiseitigen Lager.** Legt man den Zapfen in prismatische Lager, so erhält man größere Drücke und deshalb auch mehr Reibung als bei einem runden Lager. Ist das Lager ADB, Fig. 274, dreiseitig, so liegt der Zapfen in zwei Punkten A und B auf, und es ist an jedem derselben Reibung zu überwinden. Der Mitteldruck R zerlegt sich in zwei Seitenkräfte Q und Q_1, und jede dieser giebt einen Normaldruck N und N_1 und eine der Reibung $F = \varphi N$ und $F_1 = \varphi N_1$ gleiche Tangentialkraft. Dem vorigen Paragraphen zufolge lassen sich aber diese Reibungen auch $= Q \sin. \varrho$ und $Q_1 \sin. \varrho$ setzen; man hat daher für die Gesammtreibung:

Fig. 274.



$$F + F_1 = (Q + Q_1) \sin. \varrho.$$

Die Kräfte Q und Q_1 ergeben sich durch Auflösung eines aus Q und Q_1 gebildeten Kräfteparallelogrammes mit Hülfe des Mitteldruckes R, des Reibungswinkels ϱ und des Winkels $ACB = 2\alpha$, welcher dem im Lager liegenden Bogen AB entspricht. Es ist:

$$QOR = ACD - CAO = \alpha - \varrho \text{ und}$$
$$Q_1OR = BCD + CBO = \alpha + \varrho; \text{ folglich:}$$
$$QOQ_1 = \alpha - \varrho + \alpha + \varrho = 2\alpha.$$

Die Anwendung der Formeln in §. 78 giebt nun:

$$Q_1 = \frac{\sin. (\alpha - \varrho)}{\sin. 2\alpha} \cdot R \text{ und } Q = \frac{\sin. (\alpha + \varrho)}{\sin. 2\alpha} \cdot R;$$

daher folgt die gesuchte Reibung:

$$F + F_1 = (Q + Q_1) \sin. \varrho = (\sin. [\alpha - \varrho] + \sin. [\alpha + \varrho]) \frac{R \sin. \varrho}{\sin. 2\alpha}.$$

Aber $\sin. (\alpha - \varrho) + \sin. (\alpha + \varrho)$ ist, der analytischen Trigonometrie zufolge, $= 2 \sin. \alpha \cos. \varrho$ und $\sin. 2\alpha = 2 \sin. \alpha \cos. \alpha$, es ergiebt sich daher:

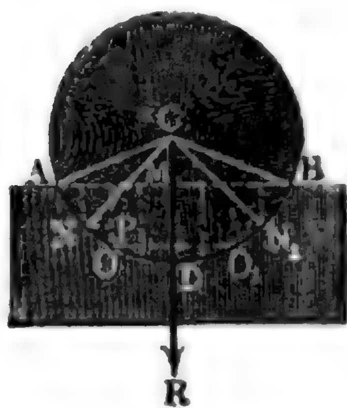
$$F + F_1 = \frac{2 \sin. \alpha R \sin. \varrho \cos. \varrho}{2 \sin. \alpha \cos. \alpha} = \frac{R \sin. 2\varrho}{2 \cos. \alpha},$$

wofür sich wegen der Kleinheit von ϱ auch $= \dfrac{R \sin. \varrho}{\cos. \alpha}$ setzen läßt. Die Rei-

bung bei Anwendung des dreiseitigen Zapfenlagers ist hiernach $\frac{1}{cos.\,\alpha}$ mal so groß, als die beim cylindrischen Lager. Ist z. B. $A\,D\,B = 60^0$, also $A\,C\,B = 180^0 - 60^0 = 120^0$ und $A\,C\,D = \alpha = 60^0$, so hat man $\frac{1}{cos.\,60^0}$ mal $= 2$ mal so viel Reibung, als bei einem runden Lager.

Reibung in einem neuen Lager. Mit Hülfe der letzten Formel läßt sich nun auch die Reibung in einem neuen runden Zapfenlager finden, worin der Zapfen an allen Stellen noch aufliegt. Es sei $A\,D\,B$ in Fig. 275 ein solches Lager. Theilen wir den Bogen $A\,D\,B$, in welchem sich Zapfen und Lager berühren, in viele Theile, wie $A\,N$, $N\,O$ u. s. w., welche gleichen Projectionen in der Sehne $A\,B$ entsprechen, und nehmen wir an, daß jeder dieser Theile gleich viel vom ganzen Drucke R, nämlich $= \frac{R}{n}$, wobei n die Anzahl der Theile bezeichnet, vom Zapfen auf das Lager übertrage. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Reibung für zwei gegenüberliegende Theile $N\,O$ und $N_1\,O_1$: §. 185

Fig. 275.



$$= \frac{R}{n} \cdot \frac{sin.\,2\,\varrho}{cos.\,N\,C\,D}.$$

Aber $cos.\,N\,C\,D$ ist auch $= cos.\,O\,N\,P = \frac{N\,P}{N\,O}$, wofern $N\,P$ die Projection des Theiles $N\,O$ auf $A\,B$ repräsentirt, und

$$N\,P = \frac{\text{Sehne } A\,B}{n};$$

es folgt daher jene den Theilen $N\,O$ und $N_1\,O_1$ entsprechende Reibung:

$$= \frac{R\,sin.\,2\,\varrho}{n} \cdot \frac{n\,.\,\overline{N\,O}}{\text{Sehne}} = \frac{R\,sin.\,2\,\varrho}{\text{Sehne}} \cdot \overline{N\,O}.$$

Um nun die Reibung für den ganzen Bogen $A\,D\,B$ zu finden, hat man statt $N\,O$ den Bogen $A\,D = \frac{1}{2}\,A\,D\,B$ einzuführen, weil die Summe aller Reibungen gleich ist $\frac{R\,sin.\,2\,\varrho}{\text{Sehne}}$ mal Summe aller Bogentheile; es folgt also die Reibung in einem neuen Zapfenlager:

$$F = R\,sin.\,2\,\varrho \cdot \frac{\text{Bogen } A\,D}{\text{Sehne } A\,B},$$

oder, wenn wir den Centriwinkel $A\,C\,B$, welcher dem im Lager liegenden Bogen entspricht, $= 2\,\alpha^0$, also Sehne $A\,B = 2\,A\,C\,.\,sin.\,\alpha$ setzen:

$$F = \frac{R \sin. 2\varrho}{2} \cdot \frac{\alpha}{\sin. \alpha}, \text{ oder } \sin. 2\varrho = 2 \sin. \varrho$$

angenommen, annähernd:

$$F = R \sin. \varrho \cdot \frac{\alpha}{\sin. \alpha}.$$

Hiernach ist die anfängliche Reibung um so größer, je tiefer der Zapfen in seinem Lager liegt. Umfaßt z. B. das Zapfenlager den halben Zapfenumfang, ist also $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ und sonach $\sin. \alpha = 1$, so hat man $F = \frac{\pi}{2} \cdot R \sin. \varrho$, also $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ mal so groß, als beim ausgelaufenen Zapfenlager. Bei einem Zapfen, welcher nicht tief im Lager ruht, ist α klein, daher $\sin. \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$ zu setzen, weshalb folgt $F = \left(1 + \frac{\alpha^2}{6}\right) R \sin. \varrho$, oder $= R \sin. \varrho$, wenn α sehr klein ist.

186) **Poncelet's Theorem.** Der Zapfendruck R ergiebt sich in der Regel als Mittelkraft von zwei rechtwinkelig gegen einander gerichteten Kräften P und Q, ist also $= \sqrt{P^2 + Q^2}$. Insofern man ihn nur zur Bestimmung der Reibung

$$F = \varphi R = \varphi \sqrt{P^2 + Q^2}$$

bedarf, kann man sich mit einem Näherungswerth desselben begnügen, theils weil schon der Coefficient φ niemals so sicher bestimmt werden kann und von so sehr vielen Zufälligkeiten mit abhängt, theils auch, weil das ganze Product oder die Reibung φR meist nur ein kleiner Theil ist von den übrigen Kräften an der in Zapfenlagern ruhenden Maschine, wie Hebel, Rolle, Radwelle u. s. w. Der Lehrsatz, welcher einen Näherungsausdruck von $\sqrt{P^2 + Q^2}$ zu finden lehrt, ist unter dem Namen „das Poncelet'sche Theorem" bekannt, und läßt sich auf folgende Weise entwickeln:

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = P \sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2} = P \sqrt{1 + x^2},$$

wobei $x = \frac{Q}{P}$, und vorausgesetzt wird, daß Q die kleinere Kraft, also x ein ächter Bruch ist. Setzen wir nun:

$$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x,$$

und bestimmen wir die Coefficienten μ und ν gewissen Forderungen entsprechend. Der relative Fehler ist:

$$y = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \mu - \nu x}{\sqrt{1 + x^2}} = 1 - \frac{\mu + \nu x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Curve OSP, Fig. 276, welche für die Abscisse $x = 0$, die Ordinate $AO = y = 1 - \mu$, und für die Abscisse $AB = 1$, die Ordinate $BP = y = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$ hat, welche ferner in zwei Punkten K und N durch die Abscissenaxe geht, und bei S ihren größten Abstand CS von dieser Axe erreicht.

Fig. 276.

Setzen wir $y = 0$, also:

$$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x,$$

und lösen wir diese Gleichung in Beziehung auf x auf, so erhalten wir in

$$x = \frac{\mu \nu \mp \sqrt{\mu^2 + \nu^2 - 1}}{1 - \nu^2}$$

die Abscissen AK und AN der Durchschnittspunkte K und N, und also auch diejenigen Werthe, bei welchen der Fehler Null ausfällt.

Um aber die Abscisse AC des größten negativen Fehlers CS zu finden, setzen wir das Differenzialverhältniß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\mu + \nu x)(1 + x^2)^{-1/2} x - \nu (1 + x^2)^{1/2}}{1 + x^2} = \text{Null}$$

(s. Art. 13 der analytischen Hülfslehren).

Dieser Forderung wird entsprochen, indem man

$$(\mu + \nu x)(1 + x^2)^{-1/2} x = \nu (1 + x^2)^{1/2}, \text{ oder}$$

$$(\mu + \nu x) x = \nu (1 + x^2), \text{ d. i. } x = \frac{\nu}{\mu} \text{ setzt.}$$

Hiernach giebt also die Abscisse $AC = \frac{\nu}{\mu}$ die größte negative Ordinate:

$$CS = 1 - \frac{\mu + \nu \cdot \frac{\nu}{\mu}}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\mu^2}}} = -\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} - 1\right) = -(\sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1).$$

Um nun weder einen großen positiven noch einen großen negativen Fehler zu begehen, setzen wir die drei Ordinaten $AO = 1 - \mu$, $BP = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$ und $CS = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1$ einander gleich, und bestimmen hiernach die Coefficienten μ und ν. Es ist:

$$\mu = \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}, \text{ d. i. } \nu = (\sqrt{2} - 1)\mu = 0{,}414\,\mu \text{ und}$$

$$2 - \mu = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \text{ d. i. } 2 = \mu (1 + \sqrt{1 + 0{,}414^2}), \text{ folglich}$$

$$\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{1,1714}} = 0,96 \text{ und } \nu = 0,414 \,.\, 0,96 = 0,40.$$

Wir können also annähernd $\sqrt{1 + x^2} = 0,96 + 0,40 \,.\, x$, und ebenso die Mittelkraft

$$R = 0,96\ P + 0,40\ Q$$

setzen, und wissen, daß wir hierbei höchstens den Fehler $\pm\, y = 1 - \mu = 1 - 0,96 = 0,04 =$ vier Procent des wahren Werthes begehen.

Diese Bestimmung setzt voraus, daß wir wissen, welche von den Kräften die größere ist; ist uns dies nicht bekannt, so können wir

$$\sqrt{1 + x^2} = \mu\ (1 + x)$$

annehmen und bekommen so

$$y = 1 - \frac{\mu\ (1 + x)}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Hier giebt nicht nur die Grenze $x = 0$ den Fehler $= 1 - \mu$, sondern auch die Grenze $x = \infty$ denselben $= 1 - \frac{\mu x}{x} = 1 - \mu$; setzen wir aber $x = \frac{\nu}{\mu} = 1$, so bekommen wir den größten negativen Fehler:

$$= -\left(\frac{2\mu}{\sqrt{2}} - 1\right) = -\ (\mu \sqrt{2} - 1),$$

und es ergiebt sich durch Gleichsetzen dieser Fehler:

$1 - \mu = \mu \sqrt{2} - 1$, also $\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2}{2,414} = \frac{2}{1,212} = 0,825$, wofür 0,83 gesetzt wird. In dem Falle also, wo man nicht weiß, welche von den Kräften die größere ist, läßt sich setzen:

$$R = 0,83\ (P + Q),$$

und man erhält dabei den größten Fehler:

$$\pm\, y = 1 - 0,83 = 0,17 \text{ Procent } = \tfrac{1}{6} \text{ des wahren Werthes.}$$

Weiß man endlich, daß x nicht über 0,2 ist, so läßt man richtiger x ganz außer Acht, und schreibt $\sqrt{P^2 + Q^2} = P$, ist aber x über 0,2, so ist ebenfalls richtiger

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = 0,888\ P + 0,490 \,.\, Q;$$

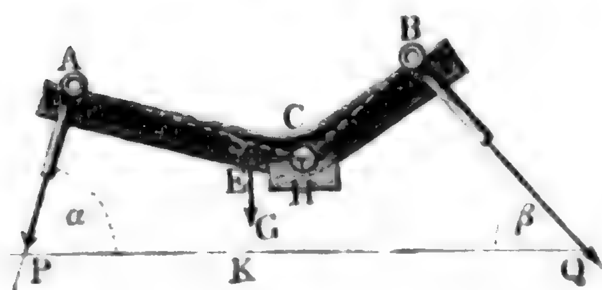
in beiden Fällen ist nämlich der größte Fehler ungefähr zwei Procent *).

§. 187 **Der Hebel.** Die im Obigen entwickelte Theorie der Reibung findet beim materiellen Hebel, bei der Radwelle und anderen Maschinen ihre Anwen-

*) Polytechnische Mittheilungen, Band I.

dung. Handeln wir zunächst vom Hebel, und nehmen wir im Winkelhebel ACB, Fig 277, gleich den allgemeinsten Fall vor. Bezeichnen wir wie früher (§. 136) den Hebelarm CA der Kraft P durch a, den Hebelarm CB der Last Q durch b, und den Zapfenhalbmesser CH durch r, setzen wir das Gewicht des Hebels $= G$, den Hebelarm CE desselben $= s$ und die Winkel APK und BQK, um welche die Kraftrichtungen vom Horizonte abweichen, $= \alpha$ und β. Die Kraft P giebt den Verticaldruck $P\, sin.\, \alpha$, und die Last Q denselben $= Q\, sin.\, \beta$; es ist daher der gesammte Verticaldruck: $V = G + P\, sin.\, \alpha + Q\, sin.\, \beta$.

Fig 277.



Die Kraft P giebt auch noch den Horizontaldruck $P\, cos.\, \alpha$ und die Last einen Gegendruck $Q\, cos.\, \beta$; es bleibt daher als Horizontaldruck $H = P\, cos.\, \alpha - Q\, cos.\, \beta$ übrig, und es läßt sich nun der Totaldruck im Zapfen:

$$R = \mu V + \nu H = \mu (G + P\, sin.\, \alpha + Q\, sin.\, \beta) + \nu (P\, cos.\, \alpha - Q\, cos.\, \beta)$$

setzen, wobei aber der zweite Theil $\nu (P\, cos.\, \alpha - Q\, cos.\, \beta)$ nie negativ zu nehmen, und deshalb in dem Falle, wenn $Q\, cos.\, \beta > P\, cos.\, \alpha$ ist, das Zeichen zu ändern oder vielmehr $P\, cos.\, \alpha$ von $Q\, cos.\, \beta$ zu subtrahiren ist. Um nun denjenigen Werth der Kraft zu finden, welcher dem labilen Gleichgewichte entspricht, so daß beim kleinsten Zusatz Bewegung eintritt, setzen wir statisches Kraftmoment gleich statisches Lastmoment, plus oder minus Moment des Gewichtes der Maschine (§. 136), sowie plus Moment der Reibung, also:

$$Pa = Qb \pm Gs + \varphi R r$$
$$= Qb \pm Gs + \varphi (\mu V + \nu H) r, \text{ woraus folgt}$$
$$P = \frac{Qb \pm Gs + \varphi [\mu (G + Q\, sin.\, \beta) \mp \nu Q\, cos.\, \beta] r}{a - \mu \varphi r\, sin.\, \alpha \mp \nu \varphi r\, cos.\, \alpha}.$$

Wirken P und Q vertical, so ist einfach $R = P + Q + G$, daher $Pa = Qb \pm Gs + \varphi (P + Q + G) r$. Ist der Hebel einarmig, so wirken P und Q einander entgegen, dann ist also $R = P - Q + G$ und deshalb auch die Reibung kleiner. Uebrigens muß R stets positiv in Rechnung kommen, weil die Reibung φR nur Bewegung verhindert, aber nicht erzeugt. Man sieht auch hiernach, daß ein einarmiger Hebel mechanisch vollkommener ist, als ein doppelarmiger Hebel.

Beispiel. Sind die Hebelarme bei dem in Fig. 277 abgebildeten Winkelhebel: $a = 6$ Fuß, $b = 4$ Fuß, $s = \frac{1}{2}$ Fuß und $r = 1\frac{1}{2}$ Zoll, die Neigungswinkel $\alpha = 70^0$, $\beta = 50^0$, ist ferner die Last $Q = 5600$ Pfund und das Gewicht G des Hebels, $= 900$ Pfund, so bestimmt sich die Kraft zur Herstellung des labilen

Gleichgewichts wie folgt. Ohne Rücksicht auf Reibung ist $Pa + Gs = Qb$, daher:

$$P = \frac{Qb - Gs}{a} = \frac{5600 \cdot 4 - 900 \cdot \frac{1}{2}}{6} = 3658 \text{ Pfund.}$$

Setzen wir $\mu = 0{,}96$ und $\nu = 0{,}40$, so bekommen wir:

$\mu\,(G + Q\,sin.\,\beta) = 0{,}96\,(900 + 5600\,sin.\,50^0) = 4982$ Pfund,

$\nu\,Q\,cos.\,\beta = 0{,}40 \cdot 5600\,cos.\,50^0 = 1440$ Pfund;

$\mu\,sin.\,\alpha = 0{,}96 \cdot sin.\,70^0 = 0{,}902$,

$\nu\,cos.\,\alpha = 0{,}40 \cdot cos.\,70^0 = 0{,}137$.

Es ist leicht einzusehen, daß hier $P\,cos.\,\alpha$ kleiner als $Q\,cos.\,\beta$ ist, denn da annähernd $P = 3658$ ausfällt, so hat man $P\,cos.\,\alpha = 1251$ Pfund, wogegen $Q\,cos.\,\beta = 3600$ Pfund beträgt; deshalb nehmen wir hier für $\nu\,Q\,cos.\,\beta$ und $\nu\,\varphi\,r\,cos.\,\alpha$ das untere Zeichen und setzen:

$$P = \frac{5600 \cdot 4 - 900 \cdot \frac{1}{2} + \varphi r\,(4982 + 1440)}{6 - \varphi r\,(0{,}902 - 0{,}173)}.$$

Nehmen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$ an, so erhalten wir:

$\varphi r = 0{,}075 \cdot \frac{3}{24} = 0{,}009375$ sowie $6422\,\varphi r = 60$,

und die gesuchte Kraft:

$$P = \frac{22400 - 450 + 60}{6 - 0{,}00683} = \frac{22010}{5{,}9932} = 3673 \text{ Pfund.}$$

Uebrigens ist hier der Verticaldruck, wenn man die ohne Rücksicht auf Reibung bestimmte Kraft $P = 3658$ Pfund einführt:

$V = 3658\,sin.\,70^0 + 5600\,sin.\,50^0 + 900 = 3437 + 4290 + 900$
$= 8627$ Pfund,

dagegen der Horizontaldruck:

$H = 5600\,cos.\,50 - 3658\,cos.\,70 = 3600 - 1251 = 2349$ Pfund.

Hier ist $H > 0{,}2\,V$, daher ist richtiger:

$R = 0{,}888 \cdot H + 0{,}490\,V = 0{,}888 \cdot 8627 + 0{,}490 \cdot 2349 = 8811$

zu setzen, und es folgt so das Moment der Reibung:

$= \varphi\,r\,R = 0{,}009375 \cdot 8811 = 82{,}6$ Fußpfund,

und endlich die Kraft:

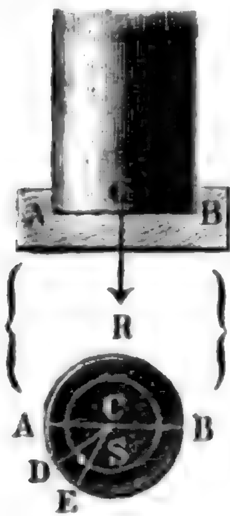
$$P = \frac{22400 - 450 + 82{,}6}{6} = 3672 \text{ Pfund,}$$

welcher Werth vom obigen allerdings nur wenig abweicht.

188 **Reibung an stehenden Zapfen.** Findet bei einer Radwelle ein Druck in der Richtung der Axe statt, wie es z. B. bei stehenden Wellen in Folge des Gewichtes derselben jedesmal der Fall ist, so giebt es noch eine Reibung auf der Basis des einen Zapfens. Weil hier in allen Punkten Druck zwischen dem Zapfen und der Pfanne vorhanden ist, so steht diese Reibung der einfachen gleitenden näher, als der seither betrachteten Zapfenreibung und man hat deshalb für diese die in Tab. II. (S. 287) aufgeführten Reibungscoefficienten einzuführen. Um die Arbeit dieser Reibung zu finden, muß man den mittleren Weg kennen, den die Basis AB, Fig. 278, eines solchen stehenden Zapfens bei einer Umdrehung zurücklegt. Nehmen wir an, daß der Druck R auf der ganzen Fläche gleichförmig vertheilt sei,

setzen wir also voraus, daß gleich großen Theilen der Basis gleiche Reibungen zukommen. Theilen wir nun die Basis durch Halbmesser CD, CE u. s. w. in lauter gleiche Sectoren oder Dreiecke, wie DCE, so entsprechen diesen nicht nur gleiche Reibungen, sondern auch gleiche Momente, es ist daher nur das Reibungsmoment von einem dieser Dreiecke zu finden. Die Reibungen eines solchen Dreiecks lassen sich aber als Parallelkräfte ansehen, da sie alle tangential, d. i. winkelrecht zum Radius CD wirken; und da nun der Schwerpunkt eines Körpers oder einer Fläche nichts weiter als der Angriffspunkt der Mittelkraft von in diesem Körper oder in dieser Fläche gleichmäßig vertheilten Parallelkräften ist, so läßt sich demnach auch hier der Schwerpunkt S des Sectors oder Dreiecks DCE als Angriffspunkt von der aus sämmtlichen Reibungen desselben entspringenden Mittelkraft ansehen. Ist nun der

Fig. 278.



Druck auf diesen Sector, $= \frac{R}{n}$ und der Halbmesser $CD = CE$ der Basis $= r$, so folgt (nach §. 113) das statische Moment der Reibung dieses Sectors:

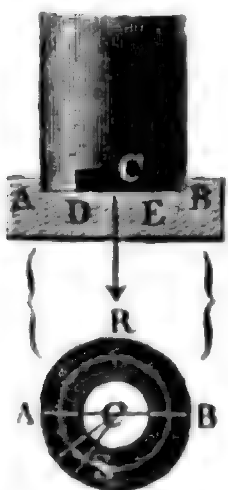
$$= \overline{CS} \cdot \frac{\varphi R}{n} = {}^2/_3\, r \cdot \frac{\varphi R}{n},$$

und endlich das statische Moment der vollständigen Zapfenreibung:

$$M = n \,.\, {}^2/_3\, r \,\frac{\varphi R}{n} = {}^2/_3\, \varphi R r.$$

Zuweilen ist die sich reibende Fläche ein Ring $ABED$, Fig. 279. Sind die Halbmesser desselben $CA = r_1$ und $CD = r_2$, so hat man es mit der Bestimmung des Schwerpunktes S von einem Ringstücke zu thun, und erhält deshalb nach §. 114 den Hebelarm:

Fig. 279.



$$CS = {}^2/_3\, \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2},$$

daher das Moment der Reibung:

$$M = {}^2/_3\, \varphi R \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right).$$

Führt man den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2} = r$ und die Breite des Ringes $r_1 - r_2 = b$ ein, so erhält man dieses Moment der Reibung auch

$$M = \varphi R \left(r + \frac{b^2}{12\, r}\right).$$

Die Arbeit der Reibung für eine Umdrehung des Zapfens ist im ersten Falle
$$A = 2\pi \,.\, {}^2/_3\, \varphi R r = {}^4/_3\, \pi \varphi R r,$$ und im zweiten:
$$A = {}^4/_3\, \pi \varphi R \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right) = 2\pi \varphi R \left(r + \frac{b^2}{12\,r}\right).$$

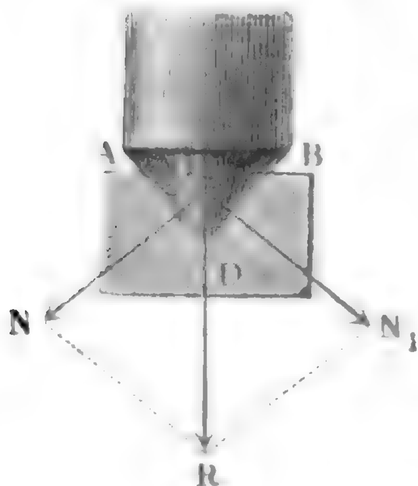
Hiernach ist auch die Reibung an den aus einem oder mehreren Ringen bestehenden Hals- oder Kammzapfen zu berechnen, wenn die stehende Welle an demselben aufgehangen ist.

Man sieht auch hier leicht ein, daß wegen Verminderung dieses Arbeitsverlustes die stehenden Zapfen oder Stifte möglichst schwach zu machen sind, und daß mehr Arbeitsverlust entsteht, wenn unter übrigens gleichen Verhältnissen, die Reibung in einem Ringe als in einem vollen Kreise statt hat.

Beispiel. Bei einer 1800 Pfund schweren Turbine, welche in der Minute 100 Umdrehungen macht, ist die Stärke des Stiftes an der Basis 1 Zoll, wie viel Arbeit consumirt die Reibung dieses Stiftes in einer Secunde? Den Reibungscoefficienten = 0,100 angenommen, erhält man die Reibung:
$$\varphi R = 0{,}100 \,.\, 1800 = 180 \text{ Pfund};$$
der Weg pro Umdrehung ist:
$$= {}^2/_3\, \pi r = {}^4/_3 \,.\, 3{,}14 \,.\, {}^1/_{24} = 0{,}1745 \text{ Fuß},$$
daher die Arbeit pro Umdrehung:
$$= 180 \,.\, 0{,}1745 = 31{,}41 \text{ Fußpfund}.$$
Nun macht aber diese Maschine in der Secunde ${}^{100}/_{60} = {}^5/_3$ Umdrehungen; es folgt daher der gesuchte Arbeitsverlust:
$$= \frac{314{,}1}{6} = 52{,}3 \text{ Fußpfund}.$$

§. 189 **Reibung an Spitzzapfen.** Ist der Zapfen ABD, Fig. 280, conisch zugespitzt, so fällt die Reibung größer aus als bei einem unten ebenen Zapfen; weil sich der Axendruck R in die die Reibung erzeugenden Normalkräfte, wie N, N_1 u. s. w. zerlegt, die zusammen größer als R allein sind. Ist der halbe Convergenzwinkel $ADC = BDC = \alpha$, so hat man:

Fig. 280.



$$2N = \frac{R}{sin.\,\alpha},$$
und deshalb die Reibung dieses Spitzzapfens:
$$F = \varphi\, \frac{R}{sin.\,\alpha}.$$

Bezeichnet man nun den Halbmesser $CA = CB$ des Zapfens an der Stelle des Eintritts in die Pfanne durch r_1, so hat man nach dem Obigen, das statische Reibungsmoment:
$$M = \frac{\varphi R}{sin.\,\alpha} \cdot {}^2/_3\, r_1 = {}^2/_3\, \varphi\, \frac{R r_1}{sin.\,\alpha};$$

oder, da $\frac{r_1}{sin.\,\alpha} = \frac{CA}{sin.\,\alpha}$ = der Kegelseite $DA = a$ ist, dasselbe auch:

$$M = \frac{2}{3}\,\varphi\,R\,a.$$

Läßt man diesen Zapfen nur wenig in die Pfanne eintauchen, so wird die Arbeit seiner Reibung kleiner als bei einem Zapfen mit ebener Basis und deshalb die Anwendung des Spitzzapfens dennoch von Nutzen sein. Ist z. B.:

$$a = \frac{r_1}{sin.\,\alpha} = \frac{r}{2},\ \text{also}\ r_1 = \frac{1}{2}\,r\,sin.\,\alpha,$$

so giebt der Spitzzapfen mit dem Halbmesser r_1 nur halb so viel Arbeitsverlust durch die Reibung als der eben abgestumpfte Zapfen mit dem Halbmesser r.

Bildet der Stift einen abgekürzten Kegel, Fig. 281, so findet Reibung an dem Mantel und an der Abstumpfungsfläche statt und es stellt sich das statische Reibungsmoment

$$M = \left(r_1^3 + \frac{r^3 - r_1^3}{sin.\,\alpha}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\varphi\,R}{r^2}$$

heraus, wenn r den Halbmesser CA an der Stelle des Eintrittes in die Pfanne, r_1 den Halbmesser DE an der Basis und α^0 den halben Convergenzwinkel bezeichnet. In Folge des großen Seitendruckes N wird die Pfanne bald so stark abgerieben, daß endlich nur Druck auf der Basis EF übrig bleibt und das Moment der Reibung $M = \frac{2}{3}\,\varphi\,R\,r_1$ ausfällt.

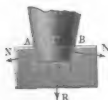


Fig. 281.

Fig. 282.

Fig. 283.

Sehr oft sind endlich noch die stehenden Zapfen oder Stifte, Fig. 282 und Fig. 283, abgerundet. Wenn auch durch diese Abrundung die Reibung selbst keineswegs vermindert wird, so läßt sich doch dadurch eine Verminderung des Reibungsmomentes erzielen, daß man die Tiefe des Eintauchens in die Pfanne herabzieht. Setzt man eine kugelförmige Abrundung voraus, so erhält man mit Hülfe des höheren Calcüls für eine halbkugelförmige Pfanne das Moment der Reibung:

$$M = \frac{\varphi\,\pi}{2} \cdot R\,r;$$

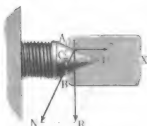
sowie für die ein niedriges Segment bildende Pfanne annähernd:

$$M = \frac{2}{3}\left[1 + 0{,}3\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right]\varphi\,R\,r_1,$$

wenn r den Kugelhalbmesser $MA = MB$, und r_1 den Pfannenhalbmesser $CA = CB$ bezeichnet.

Anmerkung. Bei den Kornerspitzen ADB, Fig. 284, an den Drehbankspindeln zerlegt sich der Druck R rechtwinkelig gegen die Axenrichtung DX in einen Normaldruck N und einen Seitendruck S parallel zur Axe. Gelten dieselben Bezeichnungen wie oben bei dem Spitzzapfen stehender Wellen, so hat man:

Fig. 284



$$N = \frac{R}{cos. \alpha} \text{ und } S = R \; tang. \alpha.$$

Das Moment der Reibung, welche aus N entspringt, ist:

$$M = \varphi N \,.\, {}^2\!/_3 r_1 = {}^2\!/_3 \varphi \frac{R r_1}{cos. \alpha},$$

oder da $r_1 = CA = DA \; sin. \; ADC = a \, sin. \alpha$ ist, wenn a die Länge CD des eingelegten Zapfenstückes bezeichnet, $M = {}^2\!/_3 \varphi R a \; tang. \alpha$.

Die Seitenkraft S wird ganz oder zum Theil durch eine Gegenkraft S_1 an der anderen Spitze aufgehoben.

Beispiel. Wenn das Gewicht der armirten Welle eines Pferdegöpels, $R = 6000$ Pfd., der Halbmesser seines conisch gespitzten Stiftes, $= r = 1$ Zoll und der Convergenzwinkel 2α des letzteren, $= 90^0$ ist, so beträgt das statische Moment der Reibung an diesem Stifte:

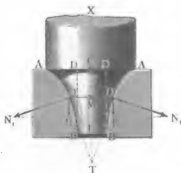
$$M = {}^2\!/_3 \,.\, \varphi \,.\, \frac{R r}{sin. \alpha} = {}^2\!/_3 \,.\, 0{,}1 \,.\, \frac{6000}{sin. 45^0} \cdot \frac{1}{12} = \frac{100}{3\sqrt{{}^1\!/_2}} = 47{,}1 \text{ Fußpfund.}$$

Macht diese Welle während des Ausförderns einer Tonne aus der Grube $= u = 24$ Umdrehungen, so ist die Arbeit, welche die Reibung am Stifte in dieser Zeit aufzehrt:

$$A = 2 \pi u \,.\, {}^2\!/_3 \varphi \frac{R r}{sin. \alpha} = 2 \pi \,.\, 24 \,.\, 47{,}1 = 7103 \text{ Fußpfund.}$$

190 **Der sogenannte Antifrictionszapfen.** Unter der Voraussetzung, daß der axiale Druck eines stehenden Zapfens $ABBA$, Fig. 285, der Querschnittsfläche proportional ist, können wir den Verticaldruck pro Quadratzoll Querschnitt, $R_1 = \frac{R}{G}$ setzen, wofern R den ganzen Vertical- oder Axendruck, und G den Inhalt der verticalen Projection $ADDA$ der ganzen Reibungsfläche $ABBA$ bezeichnet. Ist nun α der Neigungswinkel CTO des Flächenelementes O gegen die Axe CT des Zapfens, so folgt der Normaldruck, welchen der Zapfen pro Quadratzoll Querschnitt

Fig. 285.



gegen das Lager ausübt, $N_1 = \frac{R_1}{sin.\,\alpha}$, daher die entsprechende Reibung

$$F_1 = \varphi N_1 = \varphi \frac{R_1}{sin.\,\alpha} = \frac{\varphi R}{G\, sin.\,\alpha},$$

und wenn noch y den Abstand oder Reibungshalbmesser MO bezeichnet, das Moment dieser Reibung:

$$F_1 y = \varphi \frac{R}{G} \cdot \frac{y}{sin.\,\alpha},$$

oder, da $\frac{y}{sin.\,\alpha}$ = der Tangente OT ist, auch

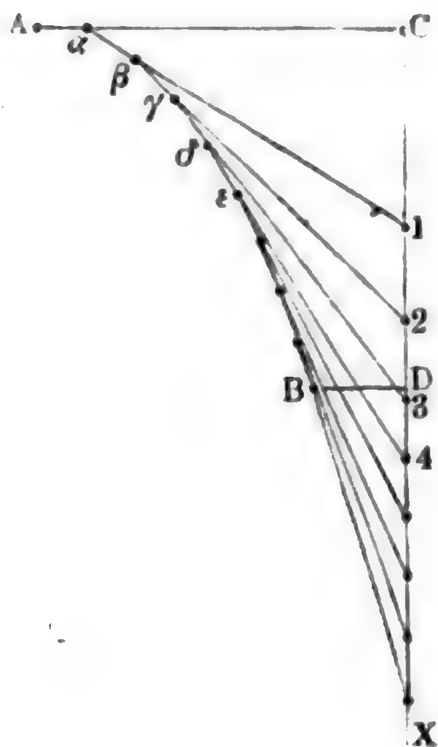
$$F_1 y = \varphi \frac{R}{G} \cdot \overline{OT}.$$

Soll, um ein gleichmäßiges Abführen des Zapfens und seiner Pfanne zu erlangen, das Moment $F_1 y$ an allen Stellen des Zapfens dasselbe sein, so muß folglich die Tangente OT längs der ganzen Erzeugungscurve AOB des Zapfens eine und dieselbe Größe a haben, und es ist daher dann das Moment der Reibung des ganzen Zapfens:

$$M = F_1 y \,.\, G = \varphi R a.$$

Die Curve AOB mit constanter Tangente OT, vom Berührungspunkte O bis zur Axe CX gemessen, ist eine Tractorie oder Zuglinie, und entsteht, wenn ein auf einer horizontalen Ebene liegender schwerer Punkt A, Fig. 286, durch einen Faden AC in Bewegung gesetzt wird, dessen Ende C auf einer geraden Linie CX fortrückt. Dieser Faden bildet hier die constante Tangentenlinie $AC = \alpha 1 = \beta 2 = \gamma 3$ u. s. w. $= a$. Um diese Curve zu construiren, errichte man $CA = a$ rechtwinkelig auf die Axe CX, nehme in CA, α nahe bei A an, trage $\alpha 1 = a$ auf, nehme β in $\alpha 1$, nahe bei α an, trage $\beta 2 = a$ auf, nehme wieder in dieser Linie γ nahe bei β an, trage $\gamma 3 = a$ auf u. s. w.; endlich führe man einen die Seiten $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ . . . u. s. w. berührenden Zug. Derselbe giebt die Zuglinie um so vollkommener an, je kleiner die Stücke $A\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta$ . . . u. s. w. sind. Herr Schiele nennt diese Linie die Antifrictionscurve (s. The Practical-Mechanics Journal, Juniheft 1849, übersetzt im polyt. Centralblatt, Jahrgang 1849).

Fig. 286.



Läßt man, wie Fig. 285 darstellt, die Antifrictionscurve am Umfange der Welle rechtwinkelig auslaufen, so ist der größte Reibungshalbmesser $CA = r$ zugleich die constante Tangente a, und daher das Reibungsmoment $M = \varphi R r$, ganz unabhängig von der Länge des Zapfens. Bei der ebenen Reibungsfläche AA von demselben Halbmesser ist das Reibungsmoment $M_1 = \frac{2}{3} \varphi R r$, also um ein Drittel kleiner, und vermindert sich im Laufe der Zeit noch mehr, da hier der äußere Umfang mehr abgeführt wird als der innere, und die Berührungsfläche noch kleiner ausfällt.

Man construirt auch Hähne und Hahngehäuse nach der Antifrictionscurve, da hier dieselben Verhältnisse vorkommen, wie bei den Stehzapfen.

Anmerkung. Wenn sich der Zapfendruck R so vertheilt, daß die Größe der Abnutzung, in der Richtung dieses Druckes gemessen, an allen Stellen des Zapfenumfanges gleich groß ausfällt, so ist

$$\frac{N_1 y_1}{sin.\ \alpha_1} = \frac{N_2 y_2}{sin.\ \alpha_2} = \frac{N_3 y_3}{sin.\ \alpha_3} \cdots,$$

also für den conischen Spitzzapfen, wo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \cdots = \alpha;\ N_1 y_1 = N_2 y_2 = N_3 y_3 \cdots$$

Bezeichnen ferner $O_1, O_2, O_3 \cdots$ die Oberflächentheile, in welchen die Normaldrücke $N_1, N_2, N_3 \cdots$ wirken, so hat man:

$$R = N_1 O_1\ sin.\ \alpha_1 + N_2 O_2\ sin.\ \alpha_2 + N_3 O_3\ sin.\ \alpha_3 + \cdots$$

also für den conischen Spitzzapfen:

$$R = (N_1 O_1 + N_2 O_2 + N_3 O_3 + \cdots)\ sin.\ \alpha \text{ zu setzen.}$$

Die Flächentheile $O_1, O_2, O_3 \cdots$ lassen sich als Ringe von einer und derselben Höhe $\frac{h}{n}$, der Breite $\frac{h}{n\ sin.\ \alpha}$, und den Halbmessern y_1, y_2, y_3 u. s. w. ansehen; es ist daher:

$$O_1 = 2\pi y_1 \frac{h}{n\ sin.\ \alpha},\ O_2 = 2\pi y_2 \frac{h}{n\ sin.\ \alpha},\ O_3 = 2\pi y_3 \frac{h}{n\ sin.\ \alpha} \text{ u. s. w. und}$$

$$O_2 = \frac{y_2}{y_1} O_1,\ O_3 = \frac{y_3}{y_1} O_1 \text{ u. s. w., sowie}$$

$$N_1 O_1 = N_2 O_2 = N_3 O_3 \cdots, \text{ und } R = n\,.\,N_1 O_1\ sin.\ \alpha.$$

Es sind also unter der gemachten Voraussetzung die Normaldrücke in gleich hohen Ringen des Zapfenumfangs gleich groß.

Umgekehrt folgt $N_1 O_1 = \frac{R}{n\ sin.\ \alpha}$, und daher das Moment der Zapfenreibung:

$$M = \varphi (N_1 O_1 y_1 + N_2 O_2 y_2 + N_3 O_3 y_3 + \cdots) = \varphi N_1 O_1 (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$
$$= \frac{\varphi R}{sin.\ \alpha} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Hat man es mit einem abgestumpften Kegelzapfen zu thun, dessen beiden Halbmesser r_1 und r_2 sind, so ist $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{n (r_1 + r_2)}{2}$ zu setzen, so daß sich $M = \frac{\varphi R (r_1 + r_2)}{2\ sin.\ \alpha}$ ergiebt.

Für den vollständigen Spitzzapfen, wo $r_2 = o$ ist, folgt daher $R = \frac{\varphi R r_1}{2\ sin.\ \alpha}$, während wir oben (§. 189), $M = \frac{2}{3} \varphi \frac{R r_1}{sin.\ \alpha}$ gefunden haben.

S. den Aufsatz von Herrn Reye zur Theorie der Zapfenreibung in Band 6 des Civil-Ingenieur, sowie den betreffenden Aufsatz vom Herrn Director Grashof in Band 5 der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.

Reibung an Spitzen und Schneiden. Um die Axenreibung drehender Körper möglichst zu vermeiden, unterstützt man diese durch zugespitzte Stifte, scharfe Schneiden u. s. w. Hätte man es hierbei mit vollkommen starren und unelastischen Körpern zu thun, so würde bei dieser Methode des Aufhängens oder Unterstützens gar kein Arbeitsverlust in Folge der Reibung entstehen können, weil hier von der Reibung kein meßbarer Weg zurückgelegt wird; allein da jeder Körper eine gewisse Elasticität besitzt, so wird beim Aufliegen eines solchen auf einer Spitze oder Schneide ein kleines Eindrücken derselben eintreten und sich dadurch eine reibende Fläche herausstellen, auf welcher von der Reibung Wege beschrieben werden, die allerdings zu einem, wenn auch nur sehr kleinen Arbeitsverluste Veranlassung geben. Bei lange anhaltenden Drehungen und Schwingungen der auf diese Weise unterstützten Körper stellen sich solche Reibungsflächen ohnedies noch ein in Folge des Abreibens der Spitze oder scharfen Kante, und es ist dann die Reibung nach dem Früheren zu beurtheilen. Man wendet aus diesem Grunde diese Unterstützungsmethoden auch nur bei Instrumenten, wie bei der Boussole, Wage u. s. w. an, wo es auf die Herabziehung der Reibung wesentlich ankommt und nur von Zeit zu Zeit Bewegungen zugelassen werden. §. 191

Versuche über Reibung eines auf einer harten Stahlspitze ruhenden und um diese drehbaren Körpers hat Coulomb angestellt. Nach diesen Versuchen wächst diese Reibung etwas stärker als der Druck und verändert sich mit der Stärke der Zuspitzung des unterstützenden Stiftes. Sie ist bei einer Granatfläche am kleinsten, größer bei einer Achatfläche, größer bei einer Fläche von Bergkrystall, noch größer bei einer Glasfläche, am größten aber bei Stahlflächen. Bei sehr kleinem Drucke, wie bei der Magnetnadel, kann der Stift bis auf 10° bis 12° Convergenz zugespitzt werden. Ist der Druck aber groß, so muß man weit größere Convergenzwinkel (30° bis 45°) anwenden. Die Reibung ist kleiner, wenn der Körper mit einer ebenen Fläche auf einer Spitze ruht, als wenn er mit einer conischen oder sphärischen Höhlung aufsitzt. Bei einer scharfen Schneide, wie sie bei Wagebalken vorkommt, finden jedenfalls ähnliche Beziehungen statt. Schwer zu belastende Wagebalken bekommen schneidige Axen von 90° Convergenz, leichte Wagen können eine Schärfung von 30° vertragen.

Nimmt man an, daß die Nadel AB, Fig. 287, am Stifte FCG die Spitze DCE von der Höhe $CM = h$ und den Halbmesser $DM = r$ eingedrückt habe, und setzt man voraus, daß das Volumen $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ dem Drucke R proportional sei, so läßt sich das Maß der Reibung auf folgende Weise finden. Setzen wir $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \mu R$, wo μ eine Erfahrungszahl

ist, und führen wir den Convergenzwinkel $DCE = 2\alpha$ ein, setzen also $h = r\,cotg.\,\alpha$, so erhalten wir den Halbmesser der Basis:

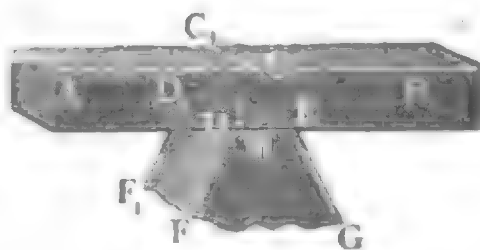
$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,\mu\,R\,tang.\,\alpha}{\pi}} \text{ und}$$

$$\varphi R r = \varphi \sqrt[3]{\frac{3\,\mu\,R^4\,tang.\,\alpha}{\pi}} = \varphi \sqrt[3]{\frac{3\,\mu}{\pi}} \cdot \sqrt[3]{R^4\,tang.\,\alpha}.$$

Hiernach ist also anzunehmen, daß die Reibung auf einem Stifte mit der Cubikwurzel aus der vierten Potenz des Druckes und der Cubikwurzel aus der Tangente des halben Convergenzwinkels gleichmäßig wächst.

Fig. 287.

Fig. 288.

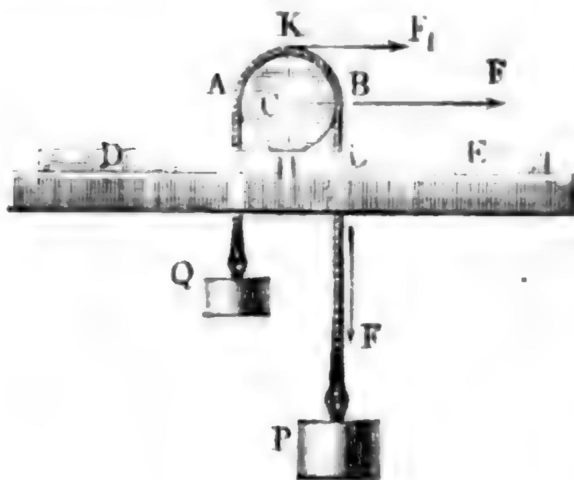


Ebenso läßt sich das Maß der Reibung eines Balkens AB, Fig. 288, finden, welcher über einer scharfen Kante CC_1 oscillirt. Ist α der halbe Convergenzwinkel DCM, l die Länge CC_1 der Schneide und R der Druck, so ergiebt sich das Maß des Reibungsmomentes:

$$\varphi R r = \sqrt{\frac{(R\,tang.\,\alpha)^3}{l}}.$$

§. 192 **Wälzende Reibung.** Die Theorie der wälzenden Reibung ist noch keineswegs fest begründet, man weiß, daß diese Reibung zunimmt mit dem Drucke und daß sie bei einem kleineren Durchmesser der Walze größer ist als bei einem größeren Durchmesser; in welcher algebraischen Abhängigkeit diese Reibung aber zum Drucke und Durchmesser des sich wälzenden Körpers steht, kann noch nicht als ausgemacht angesehen werden. Coulomb machte nur einige Versuche mit 2 bis 12 Zoll dicken Walzen aus Guajac (Pocken-) oder Franzosenholz und aus Ulmenholz, die er auf Unterlagen von Eichenholz wälzen ließ, indem er die Enden eines dünnen, um die Walze AB gelegten Fadens durch ungleiche Gewichte P und Q, Fig. 289, anspannte. Nach den Ergebnissen dieser Versuche scheint die wälzende Reibung dem Drucke direct und dem

Fig. 289.



Durchmesser der Walze umgekehrt proportional zu wachsen, so daß die Kraft zur Ueberwindung der wälzenden Reibung durch $F = f \cdot \frac{R}{r}$ auszudrücken ist, wenn R den Druck, r den Halbmesser der Walze und f den durch Versuche zu ermittelnden Reibungscoefficienten bezeichnet. Giebt man r in preuß. Zollen, so ist nach diesen Versuchen

für die Walzen aus Pockenholz $f = 0{,}0184$,
für die aus Ulmenholz $f = 0{,}0311$.

Für gußeiserne Räder von 20 Zoll Durchmesser, welche auf gußeisernen Schienen laufen, fand der Verfasser:

$f = 0{,}0178$, und Herr Sectionsrath Rittinger
$f = 0{,}0187$.

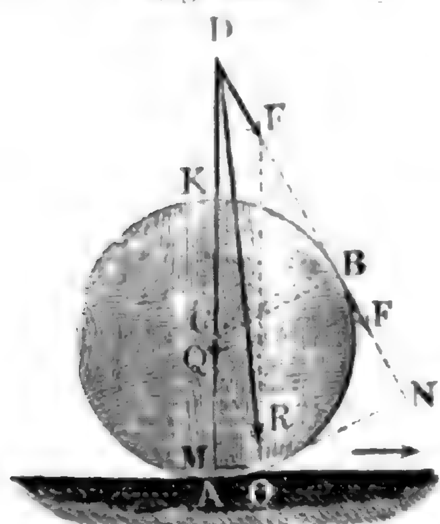
Nach Pambour ist für Eisenbahnräder von ungefähr 38 Zoll Höhe:
$f = 0{,}019$ bis $0{,}021$.

Die Formel $F = f\frac{R}{r}$ setzt voraus, daß die Kraft F zur Ueberwindung der Reibung an einem dem Walzenhalbmesser gleichen Hebelarm $HC = HL = r$ wirke, und daher mit der Walze einerlei Weg zurücklege; wirkt dieselbe aber an einem Hebelarm $HK = 2r$, so ist auch der Weg derselben doppelt so groß als der der Walze auf der Bahn, und daher die Reibung:

$$F_1 = \tfrac{1}{2} F = f\frac{R}{2r}.$$

Die Gleichgewichtsverhältnisse der wälzenden Reibung sind auf folgende Weise zu beurtheilen. In Folge des Druckes Q der Walze ACB auf die Basis AO, Fig. 290, drückt sich die letztere etwas zusammen, und es ruht deshalb die Walze nicht im tiefsten Punkte A, sondern in einem etwas vorwärts gelegenen Punkte O auf. Verlegt man nun die Angriffspunkte A und B der Kräfte Q und F, wovon F die zur Ueberwindung der Reibung nöthige Umdrehungskraft bezeichnet, nach dem Durchschnitte D, und construirt man aus Q und F das Kräfteparallelogramm, so erhält man durch dessen Diagonale $\overline{DR}$ die Kraft R, mit welcher die Walze in O auf ihre Unterstützung drückt, und es ist daher zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthig, daß die Kraftmomente eines Winkelhebels AON einander gleich sind. Setzt man nun den Abstand ON des Stützpunktes O von der Richtung der Kraft, $= a$, und die Entfernung OM desselben Punktes von der verticalen Schwerlinie des

Fig. 290.



Körpers $= f$, so hat man folglich:

$$Fa = Qf.$$

und daher die gesuchte Reibung:

$$F = \frac{f}{a} Q.$$

Der Hebelarm f ist eine Erfahrungsgröße und so klein, daß statt a auch der Abstand des Fußpunktes A von der Richtung der Kraft F, sowie statt Q der Gesammtdruck R eingesetzt werden kann.

Hiernach ist $F = \frac{f}{a} R$, und folglich in dem Falle, wenn die Kraft horizontal wirkt und durch den Mittelpunkt C geht, also $a = r$ ist:

$$F = \frac{f}{r} R,$$

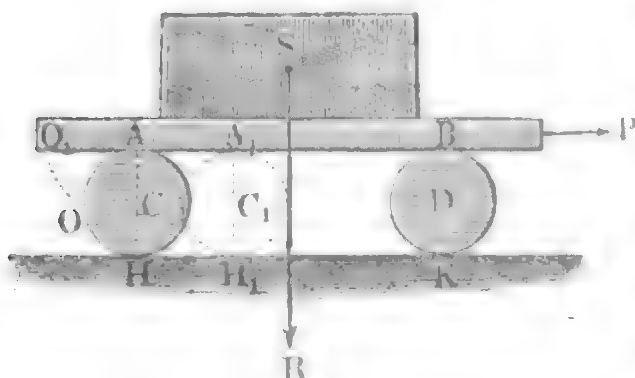
und dagegen dann, wenn diese Kraft im Scheitel K der Walze tangential wirkt, $a = 2r$, und daher:

$$F = \frac{f}{2r} R.$$

Der sogenannte Reibungscoefficient f der wälzenden Reibung ist folglich keine unbenannte Zahl, sondern eine Linie, und muß daher mit a in gleichem Maße ausgedrückt werden.

Wird ein über Walzen C und D, Fig. 291, liegender Körper ASB fortgezogen, so fällt die erforderliche Kraft P sehr klein aus, weil nur zwei wälzende Reibungen, nämlich die zwischen AB und den Walzen und die zwischen den Walzen und der Bahn HK, zu überwinden sind. Uebrigens ist der progressive Weg der Walzen nur halb so groß als der Weg der Last R, und es sind deshalb beim ferneren Fortgehen immer wieder neue Walzen vorn unterzuschieben, weil die Berührungspunkte A und B zwischen den Walzen und dem Körper AB vermöge des Wälzens ebenso viel rückwärts gehen, als die Axe der Walze vorwärts. Hat sich die Walze AH um den Bogen AO gedreht, so ist sie auch um einen diesem Bogen gleichen Weg AA_1 vorwärts gegangen und O mit O_1 in Berührung gekommen, der neue Berührungspunkt O_1 also um $AO_1 = AO$ hinter dem vorigen (A) zurückgegangen. Bezeichnet man die Coefficienten der Reibung auf HK und AB durch f und f_1, so hat man die Kraft zum Fortziehen der Last R:

Fig. 291.

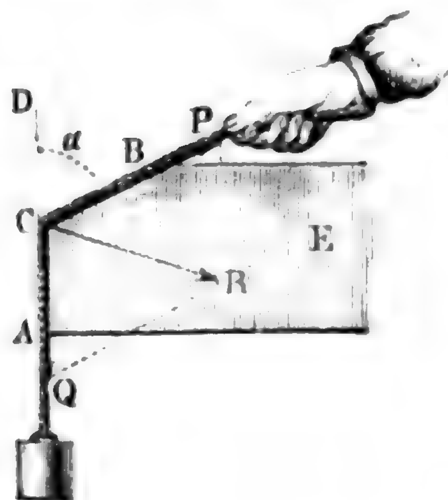


$$P = (f + f_1) \frac{R}{2r}.$$

Anmerkung. Die von Morin in großer Ausdehnung angestellten Versuche über den Widerstand der Wagen auf Straßen stimmen mit dem Gesetze, wonach dieser Widerstand mit dem Drucke gleichmäßig und mit der Dicke der Walze umgekehrt wächst, überein. Ein anderer französischer Ingenieur, Dupuit, hingegen leitet aus seinen Versuchen ab, daß die wälzende Reibung zwar dem Drucke direct, aber übrigens nur der Quadratwurzel aus dem Walzenhalbmesser umgekehrt proportional wachse. Die neueren Versuche von Poirée und Sauvage mittelst Eisenbahnwagen führen ebenfalls darauf, daß die rollende Reibung umgekehrt wie die Quadratwurzel des Radhalbmessers wächst. S. Comptes rendues de la société des ingenieurs civils à Paris, 5. et 6. année. Besondere theoretische Ansichten über wälzende Reibung findet man in v. Gerstner's Mechanik, Bd. I. §. 537, und in Brix' Abhandlung über die Reibung, Art. 6, entwickelt. Ausführlicher wird hierüber im dritten Theile bei der Förderung auf Straßen und Schienenwegen gehandelt.

Seilreibung. Wir haben nun die Reibung eines biegsamen Körpers kennen zu lernen. Wird ein übrigens vollkommen biegsames, durch eine Kraft Q angespanntes Seil um die Kante C eines festen Körpers ABE, Fig. 292, gelegt und dadurch um einen Winkel $DCB = \alpha^0$ von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, so entsteht in dieser Kante ein Druck R, aus dem wieder eine Reibung F hervorgeht, welche verursacht, daß die Kraft P zur Herstellung eines labilen Gleichgewichtes größer oder kleiner als Q ist. Der Druck ist (§. 77): §. 1

Fig. 292.



$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2\,P\,Q \cos.\alpha},$$ folglich die Reibung:

$$F = \varphi\sqrt{P^2 + Q^2 - 2\,P\,Q\cos.\alpha}.$$

Setzen wir nun noch $P = Q + F$ und P^2 annähernd $= Q^2 + 2\,QF$, so erhalten wir:

$$F = \varphi\sqrt{Q^2 + 2\,QF + Q^2 - 2\,Q^2\cos.\alpha - 2\,FQ\cos.\alpha}$$

$$= \varphi\sqrt{2\,(1 - \cos.\alpha)\,(Q^2 + QF)} = 2\,\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\sqrt{Q^2 + QF},$$

wofür wieder $= 2\,\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\,(Q + {}^1/_2\,F)$ anzunehmen ist, wenn man von der Quadratwurzel nur die ersten zwei Glieder berücksichtigt. Jetzt ergiebt sich:

$$F = \varphi\,F\sin.\frac{\alpha}{2} + 2\,\varphi\,Q\sin.\frac{\alpha}{2},$$

folglich die gesuchte Reibung:

$$F = \frac{2\,\varphi\,Q\,sin.\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}},$$ wofür meist genügend genau

$$F = 2\,\varphi\,Q\,sin.\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right),$$ und sogar sehr oft

$$F = 2\,\varphi\,Q\,sin.\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt werden kann, wenn der Ablenkungswinkel α klein ist. Um also das Seil über die Kante C wegzuziehen, ist eine Kraft

$$P = Q + F = \left(1 + \frac{2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}}\right) Q$$

nöthig, und um umgekehrt, durch das Seil das Niedergehen der Last Q zu verhindern, ist eine Kraft

$$P_1 = Q : \left(1 + \frac{2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}}\right)$$

erforderlich; annähernd läßt sich

$$P = \left[1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)\right] Q,$$ oder noch einfacher:

$$P = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q$$ und

$$P_1 = \frac{Q}{1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)},$$ oder:

$$P_1 = \frac{Q}{1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}} = \left(1 - 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q$$ setzen.

Geht das Seil über mehrere Kanten, so lassen sich durch wiederholte Anwendung dieser Formeln die Kräfte P und P_1 am anderen Seilende ebenfalls berechnen. Nehmen wir den einfachen Fall an, daß das Seil ABC, Fig. 293, um einen Körper mit n Kanten gelegt sei und an jeder Kante um denselben kleinen Winkel α abgelenkt werde. Die Spannung im ersten Seilstücke ist:

$$Q_1 = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q,$$

wenn die des Endes $= Q$ beträgt; die des zweiten

$$Q_2 = \left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right) Q_1 = \left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 Q,$$

die des dritten:

$$Q_3 = \left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right) Q_2 = \left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)^3 Q,$$

daher allgemein, die Kraft am letzten Ende:

$$P = \left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)^n Q,$$

insofern es auf eine Bewegung in der Richtung der Kraft P ankommt. Vertauscht man P durch Q, so erhält man dagegen die nöthige Kraft:

$$P = \frac{Q}{\left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)^n},$$

wofern nur eine Bewegung in der Richtung von Q zu verhindern ist.

Fig. 293.

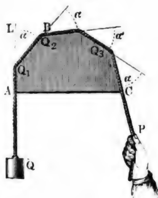
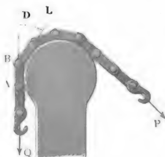


Fig. 294.



Die Reibung ist in einem Falle:

$$F = P - Q = \left[\left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] Q,$$

und im zweiten:

$$F = Q - P_1 = \left[\left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] P_1$$

$$= \left[1 - \left(1 + 2\,\varphi\; sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)^{-n}\right] Q.$$

Dieselben Formeln finden auch ihre Anwendung bei einem um einen Cylinder gewickelten, gegliederten Körper, z. B. bei einer Kette ABE, Fig. 294, wo dann n die Zahl der aufliegenden Glieder angiebt. Ist die Länge AB eines Kettengliedes $= l$ und die Entfernung CA der Axe A eines Gliedes

von dem Mittelpunkte C des bedeckten Kreisbogens, $= r$, so hat man für den Ablenkungswinkel $DBL = ACB = \alpha$, $sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}$.

Beispiel. Wie groß ist die Reibung am Umfange eines 4 Fuß hohen Rades, wenn dasselbe von zwanzig 5 Zoll langen und 1 Zoll dicken Gliedern einer Kette bedeckt wird, deren eines Ende festgehalten und deren anderes Ende mit 50 Pfund Kraft angespannt wird? Hier ist:

$$P_1 = 50 \text{ Pfund}, \; n = 20, \; sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{48+1} = \frac{5}{49};$$

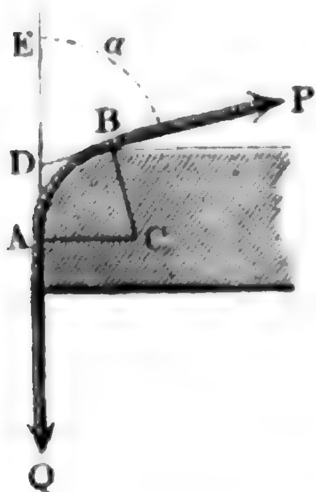
setzen wir nun noch für φ den mittleren Werth 0,35 ein, so erhalten wir die Reibung mit der die Kette dem Rade in seiner Umdrehung entgegenwirkt:

$$F = \left[\left(1 + 2 \cdot 0{,}35 \cdot \frac{5}{49}\right)^{20} - 1\right] \cdot 50 = \left[\left(1 + \frac{35}{490}\right)^{20} - 1\right] \cdot 50$$

$$= \left[\left(\frac{15}{14}\right)^{20} - 1\right] \cdot 50 = 2{,}974 \cdot 50 = 149 \text{ Pfund}.$$

194 Liegt ein gespanntes Seil AB, Fig. 295, um einen festliegenden, cylindrisch abgerundeten Körper ACB, so läßt sich die Reibung durch die im vorigen Paragraphen gefundene Regel ebenfalls finden. Es ist hier der Ablenkungswinkel $EDB = \alpha^0 =$ dem Centriwinkel ACB des Seilbogens AB; theilt man denselben in n gleiche Theile und sieht man den Bogen AB als aus n geraden Linien bestehend an, so erhält man auch n Ecken, jede mit der Ablenkung $\frac{\alpha^0}{n}$, und deshalb die Gleichung zwischen Kraft und Last wie im vorigen Paragraphen:

Fig. 295.



$$P = \left(1 + 2\,\varphi\, sin. \frac{\alpha}{2n}\right)^n Q.$$

Wegen der Kleinheit des Bogens $\frac{\alpha}{2n}$ läßt sich aber $sin. \frac{\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2n}$ setzen, weshalb sich

$$P = \left(1 + \frac{\varphi\,\alpha}{n}\right)^n Q \text{ herausstellt.}$$

Bedient man sich nun noch der binomischen Reihe, so erhält man:

$$P = \left(1 + n\frac{\varphi\,\alpha}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{(\varphi\,\alpha)^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{(\varphi\,\alpha)^3}{n^3} + \cdots\right)Q,$$

oder, da n sehr groß ist, also $n - 1 = n - 2 = n - 3 \ldots = n$ gesetzt werden kann:

$$P = \left(1 + \varphi\alpha + \frac{1}{1.2}(\varphi\alpha)^2 + \frac{1}{1.2.3}\cdot(\varphi\alpha)^3 + \cdots\right) Q.$$

Nun ist aber $1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots = e^x$, wo e die Grundzahl 2,71828 . . . des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet (s. analyt. Hülfslehren, Art. 19), es läßt sich daher auch setzen:

$$P = e^{\varphi\alpha}\,.\,Q,\text{ sowie } Q = Pe^{-\varphi\alpha},\text{ und umgekehrt:}$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi}\,Log.\,nat.\,\frac{P}{Q} = \frac{2,3026}{\varphi}(Log.\,P - Log.\,Q).$$

Giebt man den Seilbogen nicht in Theilen von π, sondern in Graden, so hat man $\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0}\cdot\pi$ zu substituiren, drückt man ihn endlich durch die Zahl u der Umschläge aus, so hat man $\alpha = 2\pi u$ zu setzen.

Die Formel $P = e^{\varphi\alpha}\,.\,Q$ giebt an, daß die Seilreibung $F = P - Q$ auf einem festliegenden Cylinder gar nicht vom Durchmesser desselben, sondern nur von der Anzahl der Seilumschläge abhängt, zeigt aber auch, daß sie leicht außerordentlich vergrößert und fast bis ins Unendliche gesteigert werden kann. Setzen wir $\varphi = 1/3$, so bekommen wir:

für	$1/4$ Umwickelung,	$P = 1,69\ Q$
„	$1/2$ „	$P = 2,85\ Q$
„	1 „	$P = 8,12\ Q$
„	2 „	$P = 65,94\ Q$
„	4 „	$P = 4348,56\ Q$ u. s. w.

(Anmerkung.) Aus der Gleichung $P = \left(1 + 2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q$ in §. 193 folgt:

$$P - Q = 2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\,Q,$$

oder, wenn man statt α das Bogenelement $\partial\alpha$, und statt $P - Q$ den entsprechenden Zuwachs ∂P der veränderlichen Seilspannung P einführt und $Q = P$ setzt:

$$\partial P = 2\varphi\frac{\partial\alpha}{2}\,P,\text{ oder }\frac{\partial P}{P} = \varphi\,\partial\alpha,$$

und man erhält durch Integration sogleich:

$$Ln.\,P = \varphi\alpha + Con.$$

Anfangs ist $\alpha = 0$ und $P = Q$, daher:

$$Ln.\,Q = 0 + Con.\text{ und } Ln.\,P - Ln.\,Q = Ln.\left(\frac{P}{Q}\right) = \varphi\alpha.$$

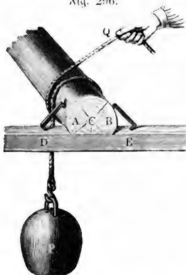
woraus sich durch Umkehrung die obige Gleichung:

$$\frac{P}{Q} = e^{\varphi\alpha},\text{ oder } P = e^{\varphi\alpha}\,Q$$

ebenfalls ergiebt.

Beispiel. Um eine große untheilbare Last P von 1200 Pfund von einer gewissen Höhe, z. B. in einem Schachte, herabzulassen, wickelt man das Seil, woran diese Last hängt, um einen festgeklammerten runden Stamm AB, Fig. 296, $1\frac{3}{8}$ mal herum und hält das übrig bleibende Seilende in der Hand. Mit welcher Kraft ist nun dieses Seilende anzuspannen, damit die Last langsam und gleichförmig niedersinke? Setzen wir auch hier $\varphi = 0{,}3$, so erhalten wir diese Kraft:

Fig. 296.



$$Q = P e^{-\varphi \alpha} = 1200 \,.\, e^{-0{,}3 \,.\, \frac{11}{8} 2\pi}$$

$$= 1200 \,.\, e^{-\frac{33}{40}\pi},$$

also:

$$Log.\, nat.\, Q = Log.\, nat.\, 1200 - \frac{33}{40}\pi$$

$$= 7{,}0901 - 2{,}5918$$

$$= 4{,}4983, \text{ oder}$$

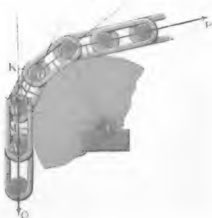
$$Log.\, Q = 1{,}9536,$$

daher $Q = 89{,}9$ Pfund.

§. 195 **Steifigkeit der Ketten.** Legen sich Seile oder gegliederte Körper u. s. w. um eine Rolle oder um den Umfang eines um eine Axe drehbaren Cylinders, so hört die im vorigen Paragraphen betrachtete Seil- oder Kettenreibung auf, weil nun der Radumfang mit dem Seile einerlei Geschwindigkeit annimmt, dafür ist nun aber eine Kraft zum Umbiegen beim Auflegen auf die Rolle, und nach Befinden auch eine solche zum Aufbiegen beim Abwickeln von der Rolle, aufzuwenden nöthig.

Ist es eine Kette, die sich um eine Trommel wickelt, so besteht der Widerstand des Auf- und Abwickelns in einer Reibung der Kettenbolzen, indem letztere in ihren Lagern um gewisse Winkel gedreht werden. Ist AB, Fig. 297, das eine und BG das nächstfolgende Kettenglied, ist ferner C die Drehungsaxe der Rolle, worauf sich die durch die Last Q ausgespannte Kette aufwickelt, sind endlich CM und CN Perpendikel, gegen die Längenaxen der Glieder AB und BG gefällt, so ist $MCN = \alpha^0$ der Winkel, um welchen sich die Rolle dreht, während

Fig. 297.



sich ein neues Glied auflegt, und auch zugleich der Winkel $KBG = 180^0 - ABG$, um welchen sich bei diesem Auflegen das Glied BG mit seinem Bolzen BD in dem Gliede AB umdreht. Bei dem Halbmesser $BD = BE = r_1$ des Bolzens durchläuft der Druck- oder Reibungspunkt D, während sich ein Kettenglied auflegt, einen Bogen $DE = r_1 \alpha$, und es ist folglich die hierbei verrichtete Arbeit der Reibung $\varphi_1 Q$ im Punkte $D, = \varphi_1 Q . r_1 \alpha$. Für die Kraft P_1 zur Ueberwindung dieser Reibung, in der Richtung der Längenaxe BG wirkend, angenommen, erhält man den gleichzeitigen Weg $s = CN$ mal Bogen des Winkels $MCN = \overline{CN} . \alpha$ und daher die Arbeit $= P_1 . \overline{CN} . \alpha$; es ergiebt sich daher durch Gleichsetzen beider Arbeiten $P_1 . \overline{CN} . \alpha = \varphi_1 . Q r_1 \alpha$ und die gesuchte Kraft, wenn man noch den um die halbe Kettenstärke vergrößerten Halbmesser CN der Trommel durch a bezeichnet:

$$P_1 = \varphi_1 Q \frac{r_1}{a}.$$

Ohne Rücksicht auf alle Reibungen wäre die Kraft zum Umdrehen der Rolle:

$$P = Q,$$

mit Rücksicht der Reibung beim Aufwickeln der Kette ist sie aber:

$$P = Q + P_1 = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q.$$

Wickelt sich die Kette von der Trommel ab, so findet ein gleicher Widerstand statt; wenn also, wie bei den sogenannten Leitrollen, ein Auflegen auf der einen Seite und ein Abwickeln auf der anderen statthat, so ist die Kraft

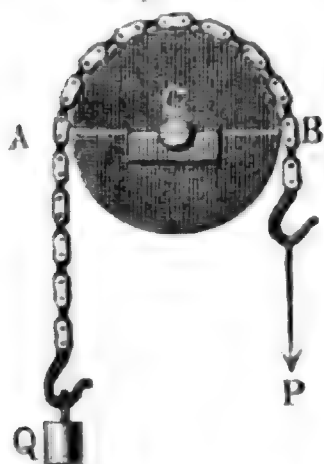
$$P = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right)^2 Q \text{ oder annähernd } = \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q.$$

Ist endlich noch der Zapfendruck $= R$, und der Zapfenhalbmesser $= r$, so folgt die Zugkraft bei Berücksichtigung aller Hindernisse:

$$P = \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q + \varphi \frac{r}{a} R.$$

Beispiel. Wie groß ist die Kraft P am Ende einer um eine Rolle ACB, Fig. 298, geschlagenen Kette, wenn die vertical niederziehende Last $Q = 110$ Pfund, das Gewicht der Rolle sammt Kette, 50 Pfund beträgt, der bis zur Mitte der Kette gemessene Halbmesser a der Rolle, $= 7$ Zoll, der Halbmesser des Zapfens $C, = \frac{5}{8}$ Zoll und der Halbmesser der Kettenbolzen, $= \frac{3}{8}$ Zoll mißt? Setzen wir die Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$ und $\varphi_1 = 0{,}15$, so erhalten wir nach der letzten Formel die Kraft:

Fig. 298.



$$P = \left(1 + 2 . 0{,}15 \cdot \frac{3}{8.7}\right) \cdot 110 + 0{,}075 . \frac{5}{8.7} (110 + 50 + P),$$

oder, wenn wir rechts $P = 110$ annähernd annehmen:

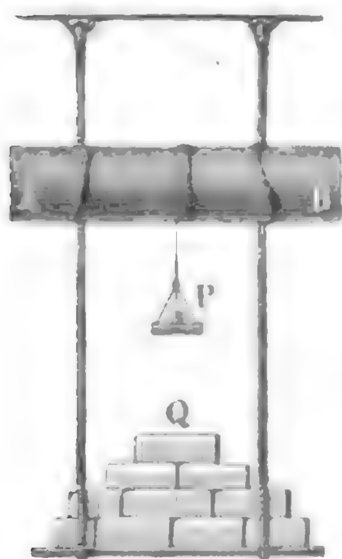
$$P = 1{,}016 \ . \ 110 + 0{,}0067 \ . \ 270 = 111{,}76 + 1{,}81 = 113{,}6 \text{ Pfund}.$$

196 **Steifigkeit der Seile.** Beim Umbiegen eines Seiles um eine Rolle, oder beim Aufwickeln desselben auf eine Welle, tritt die Steifigkeit (franz. roideur; engl. rigidity) desselben als ein der Bewegung desselben entgegengesetztes Hinderniß hervor. Dieser Widerstand hängt nicht allein von dem Stoffe ab, aus dem das Seil gefertigt ist, sondern auch von der Zusammensetzungsweise und von der Stärke des Seiles, und läßt sich deshalb nur auf experimentellem Wege ermitteln.

Versuche zu diesem Zwecke sind vorzüglich von Coulomb, und in der neueren Zeit von dem Verfasser selbst angestellt worden. Während sich Coulomb nur mit schwachen Hanfseilen von $1/4$ bis höchstens $1 1/2$ Zoll Stärke beschäftigte und dieselben auch nur auf Rollen von 1 bis höchstens 6 Zoll Durchmesser aufwickeln ließ, hat der Verfasser Hanfseile von 2 Zoll Stärke und Drahtseile von $1/2$ bis 1 Zoll Stärke über Rollen von 2 bis $6 1/2$ Fuß Durchmesser laufen lassen.

Coulomb hat seine Versuche auf zweierlei Weise ausgeführt. Ein Mal, nach Amontons, mit einem in Fig. 299 abgebildeten Apparate, wo AB eine von zwei Seilen umschlungene Walze ist, die Spannung durch ein Gewicht Q hervorgebracht und das Herabrollen der Walze durch ein zweites Gewicht P, welches mittels eines dünnen Fadens an dieser Walze zieht, bewirkt wird. Ein zweites Mal hat er die Seile um auf einer horizontalen Bahn sich wälzende Cylinder gelegt, und aus der Differenz der an beiden Seilen hängenden und ein langsames Fortrollen bewirkenden Gewichte, nach Abzug der rollenden Reibung, auf den Steifigkeitswiderstand geschlossen.

Fig. 299.



Aus den Versuchen Coulomb's geht hervor, daß der Steifigkeitswiderstand mit der Stärke der Spannung des sich aufwickelnden Seiles ziemlich gleichmäßig wächst, daß er aber auch noch aus einem constanten Gliede K besteht, wie sich allerdings nicht anders erwarten läßt, weil schon eine gewisse Kraft nöthig ist, um ein unangespanntes Seil umzubiegen. Auch stellt sich heraus, daß dieser Widerstand im umgekehrten Verhältnisse der Rollendurchmesser zunimmt, daß er also bei dem doppelten Durchmesser der Rolle nur halb so groß ist, beim dreifachen ein Drittel u. s. w. Endlich läßt sich die Beziehung zwischen der Seildicke und der Seilsteifigkeit nach diesen Versuchen nur annähernd angeben, wie es auch kaum anders zu erwarten ist, da die Steifigkeit auch noch von der materiellen Beschaffenheit und von der Stärke der Drehung der Fäden und Litzen mit abhängt. Bei neuen Seilen fand sich die Steifigkeit ungefähr proportional der Potenz $d^{1.7}$, bei alten aber mehr $d^{1.4}$, wenn d den Durchmesser des Seiles bezeich-

net. Es ist also nur sehr ungefähr, wenn Einige diesen Widerstand der einfachen, Andere dem Quadrate der Seilstärke proportional wachsend annehmen.

Prony's Formel für den Steifigkeitswiderstand der Hanfseile. §. 197 Dem Vorstehenden zufolge läßt sich der Steifigkeitswiderstand der Hanfseile durch die Formel:

$$S = \frac{d^n}{a}(K + \nu Q),$$

wo d die Seilstärke, a der Rollenhalbmesser, bis Axe des Seiles gemessen, Q die Spannung des sich aufwickelnden Seiles, n, K und ν aber Erfahrungszahlen bezeichnen. Prony hat aus den Versuchen Coulomb's gefunden, daß für neue Seile

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(2,45 + 0,053\ Q),$$

und für alte:

$$S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(2,45 + 0,053\ Q)$$

gesetzt werden kann, wenn a und d in Linien, Q, S in Pfunden ausgedrückt sind. Diese Ausdrücke beziehen sich aber auf Pariser Maß, in preußischen Zollen und Neupfunden ausgedrückt, ändern sie sich in folgende um:

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(13,31 + 0,295\ Q) \text{ und } S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(6,39 + 0,141\ Q).$$

Da selbst diese complicirteren Formeln nicht immer die erwünschte Uebereinstimmung mit den Versuchsresultaten geben, so kann man, so lange nicht neue Versuche zu Grunde gelegt werden können, mit Eytelwein:

$$S = \nu \cdot \frac{d^2}{a} Q = \frac{d^2 Q}{3500 a}$$

setzen, wobei vorausgesetzt ist, daß a in preußischen Fußen und d in preußischen Linien, dagegen Q und S in willkürlichem, jedoch gleichem Gewichtsmaße auszudrücken sind. Für Metermaß ist:

$$S = 18,6 \cdot \frac{d^2 Q}{a}.$$

Diese Formel giebt natürlich nur bei größeren Spannungen, wie sie allerdings meist in der praktischen Anwendung vorkommen, genügende Annäherungsresultate.

Die Steifigkeit getheerter Seile ist ungefähr um ein Sechstel größer als die ungetheerter Seile gefunden worden, und nasse Seile hat man ungefähr ein Zwölftel steifer gefunden als trockene.

Beispiel. Bei einer Seilspannung von 350 Neupfund und einem Rollenhalbmesser von $2\frac{1}{2}$ Zoll ist für ein 9 Linien dickes neues Seil der Steifigkeitswiderstand nach Prony:

$$S = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{1,7} (13,31 + 0,295 \, . \, 350) = 0,613 \, . \, 46,6 = 28,6 \text{ Pfund},$$

nach Eytelwein:

$$S = \frac{9^2 \, . \, 350}{3500 \, . \, \frac{5}{24}} = 38,9 \text{ Pfund}.$$

Wäre die Spannung Q nur 150 Pfund, so hätte man nach Prony:

$$S = 0,613 \, . \, 23,0 = 14,10 \text{ Pfund},$$

nach Eytelwein:

$$= \frac{81 \, . \, 24 \, . \, 3}{350} = 16,7 \text{ Pfund},$$

also hier eine bessere Uebereinstimmung. Man sieht aus diesen Beispielen, wie wenig Sicherheit diese Formeln gewähren.

Anmerkung. Tabelle zur Erleichterung der Berechnung des Steifigkeitswiderstandes der Seile theilt der „Ingenieur" Seite 365 mit. Nach Morin (siehe dessen Leçons de Mécanique pratique) ist, wenn n die Anzahl der Seilfäden bezeichnet, und der Rollenhalbmesser a in Centimetern ausgedrückt wird, für ungetheerte Seile:

$$d = \sqrt{0,1338 \, n} \text{ Centimeter und}$$

$$S = \frac{n}{2a} (0,0297 + 0,0245 \, n + 0,0363 \, Q) \text{ Kilogr.}$$

$$= \frac{d^2}{a} (0,1110 + 0,6843 \, d^2 + 0,1357 \, Q) \text{ Kilogr.},$$

und für getheerte:

$$d = \sqrt{0,186 \, n} \text{ Centimeter, und}$$

$$S = \frac{n}{2a} (0,14575 + 0,0346 \, n + 0,0418 \, Q) \text{ Kilogr.}$$

$$= \frac{d^2}{a} (0,3918 + 0,5001 \, d^2 + 0,1124 \, Q) \text{ Kilogr.}$$

Drückt man aber d und a in Zollen und S und Q in Neupfunden aus, so stellt sich für ungetheerte Seile:

$$S = \frac{d^2}{a} (0,580 + 24,47 \, d^2 + 0,3548 \, Q)$$

und für getheerte Seile:

$$S = \frac{d^2}{a} (2,049 + 17,89 \, d^2 + 0,2939 \, Q)$$

heraus. Z. B. ist bei einem ungetheerten Seile, für $d = \frac{3}{4}$ Zoll, $a = \frac{5}{2}$ Zoll und $Q = 350$ Pfund:

$$S = \frac{9 \, . \, 2}{16 \, . \, 5} \left(0,580 + 24,47 \cdot \frac{9}{16} + 0,3548 \, . \, 350\right)$$

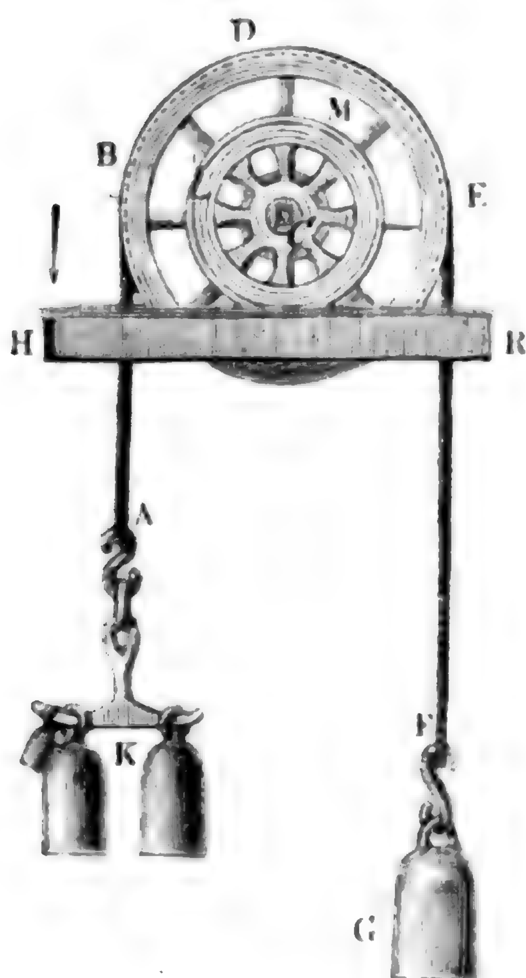
$$= \frac{9}{40} (0,580 + 13,77 + 124,180) = 31,2 \text{ Pfund}.$$

Die Prony'sche Formel gab im letzten Beispiele $S = 28,6$ Pfund.

§. 198 **Versuche über die Steifigkeit starker Seile.** Der Verfasser hat sich bei seinen Versuchen über die Steifigkeit der Seile eines in Fig. 300

abgebildeten Apparates bedient. Die Scheibe oder Rolle BDE, auf welche sich das zu untersuchende Seil $ABDEF$ auflegte, war mit einem Paar eiserner Räder, wie CLM, auf einer Welle C befestigt, und dieses Räderpaar stand auf einer horizontalen Schienenbahn HR. Nachdem man das eine Seilende F durch ein angehängtes Gewicht G gespannt hatte, hing man an das Kreuz K, welches am anderen Seilende A befestigt war, so viel Gewichte, bis das Räderpaar sammt der Scheibe und ihren Gewichten langsam fortzurollen anfing. Um sich von den Unvollkommenheiten des Apparates möglichst unabhängig zu machen, wurde nachher auf der Seite bei F so viel Gewicht zugelegt, bis auch das Fortrollen des armirten Räderpaares nach der entgegengesetzten Richtung eintrat. Das arithmetische Mittel von den Zulagen gab nun, nachdem man hiervon noch die wälzende Reibung abgezogen hatte, die Kraft zur Ueberwindung der Seilsteifigkeit.

Fig. 300.



Den Coefficienten der in Abzug zu bringenden rollenden Reibung ermittelte man auf dieselbe Weise, indem man statt des Seiles einen schwachen Bindfaden, dessen Steifigkeitswiderstand vernachlässigt werden konnte, auflegte. Der mittlere Werth dieses Coefficienten ist oben, §. 192, mitgetheilt worden.

Der Steifigkeitswiderstand besteht nach des Verfassers Ansicht weniger aus der Steifigkeit, als aus der Reibung der einzelnen Fäden oder Drähte, die natürlich beim Auflegen auf die Rolle ihre gegenseitige Lage ändern müssen. Der erste Theil dieses Widerstandes fällt beim Umlegen eines Drahtseiles um eine Leitrolle ganz aus, weil dieses Seil vermöge seiner Elasticität beim Abwickeln zum Wiedergeradestrecken genau so viel Arbeit ausgiebt, als es beim Aufwickeln zum Krümmen in Anspruch genommen hat. Hier besteht also der Steifigkeitswiderstand lediglich in der Reibung der einzelnen Drähte unter einander, und daß dem so sei, zeigen auch die Versuche des Verfassers, durch welche sich ergeben hat, daß dieser Widerstand bei eingeölten oder frisch getheerten Drahtseilen um 40 Procent kleiner ist als bei trockenen. Bei Hanfseilen ist das Verhältniß ein anderes, denn da diese, zumal nach längerem Gebrauche, fast gar keine Elasticität besitzen, so erfordern die einzelnen Fäden und Litzen derselben nicht allein Kraft zum Krümmen, sondern auch Kraft zum Wiedergeradestrecken.

§. 199 **Neue Formel für den Steifigkeitswiderstand.** Da die Steifigkeit eines Seiles nicht allein von der Seilstärke, sondern auch von der Stärke der Drehung und von der Zusammensetzungsweise desselben abhängt, so hält es der Verfasser für angemessen, dieselbe durch die einfachere Formel:

$$S = \frac{K + \nu Q}{a}$$

auszudrücken und die Constanten K und ν für jede Seilart besonders zu bestimmen. Auch hat sich aus den Versuchen des Verfassers ergeben, daß sich, zumal für die Drahtseile, angemessener statt $\frac{K}{a}$, bloß K, und demnach

$$S = K + \frac{\nu Q}{a} \text{ setzen läßt.}$$

1. Für ein getheertes Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fuß Höhe, ergab sich der Steifigkeitswiderstand:

$$S = 1,5 + 0,00565 \frac{Q}{a} \text{ Kilogramm,}$$

wobei der Rollenhalbmesser a in Metern auszudrücken ist, oder

$$S = 3,0 + 0,216 \frac{Q}{a} \text{ Pfund,}$$

wo a in Zollen gegeben sein muß.

2. Für ein neues ungetheertes Hanfseil von $^3/_4$ Zoll Stärke und eine Rolle von 21 Zoll Durchmesser ergab sich:

$$S = 0,086 + 0,00164 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 0,17 + 0,0625 \frac{Q}{a} \text{ Pfund.}$$

3. Für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1^1/_2$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fuß 0,64 Pfund wog, wurde bei Rollen von 4 bis 6 Fuß Höhe,

$$S = 0,49 + 0,00238 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 0,98 + 0,0910 \frac{Q}{a} \text{ Pfund}$$

gefunden.

4. Für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus 4 . 4 = 16 Drähten von je $1^1/_3$ Linien Dicke, und pr. Fuß 0,63 Pfund wiegend, stellte sich bei einer Rolle von 21 Zoll Durchmesser,

$$S = 0,57 + 0,000694 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 1,14 + 0,00264 \frac{Q}{a} \text{ Pfund}$$

heraus.

Anmerkung. Eine ausführliche Beschreibung der Versuche des Verfassers findet man in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann, Brückmann und Röting, Band I. Freiberg 1848.

Die Hanfseile unter 1. wurden in Freiberg zum Fördern durch Wassergöpel an-

gewendet, sind aber in den neueren Zeiten durch die Drahtseile unter 3. und 4. ersetzt werden. Beiderlei Seile haben bei sechsfacher Sicherheit eine Tragkraft von circa 30 Centnern. Es ist aus dem Vorstehenden zu ersehen, daß bei gleicher Tragkraft der Steifigkeitswiderstand bei Drahtseilen viel kleiner ist als bei Hanfseilen. Nimmt man z. B. die Seilspannung $Q = 2000$ Pfund und den Rollenhalbmesser $a = 40$ Zoll an, so erhält man den Steifigkeitswiderstand für ein Hanfseil:

$$S = 3{,}0 + 0{,}216 \,.\, {}^{2000}/_{40} = 13{,}8 \text{ Pfund},$$

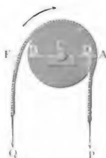
und dagegen für ein Drahtseil:

$$S = 0{,}98 + 0{,}0910 \,.\, {}^{2000}/_{40} = 5{,}5 \text{ Pfund}.$$

Theorie der Leitrolle. Wenden wir nun die im Vorstehenden mitgetheilten Formeln für den Steifigkeitswiderstand der Seile auf die Theorie der festen Rollen an. Es sei ACB, Fig. 301 oder Fig. 302, die Rolle, a §. 200

Fig. 301.

Fig. 302.



der Halbmesser $CA = CB$, r der Zapfenhalbmesser und G das Gewicht derselben, ferner d die Seilstärke, Q die an einem Seilende angehängte Last, S der Steifigkeitswiderstand, F die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung, und folglich $Q + F + S$ die ganze Kraft P.

Die Steifigkeit des Seiles äußert sich dadurch, daß das Stil beim Aufwickeln nicht plötzlich die Krümmung des Rollenumfanges annimmt und sich ebenso beim Abwickeln nicht plötzlich gerade streckt, sondern in einem Bogen mit wachsender Krümmung sich auf die Rolle auflegt, und sich in einem Bogen mit abnehmender Krümmung von derselben wieder abwickelt. Zwischen den elastischen Drahtseilen und den unelastischen Hanfseilen findet der Unterschied statt, daß sich jene beim Abwickeln etwas eher, und diese etwas später von dem Rollenumfange ablösen, folglich der Hebelarm CD der Kraft im ersten Falle (Fig. 301) etwas größer, und im zweiten Falle (Fig. 302) etwas kleiner als der Halbmesser $CA = a$ der Rolle ist, wogegen der Lastarm CE in beiden Fällen den Rollenhalbmesser a übertrifft. Wenn man von der Zapfenreibung F absieht, also $P = Q + S$ setzt, so hat man

$$(Q + S) \,.\, \overline{CD} = Q \,.\, \overline{CE},$$

daher den Steifigkeitswiderstand:

$$S = \left(\frac{CE - CD}{CD}\right) Q = \left(\frac{CE}{CD} - 1\right) Q.$$

und das Hebelarmverhältniß:

$$\frac{CE}{CD} = 1 + \frac{S}{Q};$$

was sich nun durch Einsetzen eines der oben angegebenen Werthe für S leicht berechnen läßt.

Wir können übrigens auch ohne weitere Berücksichtigung dieses Hebelarmverhältnisses die Kraft $P = Q + S + F$ bestimmen, wenn wir in diesem Ausdrucke für schwache Hanfseile nach Prony

$$S = \frac{d^n}{a} (K + \nu Q),$$

dagegen für Draht- und starke Hanfseile nach dem Verfasser

$$S = K + \frac{\nu Q}{a},$$

und die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung

$F = \varphi \frac{r}{a} (Q + G + P)$ oder annähernd $F = \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G)$ setzen.

Es folgt so im ersten Falle:

$$P = Q + \frac{d^n}{a} (K + \nu Q) + \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G),$$

und im zweiten:

$$P = Q + K + \frac{\nu Q}{a} + \varphi \frac{r}{a} (2 Q + G).$$

Bei einer Radwelle ist natürlich noch eine Reduction der Kraft vom Wellenumfange auf den Radumfang nöthig (s. §. 165).

Beispiel. Wenn sich ein Drahtseil von ungefähr 8 Linien Dicke um eine Leitrolle von 5 Fuß Höhe, 3 Zoll Zapfenstärke und 1500 Pfund Gewicht legt, und die Spannung des Seiles 1200 Pfund beträgt, so hat man bei dem Reibungscoefficienten $\varphi = 0,075$, die nöthige Kraft:

$$P = 1200 + 0,98 + 0,091 \cdot {}^{1200}/_{30} + 0,075 \cdot {}^{3}/_{60} (2400 + 1500)$$
$$= 1200 + 0,98 + 3,64 + 14,62 = 1219 \text{ Pfund};$$

es geht also durch das Umlegen um diese Leitrolle ${}^{19}/_{12} = 1,6$ Procent an Kraft verloren.

Wenn statt des Drahtseiles ein Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke in Anwendung gekommen wäre, so hätte man:

$$P = 1200 + 3,0 + 0,216 \cdot {}^{1200}/_{30} + 14,62 = 1226,3 \text{ Pfund}$$

und daher den Kraftverlust:

$$P - Q = \frac{26,3}{12} = 2,2 \text{ Procent}.$$

Vierter Abschnitt.

Die Anwendung der Statik auf die Elasticität und Festigkeit der Körper.

Erstes Capitel.

Die Zug-, Druck- und Schub-Elasticität und Festigkeit.

Elasticität. Die Moleküle oder Theile eines festen oder starren Körpers §. 201
hängen mit einer gewissen Kraft, der sogenannten Cohäsion (franz. cohésion; engl. cohesion), unter einander zusammen, welche zu überwinden ist, wenn Körper in ihrer Gestalt und Größe verändert oder gar zertheilt werden. Die erste Wirkung, welche Kräfte in einem Körper hervorbringen, ist eine Veränderung in der Lage seiner Theile gegen einander und eine daraus erwachsende Form- und Volumenveränderung des Körpers. Ueberschreiten die auf einen Körper wirkenden Kräfte eine gewisse Grenze, so tritt endlich eine Trennung der Theile und nach Befinden eine Zertheilung des ganzen Körpers ein. Die Fähigkeit der Körper, die durch Einwirkung von Kräften erlittene Formveränderung nach Wegnahme dieser Kräfte vollständig wieder aufzuheben, heißt Elasticität (franz. élasticité; engl. elasticity) im weiteren Sinne des Wortes. Die Elasticität eines jeden Körpers hat eine gewisse Grenze; überschreitet die Gestalts- oder Volumenveränderung ein gewisses Maß, so bleibt im Körper noch eine solche räumliche Veränderung zurück, wenn auch die Kräfte, welche jene Veränderung hervorgebracht haben, zu wirken aufhören. Die Elasticitätsgrenze ist bei verschiedenen Körpern sehr verschieden. Körper, welche eine große Formveränderung zulassen, ehe diese Grenze eintritt, nennt man vollkommen elastische, Körper aber, bei welchen kaum bemerkbare Formveränderungen der Elasticitätsgrenze vorausgehen, heißen unelastische, wiewohl es in Wirklichkeit Körper dieser Art gar nicht giebt.

Es ist eine wichtige Regel der Architektur und des Maschinenwesens, die zum Bau zu verwendenden Körper nicht so stark zu belasten, daß die hervorgebrachten Formveränderungen die Elasticitätsgrenze erreichen oder gar überschreiten.

§. 202 **Elasticität und Festigkeit.** Verschiedene Körper bieten verschiedene Erscheinungen dar, wenn sie über die Elasticitätsgrenze hinaus in ihrer Form verändert werden. Ist ein Körper spröde (franz. cassant; engl. brittle), so zerspringt er in Stücke, wenn man seine Form über die Elasticitätsgrenze hinaus verändert; ist er aber geschmeidig (franz. und engl. ductile), wie z. B. viele Metalle, so läßt er noch bedeutende Veränderungen der Form außerhalb der Elasticitätsgrenze zu, ohne eine Trennung seiner Theile zu erleiden. Manche Körper sind hart (franz. dur; engl. hard), andere weich (franz. mou; engl. soft); während jene der Trennung einzelner Theile einen großen Widerstand entgegensetzen, ist bei diesen eine Trennung der einzelnen Theile sehr leicht ausführbar.

Unter Elasticität im engeren Sinne des Wortes verstehen wir den Widerstand, mit welchem ein Körper der Formveränderung entgegenwirkt, dagegen unter Festigkeit (franz. résistance; engl. strength) den Widerstand, welchen ein Körper der Zertheilung desselben entgegensetzt. Mit Beidem werden wir uns im Folgenden beschäftigen.

Nach der Art und Weise, wie äußere Kräfte auf Körper wirken und dieselben in räumlichen Beziehungen verändern, läßt sich die Elasticität und Festigkeit der Körper eintheilen:

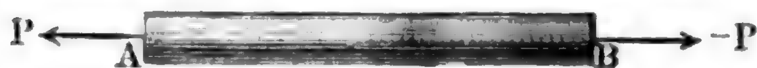
I. in einfache und
II. in zusammengesetzte;

erstere aber wieder

1) in die absolute oder Zug-, und
2) in die rückwirkende oder Druck-Elasticität und Festigkeit, sowie
3) in die relative oder Biegungs-,
4) in die Schub- oder Scheer-, und
5) in die Torsions- oder Drehungs-Elasticität und Festigkeit.

Wirken zwei äußere Kräfte P, $-P$ durch Zug (franz. traction; engl. extension) in der Axenrichtung eines Körpers AB, Fig. 303, so widersteht derselbe durch seine Zug- oder absolute Elasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance de traction; engl. elasticity and strength of extension) dem Ausdehnen und Zerreißen; wirken dagegen zwei Kräfte P, $-P$ drückend

Fig. 303.



in der Axenrichtung eines Körpers AB, Fig. 304, so daß dieser zusammengedrückt und endlich zermalmt oder zerdrückt wird, so hat man die Druck- oder rückwirkende Elasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance de compression; engl. elasticity and strength of compression) zu überwinden.

Fig. 304.

Wenn ferner drei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte P, Q, R verschiedene Punkte A, B, C in der Axe eines Körpers AB, Fig. 305, ergreifen und rechtwinkelig gegen diese Axe wirken, so wird dieser Körper gebogen und nach Befinden zerbrochen, und es ist die Biegungs- oder relative Elasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance de flexion; engl. elasticity and strength of flexure) des Körpers, welche bei diesem Umbiegen und Abbrechen überwunden wird.

Liegen im letzteren Falle die Angriffspunkte A und C der Kräfte P und R sehr nahe an einander, wie Fig. 305 darstellt, so tritt in dem Querschnitt

Fig. 305.

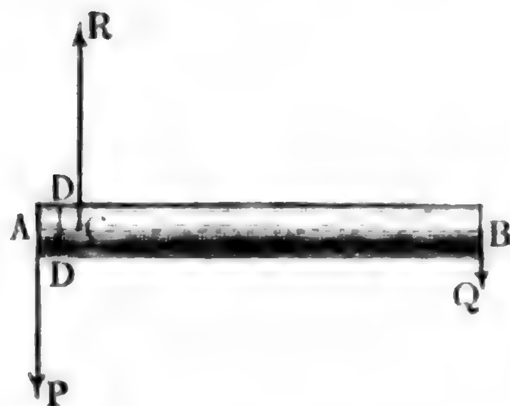


Fig. 306.

DD zwischen beiden Punkten A und C eine Verschiebung, und bei hinreichender Größe von P eine Zertrennung des Körpers in zwei Theile ein, und man hat es dann mit der Elasticität und Festigkeit des Abscheerens (franz. élasticité et résistance par glissement cisaillement ou tranchant; engl. elasticity and strength of shearing) zu thun.

Wirken endlich zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräftepaare $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ so auf einen Körper CD, Fig. 306, daß deren Ebenen rechtwinkelig auf der Axe dieses Körpers stehen, so erleidet der Körper eine Drehung, welche zuletzt in ein Abwürgen übergehen kann, und es ist hierbei die sogenannte Drehungselasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance de torsion; engl. elasticity and strength of torsion) zu überwinden.

Wirken mehrere der hier aufgezählten Kräfte auf einen Körper zugleich, so tritt die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit oder eine Vereinigung von zwei oder mehreren einfachen Elasticitäten und Festigkeiten in Wirksamkeit.

203 **Ausdehnung und Zusammendrückung.** Den einfachsten Fall der Elasticität und Festigkeit bietet die Ausdehnung und Zusammendrückung prismatischer Körper dar, wenn dieselben von Kräften ergriffen werden, deren Richtungen in die Axe dieser Körper fallen. Es ist natürlich hierbei nicht nöthig, daß beide Kräfte eines solchen Körpers bewegend sind, die Wirkung bleibt dieselbe, wenn der Körper an einem Ende festgehalten oder unterstützt und am anderen Ende von einer Zug- oder Druckkraft ergriffen wird. Man ruft also auch diesen Fall hervor, wenn man entweder ein verticalhängendes Prisma $ABCD$, Fig. 307, durch ein angehängtes Gewicht P oder ein von unten unterstütztes Prisma $ABCD$, Fig. 308, durch ein aufliegendes Gewicht P belastet. Im ersteren Falle wird der Körper um eine gewisse Größe $CC_1 = DD_1 = \lambda$ ausgedehnt, und im zweiten Falle um eine solche Größe zusammengedrückt; ist also anfangs die Länge $AD = BC$ des Körpers $= l$, so wird dieselbe im ersteren Falle auf

Fig. 307.

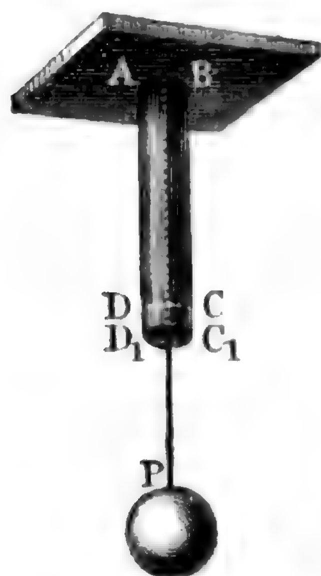
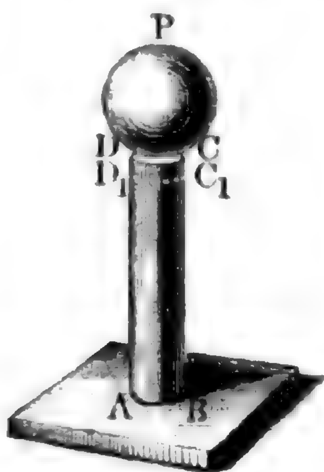


Fig. 308.



$$AD_1 = BC_1 = AD + DD_1 = l + \lambda$$

gesteigert, und im zweiten Falle auf

$$AD_1 = BC_1 = AD - DD_1 = l - \lambda$$

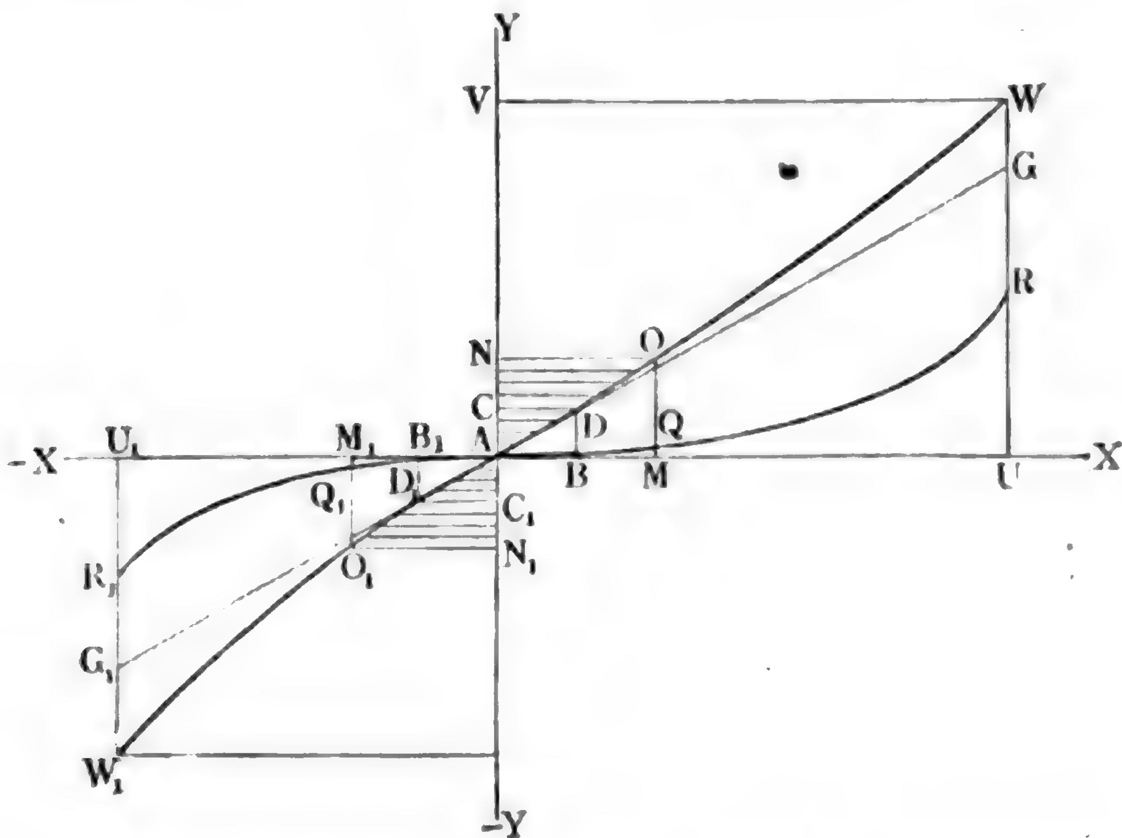
herabgezogen.

Die Ausdehnung oder Zusammendrückung λ wächst mit der Größe P der Zug- oder Druckkraft, ist also eine Function derselben. Diese Function oder der algebraische Zusammenhang zwischen P und λ läßt sich nicht a priori bestimmen; es hängt derselbe von der physischen Beschaffenheit der Körper ab, und ist bei verschiedenen Materien verschieden. Wenn man P und λ als die Coordinaten einer Curve ansieht, und diese Curve aus einer durch Versuche ermittelten Reihe von zusammengehörigen Werthen der Größen P und λ construirt, so erhält man dadurch nicht nur ein anschauliches Bild von dem Gesetze, nach welchem Körper durch äußere Kräfte ausgedehnt und zusammengedrückt werden, sondern auch ein Mittel zur Ausmittelung der Eigenthümlichkeiten dieses Gesetzes.

Trägt man vom Anfangspunkte A aus auf der positiven Seite der Axe $X\overline{X}$, Fig. 309, die Spannungen oder Ausdehnungskräfte eines Körpers als Abscissen AB, AM u. s. w. und in den Endpunkten derselben die

entsprechenden Ausdehnungen als zur Axe $Y\overline{Y}$ parallel laufende Ordinaten BD, MO u. s. w. auf, so erhält man eine Curve $ADOW$, welche das

Fig. 309.



Gesetz der Ausdehnung dieses Körpers repräsentirt; schneidet man umgekehrt, von A aus, auf der negativen Seite der Axe $X\overline{X}$ die Pressungen oder Zusammendrückungskräfte als Abscissen AB_1, AM_1 u. s. w. ab, und trägt an denselben die entsprechenden Zusammendrückungen als Ordinaten B_1D_1, M_1O_1 u. s. w. auf, so ergiebt sich eine Curve $AD_1O_1W_1$, durch welche das Gesetz der Zusammendrückung des Körpers graphisch dargestellt wird. Vielfachen Versuchen zufolge gehen beide Curven stetig in einander über, haben folglich in A eine gemeinschaftliche Tangente GAG_1, und sind also eigentlich nur Zweige einer und derselben krummen Linie $WODADD_1O_1W_1$. Wenn auch diese Curve in ihrer ganzen Erstreckung bedeutend von einer geraden Linie abweicht, so wird sie doch in der Nähe des Anfangspunktes A mit der Tangente GAG_1 nahe zusammenfallen, und da nun für diese die Ordinaten den Abscissen proportional sind, so ist folglich auch anzunehmen, daß die durch kleine Zug- oder Druckkräfte AB, AB_1 u. s. w. bewirkten Ausdehnungen und Zusammendrückungen BD, B_1D_1 u. s. w. diesen Kräften proportional sind (Hooke's Gesetz).

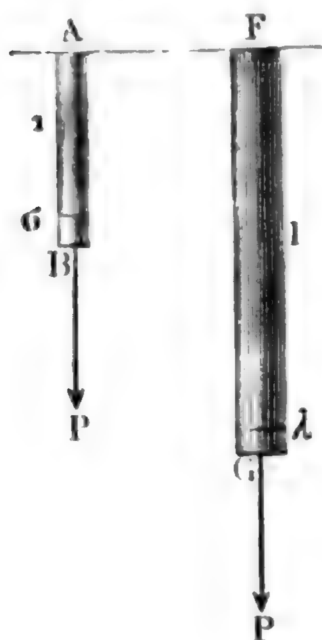
Die durch eine Zugkraft AM bewirkte totale Ausdehnung MO besteht aus zwei Theilen, nämlich aus der permanenten Ausdehnung MQ, welche im Körper zurückbleibt, wenn die Spannkraft zu wirken aufgehört hat, und aus der elastischen Ausdehnung QO, welche mit der Spannkraft zugleich wieder verschwindet. Ganz dasselbe Verhältniß findet

auch bei dem Zusammendrücken statt; auch die totale Zusammendrückung $M_1 O_1$ ist die Summe $M_1 Q_1 + Q_1 O_1$ aus der permanenten Zusammendrückung $M_1 Q_1$ und der elastischen $Q_1 O_1$. Bei kleineren Kräften sind die permanenten Veränderungen in Hinsicht auf die totale so klein, daß sie als gar nicht vorhanden angenommen und folglich die totalen Ausdehnungen und Zusammendrückungen nur als elastische angesehen werden können. Nur dann, wenn die Kraft einen gewissen Werth AB (AB_1), die sogenannte Elasticitätsgrenze, überschreitet, wenn sie z. B. in AM (AM_1) übergeht, macht die permanente Längenveränderung MQ ($M_1 Q_1$) einen beachtungswerthen Theil der ganzen Ausdehnung MO oder Zusammendrückung $M_1 O_1$ aus. Hat die Zug- oder Druckkraft einen gewissen Werth AU oder AU_1 erreicht, so sind die Ausdehnungen UR, UW oder Zusammendrückungen $U_1 R_1$, $U_1 W_1$ bei ihren Grenzen angelangt, wobei die innere oder Cohäsionskraft des Körpers der äußeren Zug- oder Druckkraft nicht mehr das Gleichgewicht zu halten vermag, und daher der Körper in dem einen Falle zerrissen und im anderen Falle zerdrückt wird.

Wenn man nach Wegnahme der Kraft eines höchstens bis zur Elasticitätsgrenze gespannten Körpers diesen Körper durch eine kleinere Kraft von neuem spannt, so erleidet er dadurch keine weitere Streckung oder permanente Längenveränderung; es findet also dann nur noch eine elastische Ausdehnung oder Zusammendrückung statt.

204 **Grundgesetz der Elasticität. Elasticitätsmodul.** Die durch eine Zugkraft P bewirkte Verlängerung oder Ausdehnung λ eines prismatischen Körpers ist erstens der Länge l des Körpers proportional, da sich annehmen läßt, daß sich gleich lange Stücke um gleich viel ausdehnen, und sie steht zweitens im umgekehrten Verhältnisse zum Querschnitte F des Körpers, da sich voraussetzen läßt, daß sich die ganze Spannkraft auf den Querschnitt des Körpers gleichmäßig vertheilt. Wird daher ein Körper AB, Fig. 310, von der Länge = Eins und vom Querschnitte = Eins, durch eine Kraft P um σ ausgedehnt, so ist daher für einen anderen Körper FG aus gleichem Stoffe, dessen Länge = l und Querschnitt = F ist, die durch dieselbe Kraft bewirkte Ausdehnung:

Fig. 310.



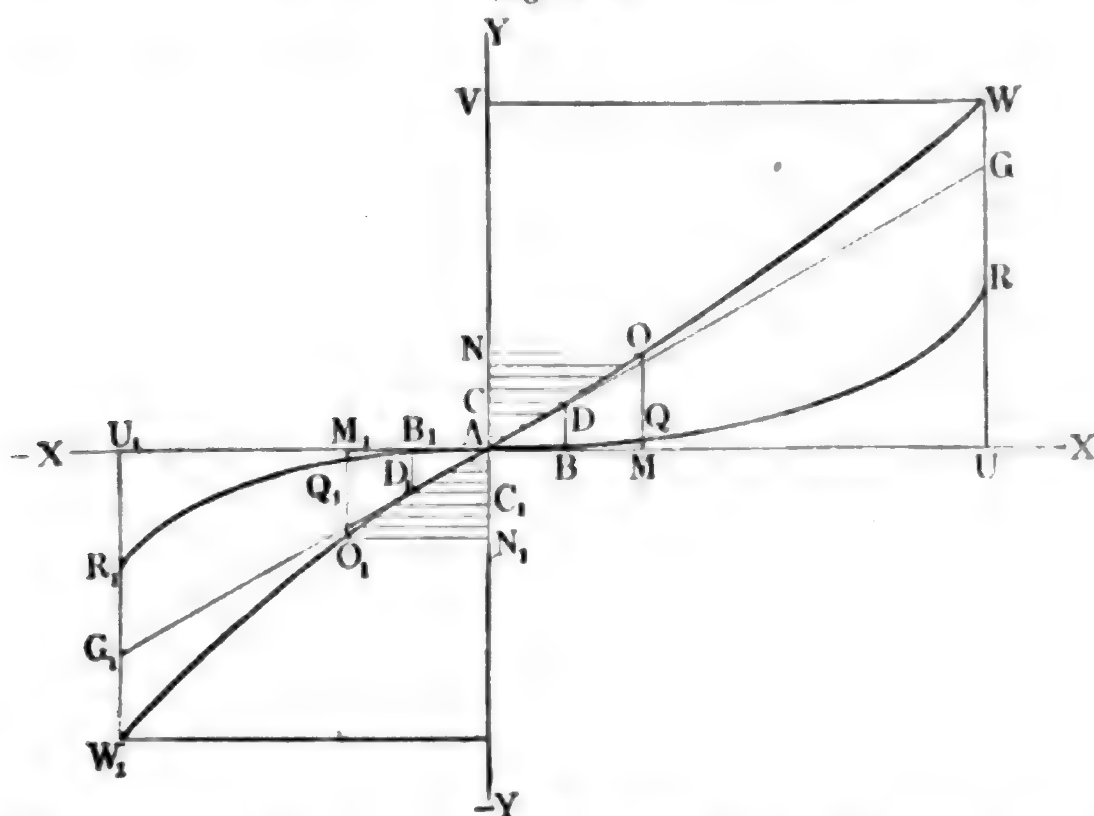
$$\lambda = \frac{\sigma l}{F}.$$

Die Ausdehnung σ ist natürlich bloß von der Zugkraft P abhängig und für Prismen von verschiedenen Materien verschieden; jedoch läßt sich dem Obigen (§. 203) zufolge annehmen, daß bei kleinen, die

Elasticitätsgrenze nicht überschreitenden Zugkräften die Ausdehnungen den entsprechenden Zugkräften proportional wachsen, daß also der Quotient $\frac{\sigma}{P}$ eine constante Zahl ist.

Repräsentirt nun AB, Fig. 311, die Spannung P eines Prismas von der Länge = Eins und dem Querschnitte = Eins innerhalb der Elastici-

Fig. 311.



tätsgrenze und BD die entsprechende Ausdehnung σ, und bezeichnet man den Tangentenwinkel $GAU = DAB$ der Ausdehnungscurve für den Anfangspunkt A durch α, so hat man auch:

$$tang.\,\alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{\sigma}{P},$$ und daher:

$$\sigma = P\, tang.\,\alpha,$$ woraus nun

$$1)\quad \lambda = \frac{Pl\, tang.\,\alpha}{F}$$ folgt.

Die Größe $tang.\,\alpha$ ist von den physischen Eigenschaften des Körpers abhängig, und jedenfalls nur durch Versuche zu ermitteln. Nimmt man

$$l = 1,\ F = 1 \text{ und } P = 1,$$

so erhält man $tang.\,\alpha = \lambda$; es ist also hiernach die Erfahrungsgröße $tang.\,\alpha$ die Ausdehnung, welche ein Prisma von der Länge Eins und vom Querschnitte Eins durch die Spannkraft Eins erleidet (siehe Combes: Traité de l'exploitation des mines, tome I.). Nimmt man in der Formel (1) $F =$ Eins und $\lambda = l$ an, so erhält man den Ausdruck:

$$1 = P\, tang.\,\alpha, \text{ oder } \frac{1}{tang.\,\alpha} = cotang.\,\alpha = P.$$

Es ist also hiernach $\frac{1}{tang.\,\alpha}$ diejenige Spannkraft P, welche ein Prisma vom Querschnitte Eins (1 Quadratzoll) um seine eigene Länge ausdehnen würde, insofern dies ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre.

Diese hypothetische Erfahrungsgröße $\frac{1}{tang.\,\alpha} = cotang.\,\alpha$ wird der Elasticitätsmodul (franz. coefficient d'élasticité; engl. modul of elasticity) des Körpers oder der Materie desselben genannt und in der Folge durch den Buchstaben E bezeichnet. Es ist also hiernach:

$$2) \quad \lambda = \frac{Pl}{FE}$$

oder die relative Ausdehnung, d. h. ihr Verhältniß zur ganzen Länge des Körpers:

$$3) \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{P}{FE},$$

also umgekehrt, die der Ausdehnung λ entsprechende Kraft:

$$4) \quad P = \frac{\lambda}{l} FE.$$

Dieselben Formeln gelten natürlich auch für die Zusammendrückung λ durch eine Druckkraft P, und es ist in diesem Falle sogar auch der Elasticitätsmodul $E = cotang.\,\alpha$ derselbe wie bei der Ausdehnung, so lange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, obgleich er hier diejenige Druckkraft bezeichnet, welche ein Prisma vom Querschnitte Eins um seine ganze Länge, also bis auf eine unendlich dünne Platte zusammendrückt, unter der Voraussetzung, daß dies möglich wäre, ohne die Grenze der Elasticität zu überschreiten.

Anmerkung 1. Man kann auch den Elasticitätsmodul E gleichsetzen dem Gewichte eines Prismas, welches mit dem Körper, auf den E wirkt, aus einerlei Materie besteht, und denselben Querschnitt Eins hat. Ist a die Länge dieses Körpers und γ die Dichtigkeit oder das Gewicht von 1 Cubikzoll der Materie desselben, so hat man:

$$E = a\gamma, \text{ und daher umgekehrt } a = \frac{E}{\gamma}.$$

Diese Länge gebraucht Tredgold (nach Young) als Maß der Elasticität (s. T. Tredgold, über die Stärke des Gußeisens und anderer Metalle). Ist z. B. für Stahl $E = 30'000000$ Pfund und $\gamma = 0,3$ Pfund, so hat man:

$$a = \frac{30'000000}{0,3} = 100'000000 \text{ Zoll},$$

d. i. eine Stahlstange von 100 Millionen Zoll Länge würde einen Stahlstab von demselben Querschnitt um seine eigene Länge ausdehnen, wenn das oben angegebene Ausdehnungsgesetz ohne Einschränkung richtig wäre.

Anmerkung 2. Bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers findet zugleich eine Querschnittsverminderung statt, die nach Wertheim (s. Compt. rend. T. 26) $^2/_3$ der Längenausdehnung oder Zusammendrückung beträgt. Ist l

die anfängliche Länge, F der anfängliche Querschnitt und V das anfängliche Volumen Fl des Körpers, l_1 und F_1 aber Länge und Querschnitt bei Einwirkung der Zugkraft P, so hat man das entsprechende Volumen:

$$V_1 = F_1 l_1 = Fl + F(l_1 - l) - (F - F_1)\, l, \text{ also:}$$

$$V_1 - V = F(l_1 - l) - (F - F_1)\, l,$$

und die relative Volumenveränderung:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{l_1 - l}{l} - \frac{F - F_1}{F}.$$

Nun ist aber $\frac{F - F_1}{F} = \frac{2}{3}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right)$, daher folgt:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{1}{3}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right),$$

d. i. die Volumenvergrößerung ein Drittel der Längenausdehnung.

Nach Poisson's Theorie ist sogar $\frac{V_1 - V}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right)$.

Beispiele. 1) Wenn der Elasticitätsmodul des Messingdrahtes 1'3500000 Pfund beträgt, welche Kraft ist nöthig, um einen Draht von 10 Fuß Länge und 2 Linien Dicke 1 Linie länger zu ziehen? Es ist:

$$l = 10 \,.\, 12 = 120 \text{ Zoll}, \; \lambda = \tfrac{1}{12} \text{ Zoll, folglich } \frac{\lambda}{l} = \tfrac{1}{1440};$$

ferner $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854\,(\tfrac{2}{12})^2 = 0{,}0218$ Quadratzoll,

demnach die gesuchte Kraft:

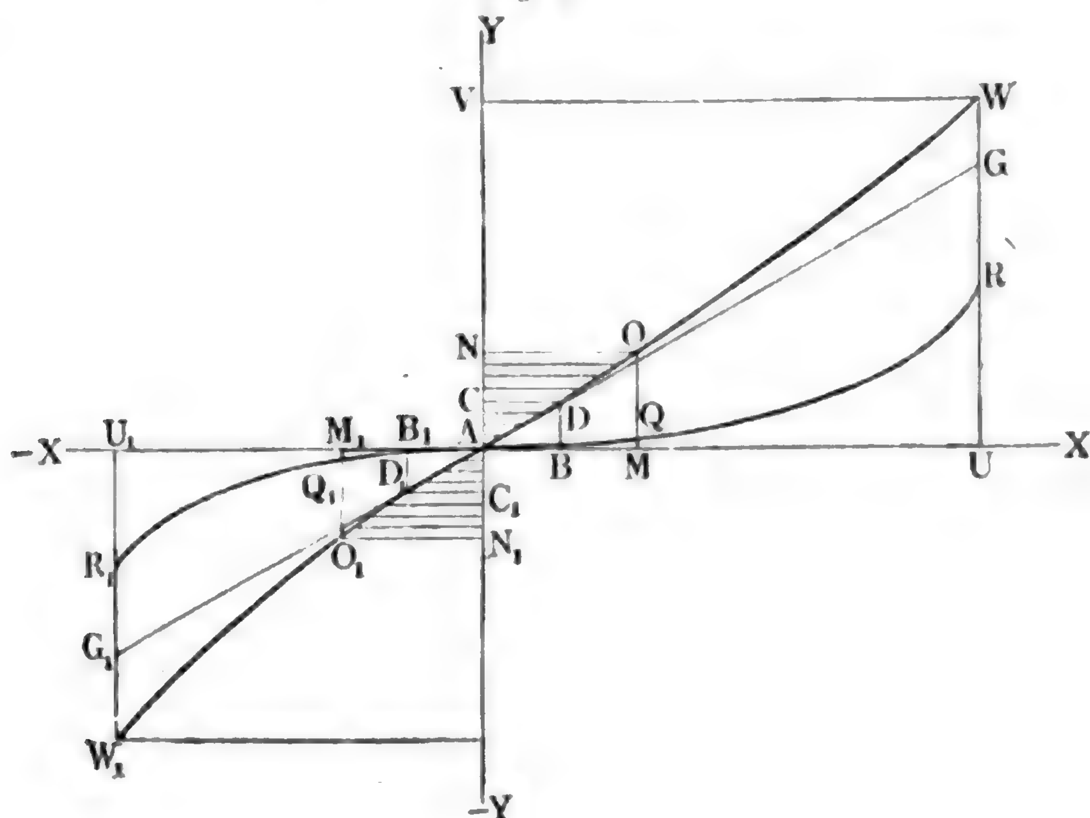
$$P = \tfrac{1}{1440} \cdot 0{,}0218 \,.\, 1'3500000 = 204 \text{ Pfund}.$$

2) Ist der Elasticitätsmodul von Eisendraht 30'000000 Pfund, und spannt man eine eiserne Meßkette von 60 Fuß Länge und 0,2 Zoll Dicke mit 150 Pfund Kraft an, so nimmt dieselbe um die Länge

$$\lambda = \frac{150}{0{,}7854 \,.\, (0{,}2)^2} \cdot \frac{60 \,.\, 12}{30000000} = \frac{3600}{31416} = 0{,}115 \text{ Zoll} = 1{,}38 \text{ Linien zu.}$$

Tragvermögen der Körper. — Tragmodul und Festigkeitsmodul. Die Zugkraft AB, Fig. 312, welche einen prismatischen Körper §. 206

Fig. 312.



vom Querschnitte Eins bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt, heißt der Tragmodul des Körpers in Hinsicht auf Ausdehnung, und soll in der Folge durch T bezeichnet werden, wogegen die Druckkraft AB_1, welche denselben bis zur Grenze der Elasticität zusammendrückt, der Tragmodul des Körpers in Hinsicht auf Zusammendrückung zu nennen und im Folgenden durch T_1 zu bezeichnen ist. Aus den Tragmodul T und T_1 lassen sich mit Hülfe des Elasticitätsmoduls E auch leicht die Ausdehnung σ und Zusammendrückung σ_1 bei der Elasticitätsgrenze berechnen; denn es ist

$$\frac{\sigma}{1} = \frac{T}{E} \text{ und } \frac{\sigma_1}{1} = \frac{T_1}{E}.$$

Ist F der Querschnitt eines prismatischen Körpers, welchem diese Tragmodel T und T_1 zukommen, so hat man das Tragvermögen desselben:

1) für Zug . . . . $P = F\,T$
und das für Druck . $P_1 = F\,T_1$.

Bei Bauausführungen sollen die Körper nie über die Elasticitätsgrenze hinaus belastet werden, also die Belastungen selbst die gefundenen Tragvermögen nicht überschreiten. Deshalb sind denn auch den hierzu verwendeten prismatischen Körpern Querschnitte zu geben, welche durch die Formeln

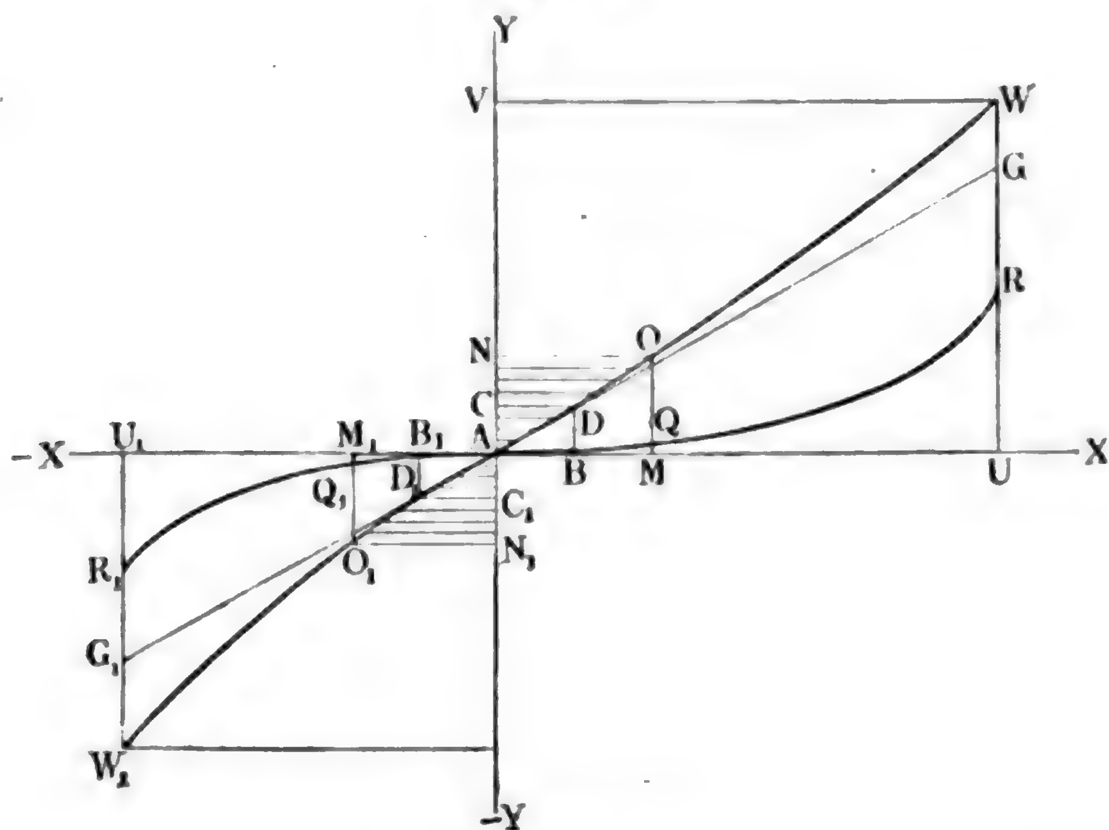
2) $F = \frac{P}{T}$ und
$F_1 = \frac{P_1}{T_1}$ bestimmt werden.

Wegen der zufälligen Ueberlastungen und Erschütterungen, welchen die Bau- und Maschinenwerke noch ausgesetzt sein können, sowie wegen der Veränderungen, welchen die zu denselben verwendeten Körper im Laufe der Zeit durch die Einwirkungen der Luft, des Wassers u. s. w. ausgesetzt sind, giebt man diesen Constructionen insofern noch eine größere Sicherheit, daß man in den vorstehenden Formeln statt der Tragmodul nur die Hälfte oder ein Drittel derselben einführt, also die Querschnitte zwei- bis dreimal so groß nimmt als diese Formeln unmittelbar angeben. Um eine $m$fache Sicherheit zu erhalten, sind folglich in den Formeln $F = \frac{P}{T}$ oder $F_1 = \frac{P_1}{T_1}$, statt T oder T_1, die Sicherheitsmodel $\frac{T}{m}$ oder $\frac{T_1}{m}$ einzusetzen.

Die Zugkraft $\overline{AU}$ (Fig. 313), bei welcher der prismatische Körper vom Querschnitt Eins zerreißt, heißt der Festigkeitsmodul des Körpers in Hinsicht auf das Zerreißen und wird gewöhnlich mit dem Buchstaben K bezeichnet, und ebenso nennt man die Druckkraft $\overline{AU_1}$, bei welcher das Zerdrücken oder Zermalmen des Körpers eintritt, den Festigkeitsmodul des Körpers in Hinsicht auf das Zerdrücken und bezeichnet ihn durch den

Buchstaben K_1. Hat der prismatische Körper den Querschnitt F, so ist natürlich:

Fig. 313.



3) $\begin{cases} P = FK \text{ die Kraft zum Zerreißen, und} \\ P_1 = FK_1 \text{ die Kraft zum Zerdrücken dieses Körpers.} \end{cases}$

Noch oft bestimmt man auch die Querschnitte der Körper mit Hülfe der Bruch- oder Festigkeitsmodul, indem man in die Formeln

4) $$\begin{cases} F = \frac{P}{K} \text{ und} \\ F = \frac{P_1}{K_1} \end{cases}$$

statt K und K_1 sogenannte Sicherheitsmodul, d. i. kleine Theile $\frac{K}{n}$ oder $\frac{K_1}{n}$, z. B. Viertel, Sechstel, Zehntel u. s. w. dieser Erfahrungszahlen einsetzt. Wäre der Tragmodul bei allen Stoffen ein und derselbe Theil des Festigkeitsmodul, wären also die Verhältnisse $\frac{AB}{AU} = \frac{T}{K}$ und $\frac{AB_1}{AU_1} = \frac{T_1}{K_1}$ bestimmte Zahlen, so würde die Bestimmung des Querschnittes mittels der Sicherheitsmodel auf Dasselbe führen wie die mittels der Tragmodel; da aber diese Verhältnisse bei verschiedenartigen Körpern verschieden sind, so ist nur diese Bestimmung mittels der Tragmodel T und T_1 oder vielmehr mittels der Sicherheitstragmodel $\frac{T}{m}$ und $\frac{T_1}{m}$ die allgemein richtige und

angemessenere und nur dann mittels der Sicherheitsbruchmodel $\frac{K}{n}$ und $\frac{K_1}{n}$ zu rechnen, wenn die Tragmodel nicht bekannt sind.

Ist der Querschnitt des Körpers ein Kreis vom Durchmesser d, so hat man $\frac{\pi d^2}{4} = F$, daher $P = \frac{\pi d^2}{4} T = 0{,}7854\, d^2\, T$ und

$$d = \sqrt{\frac{4 F}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{F} = 1{,}128 \sqrt{\frac{P}{T}} \text{ zu setzen,}$$

und es läßt sich hiernach aus der Belastung oder Spannung P eines Körpers und dem Tragmodul T seiner Materie die Stärke finden, bei welcher der Körper nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus angespannt wird.

Beispiele. 1) Welche Last kann eine Hängesäule aus Fichtenholz aufnehmen, wenn dieselbe 5 Zoll breit und 4 Zoll dick ist? Den Tragmodul zu 3000 Pfund und den Querschnitt $F = 5 \,.\, 4 = 20$ Quadratzoll angenommen, erhält man $P = FT = 20 \,.\, 3000 = 60000$ Pfund als Tragkraft dieser Säule. Wird aber der Festigkeitsmodul $K = 10000$ Pfund zu Grunde gelegt und eine vierfache Sicherheit angenommen, so erhält man $P = FK = 20 \,.\, {}^{10000}/_{4} = 50000$ Pfd.; um auf lange Zeit Sicherheit zu haben, nimmt man aber für K den zehnten Theil an, und erhält so $P = 20 \,.\, 1000 = 20000$ Pfund.

2) Eine schmiedeeiserne und rund abzudrehende Zugstange soll eine Last von 4500 Pfund aushalten; welchen Durchmesser muß dieselbe erhalten? Hier ist $T = 18000$ Pfund, daher $d = 1{,}128 \sqrt{\frac{4500}{18000}} = 1{,}128 \,.\, \sqrt{{}^{9}/_{40}} = 0{,}535$ Zoll. Der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens ist für eine Mittelgattung $= 56000$ Pfund; nimmt man aber fünffache Sicherheit, so bekommt man $K = 11200$ Pfund und $d = 1{,}128 \sqrt{\frac{4500}{11200}} = 0{,}715$ Zoll als die gesuchte Stangendicke.

§. 206 **Arbeitsmodul.** Wenn man einen prismatischen Körper durch eine nach und nach von 0 bis $P = AM = NO$ (Fig. 314) wachsende Kraft anspannt und dadurch von Null bis $\lambda = MO = AN$ verlängert, so wird dabei eine gewisse mechanische Arbeit verrichtet, welche, wie (aus §. 72) bekannt, das Product aus dem Wege oder der ganzen Ausdehnung AN und aus dem Mittel der von 0 bis $P = NO$ stetig wachsenden Spannkräften ist, und sich daher auch durch die Fläche ANO ausdrücken läßt, welche der Ausdehnung $AN = \lambda$ als Abscisse, und der Spannkraft $NO = AM = P$ als Ordinate, zukommt. Ueberschreitet diese Ausdehnung nicht die Elasticitätsgrenze, so ist die Fläche ANO als ein rechtwinkeliges Dreieck anzusehen, dessen Katheten λ und P sind, und es ist daher die entsprechende mechanische Arbeit:

$$L = {}^{1}/_{2}\, \lambda P.$$

Setzt man hierin:

$$\lambda = \sigma l \text{ und } P = FT,$$

so erhält man die Arbeit zum Ausdehnen σ bis zur Elasticitätsgrenze:

$$L = \frac{1}{2}\sigma l . FT = \frac{1}{2}\sigma T . Fl = AV,$$

Fig. 314.

wenn V das Volumen Fl des Körpers und A eine Erfahrungszahl, den sogenannten Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze für die Ausdehnung bezeichnet, welcher auch durch den Ausdruck

$$A = \frac{1}{2} AC . CD = \frac{1}{2}\sigma T = \frac{1}{2}\frac{T^2}{E} = \frac{1}{2}\sigma^2 E$$

bestimmt werden kann.

Ebenso ist natürlich auch für die Compression bis zur Elasticitätsgrenze die erforderliche mechanische Arbeit

$$L_1 = VA_1$$

zu setzen, wobei A_1 den Arbeitsmodul

$$\frac{1}{2} AC_1 . C_1 D_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 T_1 = \frac{1}{2}\frac{T_1^2}{E} = \frac{1}{2}\sigma_1^2 E$$

der Elasticitätsgrenze für die Zusammendrückung bezeichnet.

Für die mechanische Arbeit zum Zerreißen und zum Zerdrücken des prismatischen Körpers lassen sich gleichgeformte Ausdrücke anwenden; es ist dieselbe für den ersten Fall:

$$L = VB,$$

und für den zweiten:

$$L_1 = VB_1,$$

wenn B = Fläche AUW, den Arbeitsmodul des Zerreißens, und B_1 = Fläche AU_1W_1, den Arbeitsmodul des Zerdrückens bedeutet.

Man ersieht aus dem Vorstehenden, daß sowohl die mechanische Arbeit, welche einen prismatischen Körper bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt und comprimirt, als auch diejenige, welche das Zerreißen und Zerdrücken desselben herbeiführt, gar nicht von den einzelnen Dimensionen, sondern nur vom Volumen V des Körpers abhängt, daß also z. B. zwei Prismen aus demselben Material denselben Arbeitsaufwand zum Zerreißen erfordern, wenn das eine doppelt so lang als das andere ist und dagegen sein Querschnitt nur die Hälfte vom Querschnitt des anderen ausmacht.

Beispiel. Wenn der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens $E = 27'000000$ Pfund und die Ausdehnung desselben bei der Elasticitätsgrenze, $\sigma = \frac{1}{1500}$ ist, so beträgt der Tragmodul desselben, da $\sigma = \frac{T}{E}$ ist:

$$T = \sigma E = \frac{27'000000}{1500} = 18000 \text{ Pfund},$$

und folglich der Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze für Ausdehnung:

$$A = \tfrac{1}{2}\sigma T = \frac{T^2}{2E} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 E = \frac{18000}{2.1500} = \frac{18000}{3000} = 6 \text{ Zollpfund}.$$

Um also einen prismatischen Körper aus Schmiedeeisen, dessen Volumen $= V$ ist, bis zur Elasticitätsgränze auszudehnen, ist die mechanische Arbeit

$$L = AV = 6{,}0\,V \text{ Zollpfund}$$

nöthig.

Wäre z. B. der Inhalt dieses Körpers $V = 20$ Cubikzoll, so würde diese Arbeit $L = 6{,}0 . 20 = 120$ Zollpfund $= \frac{120}{12} = 10{,}0$ Fußpfund betragen.

(207) **Ausdehnung durch das eigene Gewicht.** Hat ein prismatischer Körper AB, Fig. 315, eine bedeutende Länge l, so erleidet er durch sein Gewicht eine namhafte Ausdehnung, welche wie folgt zu bestimmen ist. Bezeichnet F den Querschnitt dieses Körpers, γ seine Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikzolles seiner Materie, und x die veränderliche Länge eines Stückes desselben, so besteht die Spannung eines Elementes MN dieses Körpers aus dem Gewichte des darunter befindlichen Körperstückes $BM = \gamma F x$, und es ist folglich [nach §. 204, (2)] die entsprechende Ausdehnung der Länge $MN = \partial x$ dieses Elementes:

Fig. 315.

$$\partial \lambda = \frac{\gamma F x}{FE}\,\partial x = \frac{\gamma}{E}\,x\,dx.$$

Durch Integration ergiebt sich nun die Ausdehnung des ganzen Stückes BM:

$$\lambda = \frac{\gamma}{E}\int x\,\partial x = \frac{\gamma x^2}{2E},$$

und folglich die des ganzen Körpers AB:

$$\lambda = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{\gamma F l^2}{2FE} = \frac{\frac{1}{2}G}{FE}\, l,$$

wobei $G = \gamma F l$, das Gewicht des ganzen Körpers bezeichnet.

Wäre dieses Gewicht nicht auf den Körper gleichmäßig vertheilt, sondern am Ende B desselben wirksam, so würde die Ausdehnung

$$\lambda_1 = \frac{Gl}{FE} = 2\lambda$$

betragen.

Es ist also die Ausdehnung des Körpers in Folge seines Gewichtes, $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_1$, nur halb so groß als die, welche ein gleich großes Gewicht am Ende des Körpers hervorbringt.

Dasselbe Gesetz gilt natürlich auch für die Compression λ eines Körpers durch sein eigenes Gewicht.

Wirkt in dem einen oder dem anderen Falle an einem Ende des Körpers noch eine besondere Zug- oder Druckkraft P, so hat man die entsprechende Ausdehnung oder Compression:

$$\lambda = \frac{Pl}{FE} \pm \frac{1}{2}\frac{Gl}{FE} = \frac{(P \pm \frac{1}{2}G)l}{FE},$$

wobei das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn die Kraft P mit dem Gewichte G in gleicher Richtung, und das untere, wenn sie dem Gewichte entgegengesetzt wirkt. Im letzteren Falle fällt natürlich die Ausdehnung kleiner aus, als wenn P die alleinige Zug- oder Druckkraft wäre. Es ist hier sogar die Gesammtausdehnung oder Zusammendrückung = Null, wenn

$$\tfrac{1}{2}G = P, \text{ oder } G = \gamma F l = 2P, \text{ also}$$

$$l = \frac{2P}{\gamma F}$$

beträgt.

Die Kraft P am Ende eines Körpers dehnt denselben an allen Stellen gleichviel, nämlich im Verhältnisse $\frac{\lambda}{l} = \frac{P}{FE}$ aus, wogegen das Gewicht G im veränderlichen Verhältnisse $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\gamma x}{E}$ ausspannt oder comprimirt. Es ist folglich das totale Ausdehnungsverhältniß an einer Stelle, welche um die Länge x vom Angriffspunkte der Kraft P absteht:

$$\frac{\lambda_1}{l} = \frac{\lambda}{l} \pm \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\frac{P}{F} \pm \gamma x\right)\frac{1}{E}.$$

Wirkt die Kraft P mit G in gleicher Richtung, so ist natürlich das Ausdehnungs- oder Compressionsverhältniß am größten für $x = l$, und zwar:

$$\frac{\lambda_1}{l} = \left(\frac{P}{F} + \gamma l\right)\frac{1}{E} = \frac{P+G}{FE},$$

dagegen am kleinsten, und zwar:

$$\frac{\lambda_2}{l} = \frac{P}{FE}$$

für $x = 0$, d. i. an der Stelle B, wo P angreift.

Wirken P und G in entgegengesetzten Richtungen, so hat man zu unterscheiden, ob $l < \frac{P}{F\gamma}$ oder $> \frac{P}{F\gamma}$, also $G < P$ oder $G > P$ ist. Im ersteren Falle ist das Ausdehnungs- oder Compressionsverhältniß $\frac{\lambda_1}{l} = \left(\frac{P}{F} - \gamma x\right)\frac{1}{E}$ ein Maximum für $x = 0$, und zwar $= \frac{P}{EF}$, und ein Minimum für $x = l$, und zwar $= \left(\frac{P}{F} - \gamma l\right)\frac{1}{E}$. Im letzteren Falle ist es für $x = 0$ ein positives Maximum $\frac{P}{EF}$, und für $x = l$ ein negatives Maximum $\left(\gamma l - \frac{P}{E}\right)\frac{1}{E}$ und es fällt dagegen für $x = \frac{P}{F\gamma}$, Null aus.

Damit der Körper nur bis zur Elasticitätsgrenze gedehnt oder gepreßt werde, darf das Maximum von dem Ausdehnungs- oder Compressionsverhältnisse $\left(\frac{P}{F} \pm \gamma x\right)\frac{1}{E}$ höchstens $= \sigma = \frac{T}{E}$ oder einfacher, das Maximum von $\left(\frac{P}{F} \pm \gamma x\right) = T$ sein. Nun ist aber in dem Falle, wenn P mit G einerlei Richtung hat, dieses Maximum

$$= \frac{P}{F} + \gamma l = \frac{P + \gamma F l}{F} = \frac{P + G}{F},$$

daher ist auch dann $\frac{P + \gamma F l}{F} = T$, oder $P = F\,(T - \gamma l)$ und folglich der entsprechende Querschnitt

$$F = \frac{P}{T - \gamma l};$$

wirken hingegen P und G entgegengesetzt, so hat man dieses Maximum

$$\text{entweder} = \frac{P}{F} \text{ oder } = \left(\gamma l - \frac{P}{F}\right),$$

und daher den entsprechenden Querschnitt gleich dem größeren der Werthe

$$F = \frac{P}{T} \text{ und } F = \frac{P}{\gamma l - T}.$$

Setzt man in diesen Formeln K statt T, so erhält man die Bedingungen des Zerreißens und Zerbrechens, also im ersten Falle:

$$P = F\,(K - \gamma l) \text{ und im zweiten:}$$

$$\text{entweder } P = FK \text{ oder } P = F\,(\gamma l - K).$$

Für $P = 0$ hat man natürlich entweder:

$$\gamma l - T = 0, \text{ also } l = \frac{T}{\gamma} \text{ oder:}$$

$$\gamma l - K = 0, \text{ also } l = \frac{K}{\gamma},$$

je nachdem es bloß auf eine Spannung bis zur Elasticitätsgrenze oder auf eine Trennung durch Zerreißen oder Zerdrücken des Körpers ankommt.

Anmerkung. Das mechanische Arbeitsvermögen, welches ein prismatischer Körper in sich aufnimmt, wenn er durch sein eigenes Gewicht ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, ist auf folgende Weise zu ermitteln. Das Element MN, Fig. 316, dessen Länge ∂x ist, wird durch das Gewicht $\gamma F x$ des Körperstückes

Fig. 316.

BM nach und nach von 0 auf $\partial \lambda = \frac{\gamma x \partial x}{E}$ ausgedehnt, und es ist daher die hierzu nöthige Arbeit:

$$= \frac{1}{2} \gamma F x . \partial \lambda = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 F x^2}{E} \partial x.$$

Wenn man daher diesen Ausdruck integrirt, so erhält man das Arbeitsquantum für alle Stangenelemente von B bis M:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F}{E} \int x^2 \partial x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F x^3}{3E},$$

und also das für die ganze Stange:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F l^3}{3E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F^2 l^2 l}{3FE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G^2 l}{3FE} = \frac{1}{3} G \lambda,$$

wobei (nach §. 207) $\lambda = \frac{1}{2} \frac{Gl}{FE}$, die ganze Ausdehnung der Stange bezeichnet.

Beispiel. Wenn ein Bleidraht, dessen Festigkeitsmodul $K = 3000$ Pfund, und Dichtigkeit, auf den Cubikzoll bezogen, $\gamma = 0{,}406$ Pfund ist, vertical aufgehangen ist, so zerreißt derselbe bei der Länge

$$l = \frac{K}{\gamma} = \frac{3000}{0{,}406} = 7390 \text{ Zoll} = 615 \text{ Fuß}$$

durch sein eigenes Gewicht. Beträgt der Tragmodul desselben $T = 1500$ Pfund, so erreicht seine Ausdehnung die Elasticitätsgrenze bei einer Länge

$$l_1 = \frac{T}{\gamma} = \frac{1500}{0{,}406} = 3694 \text{ Zoll} = 308 \text{ Fuß},$$

und ist der Elasticitätsmodul dieses Drahtes, $E = 960000$ Pfund, so hat man die entsprechende Ausdehnung desselben:

$$\lambda = \frac{T}{E} l_1 = \frac{1500}{96000} \cdot 308 = \frac{5.77}{80} = 0{,}0481 \text{ Fuß} = 0{,}576 \text{ Zoll}.$$

Körper von gleichem Widerstande. Wird der Zug oder Druck §. 208
P eines verticalen prismatischen Körpers noch durch das Gewicht G desselben ansehnlich vergrößert, so hat man natürlich

$$P + G = FT, \text{ oder } P = FT - G = F(T - l\gamma)$$

zu setzen, und hiernach den Querschnitt F dieses Körpers durch den Ausdruck

$$F = \frac{P}{T - l\gamma}$$

zu bestimmen (vergl. §. 207).

Ist dieser Körper, wie z. B. AB, Fig. 317, aus prismatischen Theilen zusammenzusetzen, so kann man, um Material zu ersparen, jedem dieser Theile einen nach dieser Formel zu berechnenden Querschnitt geben. Haben diese Körperstücken die Längen l_1, l_2, l_3 u. s. w. und steigert sich die Last P durch die Gewichte $F_1 l_1 \gamma$, $F_2 l_2 \gamma$, $F_3 l_3 \gamma$ u. s. w. der Stücke nach und nach auf P_1, P_2, P_3 u. s. w., so ist hiernach der erforderliche Querschnitt des ersten:

Fig. 317.

$$F_1 = \frac{P}{T - l_1 \gamma},$$

ferner der des zweiten:

$$F_2 = \frac{P_1}{T - l_2 \gamma} = \frac{F_1 T}{T - l_2 \gamma},$$

der des dritten:

$$F_3 = \frac{P_2}{T - l_3 \gamma} = \frac{F_2 T}{T - l_3 \gamma} \text{ u. s. w.}$$

Sind alle Stücke gleich lang, ist also $l_1 = l_2 = l_3$ rc. $= l$, so hat man einfacher:

$$F_1 = \frac{P}{T - l\gamma} = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right),$$

$$F_2 = \frac{F_1 T}{T - l\gamma} = \frac{P T}{(T - l\gamma)^2} = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^2,$$

$$F_3 = \frac{F_2 T}{T - l\gamma} = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^3 \text{ rc.,}$$

also allgemein, den Querschnitt des $n$ten Stückes:

$$F_n = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n.$$

Sollten alle Stücke einerlei Querschnitt erhalten, so würde derselbe die Größe

$$F = \frac{P}{T - n l\gamma} = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - n l \gamma}\right) \text{ erhalten müssen.}$$

Während in diesem Falle das Volumen des ganzen Körpers

$$V = n F l = \frac{n P l}{T - n l \gamma}$$

ist, bestimmt sich dasselbe in dem Falle, wo jedes Stück seinen angemessenen Querschnitt hat, durch die geometrische Reihe:

$$V^n = (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)l$$
$$= \frac{Pl}{T - l\gamma}\left[1 + \frac{T}{T - l\gamma} + \left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^{n-1}\right].$$

Nun ist aber (s. „Ingenieur" Seite 82) die Summe der geometrischen Reihe in der Parenthese:

$$= \left[\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n - 1\right] : \left(\frac{T}{T - l\gamma} - 1\right);$$

daher folgt:

$$V_n = \frac{P}{\gamma}\left[\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n - 1\right] = \frac{(F_n - F_1)\,T}{\gamma},$$

und das Gewicht des ganzen Körpers:

$$G = (F_n - F_1)\,P.$$

Ist die Länge l eines Stückes sehr klein, und dagegen die Anzahl n der Stücke sehr groß, so kann man, wenn man noch die ganze Länge nl durch a bezeichnet, genau wie in §. 194 schließend,

$$(T - l\gamma)^n = \left(T - \frac{a\gamma}{n}\right)^n = T^n\left(1 - \frac{a\gamma}{nT}\right)^n = T^n e^{-\frac{a\gamma}{T}}$$

setzen, wobei $e = 2{,}71828\ldots$, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet, und es ist hiernach:

$$F_n = \frac{P}{T}\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n = \frac{P}{Te^{-\frac{a\gamma}{T}}} = \frac{P}{T}e^{\frac{a\gamma}{T}} = F_0\, e^{\frac{a\gamma}{T}},$$

wobei $F_0 = \frac{P}{T}$, die Größe des anfänglichen Querschnittes B bezeichnet.

Annähernd ist auch:

$$F_n = \frac{P}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right],$$

und dagegen:

$$F = \frac{P}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right].$$

Das Volumen des aus vielen kleinen Stücken zusammengesetzten Körpers ergiebt sich auf dem angezeigten Wege:

$$V_n = \frac{P}{\gamma}\left[\left(\frac{T}{T - l\gamma}\right)^n - 1\right] = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{a\gamma}{T}} - 1\right),$$

annähernd:

$$= \frac{Pa}{T}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a\gamma}{T}\right) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right],$$

wogegen das Volumen des Körpers mit gleichem Querschnitt annähernd

$$V = \frac{Pa}{T - a\gamma} = \frac{Pa}{T}\left[1 + \frac{a\gamma}{T} + \left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right] \text{ ist.}$$

Die Formeln

$$F_n = \frac{P}{T} e^{\frac{a\gamma}{T}} \text{ und } V_n = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{a\gamma}{T}} - 1\right)$$

gelten natürlich auch für jeden Körper wie AB, Fig. 318, und AB, Fig. 319, mit sich stetig änderndem Querschnitte. Um mit Hülfe derselben den Querschnitt F_n für eine Stelle M und das von demselben abgeschnittene Körpervolumen zu finden, hat man nur in diesen Formeln für a den Abstand BM der gegebenen Stelle vom Angriffspunkte B der Zug- oder Druckkraft einzusetzen. Die hierdurch bestimmten Körper haben an jeder Stelle den der bestimmten Tragkraft entsprechenden Querschnitt, und heißen deshalb Körper von gleichem Widerstande (franz. solides d'égale résistance; engl. bodies of uniform strength). Diese Körper haben unter übrigens gleichen Verhältnissen das kleinste Volumen, erfordern daher auch die kleinste Menge Material, und sind deshalb im Allgemeinen die wohlfeilsten und vortheilhaftesten in der Anwendung. Vergleichen wir z. B. einen solchen Körper mit einem prismatischen, so finden wir durch die obigen Näherungsformeln, daß derselbe ein Volumenersparniß von

Fig. 318.

Fig. 319.

$$V - V_n = \frac{Pa}{T}\left[\frac{1}{2}\frac{a\gamma}{T} + \frac{5}{6}\left(\frac{a\gamma}{T}\right)^2\right] = \frac{Pa^2\gamma}{2T^2}\left(1 + \frac{5}{3}\frac{a\gamma}{T}\right)$$

gewährt

Anmerkung. Da die relative Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers von gleichem Widerstande überall dieselbe, nämlich $\sigma = \frac{T}{E}$ ist, so steigert sich folglich die Gesammtausdehnung desselben auf $\lambda = \sigma a = \frac{T}{E} a$, während sie bei dem prismatischen Körper nur die Größe

$$\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2} G)a}{FE} = \frac{P + \frac{1}{2} G}{P + G} \cdot \frac{T}{E} a$$

hat.

Beispiel. Welchen Querschnitt muß ein 1000 Fuß langes schmiedeeisernes Schachtgestänge erhalten, wenn dasselbe außer seinem eigenen Gewichte noch eine Last $P = 75000$ Pfund zu tragen hat? Nimmt man statt des Tragmoduls

$T = 18000$ Pfund einen Sicherheitsmodul $\frac{T}{2} = 9000$ Pfund an und setzt man das Gewicht eines Cubikzolles Schmiedeeisen:

$$\gamma = \frac{7,70 \,.\, 61,75}{12 \,.\, 12 \,.\, 12} = 0,2752 \text{ Pfund},$$

so folgt der gesuchte Querschnitt:

$$F = \frac{P}{T - a\gamma} = \frac{75000}{9000 - 12000 \,.\, 0,2752} = \frac{75000}{5698} = 13,16 \text{ Quadratzoll}$$

und das Gewicht des Gestänges:

$$G = F \,.\, a\gamma = 13,16 \,.\, 12000 \,.\, 0,2752 = 43460 \text{ Pfund}.$$

Könnte man diesem Gestänge die Form eines Körpers von gleichem Widerstande geben, so würde man zum kleinsten Querschnitte:

$$F_0 = \frac{P}{T} = \frac{75000}{9000} = 8,33 \text{ Quadratzoll},$$

zum größten:

$$F_n = 8,33 \,.\, e^{0,2752 \,.\, 1,333} = 8,33 \,.\, e^{0,3669} = 12,03 \text{ Quadratzoll},$$

und das Gewicht des Gestänges:

$$G_n = V_n \gamma = (F_n - F)\, T = (12,03 - 8,33) \,.\, 9000 = 33300 \text{ Pfund}$$

erhalten.

Ist der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens, $E = 27'000000$ Pfund, so hat man folglich die Verlängerung des Gestänges im letzteren Falle:

$$\lambda = \frac{T}{E} a = \frac{18000 \,.\, 1000}{27'000000} = \frac{18}{27} = \tfrac{2}{3} \text{ Fuß} = 8 \text{ Zoll},$$

und dagegen im ersteren:

$$\frac{P + \frac{1}{2} G}{P + G} \lambda = \frac{75000 + 21730}{75000 + 43460} \cdot 8 = \frac{96730 \,.\, 8}{128460} = 6,53 \text{ Zoll}.$$

Ausdehnungs- und Compressionsversuche. Um das Elasticitätsgesetz eines Stoffes vollständig kennen zu lernen, ist nöthig, daß man möglichst lange prismatische Körper aus demselben durch allmälig zu vergrößernde Gewichte nicht allein nach und nach und bis zum Zerreißen ausdehne, sondern auch nach und nach bis zum Zerdrücken zusammenpresse, und daß man hierbei die durch jedes Gewicht bewirkte Ausdehnung oder Zusammendrückung beobachte. Giebt man dem zu untersuchenden Körper eine verticale Lage, so können diese Gewichte unmittelbar an diese Körper angehangen oder auf dieselben aufgelegt werden und sie geben dann unmittelbar die Größe der Zug- oder Druckkraft des Körpers an. Um aber nicht mit zu großen Gewichten experimentiren zu müssen, zieht man es vor, die Gewichte mittels ungleicharmiger Hebel auf den Körper wirken zu lassen, wobei dieselben immer an den längeren Arm (a) angehangen werden, während das eine Ende des Körpers vom kürzeren Arme (b) ergriffen wird. Durch Multiplication des Gewichtes G mit dem Armverhältnisse $\frac{a}{b}$ ergiebt sich dann leicht die entsprechende Zug- oder Druckkraft $P = \frac{a}{b} G$. Auch wendet man mit Vor- §.

theil, namentlich zur Erzeugung bedeutender Zug- oder Druckkräfte, anstatt der Gewichte sogenannte hydraulische Pressen an. Um die Größe der Ausdehnung oder Zusammendrückung beobachten zu können, versieht man entweder den zu untersuchenden Stab in der Nähe von jedem seiner beiden Enden mit einem feinen Striche, oder man befestigt an diesen Stellen auf demselben ein Paar, vielleicht gar als Verniere vorgerichteter Zeiger, und um nicht nur die elastische, sondern auch die permanente Ausdehnung zu ermitteln, mißt man die Entfernung dieser Striche oder Zeiger von einander nicht allein vor dem Auflegen und während des Aufliegens eines Gewichtes, sondern auch nach erfolgter Abnahme desselben, und läßt auch gern inzwischen mehrere Minuten, oder nach Befinden einige Stunden Zeit verfließen, weil, zumal bei stärkeren Spannungen, die Ausdehnung und Zusammendrückung nicht momentan, sondern erst nach Verlauf einer längeren Zeit einen gewissen Werth annehmen. Die Ausmessung dieser Entfernung erfolgt entweder durch einen Stangenzirkel oder mittels einer unmittelbar am Stabe hinlaufenden Eintheilung; auch wendet man hierzu ein sogenanntes Kathetometer an, welches in der Hauptsache in einem an einem verticalen Stabe auf- und niederschiebbaren Luftblasenniveau (s. „Ingenieur" S. 234) besteht.

Um die Compression an längeren Stäben beobachten zu können, muß man diese Stäbe während des Versuches in eine röhrenförmige Leitung stellen; auch sind dieselben von Zeit zu Zeit einzuschmieren, damit sie sich ohne Hinderniß in dieser Leitung verschieben können.

Kommt es nur darauf an, den Festigkeitsmodul eines Körpers zu ermitteln, so kann man sich zu den Versuchen kürzerer Körper bedienen.

Zu den Zerreißungsversuchen wendet man Körper mit starken Köpfen, A und B, Fig. 320, an, welche genau in der Axe durchbohrt sind. Jede Durchbohrung erhält in der Mitte eine ringförmige Schneide, damit der Körper mittels eines durchgesteckten Bolzens CD und durch einen die Enden dieses Bolzens ergreifenden Haken FF genau in der Axe gezogen werde. Bei den Zerdrückungsversuchen giebt man dem Körper A, Fig. 321, zwei parallele Grundflächen, und bringt denselben zwischen zwei Cylinder B und C mit ebenfalls eben abgeschliffenen Grundflächen; während nun der abgerundete Kopf H des einen Cylinders von der pressenden Kraft ergriffen wird, stützt sich der andere Cylinder gegen eine starke Fußplatte D, und gleiten

Fig. 320.

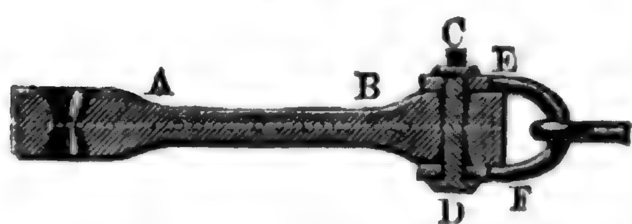
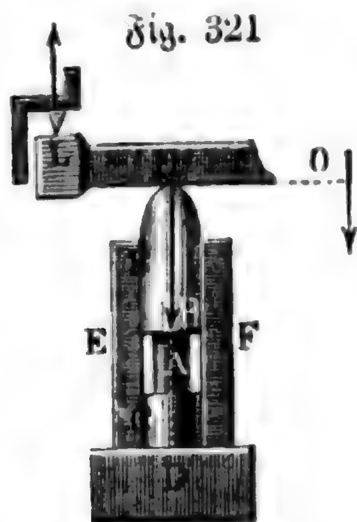


Fig. 321

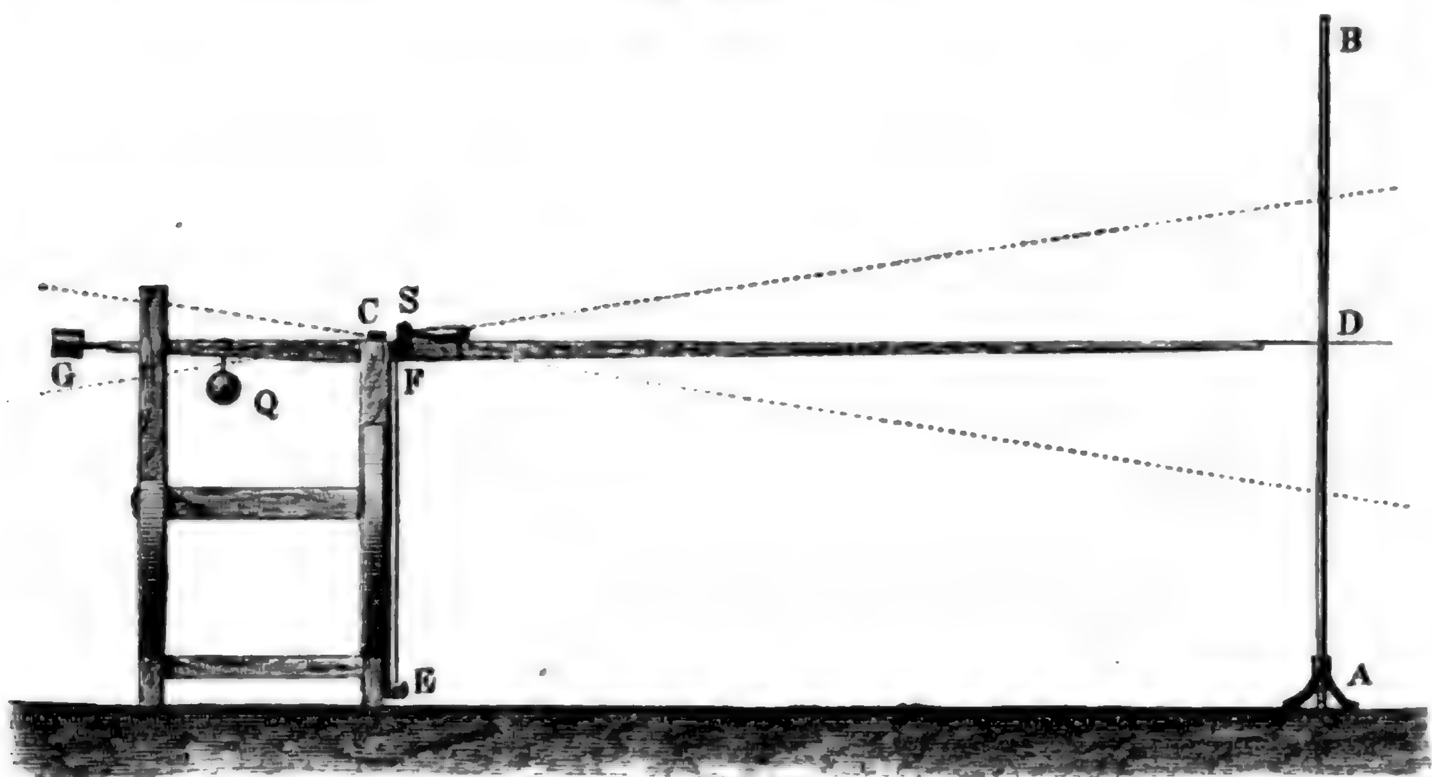


beide in dem Inneren eines Cylinders *EF*. Der Druck *P* auf den Kopf *H* des Stempels *B* besteht entweder in der Kolbenkraft einer hydraulischen Presse oder in der Kraft eines in der Figur nur zum Theil angegebenen einarmigen Hebels *LO*.

Während das Zerreißen eines Körpers in dem kleinsten Querschnitte desselben erfolgt und sich daher der Körper nur in zwei Stücke zertheilt, geht das Zerdrücken in der Regel in schiefen Flächen vor sich, wobei der Körper in mehrere Stücke zerfällt. Prismatische Körper zertheilen sich hierbei vorzüglich in zwei Pyramiden, welche die beiden Grundflächen des Körpers zur Basis und den Mittelpunkt desselben zur Spitze haben, und nächstdem in andere pyramidenähnliche Körper, deren Grundflächen die Seitenflächen des Ganzen ausmachen und deren Spitzen ebenfalls die Mitte des Körpers einnehmen. Körper, welche nach verschiedenen Richtungen ein verschiedenes Gefüge haben, verhalten sich natürlich anders; so wird z. B. ein Holzstück durch eine Kraft, welche in der Richtung der Fasern desselben wirkt, dadurch zerdrückt, daß im kleinsten Querschnitte desselben eine wulstförmige Ausbiegung entsteht.

Ausdehnungsversuche. Die ersten gründlichen Untersuchungen über die Ausdehnung und Elasticität des Eisens in Drähten haben wir Gerstner zu verdanken. Derselbe verwendete zu den hierbei zu Grunde gelegten Versuchen Eisendraht von 0,2 bis 0,8 Linien Dicke und bediente sich des in Fig. 322 abgebildeten Hebelapparates mit einem 15 Fuß langen Zeiger *CD*, einem §. 210

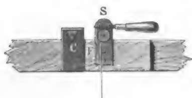
Fig. 322.



Gegengewichte *G* und einem Laufgewichte *Q*. Der ungefähr 4 Fuß lange Draht *EF* wurde am Ende *E* festgeklemmt und mit dem oberen Ende um

einen Wirbel F gewunden, welcher sich mittels einer Schraube S ohne Ende umdrehen ließ, wodurch natürlich dem Drahte jede beliebige Spannung gegeben werden konnte. Die dadurch bewirkte Ausdehnung des Drahtes gab die Zeigerspitze D an einem eingetheilten Stabe AB vervierundfünfzigfacht an. Die schneidige Axe C des Hebels sowie der Wirbel F, um welche das obere Ende des Drahtes gewunden war, und die Schraube ohne Ende S zum Umdrehen des Wirbels sind in Fig. 323 in größerem Maßstabe besonders abgebildet. Durch diese Versuche weist Gerstner nach, daß jede Ausdehnung die Summe von zwei Ausdehnungen ist, wovon die eine (die elastische Ausdehnung) nach Abnahme des Gewichts verschwindet, und die andere (die permanente Ausdehnung) zurückbleibt, und daß in Folge dessen die Ausdehnung λ sogar innerhalb der Elasticitätsgrenze nicht genau der spannenden Kraft P proportional, sondern daß es angemessen ist, die Formel

Fig. 323.



$$P = \frac{\lambda}{l} FE \text{ [§. 204 (4)]}$$

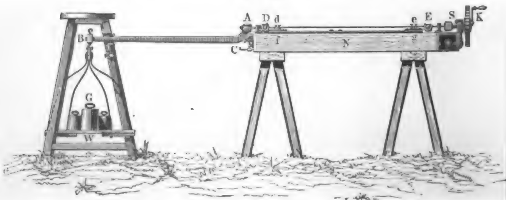
durch die Reihe

$$P = \frac{\lambda}{l}\left[1 + \alpha \frac{\lambda}{l} + \beta \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2\right] FE,$$

worin α und β Erfahrungszahlen bezeichnen, zu ersetzen.

Später wurden von Lagerhjelm sowie auch von Brix ausgedehnte Versuche über die Elasticität und Festigkeit des Schmiedeeisens und Eisendrahtes zur Ausführung gebracht. Beide Experimentatoren wendeten zu ihren Versuchen einen Winkelhebel ACB, Fig. 324, an, dessen längerer Arm CB von dem auf eine Wagschale W aufgelegten Gewichte G

Fig. 324.



abwärts gezogen wurde, wodurch der am kürzeren Arme CA angeschlossene Eisenstab oder Draht DE beliebig gespannt werden konnte. Bei dem Apparate von Brix betrug das Hebelarmverhältniß $\frac{CA}{CB} = {}^1/_{20}$, und es war hier das eine Drahtende D mittels Kluppe, Haken und Bolzen an den Arm CA und das andere Ende E auf gleiche Weise an eine Schraube S befestigt, welche durch eine Kurbel K und mittels eines Räderwerkes in Umdrehung gesetzt werden konnte. Zur Angabe der Längenausdehnung dienten zwei Nonien d und e, welche an den Enden auf den Draht aufgeschraubt wurden und über zwei in Viertellinien eingetheilten Scalen fg hinliefen. Nachdem man den Draht in den Kluppen eingeklemmt hatte, wurde die Wagschale nach und nach mit größeren Gewichten beladen, und bei jedem einzelnen Versuche durch Drehung der Kurbel K des Räderwerkes, der Draht so gespannt, daß sich der Hebel von seiner Unterstützung erhob, und sich so die Spannung des Drahtes mit dem Gewichte G ins Gleichgewicht setzte. Die Versuche wurden mit Drähten von $1^1/_3$ bis $1^1/_2$ Linien Stärke ausgeführt und gaben für dieselben, wenn sie ungeglüht waren, im Mittel den Festigkeitsmodul $K = 94000$ Pfund, und dagegen nach dem Glühen, $K = 62000$ Pfund. Der Elasticitätsmodul wurde dagegen für geglühten und ungeglühten Draht im Mittel $E = 28'000000$ Pfund gefunden; ferner ergab sich, daß die Grenze der Elasticität erreicht wurde, wenn die Spannung bei ungeglühtem Draht $0{,}5\, K$ und bei geglühtem $0{,}6\, K$ betrug. Bei stärkeren Spannungen traten bleibende Ausdehnungen (Streckungen) ein, und es betrug die ganze Ausdehnung im Augenblicke des Zerreißens bei ungeglühtem Drahte

$\frac{\lambda}{l} = 0{,}0034$, und beim geglühten $\frac{\lambda}{l} = 0{,}0885$, also 26mal so viel.

Bei dem Apparate von Lagerhjelm erfolgte die Anspannung des Drahtes durch eine hydraulische Presse, deren Kolbenstange das Ende des Eisenstabes ergriff.

Zu diesen Versuchen verwendete Lagerhjelm verschiedene Eisenstäbe von 36 Zoll Länge mit kreisrunden und quadratischen Querschnitten von $^1/_2$ Zoll u. s. w. Seitenlänge. Denselben zufolge ist im Mittel der Elasticitätsmodul des schwedischen Schmiedeeisens:

$$E = 44'000000 \text{ Pfund},$$

der Festigkeitsmodul

$$K = \frac{1}{500} E = 88000 \text{ Pfund},$$

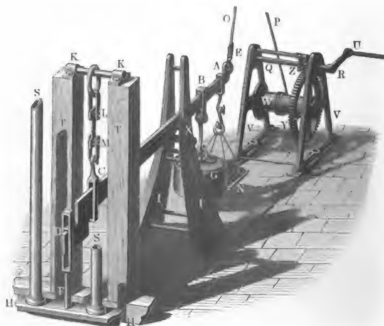
und der Tragmodul

$$T = \sigma \,.\, E = \frac{1}{1600} \cdot 44'000000 = 27500 \text{ Pfund}.$$

Wertheim ließ bei seinen Versuchen über die Elasticität und Cohäsion der Metalle die zu untersuchenden Drähte frei herabhängen, und befestigte an denselben einen Gewichtskasten, welcher mittels Fußschrauben auf dem Fußboden ruhen konnte. Um den Draht durch die in den Kasten gelegten Gewichte anzuspannen, wurden die Fußschrauben so weit herumgedreht, bis der Kasten zum Schweben kam. Zur Ausmittelung der Ausdehnungen des Drahtes diente ein Kathetometer. Diese Versuche wurden unter sehr verschiedenen Temperaturen an vielerlei Metalldrähten, als von Eisen, Stahl, Messing, Zinn, Blei, Zink, Silber u. s. w., angestellt. Die Hauptergebnisse dieser Versuche sind in der folgenden Tafel (§. 212) enthalten.

Der Apparat, womit Fairbairn seine Festigkeitsversuche angestellt hat, besteht in der Hauptsache in einem starken schmiedeeisernen Hebel oder Wagbalken $A\,C\,D$, Fig. 325, dessen Stützpunkt D von einem starken Bolzen F festgehalten wird, welcher von unten mittels einer Schraubenmutter höher

Fig. 325.



oder tiefer gestellt werden kann. Zwei eiserne Säulen geben dem Fußstück $H\,H$, durch welches F hindurch ging, den nöthigen Widerstand. Das zu untersuchende Eisenstück $L\,M$ war mittels einer Kette an dem auf den Säulen $T\,T$ ruhenden Träger $K\,K$ aufgehangen und durch Bolzen und Ringe mit der Scheere C des Wagbalkens $A\,C\,D$ verbunden. An dem langen

Arme des letzteren hing nicht bloß ein größeres constantes Gewicht G, sondern auch eine Wagschale N zur Aufnahme kleinerer Gewichte; zur Unterstützung des Hebels von unten diente der Bolzen X und zum Aufheben desselben ein Seil OP, welches oben über eine Leitrolle lief und sich unten auf die Welle W einer Winde UYZ wickeln ließ. Nach dem Auflegen der Gewichte ließ man durch langsames Umdrehen der Kurbel U das Hebelende E allmälig herab, bis endlich das zu prüfende Eisenstück durch G und die Gewichte N allein gespannt wurde.

Anmerkung. Gerstner's Versuche über die Elasticität der Eisendrähte u. s. w. sind abgehandelt in Gerstner's Mechanik, Bd. I.; über die Versuche von Lagerhjelm ist nachzulesen die Pfaff'sche Uebersetzung der Abhandlung: Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit, Gleichartigkeit, Elasticität, Schmiedbarkeit und Stärke des Stabeisens u. s. w. von Lagerhjelm (Nürnberg 1829), und über die Versuche von Brix macht die nöthigen Mittheilungen: die Abhandlung über die Cohäsions- und Elasticitätsverhältnisse einiger bei Hängebrücken in Anwendung kommenden Eisendrähte (Berlin 1837).

Die Versuche von Wertheim über die Elasticität und Cohäsion der Metalle u. s. w., sowie auch über Glas und Holz werden in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Ergänzungsband II., 1845, abgehandelt. Die Elasticitätsmodel der genannten Körper sind hier nicht allein durch Ausdehnungs-, sondern auch durch Biegungs- und Schwingungsversuche bestimmt. Ueber Fairbairn's Festigkeitsversuche ist in dessen Useful Informations for Engineers nachzulesen.

Eisen und Holz. Die ausführlichsten Versuche über die Elasticität und Festigkeit des Guß- und Schmiedeeisens sind in der neuesten Zeit von Hodgkinson angestellt worden; durch sie hat man erst die Gesetze der Ausdehnung und Zusammendrückung dieser in der praktischen Anwendung so sehr wichtigen Stoffe vollständig kennen gelernt. Obgleich hiernach das auf verschiedene Weise erzeugte Eisen ziemlich verschiedene Elasticitäts- und Festigkeitsgrade gezeigt hat, so ist es doch möglich, das Verhalten dieses Körpers in Hinsicht auf Ausdehnung und Compression durch Curven auszudrücken. §. 211

Diesen Versuchen zufolge ist für Gußeisen (franz. fonte; engl. cast-iron) im Mittel, und zwar sowohl für Ausdehnung als auch für Compression, der Elasticitätsmodul

$E = 1{,}000000$ Kilogramm, bezogen auf den Querschnitt von 1 Quadratcentimeter, und folglich

$E = 13{,}68 \,.\, 1'000000 = 13'680000$ Pfund, bezogen auf 1 Quadratzoll Querschnitt.

Ferner ist die Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze:

$$\sigma = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{1500}.$$

Dieser Ausdehnung entspricht der Tragmodul

$$T = \frac{1000000}{1500} = 667 \text{ Kilogramm oder}$$

$$T = \frac{13'680000}{1500} = 9120 \text{ Pfund.}$$

Die Compression bei der Elasticitätsgrenze ist dagegen:

$$\sigma_1 = \frac{1}{750},$$

daher der Tragmodul des Zerdrückens:

$$T_1 = \frac{1000000}{750} = 1383 \text{ Kilogramm} = \frac{13'680000}{750} = 18240 \text{ Pfund.}$$

Der Festigkeitsmodul für das Zerreißen ist durch diese Versuche gefunden worden:

$$K = 1300 \text{ Kilogramm} = 17780 \text{ Pfund},$$

und dagegen der für das Zerdrücken:

$$K_1 = 7200 \text{ Kilogramm} = 98500 \text{ Pfund.}$$

Es ist also beim Gußeisen die Festigkeit des Zerdrückens über $5\frac{1}{2}$ Mal so groß als die des Zerreißens.

Für das Schmiedeeisen (franz. fer; engl. wrought-iron) ist ferner sowohl bei Ausdehnung als bei Zusammendrückung im Mittel

$$E = 2'000000 \text{ Kilogramm} = 27'400000 \text{ Pfund},$$

und die Elasticitätsgrenze ungefähr bei $\sigma = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{1500}$, daher der Tragmodul

$$T = \frac{2'000000}{1500} = 1333 \text{ Kilogramm} = 18235 \text{ Pfund.}$$

Endlich hat sich der Festigkeitsmodul für das Zerreißen des Schmiedeeisens

$$K = 4000 \text{ Kilogramm} = 54700 \text{ Pfund},$$

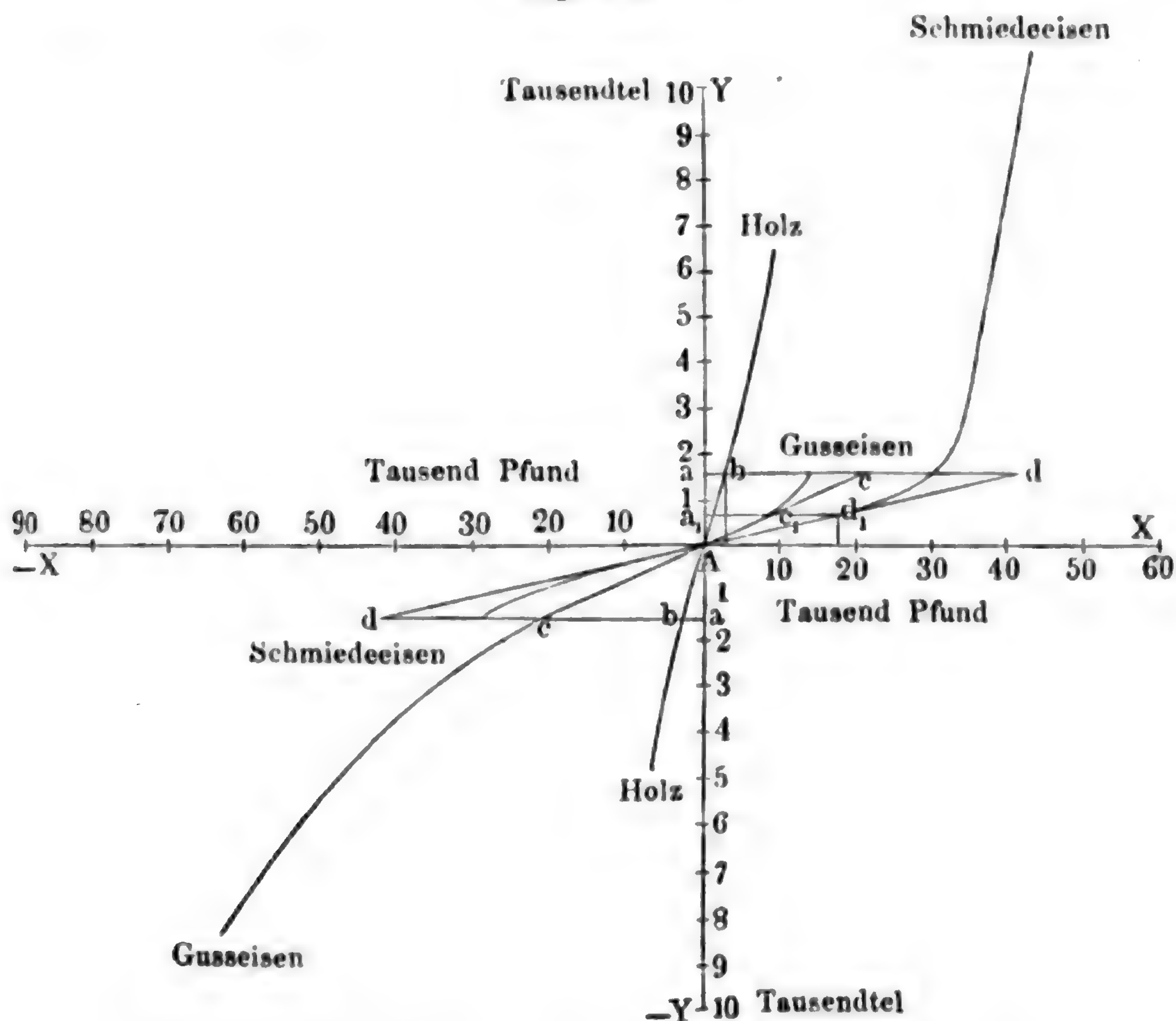
und für das Zerdrücken

$$K = 3000 \text{ Kilogramm} = 41000 \text{ Pfund ergeben.}$$

Es ist also der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens ungefähr doppelt so groß als für das Gußeisen, und während für das Zerreißen der Festigkeitsmodul des Gußeisens ungefähr nur ein Drittel von dem des Schmiedeeisens ist, beträgt dagegen für das Zerdrücken der Festigkeitsmodul des Gußeisens ungefähr zwei und ein halb Mal so viel als der des Schmiedeeisens. Diese Elasticitäts- und Festigkeitsverhältnisse des Guß- und Schmiedeeisens sind durch die graphische Darstellung in Fig. 326 vollständig vor Augen geführt. Vom Anfangspunkte A aus sind auf der rechten Seite der Abscissenaxe $X\overline{X}$ die Ausdehnungs- und auf der linken die Compressionskräfte in Tausendpfunden, und zwar pr. Quadratzoll Querschnitt, angegeben, während die obere Hälfte der Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$ die entsprechenden Ausdeh-

nungen und die untere die Zusammendrückungen enthält. Es fällt besonders in die Augen, daß die Curve des Gußeisens auf der Seite der Compression und die des Schmiedeeisens auf der der Ausdehnung eine bedeutende Erstreckung hat; auch bemerkt man, daß diese Curven in der Nähe des Anfangspunktes A nahe gerade Linien bilden.

Fig. 326.



Da nächst dem Eisen vorzüglich noch das Holz (franz. bois; engl. wood) am häufigsten in Anwendung kommt, so sind in der Figur noch die Elasticitätsverhältnisse des Tannen-, Buchen- und Eichenholzes u. s. w. durch eine Curve graphisch dargestellt. Es ist für diese Holzarten im Mittel der Elasticitätsmodul:

$$E = 110000 \text{ Kilogramm} = 1'500000 \text{ Pfund};$$

ferner die Elasticitätsgrenze bei $\sigma = \frac{1}{600}$ der Länge, daher der entsprechende Tragmodul:

$$T = \frac{110\,000}{600} = 180 \text{ Kilogramm} = 2500 \text{ Pfund}.$$

Endlich ist der Festigkeitsmodul für die Ausdehnung:

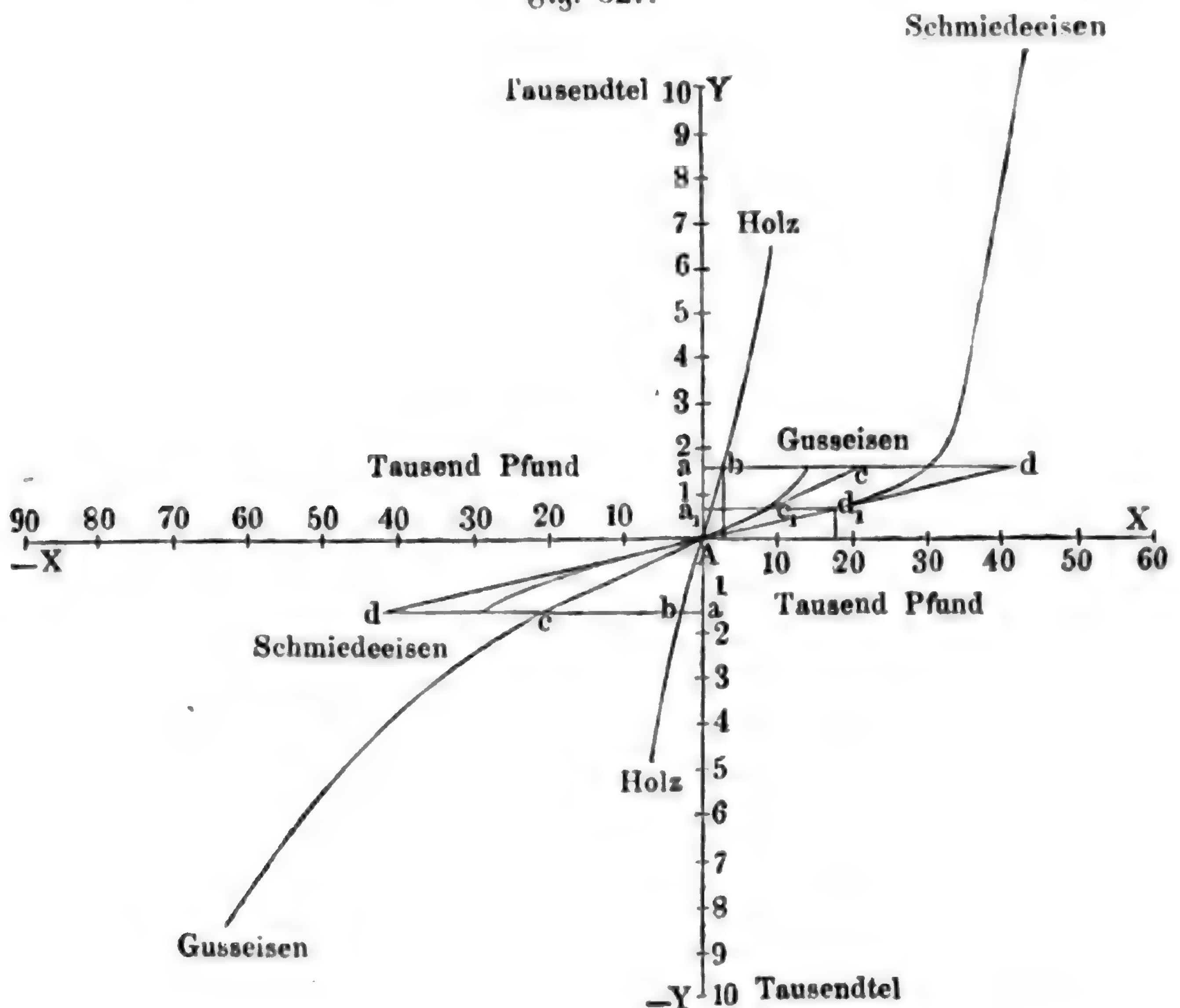
$$K = 650 \text{ Kilogramm} = 8900 \text{ Pfund},$$

und dagegen für die Compression:

$$K_1 = 450 \text{ Kilogramm} = 6200 \text{ Pfund}.$$

Das Verhältniß der Elasticitätsmodel 150 : 1368 : 2740, annähernd = 1 : 9 : 19, zwischen dem Holze, Guß- und Schmiedeeisen ist in der Figur durch die Subtangenten $a\,b$, $a\,c$ und $a\,d$ ausgedrückt.

Fig. 327.



Die Arbeitsmodul $A = \frac{1}{2}\,\sigma\,T$ für die Elasticitätsgrenze drücken die Dreiecke $A\,a\,b$, $A\,a_1\,c_1$ und $A\,a_1\,d_1$ aus, welche die Inhalte der kleinen Ausdehnungsverhältnisse $\sigma = A\,a = \frac{1}{600}$ und $\sigma = A\,a_1 = \frac{1}{1500}$ (annähernd) zur Grundlinie haben. Es ist dem Obigen zufolge, für Holz

$$A = \frac{1}{2}\,\sigma\,T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{600} \cdot 180 = 0{,}15 \text{ Kilogrammcentimeter}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{600} \cdot 2500 = 2{,}08 \text{ Zollpfund},$$

für Gußeisen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1500} \cdot 667 = 0{,}222 \text{ Kilogrammcentimeter} = 3{,}04 \text{ Zollpfund},$$

und für Schmiedeeisen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1333}{1500} = 0{,}444 \text{ Kilogrammcentimeter} = 6{,}08 \text{ Zollpfund}.$$

Um die Arbeitsmodel für das Zerreißen und für das Zerdrücken bestimmen zu können, ist eigentlich eine vollständige Reihe von Ausdehnungs- und Compressionsversuchen nöthig, da diese Model durch die Quadraturen (siehe Artikel 29 der analyt. Hülfslehren) der vollständigen Curvenzweige sowohl auf der einen als auch auf der anderen Seite der Ordinatenaxe ausgedrückt werden; namentlich ist dies erforderlich bei der Ausdehnung des Schmiedeeisens und bei der Compression des Gußeisens, da den Veränderungen dieser Körper Curven zukommen, die von geraden Linien bedeutend abweichen.

Beim Holze ist die Ausdehnung und Compression im Augenblicke des Zerreißens und Zerdrückens zu wenig bekannt, als daß sich für dasselbe mit einiger Sicherheit die Arbeitsmodel desselben für das Zerreißen und Zerdrücken angeben ließen. Behandelt man die entsprechenden Curven als gerade Linien, so erhält man den Arbeitsmodul des Zerreißens:

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{K^2}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{650^2}{110000} = 1{,}91 \text{ Kilogrammcentimeter} = 26{,}1 \text{ Zollpfd.}$$

und dagegen den des Zerdrückens:

$$B_1 = \frac{1}{2} \frac{K_1^2}{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{450^2}{110000} = 0{,}92 \text{ Kilogrammcentimeter} = 12{,}7 \text{ Zollpfd.}$$

Für das Zerreißen des Gußeisens kann man die Ausdehnung $\sigma_1 = 0{,}0016$ und die mittlere Kraft 560 Kilogramm annehmen, so daß für dasselbe der Arbeitsmodul des Zerreißens:

$$B = 0{,}0016 \,.\, 650 = 1{,}04 \text{ Kilogrammcentimeter} = 14{,}2 \text{ Zollpfund}$$

zu setzen ist.

Für das Zerdrücken des Gußeisens möchte dagegen die größte Zusammendrückung $\sigma_1 = 0{,}008$, und die mittlere Compressionskraft = 3600 Kilogramm zu setzen sein, so daß der entsprechende Arbeitsmodul des Zerdrückens

$$B_1 = 0{,}008 \,.\, 3600 = 29 \text{ Kilogrammcentimeter} = 397 \text{ Zollpfund}$$

folgt.

Für das Zerreißen des Schmiedeeisens läßt sich im Mittel $\sigma_1 = 0{,}008$ und die mittlere Kraft 3000 Kilogramm, folglich der entsprechende Arbeitsmodul

$$B = 0{,}008 \,.\, 3000 = 24 \text{ Kilogrammcentimeter} = 328 \text{ Zollpfund}$$

setzen.

Für das Zerdrücken desselben ist dagegen σ_1 nur $= 0{,}0018$ und das

Kraftmittel = 1300 Kilogramm anzunehmen, daher der zugehörige Arbeitsmodul:

$B_1 = 0,0018 . 1300 = 2,34$ Kilogrammcentimeter = 32 Zollpfund.

§. 212 **Erfahrungszahlen.** In folgenden Tabellen I. und II. sind die mittleren Werthe der Elasticitäts-, Trag- und Festigkeitsmodel für die im Bauwesen am häufigsten angewendeten Stoffe aufgeführt. Die erste Tabelle bezieht sich auf Zug- und die zweite auf Druckkräfte.

Die in der zweiten Verticalcolumne dieser Tabelle enthaltenen Werthe der relativen Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze drücken auch das Verhältniß $\frac{T}{E}$ zwischen den in der vierten und dritten Columne aufgeführten Werthen von T und E aus. In der praktischen Anwendung belastet man die Körper entweder nur mit $\frac{1}{m} T$, z. B. $^1/_3\, T$ bis $^1/_2\, T$, oder man bestimmt die Querschnitte F derselben, indem man in der Formel

$$F = \frac{P}{K}$$

statt K, für Metalle den Sicherheitsmodul $\frac{1}{n} K = {}^1/_6\, K$, für Holz und Stein denselben $= {}^1/_{10}\, K$, und für Mauerwerk nur $= {}^1/_{20}\, K$, dagegen für Seile $^1/_3\, K$ bis $^1/_5\, K$ einsetzt.

Die oberen Zahlen in einer Parenthese $\left\{ \right\}$ geben die Model in Kilogrammen an, und setzen einen Querschnitt von 1 Quadratcentimeter voraus; die unteren Zahlen drücken die Model in Zoll- oder Neupfund aus, und beziehen dieselben auf den Querschnitt von 1 Quadratzoll.

Anmerkung. Die in dieser Tabelle angegebenen Model für Metalle beziehen sich auf unausgeglühte Metalle. Bei ausgeglühten Metallen (franz. mét. cuits; engl. annealed met.) ist zwar in der Regel der Elasticitätsmodul derselbe wie bei den nicht ausgeglühten Metallen, dagegen ist der Festigkeitscoefficient des Zerreißens ausgeglühter Metalle meist um 30 bis 40 Procent kleiner als der unausgeglühter Metalle. Der gehärtete und angelassene Stahl (franz. acier trempé et recuit; engl. tempered and annealed steel) hat zwar ebenfalls denselben Elasticitätsmodul als der ungehärtete Stahl, dagegen ist sein Tragmodul oft um 20 bis 30 Procent größer als beim gehärteten Stahl. Da wo es nicht besonders erwähnt wird, sind die angegebenen Model für Metalle an Drähten bestimmt worden, die durch das Ziehen eine härtere Kruste erhalten als gehämmerte oder gar gegossene Metallstäbe. Bei einigen Stoffen, wie bei dem Holze, dem Eisen und den Steinen, sind die Elasticitäts- und Festigkeitsmodel so verschieden, daß sie auch in besonderen Fällen 25 Procent größer oder kleiner sein können als hier angegeben wird.

Tabelle I.

Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Zug.

Namen der Körper.	Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul $T = \sigma E$.	Arbeitsmodul $A = \frac{1}{2}\sigma T$ bei der Elasticitätsgrenze.	Festigkeitsmodul K des Zerreißens.
Gußeisen	$\frac{1}{1500} = 0{,}000667$	13'680000 1'000000	9120 667	3,04 0,222	17800 1300
Schmiedeeisen, in Stäben . . .	$\frac{1}{1500} = 0{,}000667$	27'000000 1'970000	18000 1313	6,08 0,44	56000 4090
in Drähten . . .	$\frac{1}{1000} = 0{,}001000$	30'000000 2'190000	30000 2190	15,0 1,10	85000 6210
in Blechen . . .	$\frac{1}{1250} = 0{,}000800$	25'000000 1'830000	20000 1475	8,0 1,18	45000 3290
Deutscher Stahl, gehärtet u. angelassen	$\frac{1}{835} = 0{,}001198$	28'000000 2'050000	33600 2460	20,0 1,48	112006 8190
Feiner Gußstahl . .	$\frac{1}{450} = 0{,}002222$	40'000000 2'920000	88900 6490	99,0 7,20	140000 10230
Kupfer, gehämmert .	$\frac{1}{4000} = 0{,}000250$	15'000000 1'100000	3750 275	0,47 0,034	32500 2380
Kupferblech	$\frac{1}{3650} = 0{,}000274$	15'000000 1'100000	4110 301	0,56 0,041	29000 2140
Kupferdraht	$\frac{1}{1000} = 0{,}001000$	16'500000 1'210000	16500 1210	8,25 0,605	58000 4240
Zink, geschmolzen . .	$\frac{1}{4150} = 0{,}000241$	13'000000 950000	3130 229	0,377 0,029	7200 526
Messing	$\frac{1}{1320} = 0{,}000758$	8'800000 640000	6670 485	2,53 0,184	17000 1242
Messingdraht . . .	$\frac{1}{742} = 0{,}001350$	13'500000 987000	18220 1330	12,3 0,90	50000 3654
Bronce (Kanonenmetall)	$\frac{1}{1590} = 0{,}000629$	9'500000 690000	5970 434	1,88 0,136	35000 2560
Blei	$\frac{1}{477} = 0{,}00210$	685000 50000	14400 1050	15,10 1,10	1780 130
Bleidraht	$\frac{1}{1500} = 0{,}000667$	960000 70000	6400 470	2,13 0,16	3000 220

Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Zug (Fortsetzung.)

Namen der Körper.	Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul $T = \sigma E$.	Arbeitsmodul $A = \frac{1}{2}\sigma T$ bei der Elasticitätsgrenze.	Festigkeitsmodul K des Zerreißens.
Zinn	$\frac{1}{900} = 0{,}001111$	5'500000 400000	6100 440	3,40 0,24	4800 350
Silber	$\frac{1}{660} = 0{,}001515$	10'000000 730000	15150 1100	11,5 0,83	40000 2900
Gold	$\frac{1}{600} = 0{,}001667$	10'900000 800000	18000 1300	15 1,09	37000 2700
Platin	$\frac{1}{600} = 0{,}001667$	21'900000 1'600000	36500 2700	30,4 2,25	46500 3400
Alumin	—	10'000000 675000	— —	— —	27800 2030
Glas	—	9'600000 700000	— —	— —	3400 248
Buchen-, Eichen-, Fichten-, Kiefern-, Tannenholz, in der Richtung der Fasern . .	$\frac{1}{600} = 0{,}001667$	1'500000 110000	2500 1800	2,10 0,15	8900 650
Dieselben Holzarten in radialer Richtung zu den Jahresringen	—	180000 13000	— —	— —	550 40
Dieselben Holzarten parallel zu den Jahresringen	—	110000 8000	— —	— —	620 45
Schwache Hanfseile .	—	—	—	—	8400 610
Starke Hanfseile . .	—	—	—	—	6500 480
Drahtseile	—	—	—	—	45000 3300
Kettentaue	—	—	—	—	50000 3650
Lederriemen (von Kuhleder)	—	10000 731	—	—	4000 290
Einfach genietetes Eisenblech	—	—	—	—	36000 2600

Tabelle II.

Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Druck.

Namen der Körper.	Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul $T = \sigma E$.	Arbeitsmodul $A = \frac{1}{2} \sigma T$ bei der Elasticitätsgrenze.	Festigkeitsmodul K des Zerreißens.
Gußeisen	$\frac{1}{750} = 0{,}001333$	{13'500000 990000	18000 1320	12,0 0,88	100000 7310}
Schmiedeeisen . . .	$\frac{1}{1500} = 0{,}000667$	{27'000000 1'970000	18000 1320	6,0 0,44	30000 2200}
Kupfer	$\frac{1}{4000} = 0{,}000250$	{15'000000 1'100000	3750 275	0,47 0,039	56000 4100}
Messing	—	—	—	—	{10000 731}
Blei	—	—	—	—	{7000 510}
Holz, in der Richtung der Fasern . .	—	—	—	—	{6500 480}
Basalt	—	—	—	—	{27000 1970}
Gneiß und Granit .	—	—	—	—	{8000 585}
Kalkstein	—	—	—	—	{5000 365}
Sandstein	—	—	—	—	{4000 292}
Ziegelstein	—	—	—	—	{800 59}
Mörtel	—	—	—	—	{500 37}

Beispiel 1. Welchen Querschnitt soll ein 1500 Fuß langes schmiedeeisernes Gestänge erhalten, welches durch eine Last von 60000 Pfund gespannt wird? Ohne Rücksicht auf das Gestänggewicht wäre, wenn man eine Spannung von $\frac{T}{2}$ $= 9000$ Pfund pro Quadratzoll zuläßt, der nöthige Querschnitt $F = \frac{60000}{9000}$ $= 6{,}67$ Quadratzoll; mit Rücksicht auf das Gestänggewicht aber wäre, da 1 Cubikzoll Schmiedeeisen das Gewicht $\gamma = 0{,}275$ Pfund hat,

$$F = \frac{60000}{9000 - 1500 \, . \, 12 \, . \, 0{,}275} = \frac{60000}{9000 - 4950} = \frac{6000}{405} = 14{,}8 \text{ Quadratzoll.}$$

Das Gewicht dieses Gestänges ist $G = Fl\gamma = 4950 \, . \, 14{,}8 = 73260$ Pfund, und die Verlängerung desselben durch die Zugkräfte $P = 60000$ Pfund und $G = 73260$ Pfund,

$$\lambda = \frac{(P + \frac{1}{2} G) l}{FE} = \frac{96630 \, . \, 18000}{14{,}8 \, . \, 27'400000} = \frac{173934}{40552} = 4{,}29 \text{ Zoll.}$$

Beispiel 2. Wie stark sind die Grundmauern eines außen 60 Fuß langen und 40 Fuß breiten und 35 Millionen Pfund schweren Gebäudes aufzuführen, wenn man hierzu gut bearbeitete Gneißstücke verwendet. Setzen wir die gesuchte Mauerdicke x Fuß, so können wir die mittlere Länge der Mauer $60 - x$ und die mittlere Breite derselben $40 - x$, also den mittleren Umfang

$$2 \, . \, (60 - x + 40 - x) = 200 - 4x$$

und folglich die Grundfläche des ganzen Mauerwerkes

$(200 - 4x) x$ Quadratfuß $= 144 \, . \, (200 - 4x) x = 576 \, (50 - x) x$ Quadratzoll annehmen.

Der Festigkeitsmodul für das Zerdrücken des Gneißes ist nach der Tabelle 8000 Pfund, nimmt man daher für die Mauer aus demselben 20fache Sicherheit an, setzt man also den zulässigen Druck auf den Quadratzoll $\frac{8000}{20} = 400$ Pfund, so ist daher zu setzen:

$$400 \, . \, 576 \, (50 - x) x = 35'000000,$$

woraus nun

$$50x - x^2 = 151{,}9,$$

und schließlich die gesuchte Mauerdicke

$$x = \frac{151{,}9 + x^2}{50} = 3{,}04 + \frac{9}{50} = 3{,}22 \text{ Fuß folgt.}$$

§. 213 **Schubfestigkeit.** Die Schubfestigkeit oder der Widerstand des Abdrückens oder Abscheerens (franz. résistance par glissement ou cisaillement; engl. strenght of shearing), wobei die Trennungsfläche in die Richtung der Kraft fällt, ist ähnlich wie die Zugfestigkeit zu beurtheilen. Man hat es hier mit der Zusammenwirkung dreier Parallelkräfte P, Q und R, Fig. 328, zu thun, wobei die Angriffspunkte A und C von zwei derselben (P und R) einander so nahe liegen, daß eine Biegung des zwischenliegenden Stückes AC nicht möglich ist, und daher eine Trennung zwischen A und C, und zwar in einer Fläche DD rechtwinkelig zur Axe des Körpers, erfolgt.

Fig. 328.

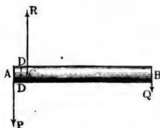
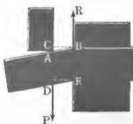


Fig. 329.



Der Widerstand des Abschiebens ist, wie der des Zerreißens und der des Zerdrückens, dem Querschnitte des Körpers oder vielmehr der Größe der Trennungsfläche F proportional, und läßt sich beim Schmiedeeisen sogar annähernd dem des Zerreißens gleichsetzen, so daß also der Modul K der Zugfestigkeit auch als Festigkeitsmodul für das Abschieben gelten, und folglich die Kraft zum Abschieben bei dem Querschnitte F

$$P = FK$$

gesetzt werden kann. Allgemein ist aber

$$P = FK_2,$$

wobei K_2 den durch Versuche zu ermittelnden Widerstand des Abschiebens oder Abscheerens pro Flächeneinheit bezeichnet.

Die Elasticitätsformel $P = \frac{\lambda}{l} FE = \sigma FE$ für Zug- und Druckkräfte läßt sich auch auf die Schubkraft P, Fig. 329, anwenden, nur bedeutet hier σ das Verhältniß $\iota = \frac{CA}{CB}$ der Verschiebung CA zur Länge oder dem Abstande CB der Kraftrichtungen AP und ER von einander; jedoch ist für E eine durch besondere Versuche zu ermittelnde Erfahrungszahl C einzusetzen.

Folgende Tabelle III. enthält die bis jetzt bekannten Elasticitäts- und Festigkeitsmodel (C und K_2) entsprechend den Formeln $P = \iota FC$ und $P_1 = FK_2$ für die Schub- oder Scheer-Elasticität und Festigkeit.

Tabelle III.

Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Schub (des Abscheerens).

Namen der Körper.	Elasticitätsmodul C.	Festigkeitsmodul K_2.
Gußeisen	2'700000 200000	31000 2270
Schmiedeeisen	8'600000 630000	48000 3500
Feiner Gußstahl	13'680000 1'000000	88900 6500
Kupfer	6'000000 440000	—
Messing	5'100000 370000	—
Laubholz	547000 40000	650 48
Nadelholz	592000 43300	2200 161

Gewöhnlich nimmt man $C = \frac{1}{3} E$ und $K_2 = K$ an.

Die Formel $P = F K_2$ findet vorzüglich ihre Anwendung bei Bestimmung der Stärke d der Bolzen und Nieten, wodurch Bleche und andere plattenförmige Körper mit einander verbunden werden. Es finden bei dieser Verbindung der Hauptsache nach zwei Fälle statt; entweder werden die zu verbindenden Blechenden AB und CD, Fig. 330, über einander geplattet, und durch Nieten oder Bolzen NN und OO zusammengehalten, oder es werden, wie Fig. 331 vor Augen führt, die Blechenden AB und AC stumpf zusammengestoßen, mit gelochten Laschen DD und EE bedeckt, und durch Nieten NN und OO fest mit einander verbunden. Bei der ersteren Verbindungsweise geht die Zugkraft in dem einen Bleche vermittels eines Kräftepaares auf das andere Blech über, wodurch beide Bleche außer der Dehnung auch noch eine Biegung erleiden, und folglich an ihrem Tragvermögen verlieren; es ist daher die zweite Verbindungsart, wo dieses Kräftepaar nicht hervor- und folglich auch keine Biegung eintritt, die bessere.

Fig. 330.

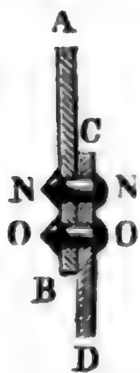
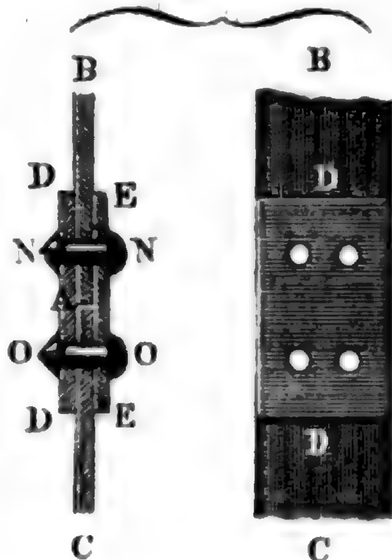


Fig. 331.



Da die verbundenen Blechenden und Blechlaschen durch die Nieten- oder Bolzenköpfe mit einer nicht unbedeutenden Kraft auf einander drücken, so wird durch die daraus entspringende Reibung der Zusammenhalt der Körper noch ansehnlich verstärkt. Der Sicherheit wegen läßt man jedoch diese Wirkung bei der Bestimmung der Nietenstärke außer Acht. Auf der anderen Seite wird aber die Tragkraft der Bleche durch die Lochung für die Nieten oder Bolzen vermindert, und es ist daher dafür zu sorgen, daß diese Kraft nicht von der Tragkraft der Nieten übertroffen werde.

Ist d die Stärke einer Niete und ν die Anzahl der Nieten bei einer Blechverbindung wie Fig. 331, so hat man die Trag- oder Zugkraft derselben:

$$P = \nu \frac{\pi d^2}{4} \frac{K_2}{n};$$

ist dagegen b die Breite und s die Dicke der zu verbindenden Blechstücke, sowie ν_1 die Anzahl der Nieten neben einander, so hat man den die Kraft P aufnehmenden Querschnitt des Bleches:

$$F = (b - \nu_1 d)\, s, \text{ und daher auch } P = (b - \nu_1 d)\, s \frac{K}{n},$$

wo K den Festigkeitsmodul des Eisenbleches bezeichnet, so daß demnach

$$\frac{\nu \pi d^2}{4} K_2 = (b - \nu_1 d)\, s K, \text{ oder}$$

$$\nu = \frac{4\,(b - \nu_1 d)\, s}{\pi d^2} \frac{K}{K_2} \text{ zu setzen ist.}$$

Beim Lochen der Bleche ist jedenfalls auch der Widerstand des Abschiebens zu überwinden, nur hat man es hier nicht mit einer ebenen, sondern mit einer cylindrischen Trennungsfläche zu thun. Ist s die Blechstärke und d der Durchmesser des Loches in dem Bleche, so hat man den Inhalt der Trennungsfläche:

$$F = \pi d s,$$

und folglich die Kraft zum Durchlochen:

$$P = F K_2 = \pi d s K_2.$$

(Vergl. den „Civilingenieur", Band I., 1854, und zwar John Jones' Versuche über den Kraftbedarf zum Lochen von Eisenblechen, von C. Bornemann.)

Beispiele. 1) Eine eiserne Niete von $1\frac{1}{2}$ Zoll Stärke trägt mit Sicherheit, wenn $K_2 = \frac{1}{6} . 4800 = 800$ Pfund angenommen wird, die Last

$$P = \frac{\pi d^2}{4} K_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^2 . 800 = \frac{900 \pi}{2} = 1414 \text{ Pfund},$$

und das Durchstoßen des hierzu nöthigen Loches macht, wenn das Eisenblech $\frac{1}{2}$ Zoll dick ist, die Kraft

$$P_1 = \pi d s . K_2 = \pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4800 = 3600 \pi = 11310 \text{ Pfund}$$

nöthig.

2) Sind zwei Blechstücke durch eine Reihe von Nieten mit einander zu verbinden, so ist bei der Stärke s des Bleches für die nöthige Breite b desselben auf je einen Bolzen:

$$(b - d) s = \frac{\pi d^2}{4} \text{ zu setzen, folglich}$$

$$b = d + \frac{\pi d^2}{4 s} = d \left(1 + \frac{\pi d}{4 s}\right);$$

z. B. für $d = \frac{3}{2}$ und $s = \frac{1}{2}$ Zoll:

$$b = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{3 \pi}{4}\right) = 5 \text{ Zoll}.$$

Zweites Capitel.

Die Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

Biegung. Der einfachste Fall der Biegung eines Körpers ABC, Fig 332 (a. f. S.), tritt dann ein, wenn dieser Körper von einer Kraft $\overline{AP} = P$ ergriffen wird, deren Richtung normal zur Axe AB desselben steht, während er in zwei Punkten B und C festgehalten wird. Sind l und l_1 die Entfernungen §. 2

CA und CB der Angriffspunkte A und B von dem mittleren Stütz- oder Angriffspunkte C, so hat man dann die Kraft in B:

$$Q = \frac{Pl}{l_1},$$

und folglich die Mittelkraft:

$$R = P + Q = \left(1 + \frac{l}{l_1}\right) P.$$

Fig. 332.

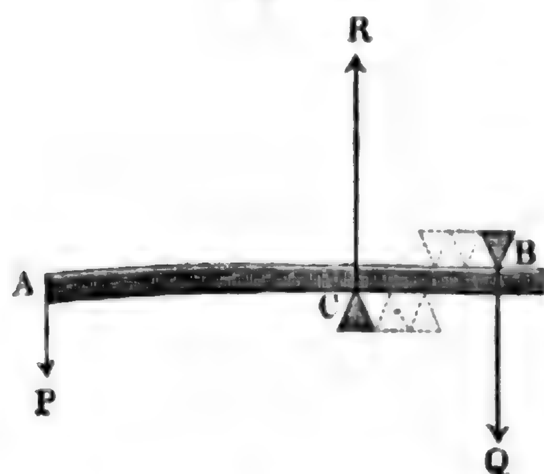
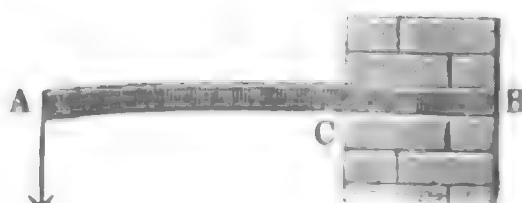


Fig. 333.



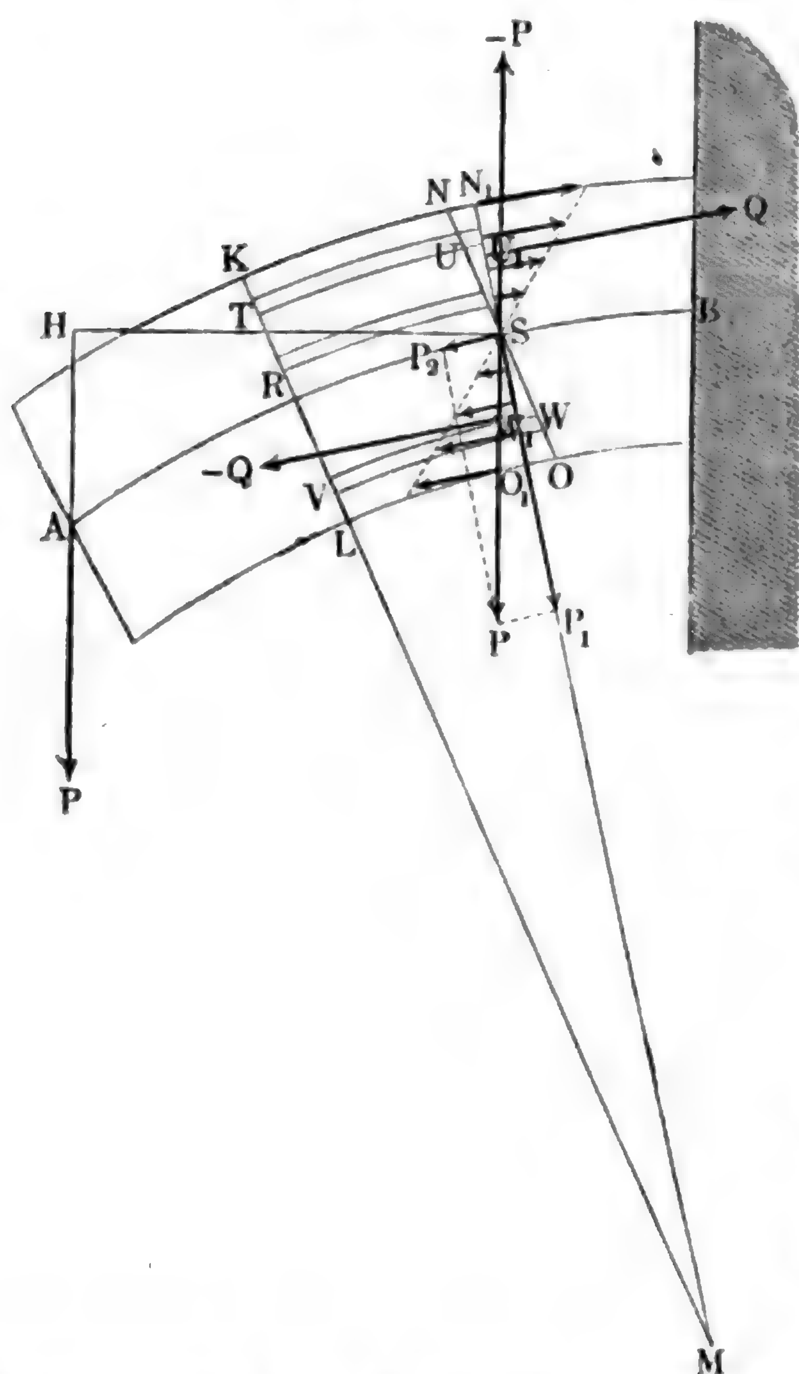
Will man die Biegung der einen Hälfte des Körpers verhindern, so muß man zwischen den Stützpunkten noch unendlich viele andere einschalten, oder den Körper längs BC festklemmen oder einmauern, wie Fig. 333 vor Augen führt, und es bleibt dann nur noch die Biegung des freien Stückes AC des Körpers zu untersuchen übrig.

Setzen wir zunächst einen prismatischen Körper voraus, und nehmen wir an, daß derselbe aus über- und nebeneinanderliegenden Längenfasern zusammengesetzt sei, die während der Biegung weder ihren Parallelismus verlieren, noch sich an einander verschieben.

Bei dieser Biegung werden diejenigen Fasern, welche sich auf der convexen Seite des Körpers befinden, ausgedehnt, und diejenigen, welche der concaven Seite desselben näher liegen, zusammengedrückt, während eine gewisse mittlere Faserschicht, die sogenannte neutrale Axenschicht (franz. couche des fibres invariables; engl. neutral surface of a deflected beam), weder eine Ausdehnung noch eine Zusammendrückung erleidet. Die Ausdehnungen und Zusammendrückungen der verschiedenen Fasern über und unter der neutralen Axenschicht sind den Abständen von dieser Schicht proportional; es nimmt folglich von dieser Axe oder Axenschicht aus die Ausdehnung der Fasern nach der einen Seite und die Zusammendrückung derselben nach der anderen hin allmälig zu, so daß also die von dieser Schicht am meisten abstehenden Fasern einerseits die größte Ausdehnung und andererseits die größte Zusammendrückung erleiden. Ein vor der Biegung von den Querschnitten KL und NO begrenztes Stück des Körpers AKB, Fig. 334, nimmt durch die Biegung die Form KLO_1N_1 an, wobei der Querschnitt NO in

$N_1 O_1$ übergeht, nämlich seine parallele Lage zu KL verläßt und sich wie KL rechtwinkelig auf die neutrale Axe RS stellt. Die Fasernlänge KN

Fig. 334.



geht folglich hierbei in KN_1, die Fasernlänge LO in LO_1 über; es wird also die erstere um NN_1 verlängert und die letztere um OO_1 verkürzt, während die Faser RS in der neutralen Axe ihre Länge unverändert behält. Zwischenliegende Fasern wie TU, VW u. s. w. gehen in TU_1 und VW_1 über, wobei sie sich um die Größen UU_1, WW_1 u. s. w. ausdehnen und comprimiren, welche durch die Proportionen

$$\frac{UU_1}{NN_1} = \frac{SU}{SN},$$

$$\frac{WW_1}{OO_1} = \frac{SW}{SO} \text{ u. s. w.}$$

bestimmt sind.

Nehmen wir die Länge der Fasern

$$RS = KN = LO = \text{Eins } (1)$$

an und bezeichnen wir die Ausdehnung oder Compression derjenigen Fasern, welche um Eins (1) von der neutralen Axe abstehen, durch σ, so haben wir folglich für eine Faser, welche um SU oder $SW = z$ von dieser Axe entfernt ist, die Ausdehnung oder Compression

$$UU_1 \text{ oder } WW_1 = \sigma z.$$

Ist der Körper nur wenig gebogen, so daß hierbei die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten wird, so kann man die spannenden Kräfte der verschiedenen Fasern ihren Ausdehnungen u. s. w. proportional setzen, und folglich auch annehmen, daß diese Kräfte proportional ihren Abständen von der neutralen Axe wachsen, wie auch in der Figur durch Pfeile angedeutet wird.

Wenn der Querschnitt einer Faser = Eins ist, so haben wir folglich allgemein die Spannungskraft derselben (s. §. 204):

$$= \sigma z E;$$

hat ferner eine Faser den Querschnitt $= F$, so beträgt ihre Zug- oder Druckkraft:

$$S = \sigma z F E = \sigma E . F z,$$

und es ist ihr Moment in Hinsicht auf den Axenpunkt S:

$$M = z . \sigma z F E = \sigma z^2 F E = \sigma E . F z^2.$$

§. 215 **Biegungsmoment.** Die sämmtlichen Zug- und Druckkräfte in einem Querschnitte $N_1 O_1$ halten der Biegungskraft P am Ende A des Körpers AB das Gleichgewicht; es lassen sich daher auf diese Kräfte die bekannten Gesetze des Gleichgewichtes anwenden. Denkt man sich in S noch zwei Kräfte $+ P$ und $- P$ wirksam, welche nicht nur der gegebenen Biegungskraft P gleich, sondern auch mit derselben gleichgerichtet sind, so erhält man

1) ein Kräftepaar $(P, - P)$, welches die Biegung oder Drehung um S hervorbringt und

2) eine einfache Schubkraft $\overline{SP} = P$, welche das Körperstück AS in der Richtung von SP oder AP von dem übrigen Körper abzuschieben sucht. Die letztere Kraft läßt sich noch in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegen, deren Richtungen in die Ebene des Querschnittes $N_1 O_1$ und in die neutrale Axe SR fallen. Ist α der Winkel, um welchen der Querschnitt $N_1 O_1$ von der Richtung AP der Biegungskraft abweicht, so hat man:

$$P_1 = P \cos. \alpha \text{ und}$$
$$P_2 = P \sin. \alpha.$$

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ist die Biegung der Körper und also auch α so klein, daß man $\sin. \alpha = 0$ und $\cos. \alpha = 1$, folglich die Seitenkraft P_2, welche das Stück AS in $N_1 O_1$ abzureißen sucht, ganz vernachlässigen, und dagegen die Kraft P_1, welche das Stück AS in $N_1 O_1$ abzuscheeren sucht, der Biegungskraft P gleichsetzen kann. Bezeichnet F den Inhalt des Querschnittes $N_1 O_1$ und K_2 den Modul der Schubfestigkeit, so ist die Kraft zum Abschieben durch das Product $F K_2$ (s. §. 213) bestimmt. Hat man es mit längeren prismatischen Körpern zu thun, so ist meistens P ein so kleiner Theil von $F K_2$, daß ein solches Abschieben durch P selten eintreten kann, weshalb wir es daher auch im Folgenden nur in besonderen Fällen in Untersuchung ziehen. (S. das folgende Capitel.)

Da einem Kräftepaare $(P, - P)$ nur durch ein anderes Kräftepaar das Gleichgewicht gehalten werden kann, so folgt, daß die Ausdehnungskräfte auf der einen Seite von S mit den Zusammendrückungskräften auf der anderen Seite ein anderes Kräftepaar $(Q, - Q)$ bilden, und daß die Momente beider Paare einander gleich sein müssen. Sind F_1, F_2, F_3 u. s. w. Elemente oder unendlich kleine Theile von der ganzen Fläche F des Querschnittes $NO = N_1 O_1$, und bezeichnet man die Abstände dieser Theile von der neutralen Axe oder S durch z_1, z_2, z_3 u. s. w., so hat man die Spannkräfte derselben:

$$\sigma E . F_1 z_1,\ \sigma E . F_2 z_2,\ \sigma E . F_3 z_3 \text{ u. s. w.}$$

und ihre Momente:

$$\sigma E . F_1 z^2,\ \sigma E . F_2 z_2^2,\ \sigma E . F_3 z_3^2 \text{ u. s. w.}$$

Da diese Kräfte ein Kräftepaar ($Q, - Q$) bilden, so muß ihre Summe $\sigma E (F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \cdots)$, und folglich auch $F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \cdots =$ Null sein.

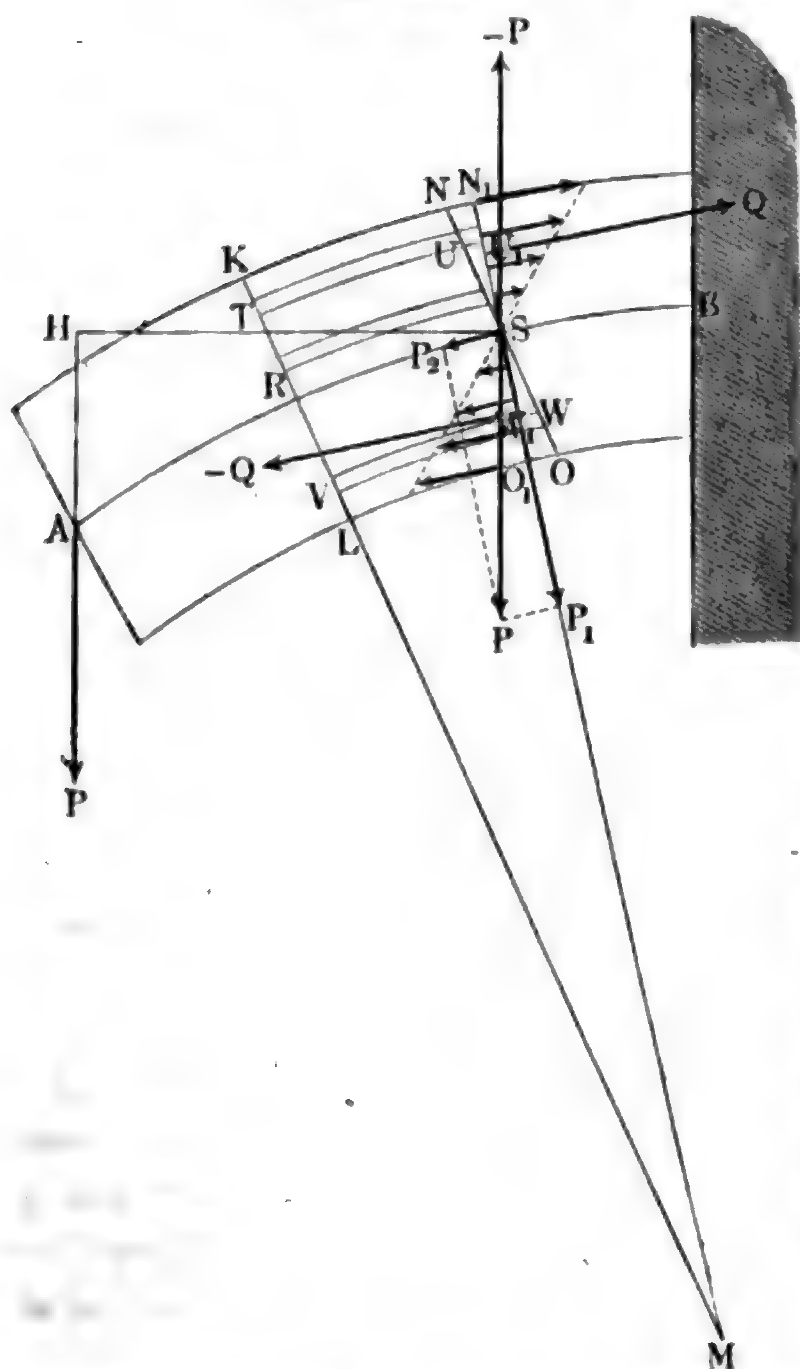


Fig. 334 a.

Diese Summe ist aber nur dann Null, wenn der Axpunkt S mit dem Schwerpunkte der Fläche $F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$ zusammenfällt; es geht folglich die neutrale Axe des gebogenen Körpers durch den Schwerpunkt S seines Querschnittes F. Das Moment des Kräftepaares ($Q, - Q$)

$$\sigma E (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + F_3 z_3^2 + \cdots)$$

ist natürlich dem Momente des Kräftepaares ($P, - P$) gleich zu setzen. Bezeichnen wir nun den Abstand SH des Schwer- oder Axpunktes S von der Richtung AP der Biegungskraft durch x, so haben wir das Moment des letzteren Paares $= Px$, und daher

$$Px = \sigma E (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots) \text{ zu setzen.}$$

Endlich haben wir noch für den Krümmungshalbmesser $MR = MS$ der neutralen Faserschicht die Proportion

$$\frac{MR}{RS} = \frac{SU}{UU_1},$$

oder, wenn man $MR = r$, $RS = 1$, $SU = 1$ und $UU_1 = \sigma$ einsetzt,

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{\sigma}.$$

Es ist folglich $r\sigma = 1$, oder $\sigma = \frac{1}{r}$, demnach das Kraftmoment:

$$P x = \frac{E}{r} (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots),$$

und endlich der Krümmungshalbmesser an der Stelle S:

$$r = \frac{E}{P x} (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots).$$

Der Ausdruck $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ hängt nur von der Form und Größe des Querschnittes ab, und läßt sich daher auf dem Wege der Geometrie ermitteln. Wir werden ihn in der Folge durch W bezeichnen und die ihm entsprechende Größe das Maß des Biegungsmomentes, sowie WE das Biegungsmoment (franz. moment de flexion; engl. momentum of flexion) selbst nennen. Hiernach ist der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{W E}{P x},$$ und zu behaupten:

> der Krümmungshalbmesser der neutralen Axe eines gebogenen Körpers wächst mit dem Maße W des Biegungsmomentes und dem Elasticitätsmodul E direct und dagegen mit dem Kraftmomente Px umgekehrt proportional.

Die Krümmung selbst ist dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional, und wächst daher wie das Kraftmoment Px und umgekehrt wie das Biegungsmoment WE.

§. 216 **Elastische Linie.** Hat man für die Querschnitte der gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Körper die Biegungsmomente WE bestimmt, so kann man durch dieselben auch die Krümmung und hieraus wieder die Gestalt der neutralen Axe oder der sogenannten elastischen Linie ermitteln. Die Gleichung

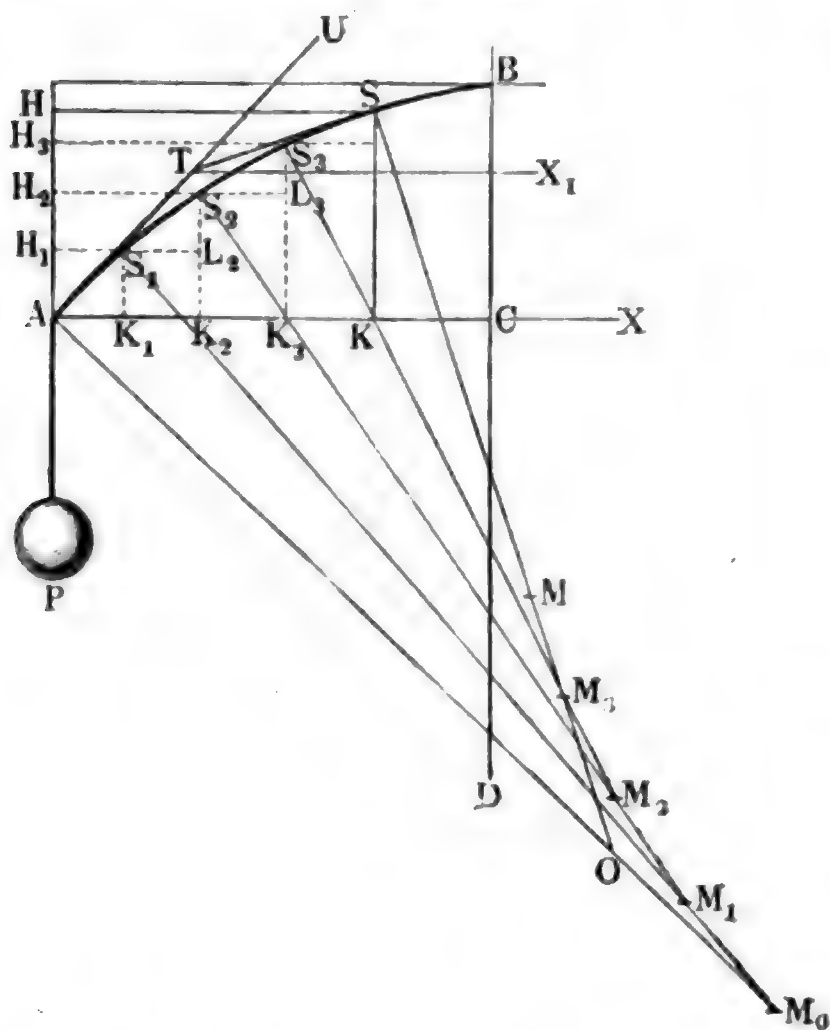
$$P x r = W E \text{ oder } r = \frac{W E}{P x}$$

sagt uns, daß bei einem prismatischen Körper das Product aus Krümmungshalbmesser und Kraftmoment für alle Punkte der elastischen Linie AB, Fig. 335, eins und dasselbe ist, daß folglich r um so größer oder kleiner ausfällt, je kleiner oder größer der Hebelarm x der Kraft ist, oder je näher oder entfernter der in Betrachtung zu ziehende Punkt S dem Ende A der neutralen Axe liegt. In A ist $x = 0$, und folglich der Krümmungshalbmesser unendlich groß, im festen Punkte B ist dagegen x am größten und daher der Krümmungshalbmesser am kleinsten; es nimmt also derselbe, wenn man vom festen Punkte B allmälig nach dem Endpunkte A zu fortschreitet, von einem gewissen endlichen Werthe an, nach und nach bis ins Unendliche zu.

Theilt man ein Stück AS der elastischen Linie, dessen Länge $= s$ sein möge, in lauter gleiche Theile, und errichtet man in den End- und Theilpunkten A, S_1, S_2, S_3 u. s. w. Perpendikel auf die Curve, so schneiden sich dieselben in den Mittelpunkten M_0, M_1, M_2 der Krümmungskreise, und es sind folglich

die Abschnitte $M_0 A = M_0 S_1$, $M_1 S_1 = M_1 S_2$, $M_2 S_2 = M_2 S_3$ u. s. w. die gesuchten **Krümmungshalbmesser** (s. analyt. Hülfslehren Art. 33) r_1, r_2, r_3 u. s. w. der elastischen Linie. Ist n die Anzahl der Theile dieser Linie, so hat man die Größe eines Theiles, $= \frac{s}{n}$, und bezeichnet man die Bogenmaße (für den Radius = 1) der **Krümmungswinkel** $AM_0S_1 = \delta_1^0$, $S_1 M_1 S_2 = \delta_2^0$, $S_2 M_2 S_3 = \delta_3$ u. s. w. durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ u. s. w. schlechtweg, so läßt sich $\frac{s}{n} = \delta_1 r_1 = \delta_2 r_2 = \delta_3 r_3$ u. s. w. setzen, wonach sich nun $\delta_1 = \frac{s}{n r_1}$, $\delta_2 = \frac{s}{n r_2}$, $\delta_3 = \frac{s}{n r_3}$ u. s. w. bestimmt.

Fig. 335.



Wenn wir noch voraussetzen, daß die elastische Linie nur wenig gebogen ist, so können wir die Projectionen der Bogentheile in der rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung gelegten Abscissenaxe AX diesen Bogentheilen gleich, also $AK_1 = H_1 S_1 = K_1 K_2 = K_2 K_3$ u. s. w. setzen, so daß nun die Hebelarme der Kraft P in Hinsicht auf die Punkte S_1, S_2, S_3 u. s. w.

$$H_1 S_1 = \frac{s}{n},$$

$$H_2 S_2 = H_1 S_1 + S_1 L_2 = 2 \frac{s}{n},$$

$$H_3 S_3 = H_2 S_2 + S_2 L_3 = 3 \frac{s}{n} \text{ u. s. w.}$$

und folglich die entsprechenden Kraftmomente oder Werthe für Px folgende sind:

$$\frac{Ps}{n}, \frac{2Ps}{n}, \frac{3Ps}{n} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man endlich diese Werthe in die obige Formel $r = \frac{WE}{Px}$ für den Krümmungshalbmesser, statt Px nach und nach ein, so erhält man folgende Reihe für die Krümmungshalbmesser:

$$r_1 = n\,\frac{WE}{Ps},\ r_2 = \frac{n}{2}\,\frac{WE}{Ps},\ r_3 = \frac{n}{3}\,\frac{WE}{Ps} \text{ u. s. w.,}$$

und daher für die entsprechenden Krümmungsmaße:

$$\delta_1 = \frac{s}{n\,r_1} = \frac{Ps^2}{n^2\,WE},\ \delta_2 = \frac{s}{n\,r_2} = 2\,.\,\frac{Ps^2}{n^2\,WE},$$

$$\delta_3 = \frac{s}{n\,r_3} = 3\cdot\frac{Ps^2}{n^2\,WE} \text{ u. s. w.}$$

Durch Summation dieser Winkelmaße ergiebt sich nun für den Krümmungswinkel $A\,O\,S = \varphi^0$ des ganzen Bogens $A\,S = s = x$:

$$\varphi = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\,\frac{Ps^2}{n^2\,WE},$$

oder, da, wie bekannt, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2}$ zu setzen ist,

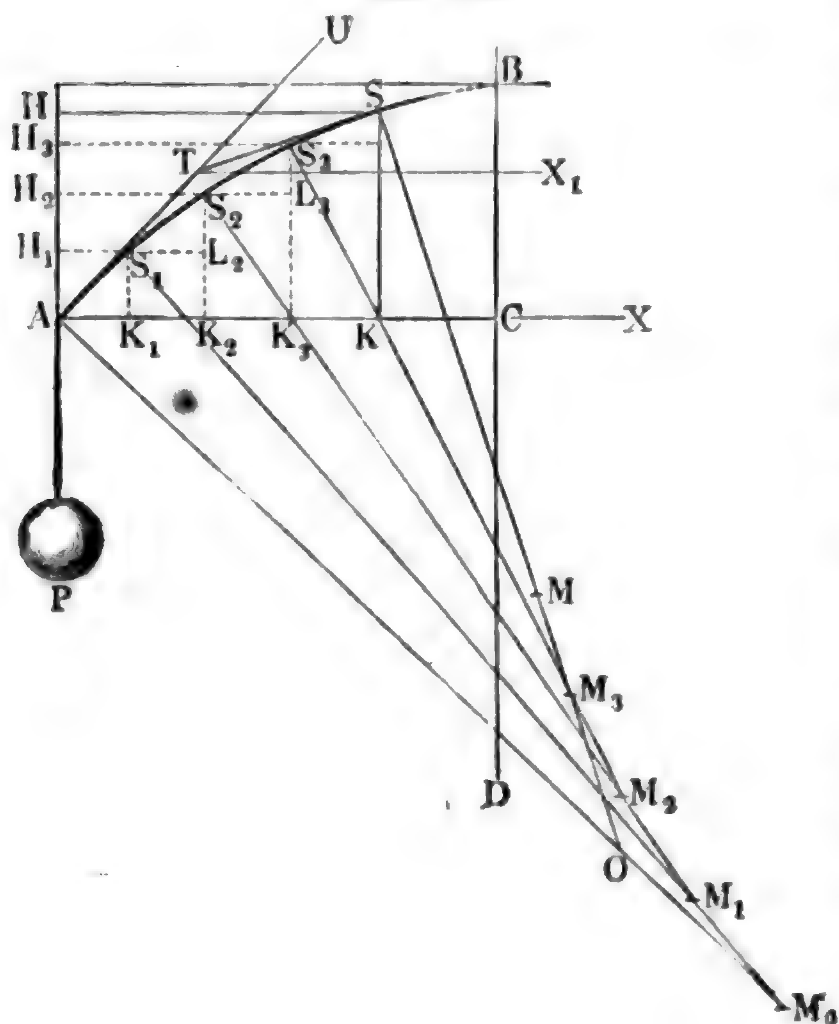
$$\varphi = \frac{n^2}{2}\cdot\frac{Ps^2}{n^2\,WE} = \frac{Ps^2}{2\,WE},$$

wofür unter der gemachten Voraussetzung natürlich auch

$$\varphi = \frac{Px^2}{2\,WE} \text{ gesetzt werden kann.}$$

Dieser Bogen oder Winkel drückt, da der Winkel zwischen zwei Linien gleich ist dem Winkel zwischen den Normalen zu diesen Linien, auch den Winkel $S\,T\,U$ aus, um welchen die durch A und S gelegten Berührungslinien $A\,T$ und $S\,T$ von einander abweichen, oder um welchen die Curve in A mehr gegen die Abscissenaxe geneigt ist als in S.

Fig. 336.



Gehen wir von einem unbestimmten Punkte S auf den festen Endpunkt B über, so haben wir statt s die ganze Länge l von $A\,S\,B$, oder annähernd, die Projection $A\,C$ derselben in der Abscissenaxe einzusetzen, und es geht dann, unter der Voraussetzung, daß in B die Curve rechtwinkelig zur Kraftrichtung, also mit der Abscissenaxe parallel läuft, der Winkel φ in

$$ADB = \beta = \frac{P l^2}{2 W E},$$

dagegen aber der Neigungs- oder Tangentenwinkel $TSH = STX_1$ in

$$\alpha = \beta - \varphi = \frac{P l^2}{2 W E} - \frac{P s^2}{2 W E} = \frac{P (l^2 - s^2)}{2 W E} = \frac{P (l^2 - x^2)}{2 W E}$$ über.

Wäre die Curve im festen Punkte B nicht genau rechtwinkelig auf der Kraftrichtung, sondern hätte sie an dieser Stelle einen kleinen Neigungswinkel α_1, so würde sein:

$$\beta = \alpha_1 + \frac{P l^2}{2 W E}$$ und daher:

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{P (l^2 - x^2)}{2 W E}.$$

Gleichung der elastischen Linie. Mit Hülfe der letzten Formel §. 217 kann man nun auch die Gleichung der elastischen Linie entwickeln. Die Ordinate $KS = y$ dieser Curve läßt sich aus unendlich vielen (n) Stücken, wie z. B. $K_1 S_1$, $L_2 S_2$, $L_3 S_3$ u. s. w. zusammensetzen, welche sich durch Multiplication eines Bogenelementes

$$A S_1 = S_1 S_2 = S_2 S_3 \text{ etc.} = \frac{s}{n}$$

mit den Sinus der entsprechenden Tangentenwinkel $S_1 A K_1$, $S_2 S_1 L_2$, $S_3 S_2 L_3$ u. s. w. bestimmen lassen. Es ist

$$KS = K_1 S_1 + L_2 S_2 + L_3 S_3 + \cdots, \text{ oder}$$

$$y = \frac{s}{n} (sin.\, S_1 A K + sin.\, S_2 S_1 L_2 + sin.\, S_3 S_2 L_3 + \cdots),$$

also, wenn man die Abscisse $AK = x$ statt des Bogens $AS = s$ einführt, und die letzten Sinus durch nach der Formel

$$\alpha = \frac{P (l^2 - x^2)}{2 W E}$$

zu berechnende Bögen ersetzt, indem man für x nach und nach $\frac{x}{n}$, $\frac{2x}{n}$, $\frac{3x}{n}$ u. s. w. einführt.

$$y = \frac{x}{n} \cdot \frac{P}{2 W E} \left[l^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{2x}{n}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{3x}{n}\right)^2 + \cdots + l^2 - \left(\frac{nx}{n}\right)^2 \right].$$

Nun läßt sich aber $l^2 + l^2 + \cdots + l^2 = n l^2$ und

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \left(\frac{3x}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{nx}{n}\right)^2$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{n^3}{3} \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

setzen (s. „Ingenieur“, Seite 88); es folgt daher:

$$y = \frac{x}{n} \cdot \frac{P}{2\,WE}\left[n\,l^2 - \frac{n^3}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^2\right], \text{ oder}$$

$$y = \frac{Px\,(l^2 - {}^1/_3\,x^2)}{2\,WE},$$

die gesuchte Gleichung der elastischen Linie, unter der Voraussetzung, daß dieselbe nur wenig gekrümmt ist.

Setzt man in dieser Gleichung $x = l$, so erhält man statt x die Bogenhöhe

$$\overline{BC} = a = \frac{Pl^3}{3\,WE}.$$

Während also der Tangentenwinkel α wie die Kraft und wie das Quadrat der Länge wächst, nimmt die Bogenhöhe oder Einbiegung a wie die Kraft und wie der Cubus der Länge des gebogenen Körpers zu.

Die mechanische Arbeit L, welche zum Biegen des Körpers aufzuwenden ist, bestimmt sich, da die Kraft

$$P = \frac{3\,WEa}{l^3}$$

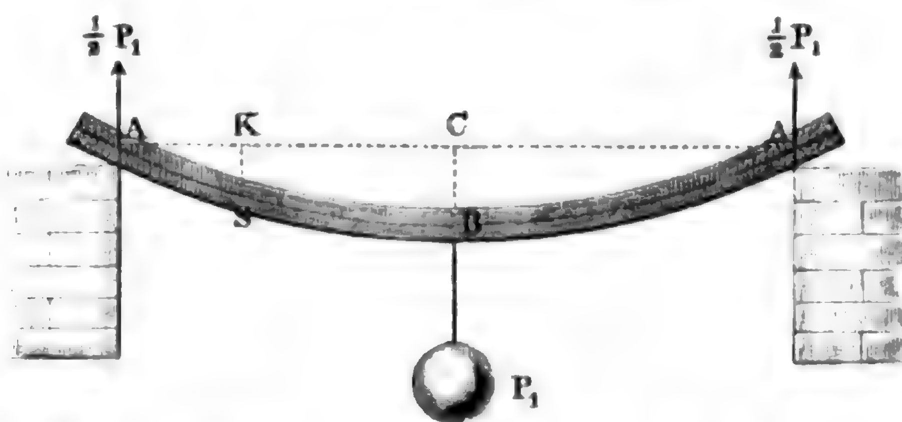
mit ihrem Wege gleichmäßig wächst, sich also im Mittel

$${}^1/_2\,P = {}^3/_2\,\frac{WEa}{l^3} \text{ setzen läßt, durch den Ausdruck:}$$

$$L = {}^1/_2\,Pa = {}^3/_2\,\frac{WEa^2}{l^3} = {}^1/_6\,\frac{P^2\,l^3}{WE}.$$

Wird ein Balken ABA, Fig. 337, von der Länge $AA = l$, in den Enden unterstützt und in der Mitte B von einer Kraft P_1 ergriffen, so bie-

Fig. 337.



gen sich die Enden desselben genau in derselben Curve wie in dem soeben behandelten und in Fig. 333 abgebildeten Falle, nur hat man hier die Kraft in A, $= {}^1/_2\,P_1$, und die Bogenlänge $AB = {}^1/_2\,AA = {}^1/_2\,l$ zu setzen. Es ist folglich hier für die Coordinaten $AK = x$ und $KS = y$ die Gleichung

$$y = \frac{P_1 x (\frac{1}{4} l^2 - \frac{1}{3} x^2)}{4 W E} = \frac{P_1 x (3 l^2 - 4 x^2)}{48 W E},$$

so daß sich für $x = \overline{AC} = \frac{l}{2}$, die Bogenhöhe

$$y = \overline{BC} = a_1 = \frac{P_1 l^3}{48 W E} = \frac{1}{16} \cdot \frac{P_1 l^3}{3 W E},$$

d. i. ein Sechszehntel von der Bogenhöhe des durch ein gleiches Gewicht am Ende belasteten Balkens (Fig. 333), ergiebt.

Wenn für den ersten Fall die elastische Linie AB, Fig. 336, im festen Punkte B schon eine kleine Neigung α_1 hat, so ist zum obigen Ausdrucke für y noch die Verticalprojection eines Tangentenstückes x, d. i. $\alpha_1 x$ zu addiren, so daß sich dann die Ordinate

$$y = \left(\alpha_1 + \frac{P (l^2 - \frac{1}{3} x^2)}{2 W E}\right) x$$

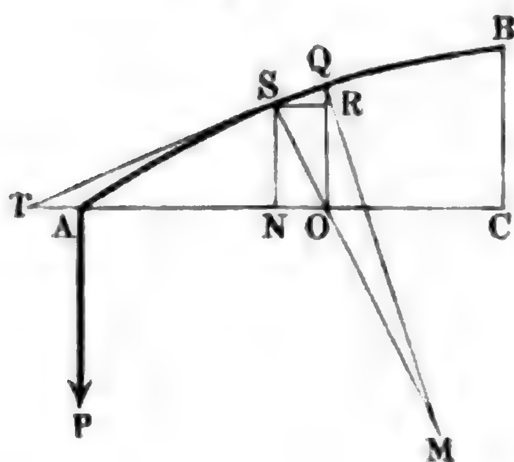
sowie die Bogenhöhe

$$a = \left(\alpha_1 + \frac{P l^2}{3 W E}\right) l$$

herausstellt.

Allgemeinere Gleichung der elastischen Linie. Eine schärfere (§. 218) Gleichung der von der neutralen Axe eines gebogenen Balkens gebildeten elastischen Linie ASB, Fig. 338, läßt sich durch den höheren Calcul auf folgende Weise finden. Setzen wir in der allgemeinen Gleichung des §. 216, $WE = Pxr$ für den Krümmungshalbmesser (aus Art. 33 der analytischen Hülfslehren) den Werth

Fig. 338.



$$r = - \frac{\partial s^3}{\partial x^2 \, \partial (tang. \alpha)}$$

ein, und hierin wieder, nach Art. 32:

$$\partial s = \sqrt{1 + (tang. \alpha)^2} \, . \, \partial x,$$

so erhalten wir:

$$W E = - \frac{P x \partial x \, [1 + (tang. \alpha)^2]^{3/2}}{\partial \, tang. \alpha}.$$

Bei einer mäßigen Biegung des Balkens ist aber der Winkel α, welchen die Berührungslinie mit der Abscissenaxe einschließt, nur klein, und es läßt sich daher

$$[1 + (tang. \alpha)^2]^{3/2} \text{ annähernd } = 1 + \frac{3}{2} (tang. \alpha)^2$$

setzen, weshalb nun

$$W E = - \frac{P x \, [1 + \frac{3}{2} (tang.\, \alpha)^2] \, \partial x}{\partial \, (tang.\, \alpha)},$$ oder umgekehrt,

$$\frac{P x \partial x}{W E} = - \frac{\partial \, tang.\, \alpha}{1 + \frac{3}{2} (tang.\, \alpha)^2} = - [1 - \frac{3}{2} (tang.\, \alpha)^2] \, \partial \, (tang.\, \alpha)$$

folgt.

Hiernach ergiebt sich:

$$\int \frac{P x \partial x}{W E} = - \int \partial \, (tang.\, \alpha) + \frac{3}{2} \int (tang.\, \alpha)^2 \, \partial \, (tang.\, \alpha),$$

d. i. nach Art. 18 der analyt. Hülfslehren:

$$\frac{P x^2}{2 W E} = - \, tang.\, \alpha + \frac{1}{2} (tang.\, \alpha)^3 + Con.$$

Nun ist aber in dem Scheitel B die Curve parallel zur Abscissenaxe, also $\alpha = 0$; setzen wir daher die Projection CA der elastischen Linie in der Abscissenaxe $= b$, so erhalten wir:

$$\frac{P b^2}{2 W E} = - \, tang.\, 0 + \frac{1}{2} (tang.\, 0)^3 + Con. = 0 + Con.,$$

und daher durch Subtraction dieser Gleichungen:

$$\frac{P \, (b^2 - x^2)}{2 W E} = tang.\, \alpha - \frac{1}{2} (tang.\, \alpha)^3;$$

und umgekehrt, für den Tangentenwinkel $S T N = \alpha$:

$$tang.\, \alpha = \frac{P \, (b^2 - x^2)}{2 W E} + \frac{1}{2} (tang.\, \alpha)^3$$

$$= \frac{P \, (b^2 - x^2)}{2 W E} + \frac{1}{2} \frac{P^3 \, (b^2 - x^2)^3}{8 W^3 E^3},$$

d. i.:

$$1) \;\; tang.\, \alpha = \frac{P \, (b^2 - x^2)}{2 W E} \left(1 + \frac{P^2 \, (b^2 - x^2)^2}{8 W^2 E^2} \right).$$

Nun ist ferner $tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, daher folgt:

$$\partial y = \left(1 + \frac{P^2 \, (b^2 - x^2)^2}{8 W^2 E^2} \right) \frac{P \, (b^2 - x^2) \, \partial x}{2 W E},$$ und

$$y = \frac{P}{2 W E} \left(\int (b^2 - x^2) \, \partial x + \frac{P^2}{8 W^2 E^2} \int (b^2 - x^2)^3 \, \partial x \right)$$

$$= \frac{P}{2 W E} \Big[\int b^2 \partial x - \int x^2 \partial x$$

$$+ \frac{P^2}{8 W^2 E^2} \left(\int b^6 \partial x - \int 3 b^4 x^2 \partial x + \int 3 b^2 x^4 \partial x - \int x^6 \partial x \right) \Big]$$

$$= \frac{P}{2 W E} \left[b^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{P^2}{8 W^2 E^2} \left(b^6 x - b^4 x^3 + \frac{3 b^2 x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right) \right]$$

$$+ \; Con.$$

Da mit $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so hat man auch $Con. = 0$, und

$$2)\ y = \frac{Px}{2WE}\left[b^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^6 - b^4x^2 + {}^3/_5\, b^2x^4 - \frac{x^6}{7}\right)\right].$$

Im Scheitel ist $x = b$ und y die Bogenhöhe $CB = a$, daher folgt:

$$a = \frac{P}{2WE}\left({}^2/_3\, b^3 + \frac{P^2}{8W^2E^2} \cdot {}^{16}/_{35} \cdot b^7\right),$$

d. i.:

$$3)\ a = \frac{Pb^3}{3WE}\left(1 + {}^3/_{35}\, \frac{P^2b^4}{W^2E^2}\right).$$

Aus $\partial s = \sqrt{1 + (tang.\,\alpha)^2} \cdot \partial x = [1 + {}^1/_2\, (tang.\,\alpha)^2]\, \partial x$ ergiebt sich, wenn man $tang.\,\alpha = \frac{P(b^2 - x^2)}{2WE}$ substituirt:

$$s = \int\left(1 + {}^1/_8 \cdot \frac{P^2(b^2 - x^2)^2}{W^2E^2}\right)\partial x$$

$$= \int \partial x + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left[\int\left(b^4\partial x - 2b^2x^2\partial x + x^4\partial x\right)\right]$$

$$= x + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^4x - \frac{2b^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right),$$

d. i. die Bogenlänge:

$$4)\ s = \left[1 + \frac{P^2}{8W^2E^2}\left(b^4 - {}^2/_3\, b^2x^2 + \frac{x^4}{5}\right)\right]x.$$

Nimmt man $x = b$ an, so ergiebt sich die ganze Länge des Balkens:

$$5)\ l = \left(1 + \frac{P^2b^4}{15W^2E^2}\right)b = \left(1 + {}^8/_5 \cdot \frac{a^2}{b^2}\right)b.$$

Umgekehrt erhält man:

$$6)\ b = \frac{l}{1 + \frac{P^2b^4}{15W^2E}} = \left(1 - \frac{P^2l^4}{15W^2E^2}\right)l,$$

und daher:

$$a = \frac{Pl^3}{3WE}\left(1 - \frac{P^2l^4}{15W^2E^2}\right)^3\left(1 + {}^8/_{35} \cdot \frac{P^2l^4}{W^2E^2}\right),\ \text{oder}$$

$$= \frac{Pl^3}{3WE}\left(1 - \frac{3P^2l^4}{15W^2E^2}\right)\left(1 + {}^8/_{35} \cdot \frac{P^2l^4}{W^2E^2}\right),$$

d. i.:

$$7)\ a = \frac{Pl^3}{3WE}\left(1 - {}^4/_{35} \cdot \frac{P^2l^4}{W^2E^2}\right).$$

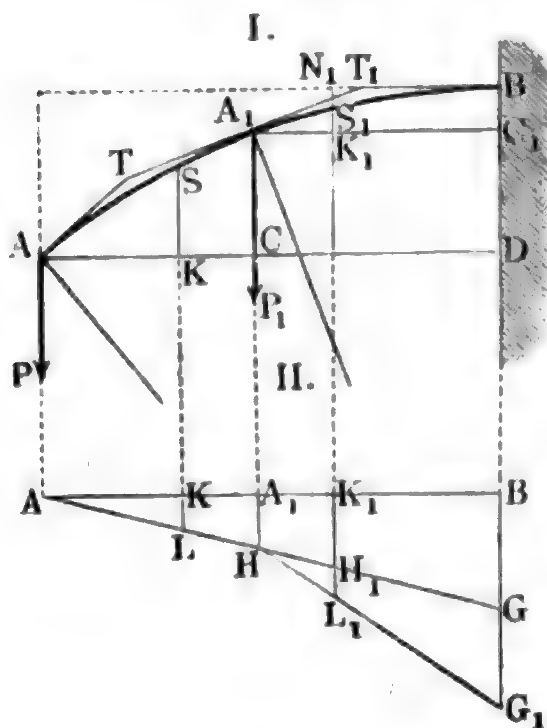
Vernachlässigen wir alle Glieder mit den Potenzen von $\frac{P}{WE}$, so erhalten wir, wie in dem vorigen Paragraphen:

$$tang.\,\alpha = \frac{P(l^2 - x^2)}{2\,WE} \text{ und } y = \frac{Px}{2\,WE}(l^2 - \tfrac{1}{3}x^3), \text{ daher}$$

für $x = 0$, $tang.\,\alpha = \frac{Pl^2}{2\,WE}$, und für $x = b = l$, $y = a = \frac{Pl^3}{3\,WE}$.

§. 219 **Biegung durch zwei Kräfte.** Wird ein an einem Endpunkte B fest eingeklemmter Balken $A A_1 B$, Fig. 339, I. u. II., von zwei Kräften P und P_1 gebogen, deren Angriffspunkte A und A_1 von einander um l abstehen, während der Angriffspunkt A_1 der Kraft P_1 um $A_1 B = l_1$ von dem festen Punkte B entfernt ist, so fällt das Biegungsmoment in einem Punkte S des Stückes $A A_1$:

Fig. 339.



$$M = Px,$$

und dagegen das in einem Punkte S_1 des Stückes $A_1 B$:

$$M_1 = P(l + x_1) + P_1 x_1$$

aus, wobei x und x_1 die Abscissen AK und $A_1 K_1$ bezeichnen.

Um ein anschauliches Bild von der Veränderlichkeit dieser Momente zu finden, kann man die verschiedenen Werthe derselben in den entsprechenden Punkten als Ordinaten, wie $M = y = \overline{KL}$, $M_1 = y_1 = \overline{K_1 L_1}$ u. s. w. in II. auftragen, und die Endpunkte L, L_1 u. s. w. derselben durch einen Zug $A L H L_1 G_1$ verbinden, welcher dann die sämmtlichen Werthe von M und M_1 über der ganzen Balkenlänge AB begrenzt. Wäre der Balken nur durch die Kraft P gespannt, so würde der Zug, welcher die sämmtlichen Werthe von M oder $y = Px$ begrenzt, in einer geraden Linie AG bestehen, deren Endpunkt G die Ordinate $\overline{BG} = P.\overline{AB} = P(l + l_1)$ ist. Durch den Hinzutritt der Kraft P_1 wird aber das Stück HG dieser geraden Linie in die Gerade HG_1 umgeändert, deren Endpunkte H und G_1 durch die Coordinaten $\overline{A A_1} = l$ und $\overline{A_1 H} = Pl$, sowie $\overline{AB} = l + l_1$ und $B G_1 = \overline{BG} + \overline{G G_1} = P(l + l_1) + P_1 l_1$ bestimmt sind.

Ist die Kraft P_1 **negativ**, so bleibt zwar das Moment eines Punktes K innerhalb $\overline{A A_1} = l$, $M = y = Px$, dagegen geht das Moment eines Punktes K_1 innerhalb $A_1 B$ in $M_1 = y_1 = P(l + x_1) - P_1 x_1$ über, und es fällt das Moment der Biegung im festen Punkte B, $= P(l + l_1) - P_1 l_1$, und zwar positiv oder negativ aus, je nachdem $P(l + l_1)$ größer

oder kleiner als $P_1 l_1$ ist. In beiden Fällen nimmt das Biegungsmoment von A_1 aus allmälig ab, bleibt im ersten Falle, Fig. 340, immer positiv,

Fig. 340.

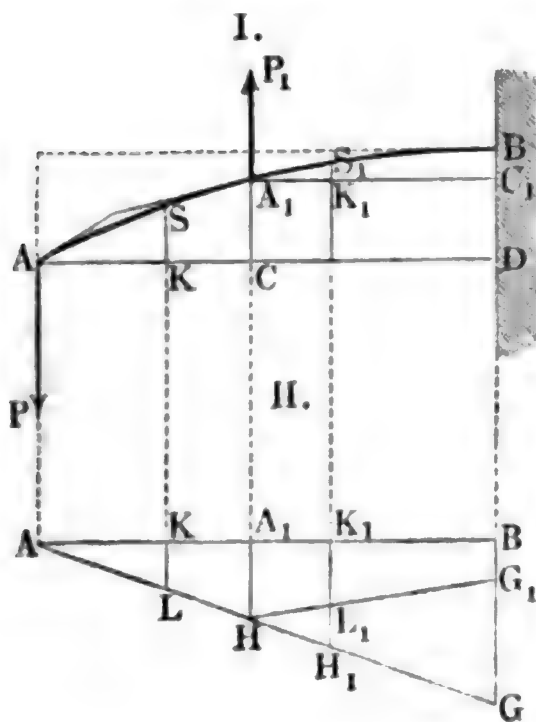
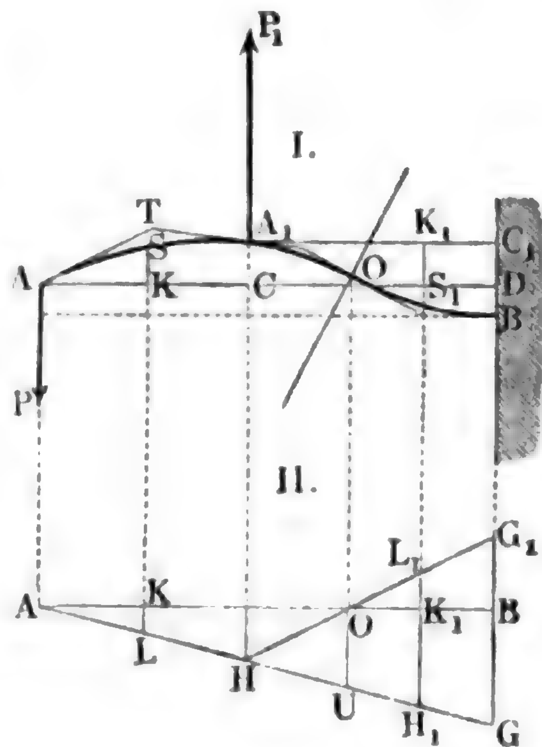


Fig. 341.



fällt dagegen im zweiten Falle, Fig. 341, in einem Punkte O, welcher um $A_1 O = x_1 = \frac{P l}{P_1 - P}$ von A_1 absteht, Null aus, nimmt dann für größere Werthe das negative Zeichen an, und ist im festen Punkte B,

$$= -[P_1 l_1 - P(l + l_1)].$$

Im ersteren Falle zieht sich die gerade Linie $H G_1$, Fig. 340, II., welche das Biegungsmoment in einem Punkte K_1 zwischen A und B darstellt, unter der Grundlinie AB hin, und endigt sich im Punkte G_1, dessen Ordinate $\overline{B G_1} = P(l + l_1) - P_1 l_1$ ist; im zweiten Falle steigt dagegen diese Gerade $H G_1$, Fig. 341, II., vom Punkte O aus über AB, wobei die Ordinaten $K_1 L_1 = y_1 = -[P_1 x_1 - P(l + x_1)]$, und $B G_1 = a_1 = -[P_1 l_1 - P(l + l_1)]$ ausfallen.

Da der Krümmungshalbmesser $r = \frac{W E}{M}$ des Balkens umgekehrt und folglich die Krümmung selbst direct wie das Biegungsmoment M wächst, so geben die graphischen Darstellungen in II. der Figuren 339, 340 und 341 auch zugleich ein Bild von der Veränderlichkeit der Krümmung des Balkens an. Es nimmt also hiernach in dem Falle Fig. 339, wo P_1 und P eine gleiche Richtung haben, die Krümmung des Balkens, von A nach B gegangen, allmälig zu, nimmt dagegen in den Fällen, wo P und P_1 entgegengesetzt gerichtet sind, von A_1 an allmälig wieder ab. Ist hierbei $P_1 l_1 < P(l + l_1)$, wie in Fig. 340, so wird der Balken nur nach einer Seite hin gebogen; ist

dagegen $P_1 l_1 > P(l + l_1)$, so fällt die Biegung nicht allein in A, sondern auch im Punkte O, wo ein sogenannter Wendepunkt (siehe analytische Hülfslehren, Art. 14) entsteht, Null aus, und es nimmt der Balken zwischen O und B eine allmälig wachsende Biegung in entgegengesetzter Richtung an.

Fig. 342.

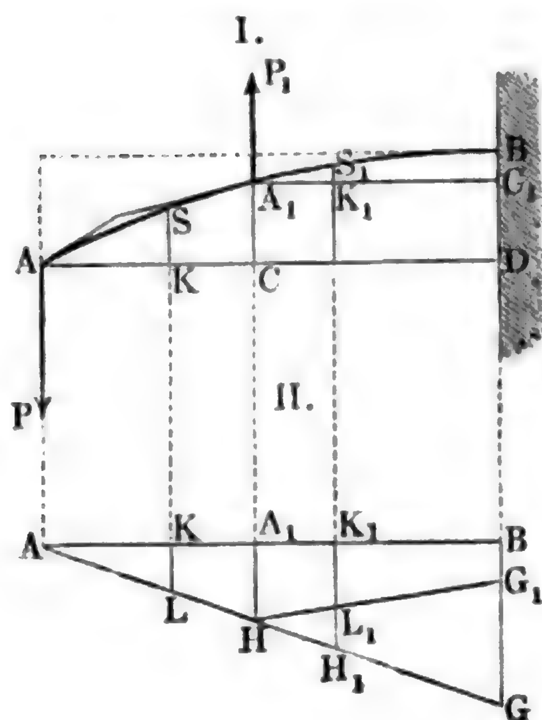
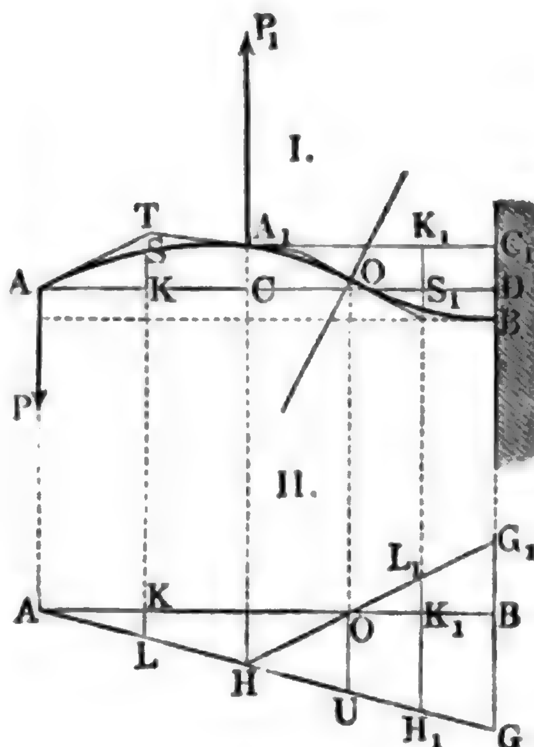


Fig. 343.



Sind im zweiten Falle, Fig. 342, die Kräfte P_1 und P der Größe nach einander gleich, so fällt für die Punkte K_1 zwischen A_1 und B,

$$M = P(l + x_1) - Px_1 = Pl,$$

also constant aus; dann ist also auch die Krümmung des Balkenstückes $A_1 B$ überall dieselbe, d. i. die eines Kreises.

Der Krümmungshalbmesser des Stückes $A A_1$ bestimmt sich in allen drei Fällen mittels der bekannten Formel:

$$r = \frac{WE}{Px},$$

und der des Stückes $A_1 B$, im ersten Falle nach der Formel:

$$r_1 = \frac{WE}{P(l + x_1) + P_1 x_1},$$

dagegen im zweiten und dritten Falle nach der Formel:

$$r_1 = \frac{WE}{P(l + x_1) - P_1 x_1}.$$

Wenn im zweiten Falle $P_1 = P$ ist, so fällt $r_1 = \frac{WE}{Pl}$, also constant aus, und im dritten Falle, wo $P_1 l_1 > P(l + l_1)$ ist, wird im Punkte O, dessen Abscisse x_1 den Werth $\frac{Pl}{P_1 - P}$ hat, $r_1 = \infty$ (unendlich groß), wo-

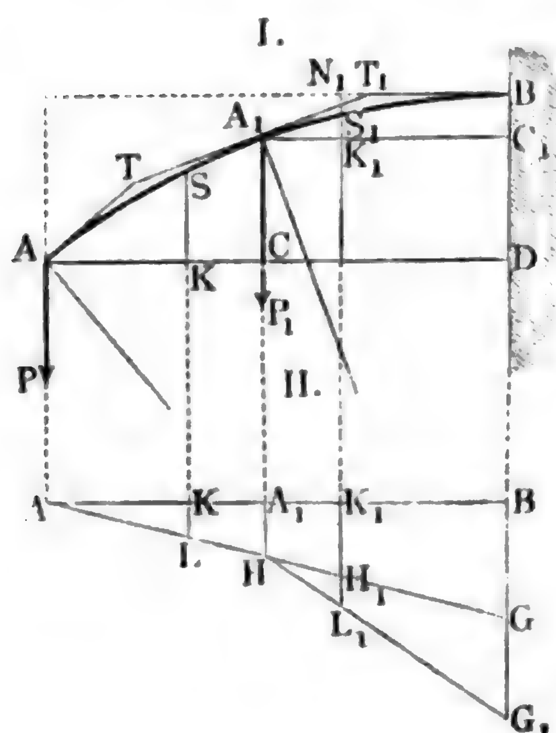
gegen im Punkte A_1, $r = \frac{WE}{Pl}$, und im Punkte B,

$$r_1 = -\frac{WE}{P_1 l_1 - P(l + l_1)} \text{ ist.}$$

Je nachdem Pl größer oder kleiner als $P_1 l_1 - P(l + l_1)$, d. i. $P \gtrless P_1$ ist, fällt im letzteren Falle $r \lesseqgtr r_1$, also die Krümmung in A_1 größer oder kleiner aus als in B.

Die elastische Linie für zwei Kräfte. Die Gleichungen der §. 22
elastischen Linie, welche von der Axe des von zwei Kräften P und P_1 ergriffenen Balkens gebildet wird, lassen sich aus den bereits in den Paragraphen 216 und 217 gefundenen Formeln leicht zusammensetzen.

Fig. 344.



Bezeichnet α_1 den Neigungswinkel der elastischen Linie in A_1, so hat man zunächst für das Bogenstück $A A_1$, Fig. 344, I., den Bogen, welcher die Neigung desselben in S mißt:

$$1)\quad \alpha = \alpha_1 + \frac{P(l^2 - x^2)}{2\,WE},$$

und die der Abscisse $AK = x$ entsprechende Ordinate KS:

$$(2\quad y = \alpha_1 x + \frac{Px(l^2 - \frac{1}{3}x^2)}{2\,WE}$$

(vergl. §. 217).

In (1) für $x = 0$ gesetzt, folgt der Neigungswinkel in A:

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \frac{Pl^2}{2\,WE};$$

dagegen in (2) für $x = l$ angenommen, die Ordinate in A_1:

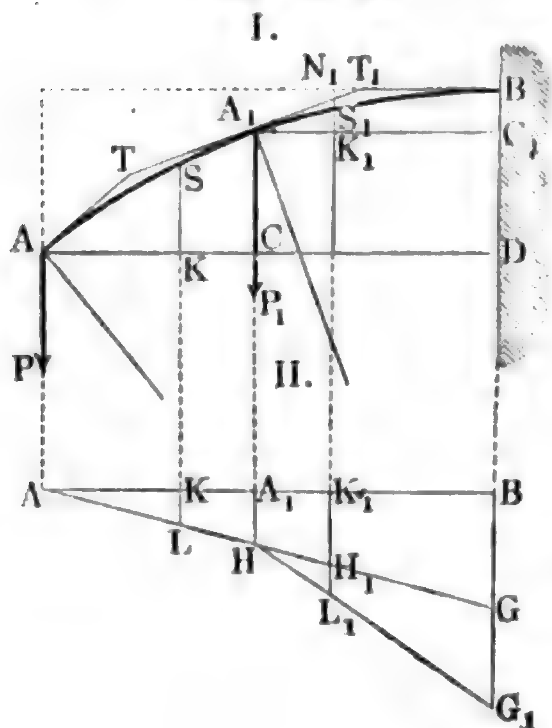
$$A_1 C = a = \alpha_1 l + \frac{Pl^3}{3\,WE}.$$

Für einen Punkt des zweiten Balkenstückes $A_1 B$ ist das Biegungsmoment $P(l + x_1) + P_1 x_1 = Pl + (P + P_1) x_1$ aus zwei Theilen, Pl und $(P + P_1) x_1$, zusammengesetzt, wovon das eine wegen seiner Unveränderlichkeit das Balkenstück nach einem Kreisbogen vom Halbmesser $r = \frac{WE}{Pl}$ krümmt, dessen Neigungswinkel in einem Punkte S_1, welcher um $A_1 S_1 = x_1$ von A und um $BS_1 = l_1 - x$ von B absteht,

$$\beta_1 = \frac{l_1 - x}{r} = \frac{Pl(l_1 - x_1)}{WE} \text{ mißt.}$$

In Folge der Biegung durch das Moment $(P + P_1) x_1$ ist dagegen die Neigung des Balkenstückes in S:

Fig. 344 a.



$$\beta_2 = \frac{(P + P_1)(l_1^2 - x_1^2)}{2 W E};$$

daher folgt nun die vollständige Neigung in demselben Punkte S:

$$3)\ \beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{P l (l_1 - x_1)}{W E} + \frac{(P + P_1)(l_1^2 - x_1^2)}{2 W E}.$$

In Folge der Krümmung um β_1 nach dem Kreise wäre die Bogenhöhe von $B S_1$, nach der bekannten Kreisgleichung

$$N_1 S_1 = \frac{\overline{B S_1}^2}{2 r} = \frac{(l_1 - x_1)^2 P l}{2 W E},$$

daher die vom ganzen Stücke $B A_1$:

$$B C_1 = \frac{P l l_1^2}{2 W E},$$ und die Höhe des Punktes S_1 über A_1:

$$K_1 S_1 = B C_1 - N_1 S_1 = \frac{P l [l_1^2 - (l_1 - x_1)^2]}{2 W E} = \frac{P l (2 l_1 x_1 - x_1^2)}{2 W E}.$$

Dem Krümmungswinkel $\beta_2 = \frac{(P + P_1)(l_1^2 - x_1^2)}{2 W E}$ entspricht dagegen nach dem Obigen (§. 217) die Bogenhöhe $K_1 S_1 = \frac{(P + P_1) x_1 (l_1^2 - \frac{1}{3} x_1^2)}{2 W E}$; es ist daher die vollständige Bogenhöhe:

$$4)\ K_1 S_1 = y_1 = \frac{P l (2 l_1 x_1 - x_1^2) + (P + P_1) x_1 (l_1^2 - \frac{1}{3} x_1^2)}{2 W E}.$$

Setzt man in (3), $x_1 = 0$, so erhält man in β den oben als gegeben angenommenen Neigungswinkel, und zwar:

$$\alpha_1 = \frac{2 P l l_1 + (P + P_1) l_1^2}{2 W E},$$

und führt man in (4) $x_1 = l_1$ ein, so ergiebt sich dadurch die Bogenhöhe:

$$B C_1 = a_1 = \frac{3 P l l_1^2 + 2 (P + P_1) l_1^3}{6 W E}.$$

Endlich folgt die Bogenhöhe des ganzen Balkens:

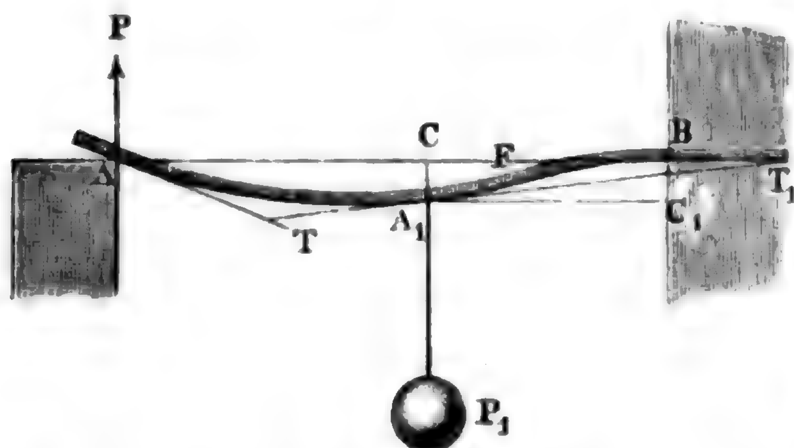
$$\overline{BD} = a + a_1 = \alpha_1 l + \frac{P l^3}{3 W E} + \frac{3 P l l_1^2 + 2 (P + P_1) l_1^3}{6 W E}$$
$$= \alpha_1 l + \frac{P l (2 l^2 + 3 l_1^2) + 2 (P + P_1) l_1^3}{6 W E}$$
$$= \alpha_1 l + \frac{P (2 l^3 + 3 l l_1^2 + 2 l_1^3) + 2 P_1 l_1^3}{6 W E}.$$

Wenn der Balken AB bei B mit einer gewissen Neigung β_0 aus der Mauer hervortritt, so ist in (3) zu β noch β_0 und in (4) zu y_1 noch $\beta_0 x_1$ zu addiren.

Wirkt die Kraft P_1 der Kraft P entgegengesetzt, so hat man in den Grundformeln (3) und (4), statt $P + P_1$, $P - P_1$ einzusetzen.

Einseitig aufliegender Balken. Die Formeln des vorstehenden Paragraphen finden in mehreren Fällen der Praxis ihre Anwendung. Ist §. 221

Fig. 345.



z. B. ein Balken AB, Fig 345, in einem Endpunkte B horizontal eingemauert, und im anderen Endpunkte A einfach unterstützt, so entsteht die Frage: welches ist die Biegungskraft in A oder welchen Druck P hat die Stütze in A auszuhalten, während der Balken in einem Zwischenpunkte A_1 von einer Last P_1 niedergezogen wird?

Es ist hier P negativ, $\beta_0 = 0$, und, da A und B in einerlei Niveau liegen, die Summe von den Bogenhöhen

$$CA_1 = a \text{ und } C_1B = a_1, = \text{Null},$$

also:

$$\left(\alpha_1 + \frac{Pl^2}{3\,WE}\right) l + \frac{{}^1/_2\, Pll_1^2 + {}^1/_3\,(P - P_1)\, l_1^3}{WE} = 0,$$

oder, da $\alpha_1 = \dfrac{Pll_1 + {}^1/_2\,(P - P_1)\, l_1^2}{WE}$ ist,

$$Pl^2l_1 + {}^1/_2\,(P - P_1)\,l_1^2 l + {}^1/_3\,Pl^3 + {}^1/_2\,Pll_1^2 + {}^1/_3\,(P - P_1)\,l_1^3 = 0.$$

Hieraus folgt nun:

$$P\,(2\,l^3 + 6\,l^2 l_1 + 6\,ll_1^2 + 2\,l_1^3) = P_1\,(3\,ll_1^2 + 2\,l_1^3)$$

und daher die gesuchte Stütz- oder Biegungskraft in A:

$$P = \frac{(3\,l + 2\,l_1)\,l_1^2}{l^3 + 3\,(l^2 l_1 + ll_1^2) + l_1^3}\,\frac{P_1}{2},$$

z. B. für $l = l_1$, also in dem Falle, wenn P_1 in der Mitte liegt,

$$P = {}^5/_{16}\,P_1.$$

Hieraus folgt das Biegungsmoment in A_1:

$$Pl = \frac{5}{16}\,P_1\,l, \text{ dagegen das in } B:$$

$$P_1\,l_1 - 2\,Pl = \frac{3}{8}\,P_1\,l = \frac{6}{16}\,P_1\,l,$$

also größer als das in A_1.

Ist zwar $l = l_1$, liegen aber die Stützpunkte A und B nicht in einerlei Höhe, sondern liegt A um a_2 höher als B, so muß man $a + a_1 = a_2$ setzen. Nun ist aber dann

$$\alpha_1 = \frac{(3P - P_1)\, l^2}{2\, WE},$$

$$a = \alpha_1 l + \frac{P l^3}{3\, WE} = \frac{(11 P - 3 P_1)\, l^3}{6\, WE} \text{ und}$$

$$a_1 = \frac{[3P + 2(P - P_1)]\, l^3}{6\, WE} = \frac{(5P - 2P_1)\, l^3}{6\, WE};$$

daher hat man

$$\frac{(16 P - 5 P_1)\, l^3}{6\, WE} = a_2, \text{ und es folgt}$$

$$P = \frac{6\, WE a_2}{16\, l^3} + \frac{5}{16} P_1.$$

Sollen die Biegungsmomente in A_1 und B gleich groß, jedoch einander entgegengesetzt sein, so hat man

$$P l = 2 P_1 l - 2 P l, \text{ oder}$$

$$3P = P_1, \text{ d. i. } P = \frac{P_1}{3} \text{ zu setzen, wobei dann}$$

$$a_2 = \frac{P l^3}{6\, WE} = \frac{P_1 l^3}{18\, WE} \text{ zu machen ist.}$$

Wenn man also das Balkenende um $0{,}0555 \frac{P_1 l^3}{WE}$ höher legt als B, so ist das Biegungsmoment in A und B, $= \pm \frac{P_1 l}{3}$, also kleiner als wenn A und B in gleicher Höhe liegen.

Mit Hülfe des gefundenen Werthes für P lassen sich nun auch die Krümmungshalbmesser, Tangentenwinkel u. s. w. der Curvenstücke AA_1 und A_1B berechnen.

222 **Biegung eines an beiden Enden frei aufliegenden Balkens.** Einen anderen Fall der Anwendung der Formeln des letzten Paragraphen bietet ein an beiden Enden A und B frei aufliegender Balken AB, Fig. 346, dar, wenn derselbe von einer Kraft P_1 ergriffen wird, deren Angriffspunkt A_1 von dem einen Stützpunkte A um l und vom anderen Stützpunkte B um l_1 absteht.

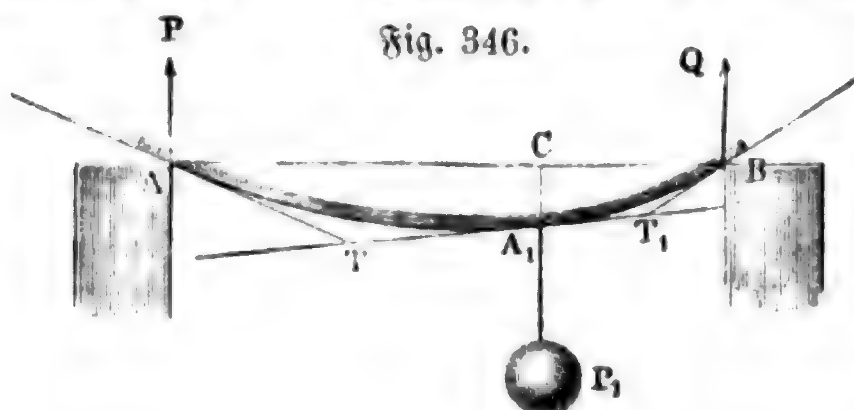


Fig. 346.

Es ist hier das Moment

$$P \,.\, \overline{BA} = \text{dem Momente } P_1 \,.\, \overline{BA_1},$$

d. i.

$$P\,(l + l_1) = P_1\, l_1,$$

folglich der Druck im Stützpunkte A:

$$P = \frac{P_1\, l_1}{l + l_1},$$

und dagegen der Druck im Stützpunkte B:

$$Q = P_1 - P = \frac{P_1\, l}{l + l_1}.$$

Da wieder A und B in einer Horizontalen liegen, so hat man auch

$$a + a_1 = 0;$$

es ist jedoch dieses Mal der Winkel β nicht = Null, sondern eine zu bestimmende negative Größe $C B T_1$.

Man hat hier

$$a = -\,\beta\, l + \frac{P l^2 l_1 + \frac{1}{2}\,(P - P_1)\, l l_1^2}{WE} + \frac{P l^3}{3\,WE}$$

und auch

$$a_1 = -\,\beta\, l_1 + \frac{\frac{1}{2}\, P l l_1^2 + \frac{1}{3}\,(P - P_1)\, l_1^3}{WE},$$

daher die Summe:

$$\beta\,(l + l_1) - \frac{P}{6\,WE}\,(2\,l^3 + 6\,l^2 l_1 + 6\,l l_1^2 + 2\,l_1^3)$$
$$+ \frac{P_1}{6\,WE}\,(3\,l l_1^2 + 2\,l_1^3) = 0,$$

oder

$$6\,\beta\,(l + l_1)\,WE = P\,(2 l^3 + 6 l^2 l_1 + 6 l l_1^2 + 2 l_1^3) - P_1\,(3 l l_1^2 + 2 l_1^3)$$
$$= [2 l^3 + 6 l^2 l_1 + 6 l l_1^2 + 2 l_1^3 - (3 l l_1 + 2 l_1^2)(l + l_1)]\, P,$$

so daß nun der Neigungswinkel in B:

$$\beta = \frac{P l\,(2\,l^2 + 3\,l l_1 + l_1^2)}{6\,(l + l_1)\,WE} = \frac{P_1\, l l_1\,(2\,l^2 + 3\,l l_1 + l_1^2)}{6\,(l + l_1)^2\,WE}$$

und dagegen der Neigungswinkel in A:

$$\alpha = \frac{P_1\, l l_1\,(l^2 + 3\,l l_1 + 2\,l_1^2)}{6\,(l + l_1)^2\,WE} \text{ folgt.}$$

Ist z. B. P_1 in der Mitte aufgehangen, so hat man $l_1 = l$, sowie $P = Q = \frac{P_1}{2}$ und daher

$$\beta = \frac{P l^2}{2\,WE} = \frac{P_1\, l^2}{4\,WE} \text{ (vergl. §. 216).}$$

Mit Hülfe des bestimmten Winkels β lassen sich auch die sämmtlichen

Biegungsverhältnisse des Balkens durch die oben gefundenen Formeln bestimmen.

Das Biegungsmoment dieses Balkens ist im Aufhängepunkte A_1 am größten und zwar

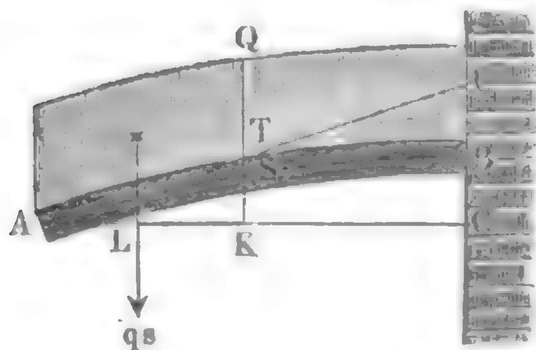
$$M = P l = Q l_1 = \frac{P_1 l l_1}{l + l_1} = \frac{P_1}{l + l_1}\left[\left(\frac{l + l_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{l - l_1}{2}\right)^2\right],$$

also am größten für $l = l_1$, d. i. wenn das Gewicht P_1 in der Mitte hängt, und zwar

$$M = \frac{P_1 (l + l_1)}{4} = \frac{1}{2} P_1 l.$$

§. 223 **Gleichmässig belastete Balken.** Ist die ganze Last gleichmäßig vertheilt auf den Balken AB, Fig 347, und trägt jede Längeneinheit desselben $= q$, also der ganze Balken von der Länge l, $Q = l q$, und ein Balkenstück $AS = s$, die Last $q s$, so hat man statt der Momente $\frac{1}{n} Ps$, $\frac{2}{n} Ps$, $\frac{3}{n} Ps$ u. s. w. die Momente $\frac{1}{2} q \left(\frac{s}{n}\right)^2$, $\frac{1}{2} q \left(\frac{2s}{n}\right)^2$, $\frac{1}{2} q \left(\frac{3s}{n}\right)^2$ u. s. w. einzusetzen, weil die Schwerpunkte der Lasten $q\left(\frac{s}{n}\right), q\left(\frac{2s}{n}\right), q\left(\frac{3s}{n}\right)$ u. s. w. in der Mitte von $\frac{s}{n}, \frac{2s}{n}, \frac{3s}{n}$ u. s. w. liegen, also die Hebelarme $\frac{1}{2}\frac{s}{n}$, $\frac{1}{2}\frac{2s}{n}$, $\frac{1}{2}\frac{3s}{n}$ u. s. w. sind. Hiernach bekommen wir hier die Krümmungswinkel der Bogenelemente:

Fig. 347.



$$\delta_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q s^3}{n^3 WE}, \quad \delta_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2 . q s^3}{n^3 WE}, \quad \delta_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2 . q s^3}{n^3 WE} \text{ u. s. w.},$$

und daher den Krümmungswinkel von $AS = s$:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{q s^3}{n^3 WE}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{q s^3}{2 n^3 WE} \cdot \frac{n^3}{3}$$

$$= \frac{q s^3}{6 WE}, \text{ annähernd} = \frac{q x^3}{6 WE}.$$

Wird $x = l$ gesetzt, so folgt nun der Tangentenwinkel $TAC = UTB$ für den Endpunkt A:

$$\beta = \frac{q l^3}{6 WE} = \frac{Q l^2}{6 WE},$$

und daher der für einen Punkt S, dessen Abscisse $AK = x$ ist,

$$\alpha = \beta - \varphi = \frac{q}{6 WE}(l^3 - x^3).$$

Aus dem letzten Winkelmaße folgt ein Ordinatenelement

$$\frac{x}{m}\,\alpha = \frac{x}{m}\cdot\frac{q}{6\,WE}\,(l^3 - x^3),$$

und nun statt x^3 nach und nach $\left(\frac{x}{m}\right)^3, \left(\frac{2\,x}{m}\right)^3, \left(\frac{3\,x}{m}\right)^3$ eingeführt, ergiebt sich die gesuchte Gleichung für die Ordinate $KS = y$:

$$y = \frac{x}{m}\cdot\frac{q}{6\,WE}\left[m\,l^3 - \left(\frac{x}{m}\right)^3\cdot(1^3 + 2^3 + \cdots + m^3)\right]$$

$$= \frac{x}{m}\cdot\frac{q}{6\,WE}\left[m\,l^3 - \left(\frac{x}{m}\right)^3\cdot\frac{m^4}{4}\right],\ \text{d. i.:}$$

$$y = \frac{q\,x}{6\,WE}\left(l^3 - \frac{x^3}{4}\right).$$

Nehmen wir wieder $x = l$ an, so bekommen wir die Bogenhöhe

$$a = \frac{q\,l}{6\,WE}\cdot {}^3\!/_4\, l^3 = \frac{q\,l^4}{8\,WE} = \frac{Q\,l^3}{8\,WE} = {}^3\!/_8\cdot\frac{Q\,l^3}{3\,WE},$$

d. i. $^3/_8$ mal so groß, als wenn die Last Q am Ende des Balkens hinge.

Die Ordinate des Mittelpunktes der Balkenaxe ist:

$$y_1 = \frac{q\,l}{12\,WE}\left(l^3 - \frac{l^3}{32}\right) = \frac{31\,q\,l^4}{12\,.\,32\,WE},$$

folglich die Tiefe dieses Punktes unter der Horizontalen durch B:

$$y_2 = a - y_1 = \frac{17\,q\,l^4}{12\,.\,32},$$

und daher das Arbeitsquantum, welches der Einbiegung a oder dieser Senkung (y_2) des Schwerpunktes der Last $Q = l\,q$ entspricht, insofern man nämlich Q allmälig auflegt:

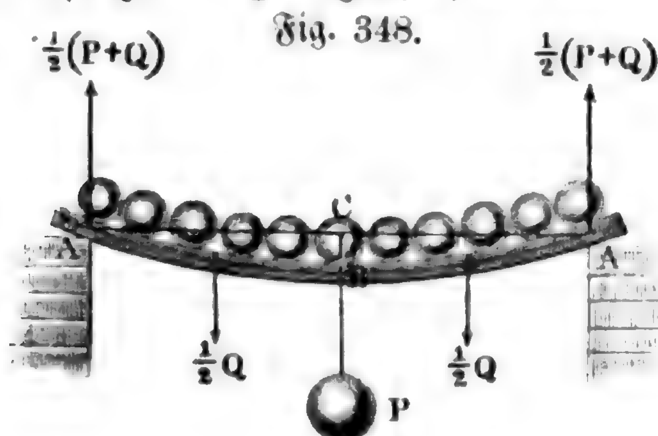
$$L = {}^1\!/_2\, Q\,y_2 = {}^1\!/_2\, q\,l\,y_2 = \frac{17\,q^2\,l^5}{24\,.\,32\,.\,WE} = \frac{17\,Q^2\,l^3}{24\,.\,32\,.\,WE}.$$

Ist der Balken durch eine gleichmäßig vertheilte Last Q und durch eine Kraft P am Ende zugleich belastet, so hat man die Bogenhöhe:

$$a = \frac{P\,l^3}{3\,WE} + \frac{Q\,l^3}{8\,WE} = \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right)\frac{l^3}{WE}.$$

Wenn der Balken ABA, Fig. 348, an beiden Enden frei aufliegt, und nicht allein in der Mitte B eine Last P, sondern auch gleichmäßig vertheilt eine Last $Q = l\,q$ trägt, so findet man die Ein- oder Durchbiegung $CB = a$, wenn man in dem Ausdrucke

Fig. 348.



$$a = \left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right)\frac{l^3}{WE}$$

für den Fall in Fig. 347 statt P, den Druck oder die Gegenkraft $\frac{P+Q}{2}$ in einem Ende

A, statt Q die gleichmäßig vertheilte Last — $\frac{Q}{2}$ einer Hälfte BA, und statt l, die halbe Länge des Balkens, $\overline{BA} = {}^1/_2\,\overline{AA} = {}^1/_2\,l$ einführt.

Es folgt auf diese Weise:

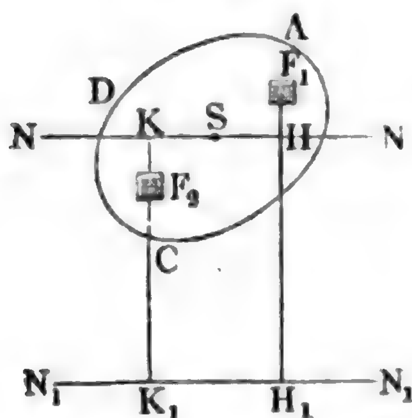
$$a = \left(\frac{P+Q}{6} - \frac{Q}{16}\right)\frac{l^3}{8\,WE} = (P + {}^5/_8\,Q)\,\frac{l^3}{48\,WE}.$$

Für $P = 0$ ist also $a = {}^5/_8 \cdot \frac{Q\,l^3}{48\,WE}$. Wenn also die ganze Last gleichmäßig auf den an beiden Enden unterstützten Balken vertheilt ist, so fällt die Bogenhöhe nur ${}^5/_8$ mal so groß aus, als wenn dieselbe in der Mitte des Balkens hinge.

Das Gewicht G des Balkens hat genau denselben Einfluß auf die Biegung wie die gleichmäßig vertheilte Last Q, und ist daher auch genau wie diese in Rechnung zu bringen.

§. 224 **Reduction der Biegungsmomente.** Kennt man das Biegungsmoment $W_1\,E$ eines Körpers $A\,B\,C\,D$, Fig. 349, in Beziehung auf eine Axe $N_1\,N_1$ außerhalb des Schwerpunktes, so läßt sich leicht dieses Moment in Beziehung auf eine andere, durch den Schwerpunkt S gehende Axe $N\,N$ finden, welche mit der ersteren parallel läuft. Ist der Abstand $H\,H_1 = K\,K_1$ zwischen beiden Axen $= d$, und sind die Abstände der Flächenelemente F_1, F_2 u. s. w. von der neutralen Axe $N\,N$, $= z_1$, z_2 u. s. w., so hat man die Abstände von der Axe $N_1\,N_1$, $= d + z_1$, $d + z_2$ u. s. w., und es ist nun das Biegungsmoment:

Fig. 349.



$$W_1\,E = [F_1\,(d + z_1)^2 + F_2\,(d + z_2^2) + \cdots]\,E$$
$$= [F_1\,(d^2 + 2\,d\,z_1 + z_1^2) + F_2\,(d^2 + 2\,d\,z_2 + z_2^2 + \cdots)]\,E$$
$$= [d^2\,(F_1 + F_2 + \cdots) + 2\,d\,(F_1\,z_1 + F_2\,z_2 + \cdots)$$
$$+ (F_1\,z_1^2 + F_2\,z_2^2 + \cdots)]\,E.$$

Nun ist aber

$$F_1 + F_2 + \cdots$$

als Summe aller Elemente = Querschnitt F des ganzen Körpers, ferner

$$F_1\,z_1 + F_2\,z_2 + \cdots$$

als Summe der statischen Momente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe = Null, und

$$(F_1\,z_1^2 + F_2\,z_2^2 + \cdots)\,E$$

das Biegungsmoment $W\,E$ in Beziehung auf die neutrale Axe $N\,N$; es folgt daher:

$$W_1 E = (W + F d^2) E,$$

oder:

$$W_1 = W + F d^2$$

und umgekehrt:

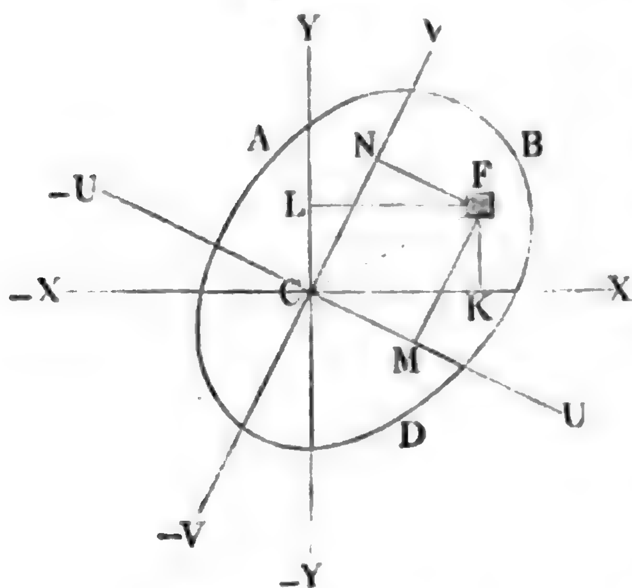
$$W = W_1 - F d^2.$$

Es ist also das Maß W des Biegungsmomentes in Beziehung auf die neutrale Axe gleich dem Maße W_1 des Biegungsmomentes in Beziehung auf eine zweite Parallelaxe minus das Product aus dem Querschnitt F und dem Quadrat (d^2) des Abstandes beider Axen. Auch folgt hieraus, daß unter allen Biegungsmomenten das in Hinsicht auf die neutrale Axe am kleinsten ist.

Von vielen Körpern lassen sich die Biegungsmomente in Hinsicht auf irgend eine Axe leicht finden, man kann daher diese dazu benutzen, um mittels der gefundenen Formel die Momente in Hinsicht auf die neutrale Axe zu bestimmen.

Sind $CK = x$ und $CL = y$, Fig. 350, die Coordinaten eines Punktes F in Hinsicht auf ein rechtwinkeliges Axenkreuz $\overline{X}X$, $\overline{Y}Y$, sind §. 225

Fig. 350.



ebenso $CM = u$ und $CN = v$ die Coordinaten dieses Punktes auf ein anderes rechtwinkeliges Axenkreuz $\overline{U}U$, $\overline{V}V$, und ist endlich $CF = r$ der Abstand des gedachten Punktes F von dem gemeinschaftlichen Nullpunkte C beider Axensysteme, so gelten, dem Pythagoreischen Lehrsatze zufolge, die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = r^2,$$

und es ist also auch

$$F x^2 + F y^2 = F u^2 + F v^2 = F r^2.$$

Setzen wir nun in diesen Gleichungen statt F nach und nach die Elemente F_1, F_2, F_3 u. s. w. des ganzen Querschnittes ABD und ebenso statt x, y, u und v die entsprechenden Coordinaten x_1, x_2, x_3 u. s. w., y_1, y_2, y_3 u. s. w., sowie u_1, $u_2 \ldots$ und v_1, $v_2 \ldots$ ein, so erhalten wir durch Addition folgende Gleichungen:

$$F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots + F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + \cdots$$
$$= F_1 u_1^2 + F_2 u_2^2 + \cdots + F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2 + \cdots$$
$$= F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \cdots,$$

oder, wenn wir

$$F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma (F x^2),$$

ferner

$$F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(F y^2),$$

sowie

$$F_1 u_1^2 + F_2 u_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(F u^2),$$
$$F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(F v^2),$$

und

$$F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(F r^2)$$

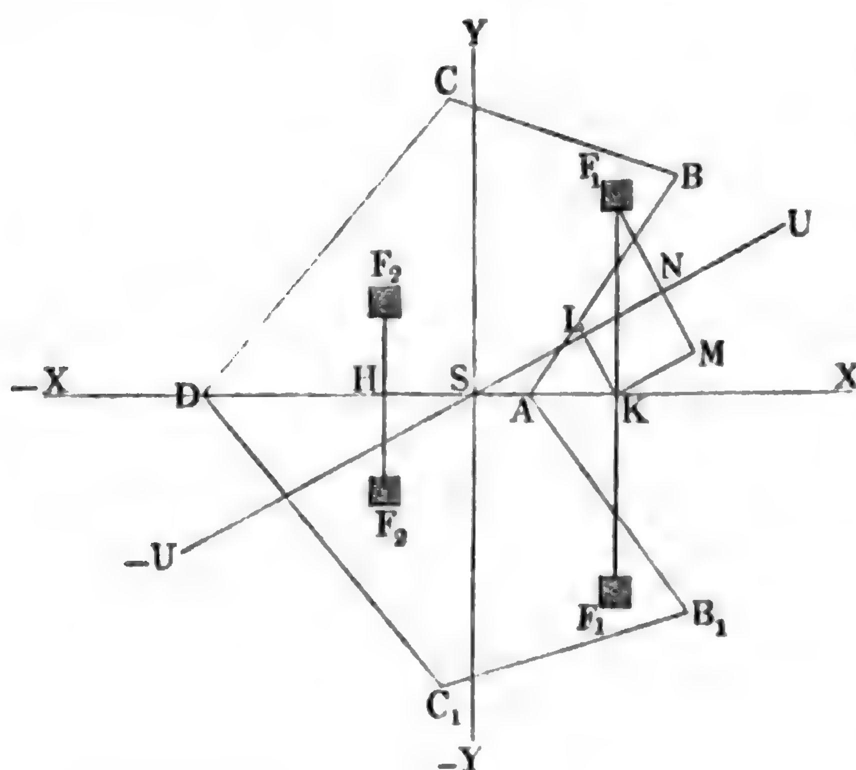
bezeichnen,

$$\Sigma\,(F x^2) + \Sigma\,(F y^2) = \Sigma\,(F u^2) + \Sigma\,(F v^2) = \Sigma\,(F r^2).$$

Es ist hiernach die Summe der Maße der Biegungsmomente, in Hinsicht auf beide Axen XX und YY eines Axensystemes gleich der Summe der Maße der Biegungsmomente in Hinsicht auf beide Axen eines anderen Axensystemes und gleich dem Maße des Biegungsmomentes in Hinsicht auf den Axpunkt, d. i. gleich der Summe der Producte aus den Elementen des Querschnittes und aus den Quadraten ihrer Entfernungen von der Axe C.

Ist der Querschnitt $A\,C\,C_1$, Fig. 351, eines gebogenen Körpers eine symmetrische Figur, und ist die Axe $\overline{X}\,X$ rechtwinkelig gegen die Biegungsebene der Symmetrieaxe derselben, so findet noch eine Relation zwischen den Biegungsmomenten statt. Sind wieder $SK = x$ und $KF = y$ die Coordinaten eines Flächenelementes F in Hinsicht auf das Axensystem $\overline{X}\,X$ und $\overline{Y}\,Y$, und ist auch $FN = v$ der Abstand desselben Elementes F von einer anderen Axe $\overline{U}\,U$, welche um den Winkel $XSU = \alpha$ von der ersten Axe $\overline{X}\,X$ abweicht, so haben wir für denselben

Fig. 351.



$$v = MF - MN = MF - KL$$
$$= KF\cos. KFM - SK\sin. KSL = y\cos.\alpha - x\sin.\alpha,$$

daher:

$v^2 = x^2 (sin.\alpha)^2 + y^2 (cos.\alpha)^2 - 2xy\, sin.\alpha\, cos.\alpha$, sowie auch
$F v^2 = (sin.\alpha)^2 F x^2 + (cos.\alpha)^2 F y^2 - sin.\, 2\alpha\, F x y$, und
$\Sigma (F v^2) = (sin.\alpha)^2 \Sigma (F x^2) + (cos.\alpha)^2 \Sigma (F y^2) - sin.\, 2\alpha\, \Sigma (F x y)$.

Da wegen der symmetrischen Gestalt der Figur jedem Elemente $F_1, F_2 \dots$ ein gleiches Gegenelement $F_1, F_2 \dots$ zukommt, bei welchem y und folglich auch das ganze Product negativ ist, so fällt die Summe der entsprechenden Producte für je zwei solcher Elemente, und folglich auch die ganze Summe

$$\Sigma (F x y) = \text{Null}$$ aus, und es ist daher:

$$\Sigma (F v^2) = (sin.\alpha)^2 \Sigma (F x^2) + (cos.\alpha)^2 \Sigma (F y^2), \text{ oder:}$$
$$W = (sin.\alpha)^2 W_1 + (cos.\alpha)^2 W_2,$$

wobei W das Maß des Biegungsmomentes in Hinsicht auf irgend eine Axe $\overline{U}U$, W_1 das in Hinsicht auf die Symmetrieaxe $\overline{X}X$ und W_2 das in Hinsicht auf die rechtwinkelig zur Symmetrieaxe stehende Axe $\overline{Y}Y$ bezeichnen, und vorausgesetzt wird, daß die Axen $\overline{U}U$ und $\overline{Y}Y$ sowie die Symmetrieaxe $\overline{X}X$ durch den Schwerpunkt S der Figur gehen.

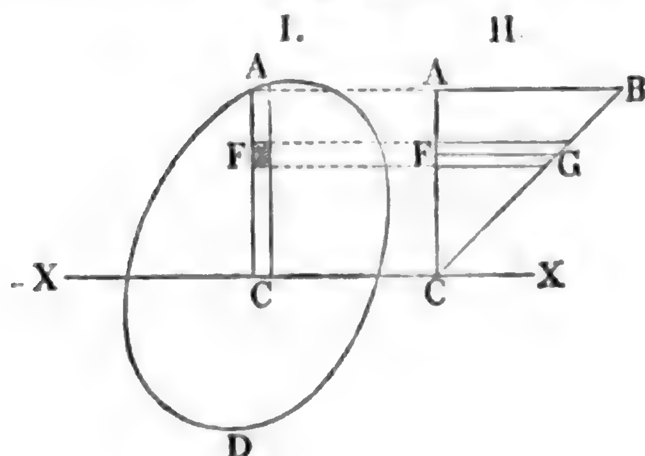
Mit Hülfe der beiden vorstehenden Regeln kann man nicht selten aus dem bekannten Biegungsmomente eines Körpers in Hinsicht auf eine gewisse Axe das Biegungsmoment desselben in Hinsicht auf eine andere Axe finden.

Biegungsmoment eines Streifens. Um das Biegungsmoment eines Körpers von bekanntem Querschnitte AD, Fig. 352, I., in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$ zu finden, denken wir uns diesen Querschnitt durch Perpendikel zu $\overline{X}X$ in lauter schmale Streifen und jeden solchen Streifen, wie z. B. CA, wieder in rectanguläre Elemente F_1, F_2, F_3 u. s. w. zerlegt. Sind dann z_1, z_2, z_3 u. s. w. die Abstände (CF) dieser Elemente von der Axe $\overline{X}X$, so haben wir das Maß des Biegungsmomentes für einen solchen Streifen: §. 226

$$F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + F_3 z_3^2 + \cdots$$
$$= F_1 z_1 . z_1 + F_2 z_2 . z_2 + F_3 z_3 . z_3 + \cdots$$

Ziehen wir nun in Fig. 352, II., AB rechtwinkelig auf und gleich CA, und verbinden wir B und C durch eine gerade Linie, so schneidet dieselbe von den in den Abständen $(CF) = z_1$, z_2, z_3 u. s. w. auf CA errichteten Perpendikeln gleiche Stücke $(FG) = z_1, z_2, z_3$ u. s. w. ab, und es lassen sich nun $F_1 z_1$, $F_2 z_2$ u. s. w. als die Inhalte von Prismen, sowie $F_1 z_1 . z_1$, $F_2 z_2 . z_2$ u. s. w. als die statischen Momente derselben in Hinsicht auf die Axe C ansehen. Die Prismen

Fig. 352.



$F_1 z_1$, $F_2 z_2$ u. s. w. machen aber zusammen ein dreiseitiges Prisma aus, dessen Grundfläche das Dreieck ABC und dessen Höhe die Breite des Streifens AC (I.) ist; es ist daher auch die Summe der obigen statischen Momente gleich dem Momente des Prismas ABC in Hinsicht auf die Axe $\overline{X}X$. Setzen wir die Höhe $CA = z$ und die Breite des Streifens $= b$, so haben wir den Inhalt des gedachten dreiseitigen Prismas

$$= \frac{1}{2} b z^2,$$

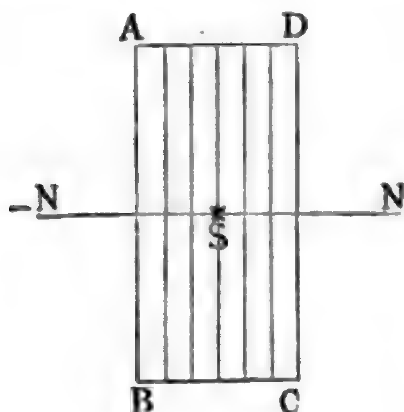
und da der Abstand seines Schwerpunktes von C, $\frac{2}{3} z$ beträgt (s. §. 109), so ergiebt sich das statische Moment des Prismas und folglich auch das Maß des Biegungsmomentes vom Streifen CA:

$$W = \frac{1}{2} b z^2 \,.\, \frac{2}{3} z = \frac{1}{3} b z^3.$$

Um nun das Biegungsmoment des ganzen Querschnittes AD zu finden, bedarf es natürlich nur einer Addition der Biegungsmomente der Streifen wie CA, in welche sich die ganze Fläche durch Perpendikel zur Axe $\overline{X}X$ zerlegen läßt.

Am einfachsten ist die Bestimmung bei einem rectangulären Querschnitte $ABCD$, Fig. 353. Hier sind die Streifen, in welche sich die Flächen zerlegen, von gleicher Größe, und machen daher zusammen einen einzigen Streifen von der Breite $AD = b$ des ganzen Rechteckes aus. Ist dann noch die Höhe AB dieses Rechteckes $= h$, so hat man die Höhe eines Streifens:

Fig. 353.



$$z = \frac{1}{2} h,$$

daher das Maß des Biegungsmomentes einer Hälfte dieser Fläche:

$$\frac{1}{3} b \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b h^3}{24},$$

und endlich dieses Maß vom ganzen Rechtecke:

$$W = 2 \cdot \frac{b h^3}{24} = \frac{b h^3}{12}.$$

§. 227 **Biegungsmoment eines parallelepipedischen Balkens.** Es wächst dem Vorstehenden zufolge, bei einem parallelepipedischen Balken das Biegungsmoment $WE = \frac{b h^3}{12} E$ wie die Breite und wie der Cubus der Höhe des Balkens.

Setzen wir diesen Werth für WE in die erste Formel

$$a = \frac{P l^3}{3 WE} \text{ des §. 217,}$$

so erhalten wir die Bogenhöhe für den an einem Ende eingeklemmten Balken mit rectangulärem Querschnitte:

$$a = 4 \cdot \frac{P l^3}{b h^3 E};$$

setzen wir ihn aber in die zweite Formel desselben Paragraphen,

$$a = \frac{1}{48} \frac{P l^3}{W E},$$

so stellt sich für den an beiden Enden aufliegenden Balken,

$$a = \frac{P l^3}{4 b h^3 E}$$

heraus. Umgekehrt folgt aus der Bogenhöhe a der Elasticitätsmodul

$$E = \frac{4 P l^3}{a b h^3} \text{ für den einen, und}$$

$$E = \frac{P l^3}{4 a b h^3} \text{ für den anderen Fall.}$$

Beispiele. 1) Ein hölzerner Balken von 10 Fuß = 120 Zoll Länge, 8 Zoll Breite und 10 Zoll Höhe soll an beiden Enden aufruhen und eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 10000$ Pfund tragen; welche Biegung wird derselbe erleiden?

Es ist die Bogenhöhe:

$$a = \frac{5}{8} \frac{Q l^3}{4 b h^3 E} = \frac{5}{32} \cdot \frac{10000 \, . \, 120^3}{8 \, . \, 10^3 \, . \, E} = \frac{50000 \, . \, 12^3}{32 \, . \, 8 \, E} = \frac{1350000}{4 \, . \, E}.$$

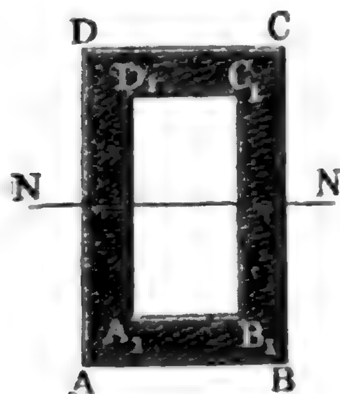
Nun $E = 1'500000$ Pfund eingesetzt, folgt $a = \frac{135}{4 \, . \, 150} = 0{,}225$ Zoll.

2) Wenn sich eine parallelepipedisch geformte gußeiserne Stange von 2 Zoll Breite und $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke durch ein in der Mitte aufliegendes Gewicht $P = 18$ Pfund um $\frac{1}{4}$ Zoll gesenkt hat, während die Entfernung l der Stützen 5 Fuß beträgt, so ergiebt sich der Elasticitätsmodul des Gußeisens:

$$E = \frac{P l^3}{4 a b h^3} = \frac{18 \, . \, 60^3}{4 \, . \, \frac{1}{4} \, . \, 2 \, . \, (\frac{1}{2})^3} = \frac{18 \, . \, 60^3}{\frac{1}{4}} = 72 \, . \, 216000 = 15'552000 \text{ Pfund.}$$

Hohle Balken. Von einem hohlen parallelepipedischen Balken $ABCD$, Fig. 354, bestimmt sich das Biegungsmoment, wenn man von dem Momente des vollständigen Balkens das Moment der Höhlung abzieht. Sind $AB = b$ und $BC = h$ die äußere Breite und Höhe und $A_1 B_1 = b_1$ und $B_1 C_1 = h_1$ die innere Breite und Höhe, so hat man die Maße der Biegungsmomente der Flächen AC und $A_1 C_1$: §. 2

Fig. 354.



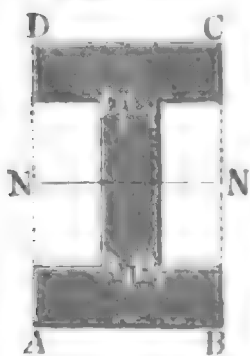
$$= \frac{b h^3}{12} \text{ und } \frac{b_1 h_1^3}{12},$$

und es folgt durch Subtraction das Biegungsmoment des hohlen Balkens:

$$W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}.$$

Ganz auf gleiche Weise ergiebt sich das Biegungsmoment des an den Seiten ausgehöhlten Körpers $ABCD$, Fig. 355. Sind $AB = b$ und $BC = h$ äußere Breite und Höhe, und ist $AB - A_1 B_1 = b_1$, sowie $B_1 C_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der beiden Höhlungen, so erhält man wieder durch Subtraction:

Fig. 355



$$W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}.$$

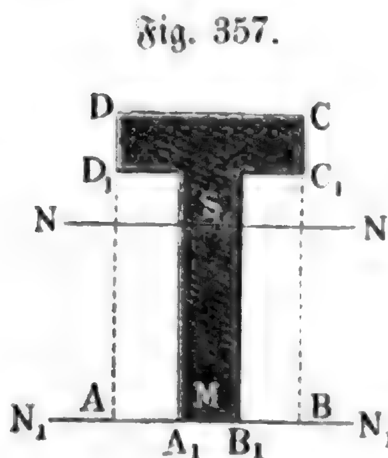
Ebenso ergiebt sich das Biegungsmoment des Körpers $ABCD$, Fig. 356, mit kreuzförmigem Querschnitte. Ist hier $AB = b$ und $BC = h$ die Breite und Höhe des Mittelstückes, und ist $A_1 B_1 - AB = b_1$ und $A_1 D_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der Seitenstücke, so folgt durch Addition das Biegungsmoment des Ganzen:

Fig. 356.

$$W = \frac{b h^3 + b_2 h_1^3}{12}.$$

Auf dieselbe Weise kann man die Biegungsmomente vieler anderen in der Praxis vorkommenden Körper finden. So ist z. B. für den Körper mit Tförmigem Querschnitte $A_1 B_1 CD$, Fig. 357, bei den Dimensionen

Fig. 357.



$$AB = CD = b,$$
$$AB - A_1 B_1 = AA_1 + BB_1 = b_1,$$
$$AD = BC = h \text{ und}$$
$$AD_1 = BC_1 = BC - CC_1 = h_1,$$

das Maß des Biegungsmomentes in Beziehung auf die untere Kante $A_1 B_1$:

Moment des Rechteckes $ABCD$ minus Moment der Rechtecke $A_1 D_1$ und $B_1 C_1$, d. i.:

$$W_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b (2h)^3}{12} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b_1 (2 h_1)^3}{12}$$
$$= \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{3},$$

wie sich ergiebt, wenn man jedes dieser Rechtecke als die Hälfte von doppelt so hohen Rechtecken mit der neutralen Axe $N_1 N_1$ ansieht. Nun ist die Fläche $A_1 C_1 D = F = bh - b_1 h_1$, und ihr statisches Moment:

$$F . e_1 = bh \cdot \frac{h}{2} - b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} = \tfrac{1}{2} (b h^2 - b_1 h_1^2);$$

es folgt daher der Hebelarm

$$MS = e_1 = \frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{2 (b h - b_1 h_1)},$$

das Product

$$F . e_1^2 = \frac{1}{4} (b h^2 - b_1 h_1^2)^2 : (b h - b_1 h_1)$$

und das Biegungsmoment des Körpers in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt S gehende neutrale Axe NN:

$$W = W_1 - F . e_1^2 = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{3} - \frac{1}{4} (b h^2 - b_1 h_1^2)^2 : (b h - b_1 h_1)$$

$$= \frac{4 (b h^3 - b_1 h_1^3)(b h - b_1 h_1) - 3 (b h^2 - b_1 h_1^2)^2}{12 (bh - b_1 h_1)}$$

$$= \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4 b h b_1 h_1 (h - h_1)^2}{12 (b h - b_1 h_1)}.$$

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß die hohen, ausgehöhlten und gefiederten Körper bei gleicher Masse ein größeres Biegungsmoment haben, als die breiten, massiven Körper. Weil dieses Moment mit dem Querschnitte F und dem Quadrate (z^2) der Entfernung von der neutralen Axe wächst, so hat eine und dieselbe Faser um so mehr Widerstand gegen die Biegung, je entfernter sie von der neutralen Axe liegt. Ist z. B. bei einem massiven parallelepipedischen Balken die Höhe h gleich der doppelten Breite b, so fällt das Biegungsmoment entweder

$$W = \frac{b . (2 b)^3}{12} = \frac{2}{3} b^4 \text{ oder } = \frac{2 b . b^3}{12} = \frac{1}{6} b^4$$

aus, je nachdem man diesen Balken mit der kleineren Breite b oder mit der größeren $2b$ auflegt; es ist also im ersten Falle das Biegungsmoment viermal so groß, als im zweiten Falle. Wenn man ferner den massiven Balken vom Querschnitte bh durch einen hohlen ersetzt, dessen Höhlung bh gleich ist dem massiven Theile vom Querschnitte $b_1 h_1 - bh$, wenn also $b_1 h_1 - bh = bh$, d. i. $b_1 h_1 = 2 bh$, oder $b_1 = b \sqrt{2}$ und $h_1 = h \sqrt{2}$ ist, so erhält man für den letzteren das Biegungsmoment:

$$\frac{b_1 h_1^3 - b h^3}{12} = \frac{b \sqrt{2} (h \sqrt{2})^3 - b h^3}{12} = \frac{3}{12} b h^3,$$

d. i. dreimal so groß als für den ersteren.

Dreiseitige Balken. Das Maß des Biegungsmomentes eines prismatischen Körpers mit dreiseitigem Querschnitte ABC, Fig. 358 (a. f. S.), wird mit Hülfe der letzten Paragraphen wie folgt bestimmt. Für das Prisma mit rectangulärem Querschnitte $ABCD$ ist, wenn man die Bezeichnungen des vorletzten Paragraphen beibehält, das Maß des Biegungsmomentes §. 2

$= \frac{b h^3}{12}$, folglich das für seine Hälfte mit dem triangulären Querschnitte ABC, und zwar in Hinsicht auf die Mittellinie $\overline{N_1} N_1$:

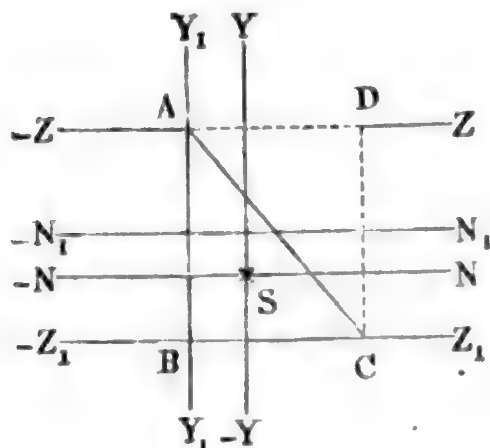


Fig. 358.

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{b h^3}{12} = \frac{b h^3}{24}.$$

Nun steht aber die Schwerlinie $\overline{N}N$ des Dreieckes um $\frac{1}{6} AB = \frac{1}{6} h$ von der Mittellinie oder Schwerlinie $\overline{N_1} N_1$ des Rechteckes ab, daher ist nach §. 224, das Moment in Hinsicht auf $\overline{N}N$:

$$W = W_1 - \left(\frac{h}{6}\right)^2 F = \frac{b h^3}{24} - \frac{b h^3}{72}$$

$$= \frac{b h^3}{36} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b h^3}{12},$$

also das Biegungsmoment W des Balkens mit dreiseitigem Querschnitte ist nur ein Drittel vom Biegungsmomente des parallelepipedischen, bei gleicher Grundlinie und Höhe des Querschnittes. Da nun aber der letztere Balken nur doppelt so viel Volumen hat als der erstere, so folgt, daß bei übrigens gleichen Dimensionen der trianguläre Balken nur $\frac{2}{3}$ so viel Biegungsmoment besitzt als der rectanguläre Balken.

Für die Axe $\overline{Z_1} Z_1$ durch die Basis BC ist ferner dieses Moment:

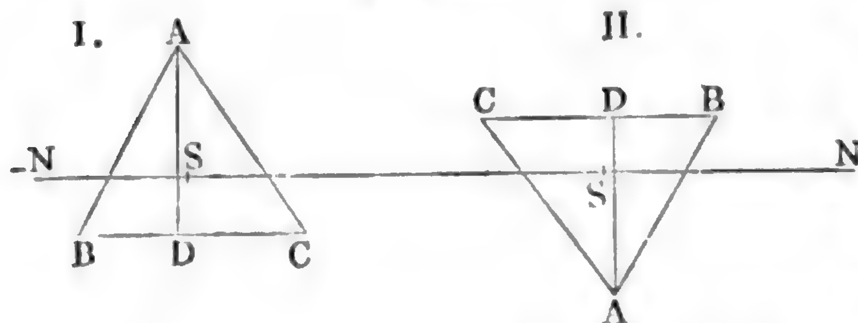
$$W_2 = W + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot F = \frac{b h^3}{36} + \frac{b h^3}{18} = \frac{b h^3}{12},$$

und für die Axe $\overline{Z}Z$ durch die scharfe Kante A ist es:

$$W_3 = W + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{b h}{2} = \frac{b h^3}{36} + \frac{4 b h^3}{18} = \frac{b h^3}{4}.$$

Diese Formeln bedingen übrigens nicht einen rechtwinkelig triangulären Querschnitt. Es gelten dieselben auch für jedes andere Dreieck ABC, Fig. 359, dessen Basis BC rechtwinkelig gegen die Biegungskraft P steht;

Fig. 359.



denn es läßt sich dasselbe in zwei rechtwinkelige Dreiecke ABD und ACD zerlegen, deren Grundlinien $BD = b_1$ und $DC = b_2$ zusammen die Grundlinie $BC = b$ des schiefen Dreieckes ABC ausmachen, so daß sich daher für das letztere

$$W = \frac{1}{36} b_1 h^3 + \frac{1}{36} b_2 h^3 = \frac{1}{36} (b_1 + b_2) h^3 = \frac{b h^3}{36}$$

berechnet.

Uebrigens ist es natürlich ganz einerlei, ob die Grundlinie BC oben oder unten, also wie in I. oder in II., liegt. Es ist für beide Fälle das Biegungsmoment selbst

$$WE = \frac{b h^3}{36} E,$$

so lange die Elasticitätsmodel (E) für Ausdehnung und Zusammendrückung nicht von einander abweichen.

Dieselben Formeln finden auch ihre Anwendung bei einem rhomboidalen Querschnitt $ABCD$, Fig. 360, mit horizontaler Diagonale BD. Ist wieder die Breite $BD = b$ und Höhe $AC = h$, so hat man für Körper mit diesem Querschnitte:

$$W = 2 \cdot \frac{b}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b h^3}{48} = \frac{1}{4} \frac{b h^3}{12},$$

d. i. ein Viertel von dem Momente des Balkens mit rectangulärem Querschnitte $EFGH$ bei gleicher Breite und Höhe. Auch folgt hiernach für ein Doppeltrapez $ABED$, Fig. 361, von der Höhe $AC = BD = h$, äußeren Breite $AB = CD = b$ und inneren Breite $EF = b_1$,

$$W = \frac{b h^3}{12} - (b - b_1) \frac{h^3}{48} = \frac{(3b + b_1) h^3}{48}.$$

Fig. 360.

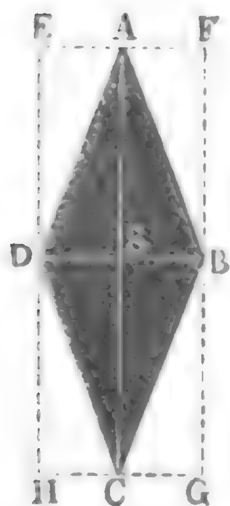


Fig. 361.

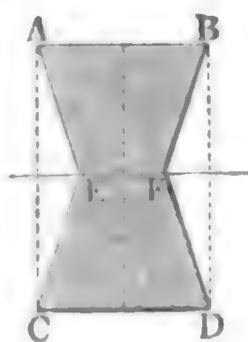
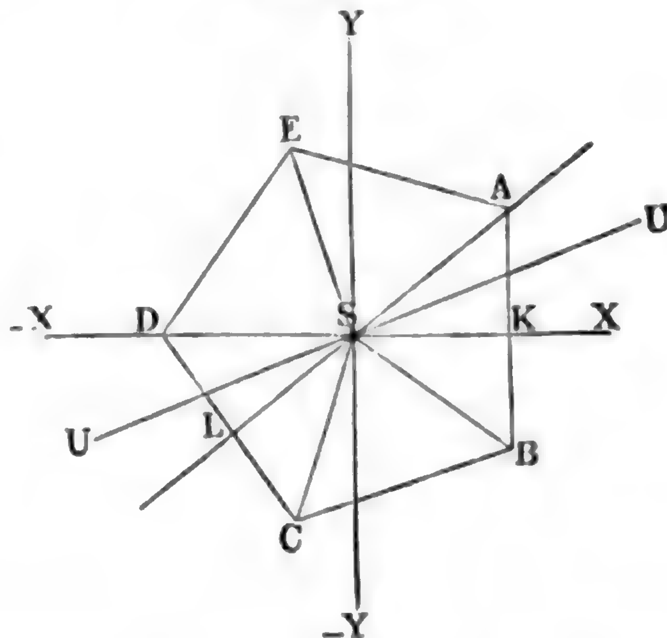


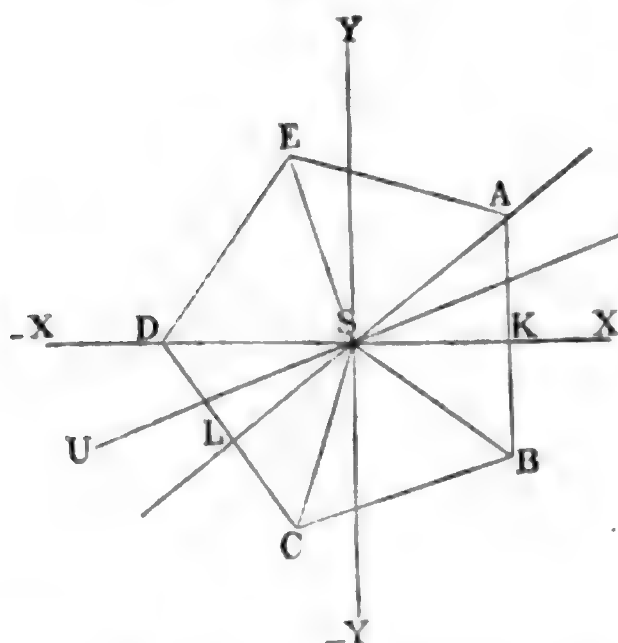
Fig. 362.



Polygonale Balken. Die vorstehende Theorie kann auch auf Körper §. 230 mit regelmäßig polygonalen Querschnitten wie ACE, Fig. 362, angewendet werden, bei welchen die neutrale Axe $\overline{X}X$ zugleich eine Symmetrieaxe ist. Da sich ein solches Polygon in lauter congruente Dreiecke zerlegen läßt, so kommt es bei dieser Bestimmung vorzüglich darauf an, das

Biegungsmoment eines solchen Dreieckes ASB zu ermitteln. Bezeichnet man die Seite $AB = BC = CD$ des Polygons oder die Grundlinie eines Ergänzungsdreieckes desselben, durch s, und die Höhe SK desselben durch h, so hat man das Maß seines Biegungsmomentes in Hinsicht auf die Axe $\overline{X}X$:

Fig. 362 a.



$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{hs^3}{12} = \frac{hs^3}{48},$$

dagegen dasselbe in Hinsicht auf die zweite Axe $\overline{Y}Y$: $= \frac{sh^3}{4}$,

und es ist folglich die Summe beider Momente:

$$\frac{sh^3}{4} + \frac{hs^3}{48} = \frac{sh}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right).$$

Diese Summe gilt nun (nach §. 225) auch für jedes der übrigen Ecke, und es ist daher dieselbe für das Polygon von n Seiten:

$$W_1 + W_2 = \frac{nsh}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right) = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right),$$

wenn man den Inhalt desselben:

$$n \cdot \frac{sh}{2}, \text{ durch } F \text{ ausdrückt.}$$

Bezeichnen wir den Winkel ASX durch α, so ist nach §. 225 das Moment in Hinsicht auf die Axe ASL:

$$= W_1 (sin. \alpha)^2 + W_2 (cos. \alpha)^2;$$

dasselbe ist aber auch gleich dem Momente W_1 in Hinsicht auf KSD oder $\overline{X}X$, daher hat man:

$$W_1 = W_1 (sin. \alpha)^2 + W_2 (cos. \alpha)^2, \text{ oder:}$$
$$W_1 [1 - (sin. \alpha)^2] = W_2 (cos. \alpha)^2, \text{ d. i.:}$$
$$W_1 (cos. \alpha)^2 = W_2 (cos. \alpha)^2, \text{ und folglich:}$$
$$W_1 = W_2.$$

Für eine Axe $\overline{U}U$, welche um einen willkürlichen Winkel $XSU = \varphi$ von der Axe $\overline{X}X$ der Symmetrie abweicht, ist ferner das Moment:

$$W = W_1 \, sin. \varphi^2 + W_2 \, cos. \varphi^2 = W_1 (sin. \varphi^2 + cos. \varphi^2) = W_1.$$

Wenn man folglich in der obigen Gleichung

$$W_1 + W_2 = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right), \; W = W_1 = W_2$$

einsetzt, so erhält man für jede beliebige Axe des regulären Polygons das Maß des Biegungsmomentes:

$$W = W_1 = W_2 = \frac{F}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right),$$

oder, wenn man noch den Halbmesser des Polygons $SA = SB = r$, und hiernach $h^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$ setzt:

$$W = \frac{F}{4}\left(r^2 - \frac{s^2}{6}\right).$$

Cylindrische und elliptische Balken. Für den Kreis als Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ist $s = 0$, daher folgt das Maß des Biegungsmomentes eines Cylinders: §. 2

$$W = \frac{F}{4} r^2 = \frac{\pi r^4}{4} = 0{,}7854\, r^4.$$

Für einen hohlen Cylinder oder eine Röhre mit dem äußeren Halbmesser r_1 und inneren Halbmesser r_2 folgt daher durch Subtraction:

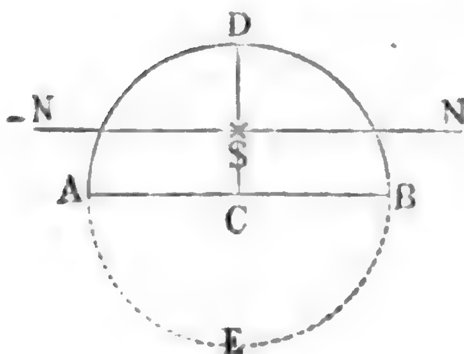
$$W = \frac{\pi (r_1^4 - r_2^4)}{4} = \frac{\pi (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 + r_2^2)}{4} = \frac{F(r_1^2 + r_2^2)}{4}$$

$$= \frac{F r^2}{2}\left[1 + \left(\frac{b}{2r}\right)^2\right],$$

wobei $F = \pi (r_1^2 - r_2^2)$ den Inhalt des ringförmigen Querschnittes, $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$, den mittleren Halbmesser, und $b = \frac{r_1 - r_2}{2}$, die Wanddicke des Cylinders bezeichnen.

Der horizontale Durchmesser AB theilt den Vollkreis DE, Fig. 363, in zwei Halbkreise ADB und AEB, und es ist das Maß des Biegungsmomentes für eine solche Hälfte in Hinsicht auf den Durchmesser AB:

Fig. 363.



$$W_1 = {}^1\!/_2\, \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Nun steht aber der Schwerpunkt S des Halbkreises um $CS = \frac{4r}{3\pi}$ (s. §. 113) von dem Mittelpunkte C des Kreises ab, es ist daher für die parallele Axe $\overline{N N}$ durch S:

$$W = W_1 - F.\overline{CS}^2 = W_1 - F.\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$$

$$= \pi r^4\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0{,}1098 . r^4,$$

wogegen für den Halbkreis mit verticalem Durchmesser

$$W = \frac{\pi r^4}{8} = 0{,}3927\, r^4 \text{ ist.}$$

In Hinsicht auf eine Axe $\overline{N}N$, welche um den Winkel $NSX = \alpha$ von der Symmetrieaxe CD, Fig. 364, abweicht, ist das Moment des Halbkreises:

$$W = \frac{\pi r^4}{8}\, sin.\, \alpha^2 + \pi r^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) cos.\, \alpha^2$$
$$= (0{,}3927\, sin.\, \alpha^2 + 0{,}1098\, cos.\, \alpha^2)\, r^4.$$

Fig. 364.

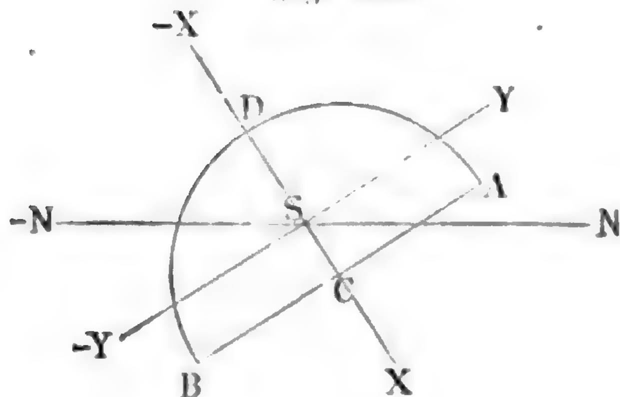
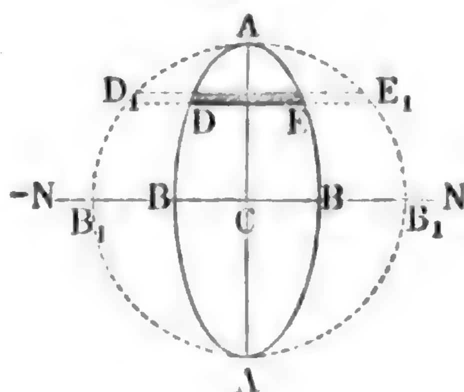


Fig. 365



Aus der Formel

$$W = \frac{\pi r^4}{4}$$

für das Biegungsmoment des Vollkreises läßt sich auch das für eine Ellipse $ABAB$, Fig. 365, ableiten. In Folge der aus Art. 12 der analytischen Hülfslehren bekannten Beziehung der Ellipse zum Kreise ist, wenn AB_1AB_1 einen Kreis vorstellt, dessen Halbmesser CA der einen Halbaxe a der Ellipse gleich ist, und wenn die andere Halbaxe CB der Ellipse durch b bezeichnet wird, das Verhältniß $\frac{DE}{D_1E_1}$ der Breite DE eines elliptischen Elementes zur Breite D_1E_1 eines gleichliegenden und gleichhohen Elementes vom Kreise

$$= \frac{BB}{B_1B_1} = \frac{CB}{CB_1} = \frac{b}{a}.$$

Da nun aber das Biegungsmoment eines solchen Streifens nur der einfachen Breite proportional wächst, so verhält sich daher auch das Moment eines Streifens DE der Ellipse zu dem entsprechenden Streifen D_1E_1 des Kreises wie b zu a, und es ist folglich auch das Maß des Biegungsmomentes für den Körper mit elliptischem Querschnitte gleich $\frac{b}{a}$ von dem mit kreisförmigem Querschnitte, d. i.:

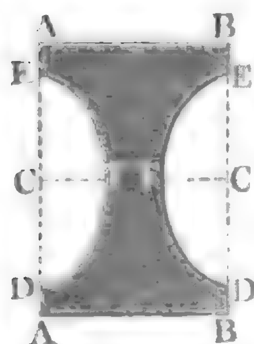
$$W = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Enthält dieser Körper noch eine **elliptische Höhlung** mit den Halbaxen a_1 und b_1, so hat man für denselben:

$$W = \frac{\pi (a^3 b - a_1^3 b_1)}{4}.$$

Ist ferner ein Körper mit **rectangulärem Querschnitte** entweder um seine Axe herum, oder, wie in Fig. 366, an den Seiten **elliptisch ausgehöhlt**, so hat man für dessen Biegungsmoment

Fig. 366.

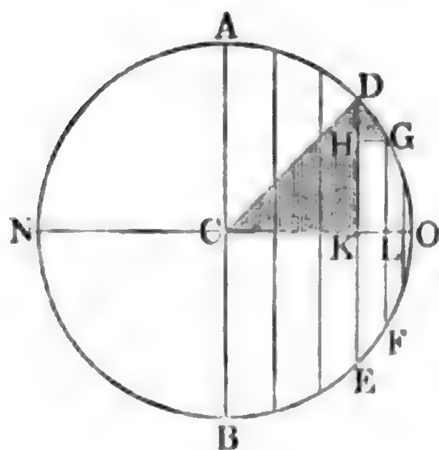


$$W = \frac{b h^3}{12} - \frac{\pi a_1^3 b_1}{4}$$

zu setzen, wobei b und h die Breite AB und Höhe $AA = BB$ des rectangulären Querschnittes $ABBA$, dagegen a_1 und b_1 die Halbaxen CE und CF der halbelliptischen Ausschnitte DFE bezeichnen.

Das Maß W des Biegungsmomentes von einem **Cylinder** oder einem **Cylinderabschnitte** läßt sich einfach auch auf folgende Weise ermitteln. Man theile den Quadranten ADO des Cylinderquerschnittes $AOBN$, Fig. 367, in n gleiche Theile, führe durch die Theilpunkte verticale Schnitte, wie DE, FG u. s. w. und bestimme die Biegungsmomente der dadurch erhaltenen, als gerade Parallelepipede anzusehenden Blätter, z. B. $DEFG$ u. s. w. Die Summe der Biegungsmomente dieser Blätter giebt das Biegungsmoment des halben Cylinders AOB, und durch Verdoppelung dieses Momentes erhält man das Biegungsmoment des ganzen Cylinders. Bezeichnet r den Halbmesser $CA = CO$ des kreisförmigen Querschnittes $AOBN$, so ist ein Bogentheil $DG = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r}{2 n}$, und in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke DGH und CDK, für die Dicke KL des Cylinderblattes $DEFG = 2 . DGLK$: §. 232

Fig. 367.



$$KL = GH = \frac{KD}{CD} \cdot DG = \frac{KD}{CD} \cdot \frac{\pi r}{2 n} = \frac{\pi}{2 n} \cdot \overline{KD}.$$

Nun folgt nach der bekannten Formel in §. 226, das Maß des Biegungsmomentes von dem Blatte $DEFG$:

$$= \frac{\overline{KL}.(2\overline{KD})^3}{12} = \frac{8}{12} \cdot \frac{\pi}{2n} \cdot \overline{KD^4} = \frac{\pi}{3n} \overline{KD^4}.$$

Setzen wir den veränderlichen Winkel ACD, welcher den Abstand des Schnittes DE vom verticalen Durchmesser AB bestimmt, $= \varphi$, so erhalten wir für die Ordinate oder halbe Blatthöhe $DK = r \cos. \varphi$, und daher das letzte Biegungsmoment $= \frac{\pi r^4}{3n} (\cos. \varphi)^4 = \frac{\pi r^4}{3n} \frac{3 + 4 \cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi}{8}$, da sich $(\cos. \varphi)^4 = \frac{3 + 4 \cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi}{8}$ setzen läßt (siehe „Ingenieur" Seite 157). Um nun das Maß des Biegungsmomentes des halben Cylinders zu finden, hat man im Factor $3 + 4 \cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi$, für φ nach und nach die Werthe $1 \cdot \frac{\pi}{2n}$, $2 \cdot \frac{\pi}{2n}$, $3 \cdot \frac{\pi}{2n}$ bis $n \cdot \frac{\pi}{2n}$ einzusetzen, die erhaltenen Ergebnisse zu addiren, und zuletzt noch mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{\pi r^4}{24n}$ zu multipliciren. Nun giebt aber die Zahl 3, n mal zu sich addirt, das Product $3n$, ferner die Summe der Cosinuse von 0 bis π, = Null, weil die Cosinuse im zweiten Quadranten von $\frac{\pi}{2}$ bis π gleich und entgegengesetzt sind den Cosinusen im ersten Quadranten von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, und ebenso die Summe der Cosinuse von 0 bis 2π, = Null, weil auch die Cosinuse im dritten Quadranten von π bis $^3/_2\,\pi$ die im vierten Quadranten von $^3/_2\,\pi$ bis 2π aufheben, daher bleibt für das Maß des Biegungsmomentes von der Cylinderhälfte AOB:

$$\frac{W}{2} = \frac{\pi r^4}{24n} \cdot 3n = \frac{\pi r^4}{8}, \text{ und endlich für den ganzen Cylinder:}$$

$$W = \frac{\pi r^4}{4} = 0{,}7854\, r^4, \text{ oder auch}$$

$$W = \frac{\pi d^4}{64} = 0{,}09817\, d^4,$$

wenn $d = 2r$, den Durchmesser des Cylinders bezeichnet.

(Anmerkung). Im Gewande der Differenzial- und Integralrechnung ist, da $\partial \varphi$ ein Element des Bogens φ bezeichnet, das Element $DG = \frac{r\pi}{2n}$, $= r \partial \varphi$, und daher das Moment des blattförmigen Flächenelementes $DEFG$,

$$= \frac{2\partial\varphi \cdot r^4}{3} (\cos. \varphi)^4 = \frac{2r^4 \partial\varphi}{3} \left(\frac{3 + 4\cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi}{8}\right)$$

$$= \frac{r^4}{12} (3 + 4 \cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi) \partial\varphi = \frac{r^4}{12} (3\partial\varphi + 4 \cos. 2\varphi\, \partial\varphi + \cos. 4\varphi) \partial\varphi$$

$$= \frac{r^4}{12} [3\partial\varphi + 2 \cos. 2\varphi\, \partial(2\varphi) + {}^1/_4 \cos. 4\varphi\, \partial(4\varphi)]$$

und endlich das Moment des Cylinderstückes $A\,B\,E\,D$:

$$W = \frac{r^4}{12}\left(3\int\partial\varphi + 2\int cos.\,2\,\varphi\,\partial\,(2\,\varphi) + \frac{1}{4}\int cos.\,4\,\varphi\,\partial\,(4\,\varphi)\right), \text{ d. i.:}$$

$$W = \frac{r^4}{12}(3\,\varphi + 2\,sin.\,2\,\varphi + \frac{1}{4}\,sin.\,4\,\varphi) \text{ (s. analyt. Hülfslehren, Art. 26, I.).}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $sin.\,2\,\varphi = sin.\,\pi = 0$, und $sin.\,4\,\varphi = sin.\,2\,\pi = 0$, eingesetzt und das Ganze verdoppelt, erhält man, wie eben, das Biegungsmoment des ganzen Cylinders, wieder

$$W = \frac{r^4}{12}\cdot\frac{3\,\pi}{2}\cdot 2 = \frac{\pi\,r^4}{4}.$$

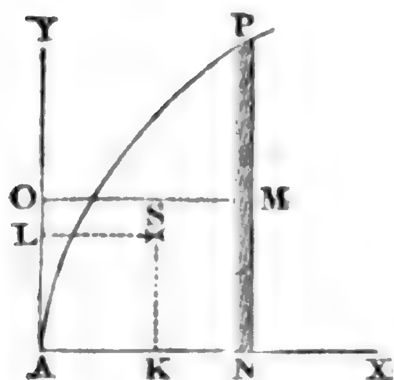
Für das Segment $D\,O\,E$ ist dagegen

$$W = \frac{\pi\,r^4}{8} - (3\,\varphi + 2\,sin.\,2\,\varphi + \frac{1}{4}\,sin.\,4\,\varphi)\,\frac{r^4}{12}$$
$$= \left[\frac{\pi - 2\,\varphi}{8} - \left(\frac{2\,sin.\,2\,\varphi + \frac{1}{4}\,sin.\,4\,\varphi}{12}\right)\right] r^4$$
$$= [6\,(\pi - 2\,\varphi) - 8\,sin.\,2\,\varphi - sin.\,4\,\varphi]\,\frac{r^4}{48}.$$

Durch einfache Subtraction läßt sich mittels der letzten Formel auch das Moment W für ein Brett $D\,E\,F\,G$ von endlicher Dicke KL bestimmen.

Balken mit krummlinigen Querschnitten. Für Körper mit gesetzmäßig krummlinigen Querschnitten bestimmt sich das Maß W des Biegungsmomentes am sichersten mit Hülfe der höheren Analysis. Man zerlegt zu diesem Zwecke eine solche Fläche $A\,N\,P$, Fig. 368, durch Ordinaten in ihre Elemente, und bestimmt nun die Momente eines solchen Elementes sowohl in Hinsicht auf die Abscissenaxe $A\,X$ als auch in Hinsicht auf die Ordinatenaxe $A\,Y$. (§. 233)

Fig. 368.



Ist x die Abscisse $A\,N$ und y die Ordinate $N\,P$, so hat man den Inhalt eines Elementes:

$$\partial\,F = y\,\partial\,x$$

(s. analyt. Hülfslehren, Art. 29) und daher das Maß seines Biegungsmomentes in Hinsicht auf die Axe $A\,X$:

$$\partial\,W_1 = \frac{1}{3}\,y^2\,.\,\partial\,F = \frac{1}{3}\,y^3\,\partial\,x$$

(s. §. 226), und dagegen in Hinsicht auf die Axe $A\,Y$:

$$\partial\,W_2 = x^2\,y\,\partial\,x,$$

da hier das Element an allen Stellen um x von $A\,Y$ absteht.

Durch Integration erhält man nun für die ganze Fläche $A\,N\,P = F$:

$$W_1 = \frac{1}{3}\int y^3\,\partial\,x$$

und

$$W_2 = \int x^2 y \,\partial x.$$

Hat man nun (nach §. 115) den Schwerpunkt S der Fläche ANP ermittelt, also seine Coordinaten $AK = u$ und $KS = v$ bestimmt, so findet man hiernach die Maße der Biegungsmomente in Hinsicht auf die durch den Schwerpunkt gehenden und den Coordinatenrichtungen parallel laufenden Axen:

$$W_1 = \frac{1}{3}\int y^3 \,\partial x - v^2 F,$$

und

$$W_2 = \int x^2 y \,\partial x - u^2 F.$$

Z. B. für eine Parabelfläche ANP, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man (nach Art. 29 der analyt. Hülfslehren):

$F = {}^2/_3\, x y$, und (nach §. 115)
$u = {}^3/_5\, x$ und $v = {}^3/_8\, y$,

daher:

$$v^2 F = \left(\frac{3}{8}\right)^2 F y^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 y^2 \cdot \frac{2}{3}\, x y = \frac{3}{32}\, x y^3$$

und

$$u^2 F = \left(\frac{3}{5}\right)^2 F x^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 x^2 \cdot \frac{2}{3}\, x y = \frac{6}{25}\, x^3 y.$$

Da ferner aus $y^2 = px$, $x = \frac{y^2}{p}$ und $\partial x = \frac{2 y \,\partial y}{p}$

folgt, so ist:

$$\frac{1}{3}\int y^3 \,\partial x = \frac{1}{3}\int y^3 \cdot \frac{2 y \,\partial y}{p} = \frac{2}{3p}\int y^4 \,\partial y = \frac{2 y^5}{15 p} = \frac{2}{15}\, y^3 x$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\, x y \,.\, y^2 = \frac{1}{5}\, F y^2,$$

und

$$\int x^2 y \,\partial x = \int \frac{y^4}{p^2} \cdot \frac{2 y^2 \,\partial y}{p} = \frac{2}{p^3}\int y^6 \,\partial y = \frac{2 y^7}{7 p^3} = \frac{2}{7}\, x^3 y$$
$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3}\, x y \,.\, x^2 = \frac{3}{7}\, F x^2.$$

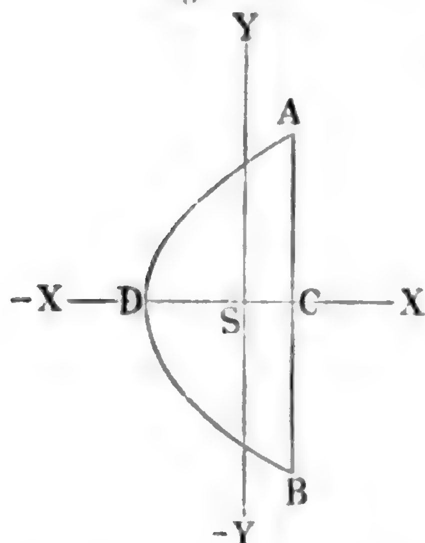
Endlich ergiebt sich:

$$W_1 = \frac{1}{5}\, F y^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 F y^2 = \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{64}\right) F y^2 = \frac{19}{320}\, F y^2,$$

und

$$W_2 = \frac{3}{7}\, F x^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 F x^2 = \frac{12}{175}\, F x^2.$$

Für eine symmetrische Parabelfläche ADB, Fig. 369, deren Sehne $AB = s$ und Höhe $CD = h$ ist, läßt sich hiernach setzen: das Moment in Hinsicht auf die Symmetrieaxe $\overline{X}X$:



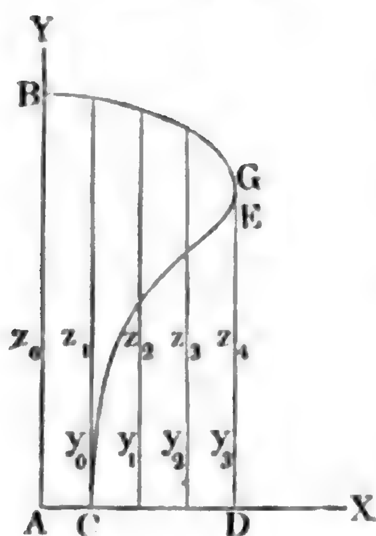
$$W_1 = \frac{1}{5} F \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{Fs^2}{20} = \frac{s^3 h}{30},$$

wogegen das in Hinsicht auf die normale Axe $\overline{Y}Y$ bleibt:

$$W_2 = \frac{12}{175} Fh^2 = \frac{8}{175} h^3 s.$$

Krummlinige Querschnitte. — §. Kommt es darauf an, das Biegungsmoment eines Körpers zu ermitteln, dessen Querschnitt eine zusammengesetzte oder eine ungesetzmäßige Figur bildet, so muß man entweder diesen Querschnitt in Theile zerlegen, für welche das Maß W bereits bekannt ist, oder man muß denselben durch verticale Linien in schmale Streifen zertheilen, die Maße der Biegungsmomente dieser Streifen (nach §. 226) berechnen und zuletzt noch dieselben durch Addition vereinigen, wobei wieder mit Vortheil die Regel von Simpson oder Cotes in Anwendung gebracht werden kann.

Ist z. B. $ABEC$, Fig. 370, eine solche Figur oder ein solcher Theil des Körperquerschnittes, und soll das Biegungsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe AX bestimmt werden, so ermittelt man erst das Maß W_1 für den Flächentheil $ABGD$, und dann das Maß W_2 für den Theil CED; subtrahirt man dann das letztere vom ersteren, so erhält man das gesuchte Moment: $W = W_1 - W_2$.



Ist die Grundlinie AD des ersten Theiles $= x$, und sind die in gleichen Abständen von einander stehenden Höhen desselben z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, so hat man das entsprechende Maß des Biegungsmomentes nach der Simpson'schen Regel:

$$W_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{12} (z_0^3 + 4 z_1^3 + 2 z_2^3 + 4 z_3^3 + z_4^3).$$

Ist dagegen die Breite CD des abzuziehenden Stückes $CDE = x_1$, und sind die Höhen desselben y_0, y_1, y_2, y_3, so hat man nach der Regel von Cotes (s. analyt. Hülfslehren, Art. 38):

$$W_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1}{8} (y_0^3 + 3 y_1^3 + 3 y_2^3 + y_3^3).$$

Geht $A X$ nicht durch den Schwerpunkt S des ganzen Querschnittes, so muß dann noch durch die bekannte Regel (§. 224) eine Reduction auf die Axe durch S vorgenommen werden. Auf diese Weise sind natürlich auch noch andere, vielleicht unter $A X$ und neben $A Y$ gelegene Theile des ganzen Querschnittes zu behandeln. Den Schwerpunkt S kann man entweder nach §. 124, oder auch empirisch bestimmen, indem man die ganze Fläche aus dünnem Blech oder Papier ausschneidet, und auf eine scharfe Schneide legt (s. §. 104). Wenn man auf diese Weise zwei Schwerlinien bestimmt, so erhält man im Durchschnitte derselben den gesuchten Schwerpunkt.

Beispiel. In der Fig. 370 ist $A B G E C$ ein Theil von dem Querschnitte einer Eisenbahnschiene, welcher sich als die Differenz zweier Flächen $A B G D$ und $C E D$ ansehen läßt. Wenn nun die erstere eine Breite $A D$ von $4/3$ und die letztere eine Breite $C D$ von 1 Zoll hat, und wenn ferner die Höhen des ersteren

$z_0 = 2{,}85$; $z_1 = 2{,}82$; $z_2 = 2{,}74$; $z_3 = 2{,}60$ und $z_4 = 2{,}30$

und die des letzteren

$y_0 = 0{,}20$; $y_1 = 1{,}50$; $y_2 = 1{,}80$ und $y_3 = 2{,}15$ Zoll

betragen, so ist das Maß des Widerstandsmomentes vom ersten Theile:

$$W_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{12} \cdot [2{,}85^3 + 2{,}30^3 + 4 \, . \, (2{,}82^3 + 2{,}60^3) + 2 \, . \, 2{,}74^3]$$

$$= \frac{1}{27} \cdot (23{,}149 + 12{,}167 + 4 \, . \, 40{,}002 + 2 \, . \, 20{,}571)$$

$$= \frac{1}{27} \cdot 236{,}47 = 8{,}7584,$$

und dagegen das vom zweiten Theile:

$$W_2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot [0{,}20^3 + 2{,}15^3 + 3 \, (1{,}50^3 + 1{,}80^3)]$$

$$= \frac{1}{24} \cdot (0{,}0080 + 9{,}9384 + 27{,}6210) = \frac{37{,}5674}{24} = 1{,}5653,$$

daher das gesuchte Maß für die ganze Fläche $A B G E C$:

$$W = W_1 - W_2 = 8{,}7584 - 1{,}5653 = 7{,}1931.$$

Anmerkung. Auch kann man setzen:

$$W = \frac{z}{12} \left(\frac{z}{4}\right)^2 (1 \, . \, 0^2 \, . \, y_0 + 4 \, . \, 1^2 \, . \, y_1 + 2 \, . \, 2^2 \, . \, y_2 + 4 \, . \, 3^2 \, . \, y_3 + 1 \, . \, 4^2 \, . \, y_4)$$

$$= \frac{z^3}{192} (4 \, y_1 + 8 \, y_2 + 36 \, y_3 + 16 \, y_4),$$

wenn y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 die in den Abständen $0/4 \, z$, $1/4 \, z$, $2/4 \, z$, $3/4 \, z$, $4/4 \, z$, von $A X$ gemessenen Breiten bezeichnen.

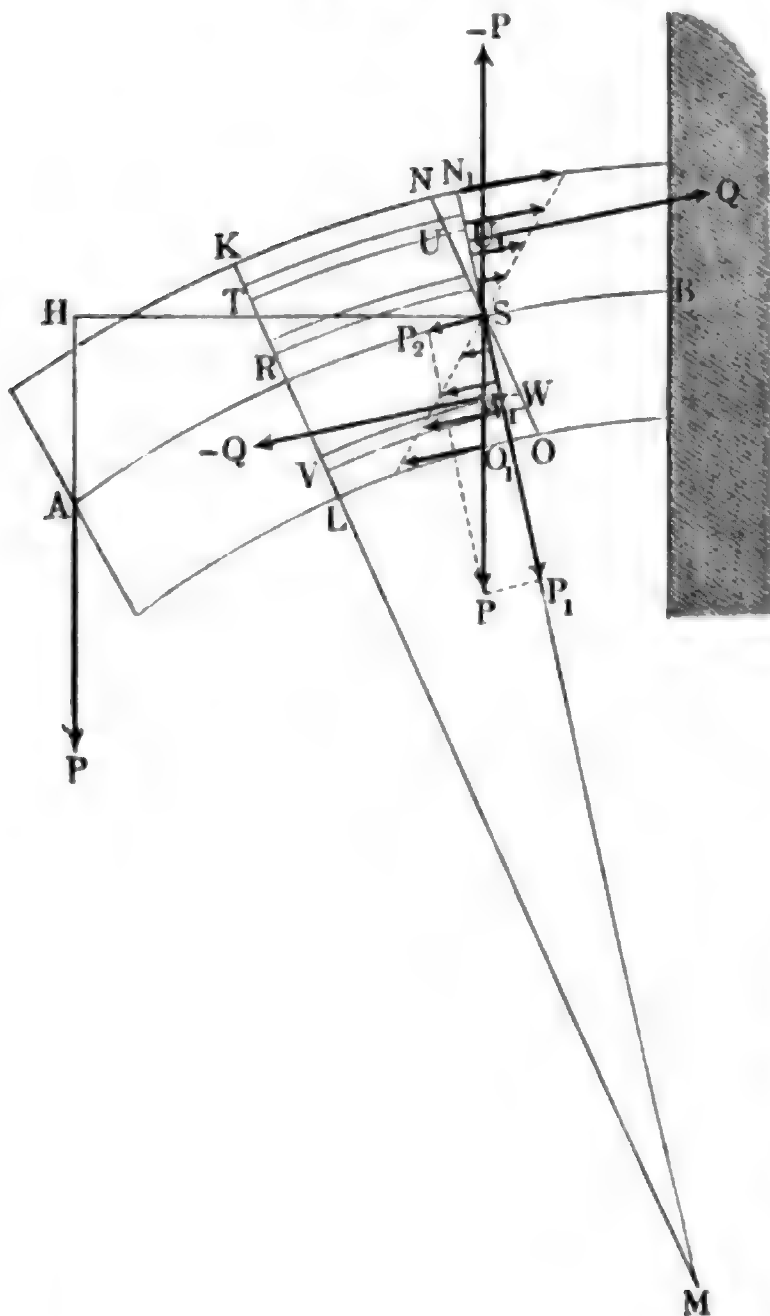
§. 235 **Biegungsfestigkeit.** Kennt man das Biegungsmoment eines an einem Ende B festgehaltenen und am anderen Ende A von einer Kraft P gespannten Körpers $A K O B$, Fig. 371, so kann man auch die Spannungen in jedem Querschnitte $N O$ desselben finden. Bezeichnet S die Spannung pro Quadratzoll in einer Entfernung $S N = e$ von der neutralen Axe S, so sind die Spannungen in den Abständen $z_1, z_2 \ldots$, $S_1 = \frac{z_1}{e} S$, $S_2 = \frac{z_2}{e} S \ldots$, und bei den Querschnitten $F_1, F_2 \ldots$, die Momente derselben:

$$M_1 = F_1 S_1 z_1 = F_1 z_1^2 \cdot \frac{S}{e},\ M_2 = F_1 S_2 z_2 = F_2 z_2^2 \frac{S}{e} \text{ u. s. w.},$$

und es folgt die Summe der Momente der sämmtlichen Spannungen im Querschnitte NO:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots = (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots) \frac{S}{e} = \frac{WS}{e}.$$

Fig. 371.



Ist nun x der Abstand SH des Querschnittes NO vom Angriffspunkt A der Kraft P, so hat man auch $M = Px$, und es folgt daher

1) $Px = \frac{WS}{e}$, oder

$Pxe = WS$, sowie die Spannung des Körpers in dem Abstande e von der neutralen Axe,

2) $S = \frac{Me}{W} = \frac{Pxe}{W}$.

Dieselbe wächst mit x gleichmäßig und ist daher für $x = l$, d. i. im Befestigungspunkte B am größten. Ebenso nimmt sie auch mit e gleichmäßig zu, und ist daher an der Stelle am größten, welche von der neutralen Axe am meisten absteht. Damit der Körper an keiner Stelle über die Elasticitätsgrenze hinaus gespannt werde, darf die Maximalspannung S höchstens den Tragmodul T erreichen, ist folglich

$$S = T = \frac{Ple}{W}, \text{ oder}$$

$$Pl = \frac{WT}{e}$$

zu setzen, wonach also die Tragkraft des Balkens $AKOB$:

$$P = \frac{WT}{le} \text{ folgt.}$$

Ebenso erhält man auch die Kraft zum Abbrechen des Körpers in B:

$$P_1 = \frac{WK}{le},$$

wobei man für K einen, allerdings durch Zerbrechungsversuche besonders zu bestimmenden Festigkeitsmodul einzusetzen hat. Uebrigens läßt sich die Grundformel $Px = \frac{WS}{e}$ auch aus oben §. 215 gefundener Grundformel $Px = \frac{WE}{r}$, wie folgt, unmittelbar ableiten.

Wenn man die von der Spannung S hervorgebrachte Ausdehnung NN_1 durch σ bezeichnet, so ist auch $S = \sigma E$, und wenn man in der Proportion

$$\frac{NN_1}{SN} = \frac{RS}{MR},$$

$\overline{NN_1} = \sigma$, $\overline{SN} = e$, $\overline{RS} = 1$, und $\overline{MR} = r$, den Krümmungshalbmesser einführt, also $\frac{\sigma}{e} = \frac{1}{r}$ oder $\sigma = \frac{e}{r}$ setzt, so folgt

$$S = \frac{e}{r} E, \text{ oder } \frac{S}{e} = \frac{E}{r}, \text{ und daher auch}$$

$$Px = \frac{WE}{r} = \frac{WS}{e}.$$

Setzen wir in der Formel $L = \frac{1}{6} \frac{P^2 l^3}{WE}$ (§. 217) für die mechanische Arbeit zum Biegen des Körpers AKB, das Moment $Pl = \frac{TW}{e}$ und den Tragmodul $T = \sigma E$ ein, so erhalten wir

$$L = \frac{1}{6} \frac{T^2 W^2}{e^2} \cdot \frac{l}{WE} = \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{Wl}{3e^2}.$$

Nun ist aber (nach §. 206) $\frac{1}{2} \sigma^2 E$ der Arbeitsmodul A der Elasticität, daher folgt die mechanische Arbeit, durch welche der Körper bis zur Elasticitätsgrenze gebogen wird,

$$L = A \cdot \frac{Wl}{3e^2}.$$

Ist b die größere Breite des Körpers, und denkt man sich den ganzen Querschnitt F des Körpers in n gleich breite Streifen von der Breite $\frac{b}{n}$ und den Höhen z_1, z_2, z_3 . . . zerlegt, so kann man setzen:

$$F = \frac{b}{n}(z_1 + z_2 + z_3 + \cdots) \text{ und}$$

$$W = \frac{b}{12n}(z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 \ldots),$$ daher auch

$$W l = \left(\frac{z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + \cdots}{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots}\right)\frac{Fl}{12}.$$

Jedenfalls läßt sich $z_1 = \mu_1 e$, $z_2 = \mu_2 e$, $z_3 = \mu_3 e \ldots$ setzen, wobei $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ von der Querschnittsform abhängige Zahlen bezeichnen, daher hat man auch

$$\frac{Wl}{e^2} = \left(\frac{\mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3 + \cdots}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots}\right)\frac{Fl}{12},$$

und daher die mechanische Arbeit

$$L = \frac{A}{3}\left(\frac{\mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3 + \cdots}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots}\right)\frac{Fl}{12}.$$

Nun ist aber $\frac{\mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$ ein bloß von der Form des Körpers abhängiger Coefficient ψ, und $Fl = V$ das Volumen des Körpers, daher hängt die mechanische Arbeit $L = \frac{1}{36}\psi A V$ nicht von den einzelnen Dimensionen, sondern nur von der Querschnittsform und vom Volumen des gebogenen Körpers ab. Bei Körpern von gleicher materieller Beschaffenheit und ähnlichen Querschnitten ist also diese Arbeit dem Volumen des Körpers proportional.

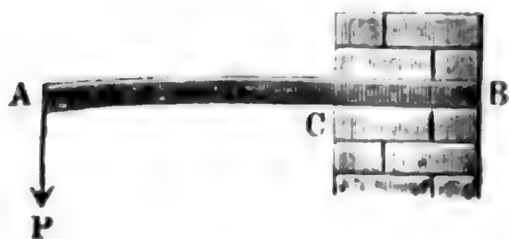
Für die Arbeit zum Abbrechen ist ebenso

$$L_1 = B \cdot \frac{Wl}{3e^2}$$

zu setzen, wenn B den Arbeitsmodul des Abbrechens bezeichnet.

Festigkeitsformeln. Für einen massiven parallelepipedischen Balken ACB, Fig. 372, von der Länge l, Breite b und Höhe h ist §. 236

Fig. 372.



$e = \frac{1}{2}h$ und, nach §. 226, $W = \frac{bh^3}{12}$, daher $\frac{W}{e} = \frac{bh^2}{6}$ und die Tragkraft desselben: $P = \frac{bh^2}{l}\frac{T}{6}$, also das Tragmoment: $Pl = bh^2 \cdot \frac{T}{6}$.

Auch folgt hiernach die mechanische Arbeit, um diesen Balken bis zur Elasticitätsgrenze zu biegen:

$$L = \frac{A}{3}\,\frac{W}{e}\,\frac{l}{e} = \frac{A}{3}\cdot\frac{bh^2}{6}\,\frac{2l}{h} = \frac{1}{9}Abhl = \frac{1}{9}AV.$$

Ist der Balken hohl, sind also seine Querschnitte wie Fig. 373 und Fig. 374 geformt, so hat man

$$\frac{W}{e} = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12 \cdot {}^1/_2 h} = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{6 h}, \text{ daher}$$

$$P l = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h l} T,$$

wo bei b und h die äußere, sowie b_1 und h_1 die innere Breite und Höhe

Fig. 373.

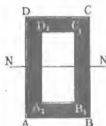


Fig. 374.

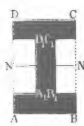
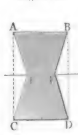


Fig. 375.

Fig. 376.



des Querschnittes bezeichnen. Beim Körper mit rhomboidalem Querschnitte, wie Fig. 375, ist

$$\frac{W}{e} = \frac{b h^3}{48 \,.\, {}^1/_2 h} = \frac{b h^2}{24}, \text{ daher}$$

$$P l = \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{24} = {}^1/_4 \, \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6},$$

d. i. $^1/_4$ mal so groß als beim parallelepipedischen Balken von gleicher Höhe $AC = h$ und Breite $BD = b$.

Ferner beim Balken mit doppeltrapezförmigem Querschnitt, wie Fig. 376, ist

$$\frac{W}{e} = \frac{(3 b + b_1) h^3}{48 \,.\, {}^1/_2 h} = \frac{(3 b + b_1) h^2}{24}, \text{ daher das Tragmoment}$$

$$P l = \frac{(3 b + b_1) h^2}{4} \cdot \frac{T}{6},$$

wobei b die obere, sowie b_1 die mittlere Dicke und h die Höhe des Querschnittes bezeichnen.

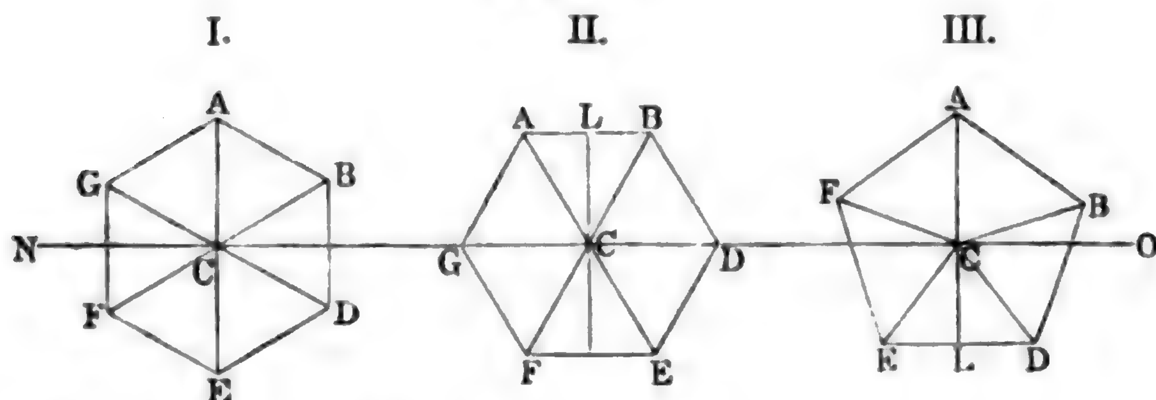
Für einen Balken mit regelmäßig $2n$ seitiger Basis, wie ADF, Fig. 377, I. u. II., hat man, wenn r den äußeren Halbmesser CA, s die Seitenlänge AB, h den inneren Halbmesser CL und F den Inhalt des ganzen Querschnittes bezeichnet,

$$W = \frac{F}{4} (r^2 - {}^1/_6 s^2) = \frac{F}{4} (h^2 + {}^1/_{12} s^2) = \frac{F (r^2 + 2 h^2)}{12},$$

und je nachdem die neutrale Axe NO, wie in Fig. 377, I., durch die gegenüberliegende Ecke, oder, wie in Fig. 377, II., durch die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten geht,

entweder $e = r$ oder $e = h = \sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}s)^2}$ zu setzen.

Fig. 377.



Daher folgt für den ersten Fall:

$$Pl = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12r}T,$$ und dagegen für den zweiten:

$$P_1 l = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12h}T,$$ während in beiden Fällen:

$$F = \frac{1}{2}nsh = nh\sqrt{r^2 - h^2} = \frac{1}{2}ns\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}s)^2}$$ ist.

Das Verhältniß $\frac{P_1}{P}$ der Tragkräfte ist $= \frac{r}{h}$.

Ist die Anzahl n der Seiten des polygonalen Querschnittes ungerade, wie Fig. 377, III., so hat man für e stets $CA = r$ einzusetzen, und daher nur die erstere Formel in Anwendung zu bringen, vorausgesetzt, daß die Kraftrichtung Symmetrieaxe des ganzen Querschnittes ist.

Für den quadratischen Querschnitt ist $s = 2h = r\sqrt{2}$, $F = s^2$, und daher das Tragmoment

$$Pl = \frac{s^3}{6\sqrt{2}}T = \frac{r^3}{3}T = 0{,}333\, r^3 T,$$ dagegen

$$P_1 l = \frac{s^3}{6}T = \frac{r^3\sqrt{2}}{3}T = 0{,}471\, r^3 T.$$

Für den sechsseitigen Querschnitt hat man $s = r = \frac{2h}{\sqrt{3}}$,

$$F = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2 = 2{,}598\, s^2,$$ und daher

$$Pl = \frac{5\sqrt{3}}{16}s^3 T = \frac{5\sqrt{3}}{16}r^3 T = 0{,}541\, r^3 T,$$ dagegen

$$P_1 l = \frac{5}{8}s^3 T = \frac{5}{8}r^3 T = 0{,}625\, r^3 T.$$

Für den regelmäßig achtseitigen Querschnitt ist:

$$s = r\sqrt{2-\sqrt{2}},\ h = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ und}$$

$$F = 4\,s\,h = 2\sqrt{2}\,.\,r^2 = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\,s^2;\ \text{daher}$$

$$P\,l = \frac{4(2\sqrt{2}+1)}{3\sqrt{20+14\sqrt{2}}}\,s^3\,T = \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{6}\right) r^3\,T = 0{,}638\,r^3\,T,$$

und

$$P_1\,l = \frac{4(2\sqrt{2}+1)}{3\sqrt{17+12\sqrt{2}}}\,s^3\,T = \frac{2\sqrt{2}+1}{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}\,r^3\,T = 0{,}691\,r^3\,T.$$

Für einen massiven Cylinder vom Halbmesser r hat man

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi r^4}{4r} = \frac{\pi r^3}{4},\ \text{daher}$$

$$P\,l = \frac{\pi}{4}\,r^3\,T = 0{,}785\,r^3\,T_1 = {}^1\!/_4\,F\,r\,.\,T,\ \text{und}$$

$$L = \frac{A}{3}\cdot\frac{\pi r^3}{4}\cdot\frac{l}{r} = {}^1\!/_{12}\,A\,.\,\pi r^2 l = {}^1\!/_{12}\,A\,V.$$

Ist der Cylinder hohl, so hat man dagegen

$$P\,l = \frac{\pi}{4}\frac{(r_1^4 - r_2^4)}{r_1}\,T = \frac{1+\left(\frac{b}{2\,r}\right)^2}{1+\frac{b}{2\,r}}\,\frac{F\,r}{2}\,T \ (\text{vergl. §. 231}),$$

wobei r_1 den äußeren, r_2 den inneren sowie $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$, den mittleren Halbmesser, ferner $F = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)$ den Querschnitt und $b = r_1 - r_2$ die Breite des ringförmigen Cylinderquerschnittes bezeichnen.

Fig. 378.

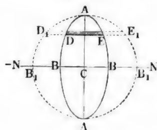
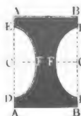


Fig. 379.



Für den Balken mit elliptischem Querschnitte, wie Fig. 378, dessen Halbaxe $CA = a$ die Richtung der Kraft hat, und Halbaxe $CB = b$ in der neutralen Axe liegt, ist

$$P\,l = \frac{\pi\,a^2\,b}{4}\,T = {}^1\!/_4\,F\,a\,T.$$

Endlich für den parallelepipedischen Balken mit halbelliptischen Aushöhlungen an den Seiten, wie Fig. 379, hat man,

$$P\,l = \frac{{}^1\!/_{12}\,b\,h^3 - {}^1\!/_4\,\pi\,b\,a_1^3}{{}^1\!/_2\,h}\,T = \frac{3\,b\,h^3 - \pi\,b\,a_1^3}{6\,h}\,T.$$

dagegen für einen solchen mit parabolischen Flankenhöhlungen:

$$Pl = \frac{\frac{1}{12}\,b h^3 - \frac{8}{15}\,b a_1^3}{\frac{1}{2}\,h}\,T = \frac{5\,b h^3 - 32\,b_1 a_1^3}{30\,h}\,T,$$

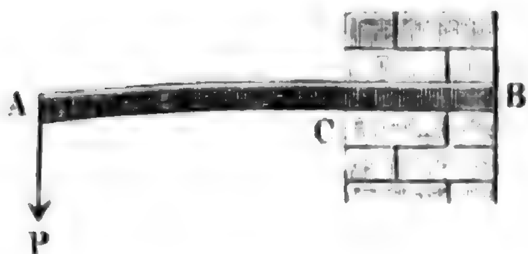
wobei b die äußere Breite, h die äußere Höhe, b_1 die Tiefe einer Höhlung und a_1 die Höhe derselben bezeichnen.

Verschiedenheit der Tragmodel. Die Formel §. 23

$$P = \frac{W\,T}{e\,l}$$

für die Tragkraft eines an einem Ende eingemauerten Balkens A, Fig. 380,

Fig. 380.



hat nur dann eine allgemeine Gültigkeit, wenn die Ausdehnung σ und die Compression σ_1 des Körpers bei der Elasticitätsgrenze einander gleich sind, weil nur dann der Tragmodul

$$T = \sigma E$$

für die Ausdehnung dem Tragmodul

$$T_1 = \sigma_1 E$$

für die Compression gleichzusetzen ist. Bei dem Schmiedeeisen scheint diese Gleichheit so ziemlich, und bei dem Holze wenigstens annähernd vorzukommen; ganz anders ist aber dieses Verhältniß bei dem Gußeisen; dasselbe hat nicht allein einen viel größeren Modul der Festigkeit für das Zerdrücken als für das Zerreißen, sondern es ist auch bei der allerdings nur ungefähr anzugebenden Elasticitätsgrenze die Compression σ_1 circa 2 mal so groß als die Ausdehnung σ, und folglich auch der Tragmodul T_1 des Zerdrückens 2 mal so groß als der Tragmodul T des Zerreißens.

Um die Tragkraft des Gußeisens oder eines anderen Körpers zu finden, bei welchem eine ansehnliche Verschiedenheit zwischen σ und σ_1 oder T und T_1 statt hat, muß man zuerst untersuchen, welcher von den Quotienten $\frac{T}{e}$ und $\frac{T_1}{e_1}$ der kleinere ist, und diesen letzteren statt $\frac{T}{e}$ in die Formel

$$P = \frac{W\,T}{e\,l}$$

einsetzen.

Die andere Balkenhälfte, welcher das größere Verhältniß $\left(\frac{T}{e}\text{ oder }\frac{T_1}{e_1}\right)$ entspricht, ist natürlich dann noch unter der Elasticitätsgrenze gespannt, und hat daher einen unnöthig großen Querschnitt. Um diesen und folglich auch den Querschnitt des ganzen Körpers auf das Minimum zurückzuführen und daher so viel wie möglich an Material zu ersparen, ist nöthig, daß beide

Balkenhälften gleichzeitig bis zu der Elasticitätsgrenze ausgedehnt und comprimirt werden. Deshalb soll man dem Querschnitt des Balkens eine solche Form und eine solche Lage geben, daß

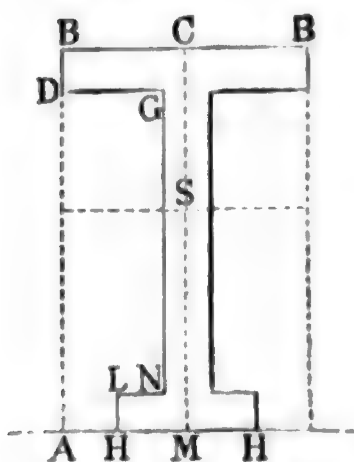
$$\frac{T}{e} = \frac{T_1}{e_1} \text{ oder } \frac{e}{e_1} = \frac{T}{T_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1}$$

ausfällt, daß also das Verhältniß zwischen den größten Abständen e und e_1 der Fasern zu beiden Seiten der neutralen Axe gleich ist dem Verhältnisse zwischen den Tragmodeln T und T_1 des Zerreißens und Zerdrückens.

Wenn also beim Gußeisen $\frac{T_1}{T} = \frac{\sigma_1}{\sigma} = 2$ ist (s. §. 211), so müssen wir hiernach den Querschnitt eines gußeisernen Balkens so gestalten und so legen, daß $\frac{e_1}{e}$ so viel wie möglich $= 2$ ausfällt. Ein dreiseitiger Balken aus Gußeisen ist folglich so zu legen, daß die Hälfte desselben mit dem dreiseitigen Querschnitte comprimirt, und dagegen die mit dem trapezoidalen Querschnitte ausgedehnt wird. Legt man hierbei die eine Seitenfläche des Prismas horizontal oder rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung, so hat man $\frac{e_1}{e} = \frac{2}{1}$, während bei der umgekehrten Lage, $\frac{e_1}{e}$ nur $= \frac{1}{2}$ ist.

Bei einem gußeisernen Träger, dessen Querschnitt beinahe die Form eines T hat, wie z. B. Fig. 381 vor Augen führt, läßt sich unter gewissen Voraussetzungen das Verhältniß $\frac{e_1}{e} = 2$ ebenfalls vollkommen herstellen.

Fig. 381.



Es sei die ganze Höhe dieses Balkens, $AB = h$, und die Breite seiner Kopfplatte, $BB = 2BC = b$, ferner die Höhe seiner Höhlungen zur Seite:

$$\overline{AD} = h_1 = \mu_1 h,$$

und die Breite derselben:

$$2\overline{DG} = b_1 = \nu_1 b;$$

endlich sei die Höhe einer Fußplatte:

$$\overline{HL} = h_2 = \mu_2 h$$

und die Ausladung derselben zu beiden Seiten:

$$2\overline{LN} = b_2 = \nu_2 b.$$

Dann ist der Abstand des Schwerpunktes S des ganzen Querschnittes von der untersten Kante HH:

$$\overline{MS} = e_1 = \frac{1}{2} \frac{b h^2 - b_1 h_1^2 + b_2 h_2^2}{bh - b_1 h_1 + b_2 h_2}$$

$$= \frac{h}{2} \left(\frac{1 - \mu_1^2 \nu_1 + \mu_2^2 \nu_2}{1 - \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2} \right) \text{ (s. §. 105 und §. 109).}$$

Setzt man nun $\frac{e_1}{e} = 2$, sowie $e + e_1 = h$, so erhält man $e = \frac{1}{3}$ und $e_1 = \frac{2}{3}\, h$, und daher die Bestimmungsgleichung

$$\frac{2}{3}\, h = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \mu_1^2 \nu_1 + \mu_2^2 \nu_2}{1 - \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2},$$

welche sich in folgende umgestalten läßt:

$$\mu_1 \nu_1 (4 - 3\mu_1) - \mu_2 \nu_2 (4 - 3\mu_2) = 1.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man aus drei der Dimensionsverhältnisse μ_1, ν_1, μ_2 und ν_2 das vierte berechnen. Nimmt man $\mu_2 = 0$ an, so hat man es mit einem Querprofile wie Fig. 382 zu thun, dessen Biegungsmoment schon oben (§. 228) bestimmt worden ist, und für welches wir

$$\mu_1 \nu_1 (4 - 3\mu_1) = 1 \text{ haben.}$$

Anmerkung. Die Herren Moll und Reuleaux (s. deren Schrift: „Die Festigkeit der Materialien, Braunschweig 1853") empfehlen zur Bestimmung zweckmäßiger Querschnittsformen die Anwendung einer Wage, deren Wagbalken aus einer Tafel besteht, auf welche die in Blech ausgeschnittene Querschnittsform so gelegt wird, daß ihre, durch das Verhältniß $\frac{e}{e_1} = \frac{\sigma}{\sigma_1}$ bestimmte neutrale Axe genau über die Drehungskante der Wage zu liegen kommt. Wenn nun hierbei die Wage einspielt, so hat diese Schablone eine zweckentsprechende Form; außerdem ist dieselbe durch Abschneiden an den Flanken so lange umzugestalten, bis das Einspielen bei der vorgeschriebenen Lage eintritt.

Beispiel 1. Wenn bei einem gußeisernen Balken, dessen Querschnitt die Gestalt Fig. 381 hat, die Höhenverhältnisse

$$\mu_1 = \frac{h_1}{h} = \frac{7}{8} \text{ und } \mu_2 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

sind, so hat man für dessen Breitenverhältnisse die Bedingung:

$$\frac{7}{8}\left(4 - \frac{21}{8}\right)\nu_1 - \frac{1}{8}\left(4 - \frac{3}{8}\right)\nu_2 = 1, \text{ d. i.:}$$

$$77\,\nu_1 - 29\,\nu_2 = 64.$$

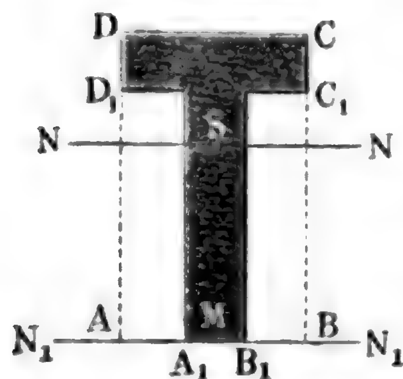
Läßt man die Fußplatte ganz weg, so ist $\nu_2 = 0$, und daher:

$$\nu_1 = \frac{b_1}{b} = \frac{64}{77} = 0{,}831,$$

also die Dicke des eigentlichen Trägers, $b - b_1 = 0{,}169\, b$.

Nimmt man hingegen $\nu_2 = \frac{\nu_1}{6}$ an, so ist $\left(77 - \frac{29}{6}\right)\nu_1 = 64$, folglich

Fig. 382.



$\nu_1 = 0{,}887$ und $\nu_2 = \frac{1}{6} \cdot 0{,}887 = 0{,}148$. Für $h = 8$ Zoll und $b = 5\frac{1}{2}$ Zoll ist daher $h_1 = 7$ Zoll, $h_2 = 1$ Zoll, $b_1 = 5$ Zoll und $b_2 = \frac{5}{6}$ Zoll; so daß die Dicke der Fuß- und Kopfplatte 1 Zoll, die des Mittelstückes aber nur $\frac{1}{2}$ Zoll beträgt.

Beispiel 2. Für den Balken mit dem Tförmigen Querschnitt, Fig. 382, ist (§. 228)

$$W = \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\, b b_1\, h h_1 (h - h_1)^2}{12\,(b h - b_1 h_1)}$$

gefunden worden und

$$e_1 = \frac{1}{2}\,\frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{b h - b_1 h_1}$$

zu setzen, woraus für den Fall, daß er an einem Ende festgehalten und am anderen belastet wird,

$$Pl = \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4 b b_1 h h_1 (h - h_1)^2}{b h^2 - b_1 h_1^2}\,\frac{T_1}{6} \text{ folgt.}$$

Setzen wir nun hierin $h_1 = \mu_1 h$, und $b_1 = \nu_1 b$ ein, so erhalten wir:

$$Pl = \frac{(1 - \mu_1^2 \nu_1)^2 - 4 \mu_1 \nu_1 (1 - \mu_1)^2}{1 - \mu_1^2 \nu_1}\,\frac{b h^2}{6}\,T_1;$$

daher, wenn der Balken aus Gußeisen besteht und $\mu_1 = {}^6/_7$ und $\nu_1 = {}^7/_8$ eingeführt wird:

$$Pl = \frac{({}^5/_{14})^2 - 3\,({}^1/_7)^2}{{}^5/_{14}} \cdot \frac{b h^2}{6}\,T_1 = \frac{13}{70} \cdot \frac{b h^2}{6}\,T_1.$$

Wäre z. B. $h = 10$ und $b = 8$ Zoll, und folglich

$h_1 = {}^6/_7 \,.\, 10 = {}^{60}/_7 = 8^4/_7,\; h - h_1 = 1^3/_7$ Zoll, und

$b_1 = {}^7/_8 \,.\, 8 = 7$, sowie $b - b_1 = 1$ Zoll,

so hätte man:

$$Pl = \frac{13}{70} \cdot \frac{8\,.\,100}{6} \cdot T_1 = \frac{520}{21}\,T_1.$$

Führt man nun noch $T_1 = 18000$ Pfund ein, so stellt sich das Trägmoment

$$Pl = \frac{520}{21} \cdot 18000 = 445700 \text{ Neupfund}$$

heraus, wofür zur Sicherheit = 150000 Neupfund zu setzen sein möchte.

Hat dieser gußeiserne Balken eine Länge von 100 Zoll, so ist hiernach seine Tragkraft am freien Ende:

$$P = \frac{150000}{100} = 1500 \text{ Pfund.}$$

Liegt der Balken an beiden Enden auf und trägt er die Last in der Mitte, so ist dagegen:

$$P = 4\,.\,1500 = 6000 \text{ Pfund.}$$

Während im ersteren Falle die Querrippe oben liegen muß, hat man im zweiten Falle dieselbe unten zu legen.

§. 238 **Verschiedenheit der Festigkeitsmodel.** Wenn man den Elasticitäts- und den Tragmodul durch Biegungsversuche, und zwar mittels der Formeln

$$E = \frac{Pl\,r}{W} \text{ und } T = \frac{Pl\,e}{W}$$

bestimmt, so stößt man in der Regel auf eine vollkommen genügende Uebereinstimmung zwischen den so gefundenen Werthen von E und T und den durch directe Ausdehnungs- und Compressionsversuche mittels der Formeln

$$E = \frac{Pl}{\lambda F} \text{ und } T = \frac{P}{F}$$

bestimmten Werthen dieser Model (§. 212).

Anders ist aber das Verhältniß bei den Festigkeitsmodeln. Da der Elasticitätsmodul E außerhalb der Elasticitätsgrenze nicht mehr als constant

angesehen werden kann, sondern immer mehr und mehr abnimmt, je weiter die Ausdehnung oder Compression gesteigert wird, und da ferner auch dann der Elasticitätsmodul für die Ausdehnung nicht mehr gleich ist dem für die Zusammendrückung, so sind die Spannungen der über einander liegenden Fasern des Körpers nicht mehr den Abständen von der neutralen Axe proportional zu setzen, und es geht folglich auch die neutrale Axe nicht mehr durch den Schwerpunkt des Querschnittes; es nehmen also die Abstände e und e_1 ganz andere Werthe an als bei der Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze.

Bedeutet W das Maß des Biegungsmomentes für die ausgedehnte Hälfte des Balkens, sowie E den mittleren Elasticitätsmodul für dieselbe, und bezeichnet W_1 dieses Maß für die zusammengedrückte Hälfte, sowie E_1 ihren mittleren Elasticitätsmodul, so haben wir für größere Biegungen das Moment der Biegungskraft:

$$Pl = \frac{WE + W_1E_1}{r},$$

also wenn wir, wenigstens annähernd, $\frac{K}{E} = \frac{e}{r}$ und $\frac{K_1}{E_1} = \frac{e_1}{r}$ setzen, wobei K und K_1 die Festigkeitsmodel für das Zerreißen und für das Zerdrücken bezeichnen, das Moment zum Abbrechen:

$$Pl \text{ entweder } = \frac{K(WE + W_1E_1)}{Ee} \text{ oder } = \frac{K_1(WE + W_1E_1)}{E_1 e_1}.$$

Bezeichnen wir ferner das statische Moment des Querschnittes des ausgedehnten Körperstückes in Hinsicht auf die neutrale Axe durch M, und das des Querschnittes des comprimirten Körperstückes in Hinsicht auf eben diese Axe durch M_1, so haben wir noch die Spannkraft der einen Hälfte, $= \frac{ME}{r}$ und die der anderen, $= \frac{M_1 E_1}{r}$, und es ist, da beide Kräfte ein Paar bilden müssen,

$$ME = M_1 E_1$$

zu setzen. Diese Gleichung dient zur Bestimmung der neutralen Axe mittels ihrer Abstände e und e_1.

Für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte ist z. B.

$$M = \frac{be^2}{2} \text{ und } M_1 = \frac{be_1^2}{2},$$

daher

$$Ee^2 = E_1 e_1^2$$

anzunehmen. Es ergiebt sich hiernach:

$$e_1 = e\sqrt{\frac{E}{E_1}},$$

und setzt man diesen Werth in die Gleichung $e + e_1 = h$ ein, so folgt:

$$e = \frac{h\sqrt{E_1}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}} \text{ und } e_1 = \frac{h\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}}.$$

Die Maße der Biegungsmomente sind in diesem Falle:

$$W \frac{\varepsilon}{\varepsilon \partial q} = \text{ und } W_1 = \frac{b e_1^3}{3};$$

folglich ergiebt sich

$$Pl = \frac{b}{3r}(Ee^3 + E_1 e_1^3 = \frac{b h^3}{3r}\left(\frac{E E_1 \sqrt{E_1} + E E_1 \sqrt{E}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^3}\right)$$

$$= \frac{b h^3}{3r} \cdot \frac{E E_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2},$$

und daher das Moment zum Abbrechen:

$$Pl \text{ entweder} = \frac{K \,.\, b h^3}{3 E e} \cdot \frac{E E_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2} = \frac{b h^2}{3} \cdot K \cdot \frac{\sqrt{E_1}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}}$$

$$\text{oder} = \frac{b h^2}{3} K_1 \cdot \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_1}}.$$

Für $E_1 = E$ erhält man natürlich, wie oben:

$$Pl = \frac{b h^2}{6} K.$$

Bei Holz und Schmiedeeisen ist so ziemlich $E = E_1$, und daher annähernd

$$Pl = \frac{b h^2}{6} K,$$

wobei man für K den kleineren der beiden Festigkeitsmodel zu setzen hat.

Beim Gußeisen ist jedenfalls E_1 viel größer als E, daher nähert sich hier Pl dem Werthe $\frac{b h^2}{3} K$, wenn K den Festigkeitsmodul für das Zerreißen ausdrückt.

Beim Holz hätte man hiernach im Mittel den Festigkeitsmodul für das Zerdrücken (s. Tabelle, S. 371), also $K_1 = 480$ Kilogramm $= 6500$ Pfund einzusetzen, was mit den Versuchen von Eytelwein, Gerstner u. s. w. sehr gut übereinstimmt. Ebenso ist für schmiedeeiserne Balken statt K, der Festigkeitsmodul für das Zerdrücken, d. i.

$$K_1 = 2200 \text{ Kilogramm} = 30000 \text{ Pfund}$$

einzuführen. Während unter übrigens gleichen Verhältnissen das Holz und Schmiedeeisen durch Zerdrücken zerbricht, gelangt das Gußeisen mittels des Zerreißens zum Bruche. Wäre bei demselben noch K nahe $= K_1$, so würde

folglich für gußeiserne Träger in obige Formel der Modul für das Zerreißen, d. i.

$$K = 1300 \text{ Kilogramm} = 17800 \text{ Pfund}$$

einzusetzen sein; vielfachen Versuchen zufolge ist aber hier

$$K = 3200 \text{ Kilogramm} = 45000 \text{ Pfund},$$

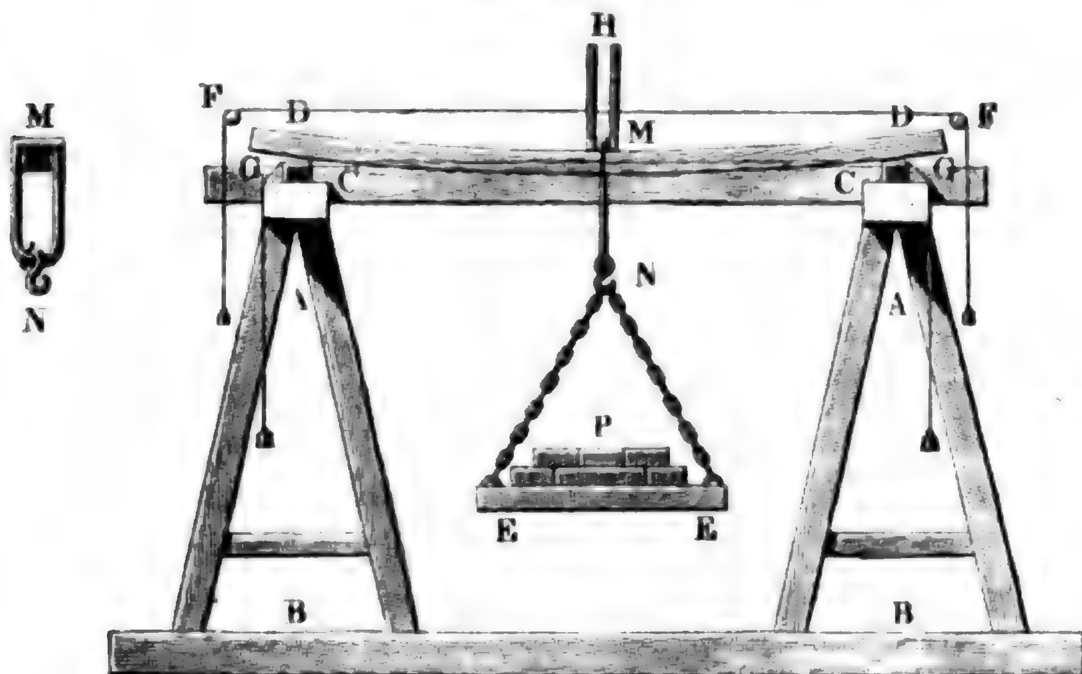
d. i. ziemlich das Mittel zwischen dem Modul des Zerreißens und dem des Zerdrückens zu setzen.

Diese große Abweichung hat jedenfalls nicht allein in der Verschiedenheit zwischen den Elasticitätsmodeln E und E_1, sondern auch in der körnigen Structur des Gußeisens seinen Grund, vermöge deren die Annahme, daß der Balken gleichsam aus einem Bündel von Ruthen besteht, nicht zulässig ist.

Uebrigens wirken auf die Elasticität, Tragkraft und Festigkeit der Körper noch vielerlei Umstände ein, welche beträchtliche Abweichungen in den Ergebnissen der Erfahrungen zur Folge haben. So ist z. B. das Holz am Kerne und an der Wurzel stärker als am Splint und an dem Gipfel; auch trägt das Holz mehr, wenn die Kraft parallel zu den Jahresringen wirkt als winkelrecht darauf; endlich haben noch der Erdboden und die Lage des Ortes, wo das Holz gewachsen ist, Temperatur, Zustand der Trockenheit, Alter u. s. w. Einfluß auf den Widerstand der Hölzer. Endlich fällt die Biegung, welche ein Körper, nachdem er längere Zeit belastet gewesen ist, erleidet, immer etwas größer aus, als die Biegung, welche gleich anfangs beim Auflegen der Last eintritt.

Biegungs- und Brechungsversuche. Die Versuche über die Elasticität und Festigkeit wurden von Eytelwein und von Gerstner mit einem in Fig. 383 abgebildeten Apparate angestellt. AB und AB sind zwei Rüstböcke, C und C darauf befestigte Eisenlager, und DD ist der darüber liegende, zur Untersuchung bestimmte parallelepipedische Körper. Die Last P §. 239

Fig. 383.



zum Biegen des Körpers liegt auf einer Wagschale EE, die an einem Bügel MN hängt, dessen oberer und abgerundeter Theil in der Mitte M des Balkens aufliegt. Um die einer Belastung P entsprechende Durchbiegung a zu finden, wendete Eytelwein zwei feine Horizontalfäden FF und GG, sowie eine in der Mitte auf dem Balken aufsitzende Scala MH an. Gerstner hingegen bediente sich eines langen einarmigen Fühlhebels, der nahe bei seinem Drehpunkte in M auflag und mit seinem Ende, wie der Zeiger einer Uhr, an einer verticalen Scala die Senkung von M verfünfzehnfacht angab. Lagerhjelm wendete einen Zeiger an, der mittels eines Fadens und einer Rolle in Bewegung gesetzt wurde, und die Biegung des Balkens auf einer eingetheilten Kreisscheibe vergrößert angab.

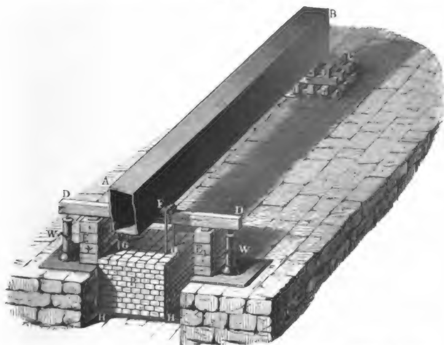
Andere, wie z. B. Morin, bedienten sich zur Ausmittelung der Durchbiegung (a) eines Kathetometers, welches auf eine in der Mitte des Balkens angebrachte Spitze gerichtet war; bei den englischen Versuchen ist dagegen zur Ausmessung dieser Größe ein langes Keilmaß angewendet worden, welches in der Mitte des Balkens zwischen demselben und einer festen Stütze eingeschoben wurde. Um die Genauigkeit in der Messung von a durch das Nachgeben der Stützen nicht zu beeinträchtigen, legt man entweder die Balken während des Versuchs auf harte steinerne Unterlagen (Morin), oder man führt ein langes Lineal in einem gewissen Abstande über dem Balken hin, befestigt dasselbe an seinen Enden mit den Enden des Balkens so, daß es sich nicht mit dem Balken biegen kann, und mißt nun bei jedem Versuche den Abstand zwischen der Mitte des gebogenen Balkens und der unteren Kante dieses Lineals (Fairbairn).

Die Art und Weise, wie Stephenson u. s. w. die Biegung und Festigkeit der hohlen Träger aus Eisenblech ermittelt hat, ist vorzüglich aus Fig. 384 zu ersehen. Die 75 Fuß lange Röhre AB, von welcher in der Figur das vordere Stück weggelassen ist, ruhete an beiden Enden, wie z. B. in C, auf Holzböcken auf, und wurde in der Mitte durch einen Balken DD unterstützt, welcher auf den Stempeln zweier Winden W, W aufruhete. Durch die Mitte des Röhrenträgers, und zwar nahe über dem Boden desselben, ging ein eiserner Querarm, wovon in der Figur nur das eine Ende F zu sehen ist, und über diesen waren zwei Gabeln G, G gelegt, an welchen die Schale HH zur Aufnahme der Gewichte P hing. Vor dem Versuche und während des Auflegens der Gewichte ruhte die ganze Last auf dem Balken DD, wurden aber die Stempel der Winden niedergelassen, so sank DD und legte sich auf die Unterlage E, E auf, während das nun durch P belastete Röhrenmittel AF ganz frei wurde, und eine der Last P entsprechende und mit einem Keilmaß zu messende Durchbiegung annehmen konnte.

Um bei Versuchen mit starken Trägern nicht sehr große Gewichte anhängen zu müssen, belastet man auch wohl den Balken nicht unmittelbar mit

Gewichten, sondern man läßt auf denselben den kürzeren Arm einer ungleicharmigen Wage wirken, deren längerer Arm durch Gewichte niedergezogen

Fig. 384.



wird. Zu diesem Zwecke ließ endlich Hodgkinson diese Hebelkraft nicht auf die Mitte des an den Enden unterstützten Balkens wirken, sondern er unterstützte den Balken in seiner Mitte, ließ diese Kraft an dem einen Ende des Balkens angreifen und befestigte das andere Ende desselben durch einen starken Bolzen mit dem Fundamente.

Durch die unter sehr verschiedenen Umständen und Verhältnissen und mit verschiedenen Stoffen, namentlich aber mit sehr verschiedenen Holz- und Eisengattungen angestellten Versuche ist in der Hauptsache eine Uebereinstimmung der im Vorstehenden entwickelten theoretischen Regeln mit der Erfahrung nachgewiesen worden. Was insbesondere das Zerbrechen parallelepipedischer Balken anlangt, so hat sich hierbei herausgestellt, daß das Holz und das Schmiedeeisen unter gleichen Umständen nur durch das Zerdrücken, das Gußeisen hingegen entweder durch das Zerreißen der äußersten Fasern beginnt, oder dadurch erfolgt, daß an der am stärksten gebogenen Stelle (in der Mitte) und zwar auf der comprimirten Seite, ein Keil ausbricht.

Auch hat man sich an parallelepipedischen Holzstäben mit Hülfe von Sägeschnitten, welche auf der comprimirten Seite angebracht und durch feste

Blättchen wieder ausgefüllt wurden, ferner mittelst einer Reihe von Querlinien, welche an den Seitenflächen dieses Balkens rechtwinkelig zur Längenaxe desselben gezogen waren, und endlich durch ein Paar dünne Stäbchen, wovon das eine längs der ausgedehnten und das andere längs der zusammengedrückten Seite dieses Balkens hinlief, von der Richtigkeit des in §. 214 vorausgesetzten Verhaltens der Fasern der gebogenen Körper überzeugen können.

§. 240 **Trag- und Festigkeitsmodel.** In der folgenden Tabelle sind die mittleren Werthe für die Elasticitäts-, Trag- und Festigkeitsmodel, wie sie aus den Biegungs- und Brechungsversuchen hervorgegangen sind, aufgezeichnet. Die ersteren weichen von denjenigen, welche durch Ausdehnungs- und Compressionsversuchen bestimmt worden sind, nicht ansehnlich ab; anders ist es aber, aus den oben (§. 238) angegebenen Gründen, mit den Festigkeitsmodeln. Von den beiden Werthen innerhalb einer Klammer { } drückt der obere den Modul im preußischen Maß (Neupfund auf den Quadratzoll) und der untere denselben im französischen Maß (in Kilogramm pro Quadratcentimeter) aus.

Tabelle

der Trag- und Festigkeitsmodel verschiedener Körper in Hinsicht auf das Biegen und Brechen.

Namen der Körper.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul T.	Festigkeitsmodul $K (K_1)$.
Laubholz	{ 1'230000 90000 }	3000 220	{ 9000 650 }
Nadelholz	{ 2'000000 150000 }	4100 300	{ 12000 900 }
Gußeisen	{ 16'400000 1'200000 }	10260 750	{ 43800 3200 }
Schmiedeeisen	{ 27'8000 2'000000 }	17000 1200	{ 31500 2300 }
Kalk- und Sandstein . .	—	—	{ 1700 124 }
Thonschiefer	—	—	{ 4800 350 }

Um mit Hülfe der Werthe in der vorstehenden Tabelle die Kräfte zu ermitteln, welche die Balken oder Träger mit Sicherheit auf die Dauer tragen

können, führt man in den oben gefundenen Formeln für die Tragkraft beim Holz:

statt T, entweder $\frac{1}{3}\,T$, oder statt K, $\frac{1}{10}\,K$,

ferner beim Gußeisen:

statt T, entweder $\frac{1}{2}\,T$, oder statt K, $\frac{1}{5}\,K$,

und beim Schmiedeeisen:

statt T, entweder $\frac{1}{2}\,T$, oder statt K, $\frac{1}{4}\,K$

als Sicherheitsmodel ein.

Hiernach möge in der Folge für Holz:

$T = 73$ Kilogramm $= 1000$ Pfund,

für Gußeisen:

$T = 510$ Kilogramm $= 7000$ Pfund,

und für Schmiedeeisen:

$T = 660$ Kilogramm $= 9000$ Pfund

gesetzt werden.

Diese Werthe gelten jedoch nicht für Wellen und andere Maschinentheile, welche wegen ihrer steten Bewegung und in Folge ihrer Abnutzung eine noch größere Sicherheit und daher die Annahme kleinerer Werthe für T fordern.

Setzen wir diese Werthe in den Formeln

$$Pl = bh^2\frac{T}{6} \text{ und } Pl = \pi r^3\frac{T}{4} = \pi d^3\frac{T}{32}$$

für die parallelepipedischen Balken und für die cylindrischen Träger ein, so erhalten wir folgende praktische Formeln.

Für Holz:

$Pl = 167\,bh^2 = 785\,r^3 = 98\,d^3$ Zollpfund.

Für Gußeisen:

$Pl = 1167\,bh^2 = 5500\,r^3 = 687\,d^3$ Zollpfund,

und für Schmiedeeisen den größeren Werth:

$Pl = 1500\,bh^2 = 7070\,r^3 = 884\,d^3$ Zollpfund.

Wenn man nach Morin, und englischen Constructionen entsprechend, beim Gußeisen

statt T, $\frac{K}{4}$ bis $\frac{K}{5} = 750$ Kilogramm

und beim Schmiedeeisen

statt T, $\frac{K}{5} = 600$ Kilogramm

einsetzt, so erhält man für Gußeisen:

$Pl = 1710\,bh^2 = 8060\,r^3 = 1008\,d^3$ Zollpfund,

und dagegen für Schmiedeeisen den kleineren Werth:

$Pl = 1370\,bh^2 = 6500\,r^3 = 810\,d^3$ Zollpfund.

Hängt die Last Q nicht am Ende des Balkens, sondern ist dieselbe gleichmäßig auf dem Balken vertheilt, so ist der Hebelarm derselben nicht l, sondern $\frac{l}{2}$, und folglich auch das Moment nur halb so groß, also:

$$\frac{Q\,l}{2} = \frac{W\,T}{e}, \text{ oder } Q\,l = 2 \cdot \frac{W\,T}{e} \text{ zu setzen.}$$

Ruht ferner der Balken an beiden Enden frei auf (s. Fig. 337) und wirkt die Last P in der Mitte zwischen beiden Stützen, deren Entfernung von einander $= l$ ist, so ist die Kraft an jedem Ende $= \frac{P}{2}$ und der Hebelarm derselben $= \frac{l}{2}$, also ihr Moment:

$$\frac{P\,l}{4} = \frac{W\,T}{e} \text{ und } P\,l = 4\,\frac{W\,T}{e}.$$

Es trägt also unter übrigens gleichen Verhältnissen der Balken im zweiten Falle doppelt, und im dritten vier Mal so viel als im ersten Falle.

Ist endlich der an den beiden Enden aufliegende Balken auf seiner ganzen Länge gleichmäßig belastet (Fig. 348), so wird er erstens von einer Kraft $\frac{Q}{2}$ von unten nach oben gebogen, welche den Hebelarm $\frac{l}{2}$, also das Moment $\frac{Q\,l}{4}$ hat, und zweitens von einer Kraft $\frac{Q}{2}$ von oben nach unten, deren Angriffspunkt der Schwerpunkt je einer Lasthälfte, deren Hebelarm folglich $= \frac{l}{4}$ und Moment $= \frac{Q\,l}{8}$ ist. Es resultirt daher das Moment, mit welchem jedes Ende des Balkens von unten nach oben gebogen wird:

$$= \frac{Q\,l}{4} - \frac{Q\,l}{8} = \frac{Q\,l}{8},$$

und es ist folglich $Q\,l = 8\,\frac{W\,T}{e}$, also das Tragvermögen des Balkens unter diesen Umständen 8 Mal so groß als im ersten Falle.

Während bei einem parallelepipedischen Balken im ersten Falle

$P\,l = b\,h^2\,\frac{T}{6}$ ist, hat man im zweiten Falle:

$Q\,l = 2\,.\,b\,h^2\,\frac{T}{6}$, im dritten:

$P\,l = 4\,.\,b\,h^2\,\frac{T}{6}$ und im vierten:

$Q\,l = 8\,.\,b\,h^2\,\frac{T}{6}$ zu setzen, wobei b die Breite und h die Höhe des rectangulären Balkenquerschnittes bezeichnen.

Beispiele. 1) Welche Last kann ein an seinen Enden unterstützter Balken aus Fichtenholz tragen, wenn derselbe die Breite $b = 7$ und die Höhe $h = 9$ Zoll hat, und wenn der Angriffspunkt dieser Last von jeder Stütze 10 Fuß absteht? Es ist hier $l = 20 . 12 = 240$ Zoll, daher nach der obigen Formel:

$$P l = 4 . 167\ b h^2 = 4 . 167 . 7 . 81,$$

und die gesuchte Tragkraft:

$$P = \frac{4676 . 81}{240} = 58{,}45 . 27 = 1578 \text{ Pfund.}$$

2) Ein an einem Ende eingemauerter cylindrischer Stempel aus Holz soll auf seiner ganzen Länge $l = 5$ Fuß eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 10000$ Pfund tragen, welche Stärke muß derselbe besitzen?

Es ist hier:

$$Q l = 2 \cdot \frac{\pi r^3 T}{4} = 2 . 785 . r^3,$$

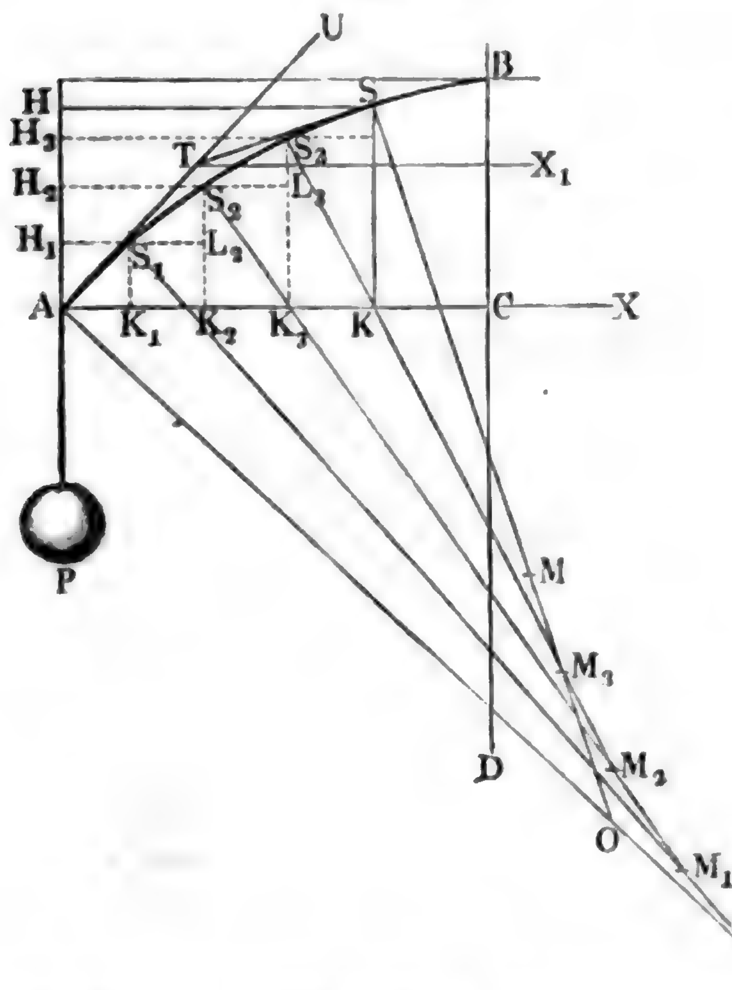
folglich umgekehrt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{Q l}{1570}} = \sqrt[3]{\frac{10000 . 60}{1570}} = \sqrt[3]{382} = 7{,}26 \text{ Zoll},$$

also die gesuchte Stempelstärke $= 2 r = 14{,}52$ Zoll.

Relative Durchbiegung. Bei beweglichen Maschinentheilen, wie §. 241
z. B. bei Wellen, Radaxen u. s. w., können Biegungen dadurch nachtheilig auf den Gang der Maschinen wirken, daß sie entweder zu Schwingungen und Erschütterungen der Mechanismen oder zu einem unvollkommenen Eingreifen der letzteren in einander Veranlassung geben, und deshalb bestimmt man in gewissen Fällen die Querdimensionen dieser Maschinentheile nicht nach dem Tragmodul, sondern nach der Durchbiegung, indem man festsetzt, daß diese ein bestimmter sehr kleiner Theil der ganzen Länge des Körpers oder Maschinentheiles sei.

Fig. 385.



Wir haben oben (§. 217) für einen an einem Ende B festgehaltenen und am anderen Ende A belasteten prismatischen Körper $A S B$, Fig. 385, die Durchbiegung

$$BC = a = \frac{Pl^3}{3WE}$$

gefunden, und können also ihr gegebenes Verhältniß zur Länge AB:

$$\theta = \frac{a}{l} = \frac{Pl^2}{3WE},$$

daher umgekehrt:

$$Pl^2 = 3\theta WE$$

setzen.

Für einen parallelepipedischen Balken hat man hiernach

$$Pl^2 = 3\theta \frac{bh^3}{12} E = \frac{\theta bh^3 E}{4},$$

und für einen cylindrischen

$$Pl^2 = 3\theta \frac{\pi r^4}{4} E = \frac{3}{4} \pi \theta r^4 E.$$

In der Regel ist das relative Biegungsverhältniß $\theta = \frac{a}{l} = \frac{1}{500}$ zulässig, und daher

$$1)\ Pl^2 = \frac{1}{2000} bh^3 E = \frac{3\pi}{2000} r^4 E$$

zu setzen.

Führt man nun für Holz den Elasticitätsmodul $E = 1'600000$ ein, so erhält man für dasselbe:

$$Pl^2 = 800\, bh^3 = 7540\, r^4.$$

Für Gußeisen hat man $E = 15'000000$ Pfund, und daher

$$Pl^2 = 7500\, bh^3 = 70700\, r^4,$$

und für Schmiedeeisen, $E = 22'000000$ Pfund, daher

$$Pl^2 = 11000\, bh^3 = 103700\, r^4.$$

Für die Biegung bis zur Elasticitätsgrenze ist dagegen (§. 235):

$$2)\ Pl = \frac{WT}{e}, \text{ oder } Pl^2 = \frac{WTl}{e};$$

setzt man daher beide Ausdrücke für Pl^2 einander gleich, so erhält man:

$$\frac{WTl}{e} = 3\theta WE,$$

folglich das Verhältniß der Länge l des Balkens zum Maximalabstande e, wobei die Durchbiegung und die Spannung die Grenzwerthe θ und T zugleich erreichen:

$$\frac{l}{e} = \frac{3\theta E}{T} = \frac{3\theta}{\sigma},$$

also für parallelepipedische Körper

$$\frac{l}{h} = {}^3/_2 \, \frac{\theta}{\sigma}$$

und für cylindrische Körper

$$\frac{l}{r} = \frac{3\,\theta}{\sigma} \text{ also } \frac{l}{d} \text{ ebenfalls} = {}^3/_2 \, \frac{\theta}{\sigma},$$

wobei σ die der Spannung T entsprechende Ausdehnung oder Zusammendrückung bei der Elasticitätsgrenze bezeichnet.

Ist $\frac{l}{e} < \frac{3\,\theta}{\sigma}$, so findet man durch die erste Formel den größeren Werth für $P\,l$, und ist hingegen $\frac{l}{e} > \frac{3\,\theta}{\sigma}$, so erhält man durch die zweite Formel das größere Kraftmoment. Deshalb giebt bei einem gegebenen Kraftmomente (Pl) im ersteren Falle, wo also der Körper noch nicht die Länge $l = \left(\frac{3\,\theta}{\sigma}\right) e$ hat, die Formel

$$\frac{W\,T}{e} = P\,l,$$

und im zweiten Falle, wo $l > \left(\frac{3\,\theta}{\sigma}\right) e$ ist, die Formel

$$3\,\theta\,W\,E = P\,l^2$$

die größeren Querschnittsdimensionen.

Setzt man in dem Grenzverhältnisse $\frac{l}{e} = \frac{3\,\theta}{\sigma}$, $\theta = \frac{1}{500}$, so erhält man für alle Stoffe $\frac{l}{e} = \frac{3}{500\,\sigma} = \frac{0{,}006}{\sigma}$, daher für Holz, wo $\sigma = \frac{1}{600}$ zu setzen ist, $\frac{l}{e} = 0{,}006 \,.\, 600 = 3{,}6$, und insbesondere für einen prismatischen Balken aus Holz:

$$\frac{l}{h} \text{ sowie auch } \frac{l}{d} = \frac{18}{10} = 1{,}8.$$

Nimmt man für Guß- und Schmiedeeisen $\sigma = \frac{1}{1500}$ an, so ergiebt sich für diese Stoffe

$$\frac{l}{e} = \frac{3\,.\,1500}{500} = 9, \text{ und daher}$$

$$\frac{l}{h} \text{ sowie } \frac{l}{d} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Die Formel

$$P\,l^2 = \frac{b\,h^3}{2000}\,E = \frac{3\,\pi\,r^4\,E}{2000}$$

gilt natürlich nur für den Normalfall, wo der Körper an einem Ende belastet und am anderen Ende festgeklemmt ist. Bei einer gleichmäßigen Belastung

durch Q hat man (nach §. 223) statt P, $^3/_8\, Q$ einzusetzen; ruht ferner der Körper an beiden Enden auf, und trägt er die Last in seiner Mitte, so ist ferner statt P, $\frac{P}{2}$, und statt l, $\frac{l}{2}$, also:

$$P l^2 = 8 \cdot \frac{b h^3}{2000} E = 8 \cdot \frac{3 \pi r^4 E}{2000}$$

zu setzen, und ist bei dieser Auflagerung die Last Q gleichmäßig vertheilt, so hat man statt P, $\frac{5\,Q}{8}$ einzuführen.

Beispiele. 1) Welche Last trägt bei der Durchbiegung $\theta = {}^1/_{500}$, ein hölzerner Balken in seiner Mitte, wenn er an beiden Enden aufliegt, und wenn seine Breite $b = 7$, seine Höhe $h = 9$ Zoll und der Abstand seiner Stützen von einander, $l = 20$ Fuß beträgt? Es ist hier:

$$P = 8 \cdot \frac{800\, b\, h^3}{l^2} = \frac{6400 \,.\, 7 \,.\, 9^3}{(20 \,.\, 12)^2} = 7 \,.\, 9^2 = 567 \text{ Pfund};$$

während im vorigen Paragraphen, unter der Voraussetzung, daß der Balken bis zur Elasticitätsgrenze gebogen wird, $P = 1578$ Pfund gefunden wurde.

2) Wie hoch und breit ist ein an beiden Enden aufruhender gußeiserner Träger zu machen, welcher bei dem Dimensionsverhältnisse $\frac{h}{b} = 4$, auf eine Länge von 8 Fuß eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 4000$ Pfund trägt? Unter der letzten Voraussetzung ist hier:

$$^5/_8\; Q\, l^2 = 8 \,.\, 7500\; b\, h^3,$$

d. i.:

$$^5/_8 \,.\, 4000 \,.\, 8^2 \,.\, 12^2 = 8 \,.\, 7500\, \frac{h^4}{4}, \text{ oder } h^4 = 4^4 \,.\, 6,$$

folglich:

$$h = 4 \sqrt[4]{6} = 1{,}565 \,.\, 4 = 6{,}26 \text{ Zoll}$$

$$b = \frac{h}{4} = 1{,}565 \text{ Zoll}.$$

Nach der Formel des vorigen Paragraphen wäre

$$Q\, l = 8 \,.\, 1167\; b\, h^2, \text{ oder } 4000 \,.\, 8 \,.\, 12 = 8 \,.\, 1167 \cdot \frac{h^3}{4},$$

daher die erforderliche Höhe:

$$h = 4 \sqrt[3]{\frac{3000}{1167}} = 4 \,.\, 1{,}37 = 5{,}48 \text{ Zoll},$$

und die Breite des Balkens:

$$b = \frac{h}{4} = 1{,}37 \text{ Zoll}.$$

242 **Tragmomente.** Aus dem Ausdrucke

$$P\, l = b\, h^2\, \frac{T}{6}$$

für das Tragmoment eines parallelepipedischen Balkens ersieht man, daß dieses Moment wie die einfache Breite b und wie das Quadrat der Höhe h und daß die Tragkraft

$$P = \frac{b\,h^2}{l}\,\frac{T}{6},$$

überdies noch umgekehrt wie die Länge (l) dieses Körpers wächst, daß also bei einem solchen Balken die Höhe einen größeren Einfluß auf die Haltbarkeit desselben hat als die Breite. Ein Balken, welcher doppelt so breit als ein anderer ist, trägt also hiernach nur doppelt so viel als dieser oder auch so viel als zwei solche Balken neben einander zusammen; ein Balken von der doppelten Höhe trägt hingegen $(2)^2 = 4$ mal so viel als ein Balken von der einfachen Breite und einfachen Höhe. Deshalb giebt man auch den parallelepipedischen Balken mehr Höhe als Breite, oder legt denselben stets auf die schmale Seite, oder giebt vielmehr dieser Seite eine rechtwinkelige und der breiten Seite eine parallele Richtung zur Kraft (P).

Da $b\,h$ den Querschnitt F des Baltens ausdrückt, so hat man auch

$$P\,l = F\,h\,\frac{T}{6};$$

es ist hiernach das Tragmoment eines Körpers bei gleichem Querschnitte und also auch bei gleicher Masse oder gleichem Gewichte, der Höhe desselben einfach proportional. Sind z. B. b und h die Breite und Höhe des einen Körpers, und dagegen $\frac{b}{3}$ und $3\,h$ die des anderen Körpers, ist also $F = \frac{b}{3} \cdot 3\,h = b\,h$ der Inhalt ihres Querschnittes, und haben also auch beide Körper bei übrigens gleichen Verhältnissen einerlei Gewicht, so trägt dennoch der letztere 3 mal so viel als der erstere.

Ist $b = h$, hat also der Balken einen quadratischen Querschnitt, so kann man das Tragmoment desselben noch dadurch herabziehen, daß man der Diagonale desselben eine aufrechte Lage giebt. Es bleibt hierbei, wie wir aus §. 230 wissen, W unverändert $= \frac{b\,h^3}{12} = \frac{b^4}{12}$, während dagegen e gleich der halben Diagonale, d. i. $\frac{1}{2}\,b\sqrt{2} = b\sqrt{\frac{1}{2}}$ wird. Deshalb ist dann:

$$P\,l = \frac{b^4}{12\,b\sqrt{\frac{1}{2}}}\,T = b^3\,\frac{T}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707\,b^3\,\frac{T}{6},$$

während bei Auflagerung mittels der Seiten, $P\,l = b^3\,\frac{T}{6}$ ausfällt. S. §. 236.

Ganz gleiche Verhältnisse wie beim parallelepipedischen Balken kommen auch bei dem Balken mit elliptischem Querschnitte vor. Es ist hier (nach §. 231) $W = \frac{\pi\,b\,a^3}{4}$, und $e = a$, wobei vorausgesetzt wird, daß die Halbaxe a parallel und die Halbaxe b rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung, also, wie

gewöhnlich, horizontal zu liegen kommt. Hiernach hat man also für einen solchen Balken:

$$Pl = \frac{\pi b a^2}{4} T = F a \frac{T}{4},$$

da der Inhalt des elliptischen Querschnittes, $F = \pi a b$ zu setzen ist. Es wächst also auch bei diesem Balken unter übrigens gleichen Verhältnissen, das Tragmoment einfach wie der Inhalt und wie die Höhe a des Querschnittes.

Ist $b = a = r$, hat man es also mit einem cylindrischen Träger vom Halbmesser r zu thun, so geht

$$Pl \text{ in } = \frac{\pi r^3}{4} T = F r \cdot \frac{T}{4}$$

über. Es wächst also das Tragmoment dieses Körpers wie das Product aus der Querschnittsfläche und aus dem Halbmesser desselben.

Bei gleichem Querschnitte oder bei gleichem Gewichte ist das Verhältniß des Tragmomentes des Körpers mit elliptischem Querschnitte zu dem mit kreisförmigen, $= \frac{a}{r}$. Es ist daher der Balken mit elliptischem Querschnitte (wo $a > r$) stets dem einfachen cylindrischen Balken vorzuziehen.

Dasselbe gilt auch bei allen anderen Querschnittsformen; die regelmäßige Form (das Quadrat, das regelmäßige Sechseck, der Kreis u. s. w.) giebt bei gleichem Inhalte stets ein kleineres Tragmoment als eine Form von größerer Höhe und kleinerer Breite.

Regelmäßige Querschnittsformen sind daher auch nur bei Wellen und anderen um ihre Längenaxe sich drehenden Körpern anzuwenden, wo während der Umdrehung eine Querschnittsdimension stets in die andere übergeht, oder nach je einer Viertelumdrehung die Höhe zur Breite und die Breite zur Höhe wird.

243 **Querschnitt hölzerner Balken.** Wenn ein cylindrischer Balken mit einem parallelepipedischen Balken, dessen Breite und Höhe $= b$ ist, einen gleich großen Querschnitt $F = \pi r^2 = b^2$ hat, so ist das Verhältniß:

$$\frac{b}{r} = \sqrt{\pi} = 1,77245,$$

und dagegen das Verhältniß zwischen den Tragmomenten M und M_1 (M_2), und zwar erstens, bei Auflagerung des letzteren Körpers auf einer Seitenfläche:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{r}{4} : \frac{b}{6} = \frac{3}{2} \frac{r}{b} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} = 1,5 \,.\, 0,5642 = 0,8462,$$

dagegen zweitens, bei aufrechter Stellung der Diagonalebene des letzteren Körpers:

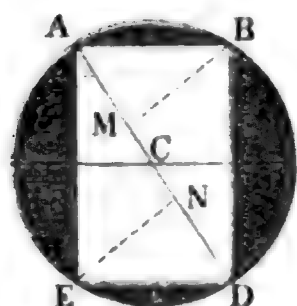
$$\frac{M}{M_2} = \frac{r}{4} : \frac{b\sqrt{2}}{12} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} = 3 \,.\, 0{,}3989 = 1{,}1967.$$

Es ist also das Tragmoment des Cylinders (mit kreisförmiger Basis) im ersten Falle kleiner, und im zweiten Falle größer als das eines Parallelepipeds mit quadratischer Basis.

Da die hölzernen parallelepipedischen Balken aus runden Baumstämmen gehauen oder geschnitten werden, so ist die Frage, welches Dimensionsverhältniß ist dem Querschnitte eines solchen Balkens zu geben, damit er noch das möglichst größte Tragvermögen behalte?

Es sei $ABDE$, Fig. 386, der Querschnitt des Stammes, $AD = d$ der Durchmesser desselben, ferner

Fig. 386.



$$AB = DE = b$$

die Breite und

$$AE = BD = h$$

die Höhe des Balkens. Dann ist:

$$b^2 + h^2 = d^2, \text{ oder}$$

$$h^2 = d^2 - b^2,$$

und das Tragmoment:

$$Pl = \frac{T}{6} \cdot bh^2 = \frac{T}{6}\, b\,(d^2 - b^2).$$

Es kommt nun darauf an,

$$b\,(d^2 - b^2) = b\,d^2 - b^3$$

so groß wie möglich zu machen. Setzen wir statt b, $b \pm x$, wo x sehr klein ist, so bekommen wir für den letzten Ausdruck:

$$(b \pm x)\,d^2 - (b \pm x)^3 = b\,d^2 - b^3 \pm (d^2 - 3\,b^2)\,x - 3\,b\,x^2,$$

insofern wir x^3 vernachlässigen, und daher die Differenz beider Ausdrücke

$$y = \mp (d^2 - 3\,b^2)\,x + 3\,b\,x^2.$$

Damit der erste Werth $b\,d^2 - b^3$ in jedem Falle größer ausfällt als der letzte, muß die Differenz

$$y = \mp (d^2 - 3\,b^2)\,x + 3\,b\,x^2$$

positiv sein, man mag b um x größer oder um x kleiner nehmen. Dies ist aber nur möglich, wenn $d^2 - 3\,b^2 = 0$ wird, denn dann ist diese Differenz $= 3\,b\,x^2$, also positiv, wogegen, wenn $d^2 - 3\,b^2$ ein positiver oder negativer reeller Werth ist, $3\,b\,x^2$ vernachlässigt werden kann, und jene Differenz $= \mp (d^2 - 3\,b^2)\,x$, d. i. mit x gleichbezeichnet, also bald negativ, bald positiv ausfällt. Setzen wir nun $d^2 - 3\,b^2 = 0$, so folgt die gesuchte Breite:

$$b = d\sqrt{1/_3} \text{ und die entsprechende Höhe:}$$

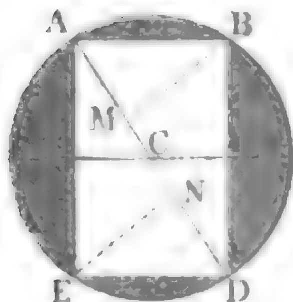
$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{2/_3};$$

also das Verhältniß der Höhe zur Breite:

$$\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = 1{,}414 \text{ oder ungefähr wie } {}^7/_5.$$

Man soll also den Baumstamm so zimmern, daß daraus ein Balken hervorgeht, dessen Höhe zur Breite sich wie 7 zu 5 verhält. Um den der größten Festigkeit entsprechenden Querschnitt zu finden, theilen wir den Durchmesser AD, Fig. 387, in drei gleiche Theile, errichten in den Theilpunkten M und N Perpendikel MB und NE, und verbinden die sich ergebenden Durchschnittspunkte B und E im Kreise mit den Endpunkten A und D durch gerade Linien. Es ist dann $ABDE$ der Querschnitt des größten Widerstandes, denn da

Fig. 387.



$$AM : AB = AB : AD \text{ und } AN : AE = AE : AD,$$

so ist: $AB = b = \sqrt{AM \,.\, AD} = \sqrt{{}^1/_3\, d \,.\, d} = d\sqrt{{}^1/_3}$

und $AE = h = \sqrt{AN \,.\, AD} = \sqrt{{}^2/_3\, d \,.\, d} = d\sqrt{{}^2/_3}$,

also: $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, wie auch wirklich verlangt wird.

Anmerkung 1. Der Baumstamm hat das Tragmoment:

$$Pl = \frac{\pi T}{4} \cdot r^3,$$

für den daraus gezimmerten Balken vom größten Widerstande ist dagegen das Tragmoment:

$$Pl = \frac{T}{6}\, d\sqrt{{}^1/_3} \,.\, {}^2/_3\, d^2 = \frac{T}{\sqrt{243}} \cdot d^3 = \frac{8\,T}{\sqrt{243}}\, r^3;$$

es verliert folglich der Stamm durch das Beschlagen um

$$1 - \frac{8}{\sqrt{243}} \cdot \frac{4}{\pi} = 1 - 0{,}65 = 0{,}35,$$

d. i. 35 Procent von seiner Tragkraft. Um diesen Verlust zu mäßigen, behaut man den Stamm oft nicht ganz vierkantig, sondern läßt ihn noch mit abgestumpften Kanten.

Ein aus demselben Stamme gezimmerter Balken mit quadratischem Querschnitte hat das Tragmoment:

$$Pl = \frac{T}{6} \cdot d\sqrt{{}^1/_2} \cdot \frac{d^2}{2},$$

weil hier Breite $=$ Höhe $= d\sqrt{{}^1/_2} = 0{,}707\, d$ ist; daher fällt hier jener Verlust gar

$$= 1 - \frac{8}{6 \,.\, 2\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\pi} = 1 - \frac{8}{3\pi\sqrt{2}} = 1 - 0{,}60 = 0{,}40,$$

d. i. 40 Procent aus.

(Anmerkung 2.) Um aus einem Baumstamme einen parallelepipedischen Balken zu erhalten, dessen Biegungsmoment ein Minimum, für welchen also auch $\theta = \frac{a}{l}$ (vergl. §. 241) so klein wie möglich ist, kommt es darauf an

$$W = \frac{b h^3}{12}, \text{ oder } b h^3 = h^3 \sqrt{d^2 - h^2}, \text{ oder } (b h^3)^2 = h^6 (d^2 - h^2)$$
$$= d^2 h^6 - h^8$$

so groß wie möglich zu machen. Das Differenzialverhältniß des letzteren Ausdruckes in Hinsicht auf h ist:

$$6\, d^2 h^5 - 8\, h^7,$$

und giebt Null für $h^2 = {}^3/_4\, d^2$, d. i.:

$$h = d \sqrt{{}^3/_4} = \frac{d \sqrt{3}}{2} \text{ und}$$

$$b = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{{}^1/_4\, d^2} = \frac{d}{2}.$$

Für diese Werthe (s. analyt. Hülfslehren Art 13) ist das Biegungsmoment des Balkens ein Minimum.

Es ist hier $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}7321$, also nahe $= {}^7/_4$, während oben für das Maximum des Tragmomentes $\frac{h}{b}$ annähernd $= {}^7/_5$ gefunden wurde.

Dieser Forderung entspricht die Construction in Fig. 387, wenn man $A M = D N = {}^1/_4\, A D$ macht.

Ausgehöhlte und gerippte Balken. Für einen hohlen parallelepipedischen Balken ist nach §. 228 §. 244

$$W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}, \text{ und daher das Tragmoment:}$$

$$P l = \frac{W T}{e} = \frac{W T}{{}^1/_2\, h} = \left(\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h}\right) \frac{T}{6}.$$

Setzen wir noch $\frac{h_1}{h} = \mu$ und $\frac{b_1}{b} = \nu$, so erhalten wir:

$$\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h} = b h^2 (1 - \mu^3 \nu),$$

und da nun dann der Querschnitt des Balkens,

$$F = b h - b_1 h_1 = b h (1 - \mu \nu) \text{ ist, so ergiebt sich:}$$

$$P l = \left(\frac{1 - \mu^3 \nu}{1 - \mu \nu}\right) \cdot F h \cdot \frac{T}{6}.$$

Da $\frac{1 - \mu^3 \nu}{1 - \mu \nu} = \frac{1 - \mu \nu + \mu \nu - \mu^3 \nu}{1 - \mu \nu} = 1 + \frac{(1 - \mu^2) \mu \nu}{1 - \mu \nu}$ um so größer ausfällt, je größer ν ist, so erhält man den Maximalwerth von $P l$, wenn man $\nu = 1$ einsetzt, und zwar:

1) $P l = \left[1 + \left(\frac{1 - \mu^2}{1 - \mu}\right) \mu \right] F h \frac{T}{6} = (1 + \mu + \mu^2) F h \frac{T}{6}.$

Nimmt man dagegen $\nu = \mu$ an, so erhält man:

2) $P l = (1 + \mu^2) F h \frac{T}{6}.$

In beiden Fällen ist μ so groß wie möglich und daher nahe = Eins zu nehmen, sind also die Wände des Balkens möglichst dünn zu machen, wenn der Balken die möglichst große Tragfähigkeit besitzen soll.

Hiernach hat man für $\mu = 1$, im ersteren Falle:

$$P l = 3\, F h \frac{T}{6} = F h \frac{T}{2}, \text{ und im zweiten:}$$

$$P l = 2\, F h \frac{T}{6} = F h \frac{T}{3}, \text{ wogegen}$$

$$P l = F h \frac{T}{6} \text{ ausfällt, wenn man } \mu = 0 \text{ annimmt.}$$

In allen drei Fällen wächst die Tragfähigkeit des Balkens bei gleichem Querschnitte (F) oder Gewichte mit der Höhe (h) gleichmäßig; sie ist aber im ersten Falle, wo der Balken aus zwei Querrippen besteht, am größten, im zweiten Falle, wo er eine parallelepipedische Röhre bildet, eine mittlere, und im dritten Falle, wo er aus einer oder zwei Tragwänden besteht, am kleinsten.

Wenn z. B. ein massiver Balken mit den Querschnittsdimensionen b_1 und h_1 denselben Querschnitt oder dasselbe Gewicht haben soll, wie der gedachte hohle Balken, so ist:

$$F = b_1 h_1 = b h - b_1 h_1, \text{ d. i. } 2\, b_1 h_1 = b h, \text{ oder } \frac{b_1 h_1}{b h} = \mu \nu = {}^1\!/_2.$$

Nimmt man nun noch $\frac{b_1}{b} = \frac{h_1}{h}$ an, so erhält man $\mu = \nu = \sqrt{1/2}$, und daher das Verhältniß zwischen den Tragkräften beider Balken:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{(1 - \mu^3 \nu)}{1 - \mu \nu} \cdot \frac{h}{h_1} = \left(\frac{1 - {}^1\!/_4}{1 - {}^1\!/_2}\right) \sqrt{2} = {}^3\!/_2 \sqrt{2} = 3 \sqrt{{}^1\!/_2} = 2{,}12;$$

es besitzt also dann der hohle Balken mehr als doppelt so viel Tragfähigkeit als der gleich schwere massive Balken, welcher genau dieselbe Gestalt und Größe hat wie die Höhlung des ersteren.

Dieselben Verhältnisse finden natürlich auch statt bei den Iförmigen Trägern, da sie (nach §. 228) dasselbe Maß W des Biegungsmomentes besitzen. Ebenso lassen sich diese Formeln auch auf Körper mit mehr als zwei Hauptrippen, wie z. B. mit einem Querschnitte, wie Fig. 388, anwenden, wo b die Breite der Fuß- und Deckplatten AB und CD, und h die ganze Höhe $AD = BC$, sowie b_1 die Summe der Breiten und h_1 die Höhe der hohlen Räume M, N, O, P, bezeichnen.

Fig. 388.

Für eine Röhre oder für einen hohlen Cylinder hat man dieselben Verhältnisse wie für einen parallelepipedischen Balken. Ist r der äußere und $r_1 = \mu r$ der innere Halbmesser, so ist das Tragmoment dieses Körpers:

$$Pl = \frac{\pi (r^4 - r_1^4)}{r} \frac{T}{4} = (1 - \mu^4) \pi r^3 \frac{T}{4} = \left(\frac{1 - \mu^4}{1 - \mu^2}\right) F r \frac{T}{4}$$
$$= (1 + \mu^2) F r \cdot \frac{T}{4}.$$

Dieser Ausdruck wird um so größer, je mehr sich $\mu = \frac{r_1}{r}$ der Einheit nähert, je kleiner also die Wandstärke der Röhre ist.

Setzt man $\mu = 1$, so erhält man das entsprechende größte Tragmoment:

$$Pl = 2 \, Fr \frac{T}{4} = Fr \frac{T}{2}.$$

Vergleicht man die Tragkraft dieser Röhre mit der eines gleichschweren massiven Cylinders vom Halbmesser $r_1 = \mu r = r \sqrt{1/2}$, so hat man, da für diesen

$$P_1 l = F r_1 \cdot \frac{T}{4} = \mu F r \cdot \frac{T}{4} \text{ ist,}$$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{1 + \mu^2}{\mu} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{2} = \frac{3}{2} \sqrt{2} = 2.12,$$

genau wie beim parallelepipedischen Balken unter denselben Voraussetzungen.

Es ist endlich aus der allgemeinen Gleichung:

$$Pl = \frac{WT}{e} = \frac{(F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots)}{e} T = (F_1 \mu_1^2 + F_2 \mu_2^2 + \cdots) e \, T$$

unmittelbar zu ersehen, daß das Tragmoment eines Körpers um so größer ausfällt, je größer die Entfernungen $z_1 = \mu_1 e$, $z_2 = \mu_2 e$ u. s. w. der Querschnittstheile F_1, F_2 u. s. w. von der neutralen Axe sind. Da nun aber diese Entfernungen höchstens $= e$ sein können, so wird folglich derjenige Balken das größte Tragmoment besitzen, dessen Querschnittstheile einen und denselben und zwar möglichst großen Abstand von der neutralen Axe haben. Ein solcher Körper besteht folglich nur aus zwei Querrippen. Da die zur Verbindung der Querrippen dienenden hohen Rippen der Forderung eines größten Tragmomentes nicht entsprechen können, so ist es auch gar nicht möglich, mit der Tragkraft eines Balkens ein absolutes Maximum zu erreichen; und man muß sich daher nur damit begnügen, die Tragfähigkeit eines Balkens durch Aushöhlung oder Schwächung desselben in der Nähe der Axe und durch Anbringung von Rippen oder Federn in möglichst großem Abstande von der Axe zu erhöhen.

Die Dicke, welche die Mittelrippe eines solchen Körpers erhalten muß, um der Schubfestigkeit widerstehen zu können, wird im folgenden Kapitel bestimmt.

Anmerkung. Unter der Voraussetzung, daß die Tragmodel mit den Festigkeitsmodeln wachsen und abnehmen, geben die englischen Ingenieure den Trägern aus dem dem Zerdrücken mehr widerstehenden Gußeisen auf der Zugseite und dagegen den Trägern aus Schmiedeeisen, welches dem Zerreißen mehr widersteht, auf der

Druckseite eine besondere Verstärkung. Ruhen diese Träger an ihren Enden auf, so erhalten sie deshalb, z. B. je nachdem sie aus Guß- oder aus Schmiedeeisen bestehen, entweder eine breitere und dickere Fuß-, oder eine breitere und dickere Kopfplatte, oder statt derselben Doppelplatten mit verticalen Zwischenwänden, ähnlich wie Fig. 388 zeigt. Gußeiserne Träger erhalten in dieser Absicht die schon aus dem Obigen (§. 237) bekannten T und T förmigen Querschnitte.

Beispiel. Ein Tragbalken aus Eichenholz von 9 Zoll Breite und 11 Zoll Höhe, welcher seither hinreichende Tragkraft gewährt hat, soll durch einen hohlen gußeisernen Balken von 5 Zoll äußerer Breite und 10 Zoll Höhe ersetzt werden, von welcher Stärke wird man denselben gießen lassen müssen? Setzt man die doppelte Metallstärke desselben $= x$, so hat man die Breite der Höhlung $= 5 - x$, und die Höhe derselben $= 10 - x$, folglich ist für den hohlen Balken:
$b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 = 5 \,.\, 10^3 - (5 - x)(10 - x)^3 = 2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4$,
und das Tragmoment $P l = \frac{7000}{6 \,.\, 10} (2500 x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4)$. Wenn für den massiven hölzernen Balken das Tragmoment $P l = \frac{1000}{6} \cdot 9 \,.\, 11^2 = \frac{1}{6} \,.\, 1089000$ ist, so hat man zu setzen:

$$700 \,.\, (2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4) = 1089000 \text{ oder:}$$
$$2500\, x - 450\, x^2 + 35\, x^3 - x^4 = 1556.$$

Zunächst ist annähernd $x = \frac{1556}{2500} = 0{,}62$, wofür aber $x = 0{,}65$ gesetzt werden soll. Dann folgt $450\, x^2 = 450 \,.\, 0{,}4225 = 190{,}12$, $35\, x^3 = 9{,}61$, $x^4 = 0{,}18$, daher läßt sich setzen:

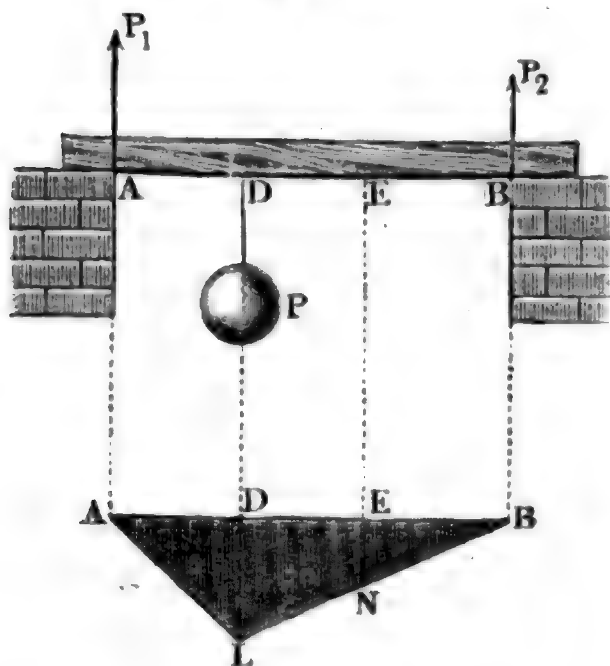
$$x = \frac{1556 + 190{,}12 - 7{,}56 + 0{,}18}{2500} = \frac{1738{,}7}{2500} = 0{,}695 \text{ Zoll},$$

und folglich die gesuchte Metallstärke:

$$\frac{x}{2} = 0{,}3475 \text{ Zoll.}$$

§. 245 **Excentrische Belastung.** Wirkt die Kraft eines an seinen Enden A und B aufliegenden Balken, Fig. 389, nicht in der Mitte, sondern steht der Angriffspunkt D derselben um die ungleichen Abstände $D A = l_1$, und $D B = l_2$ von den Stützpunkten ab, so besitzt der Balken eine größere Tragkraft, als wenn diese Kraft in der Mitte des Balkens niederzieht. Bezeichnen wir die Kräfte, welche die Stützen A und B aufnehmen, durch P_1 und P_2, und die ganze Länge des Balkens $A B = l_1 + l_2$ wieder durch l. Setzen wir nun in Beziehung auf den Stützpunkt B, das Moment von P_1 gleich dem von P, und ebenso in Beziehung auf den Stütz-

Fig. 389.



punkt A, das Moment von P_2 gleich dem von P, also $P_1 l = P l_2$ und $P_2 l = P l_1$, so erhalten wir die Kräfte in den Stützpunkten:

$$P_1 = \frac{l_2}{l} P \text{ und } P_2 = \frac{l_1}{l} P,$$

und folglich ihre Momente in Hinsicht auf den Angriffspunkt D:

$$P_1 l_1 = P_2 l_2 = \frac{P l_1 l_2}{l}.$$

Für irgend einen anderen Punkt E, dessen Entfernung BE vom Stützpunkte B, $= x$ ist, hat man dieses Moment:

$$P_2 . \overline{BE} = \frac{P l_1 x}{l}$$

kleiner als das gefundene; es ist folglich auch in D die stärkste Biegung, und die Tragkraft nur in Hinsicht auf diesen Punkt zu finden, also:

$$\frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{WT}{e} \text{ zu setzen.}$$

Führen wir $l_1 = \frac{l}{2} - x$ und $l_2 = \frac{l}{2} + x$ ein, so erhalten wir das Kraftmoment auch:

$$\frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{P\left(\frac{l}{2} - x\right)\left(\frac{l}{2} + x\right)}{l} = \frac{P\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)}{l};$$

und es fällt also hiernach die Tragkraft:

$$P = \frac{l}{l_1 l_2} \cdot \frac{WT}{e} = \frac{l\, WT}{\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) e}$$

um so größer oder kleiner aus, je größer oder kleiner x ist. Für $x = \frac{l}{2}$, d. i. für $l_1 = 0$, wenn also P bis zur Stütze A hingerückt ist, hat man:

$$P = \frac{l\, WT}{0 . e} = \infty,$$

dagegen für $x = 0$, d. i. wenn die Last P in der Mitte hängt, ist die Tragkraft ein Minimum, und zwar:

$$P = 4\, \frac{WT}{l\, e},$$

wie wir bereits aus §. 240 wissen. Es trägt also ein an den Enden aufliegender prismatischer Balken in der Mitte am wenigsten, und dagegen immer mehr und mehr, je näher die Last einem Stützpunkte gerückt wird.

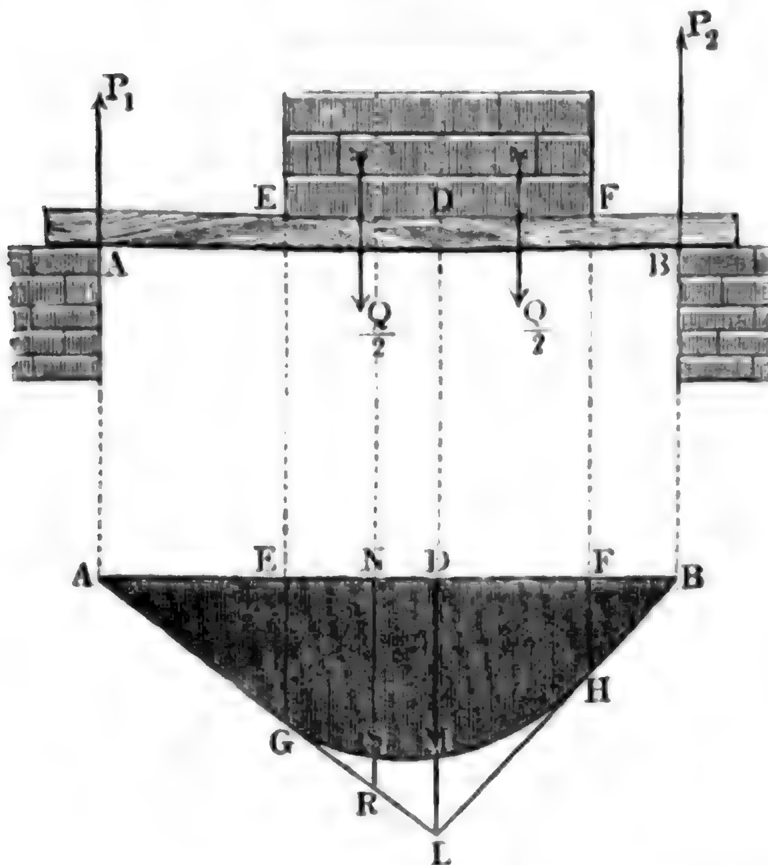
Wenn man den Krümmungshalbmesser umkehrt, und folglich die den Krümmungen selbst direct proportionalen Kraftmomente an den verschiedenen Stellen des Balkens als Ordinaten aufträgt, so erhält man ein anschauliches

Bild von der Verschiedenheit der Biegungen des Balkens an verschiedenen Stellen desselben. Wird in dem soeben behandelten Falle das Kraftmoment $\frac{P l_1 l_2}{l}$ in D, durch die Ordinate $\overline{DL}$ repräsentirt, und werden vom Endpunkte L derselben aus nach den Endpunkten der Abscissen $DA = l_1$ und $DB = l_2$ gerade Linien LA und LB gezogen, so begrenzen dieselben die sämmtlichen Ordinaten, wie (z. B. $\overline{EN}$), welche die Biegungsmaße an den verschiedenen Stellen des Körpers angeben, denn da $\frac{EN}{EB} = \frac{DL}{DB}$ ist, so folgt:

$$\overline{EN} = \frac{EB}{DB} \cdot \overline{DL} = \frac{x}{l_2} \cdot \frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{P l_1 x}{l},$$

wie wir oben gefunden haben.

Fig. 390.



Ein anderer in der Praxis nicht selten vorkommender Fall ist der, daß eine Last $Q = cq$ gleichförmig vertheilt ist auf einen Theil $\overline{EF} = c$ der ganzen Länge l des Balkens AB, Fig. 390. Bezeichnen wir wieder die Entfernungen der Mitte D dieser Last von den Stützpunkten A und B, durch l_1 und l_2, sowie die von diesen Punkten aufgenommenen Kräfte durch P_1 und P_2, so haben wir auch wieder

$$P_1 = \frac{l_2}{l}\, Q = \frac{l_2 c q}{l}$$

und

$$P_2 = \frac{l_1}{l}\, Q = \frac{l_1 c q}{l}.$$

Wäre Q nicht vertheilt, sondern griffe diese Kraft nur in D an, so würde das Moment für D, $= \frac{Q l_1 l_2}{l}$ sein, und wenn man dasselbe durch eine Ordinate $\overline{DL}$ repräsentirt, so ließen sich die Momente für die anderen

Punkte von AB durch die geraden Linien LA und LB abschneiden. Da aber für die Punkte innerhalb EF den Kräften P_1 und P_2 noch die darüber liegende Last entgegenwirkt, so erleiden die Ordinaten zwischen EG und FH noch eine Verminderung. Für den Mittelpunkt D der belasteten Basis EF kommt z. B. das Moment des halben Gewichtes, d. i.:

$$\frac{Q}{2}\cdot\frac{c}{4} = \overline{ML},$$

in Abzug, und es bleibt daher von der Ordinate $\overline{DL} = \frac{Q\,l_1\,l_2}{l}$ nur noch das Stück:

$$\overline{DM} = \overline{DL} - \overline{ML} = Q\left(\frac{l_1\,l_2}{l} - \frac{c}{8}\right)$$

übrig. Für einen anderen Punkt N, dessen Abscisse $AN = x$ sein möge, ist dagegen das Moment:

$$P_1 \,.\, \overline{NA} - \overline{NE}\cdot q\cdot\frac{\overline{NE}}{2} = P_1\,x - \frac{(x - l_1 + \frac{1}{2}\,c)^2\,q}{2},$$

und wenn nun $P_1\,x$ durch die Ordinate $\overline{NR}$ und $\frac{(x - l_1 + \frac{1}{2}\,c)^2\,q}{2}$ durch das Stück $\overline{SR}$ repräsentirt wird, giebt die Ordinate $\overline{NS}$ das ganze Moment:

$$P_1\,x - \frac{(x - l_1 + \frac{1}{2}\,c)^2\,q}{2}$$

an. Dasselbe fällt natürlich für verschiedene x, d. i. für verschiedene Punkte sehr verschieden aus, ist aber für $x - l_1 + \frac{1}{2}\,c = \frac{P_1}{q}$ ein Maximum, und zwar:

$$P_1\left(\frac{P_1}{q} + l_1 - \frac{1}{2}\,c\right) - \frac{P_1^2}{2\,q} = P_1\left(\frac{P_1}{2\,q} + l_1 - \frac{1}{2}\,c\right)$$
$$= P_1\left(l_1 - \frac{c}{2} + \frac{c\,l_2}{2\,l}\right) = P_1\,l_1\left(1 - \frac{c}{2\,l}\right) = \frac{Q\,l_1\,l_2}{l}\left(1 - \frac{c}{2\,l}\right).$$

Hiernach haben wir also für das Tragvermögen dieses Balkens zu setzen:

$$\frac{Q\,l_1\,l_2}{l}\left(1 - \frac{c}{2\,l}\right) = \frac{W\,T}{e}.$$

Beispiel. Welche Last trägt ein hohler parallelepipedischer Träger aus $\frac{1}{2}$ Zoll dickem Eisenblech, dessen äußere Höhe 16 Zoll und äußere Breite 4 Zoll beträgt, wenn er auf 5 Fuß Länge gleichförmig belastet wird und die Mitte dieser Länge von den beiden Stützpunkten 8 und 4 Fuß absteht? Es ist hier

$$\frac{b\,h^3 - b_1\,h_1^3}{h} = \frac{4\,.\,16^3 - 3\,.\,15^3}{16} = 391{,}2,$$

ferner:

$$\frac{l_1 l_2}{l}\left(1-\frac{c}{2l}\right) = \frac{2}{3}\cdot 48\left(1-\frac{5}{24}\right) = \frac{32 \,.\, 19}{24} = \frac{76}{3},$$

und daher die gesuchte Last:

$$Q = 391{,}2 \cdot \frac{3}{76} \cdot \frac{T}{6} = \frac{195{,}6}{76} \cdot 9000 = 23160 \text{ Pfund.}$$

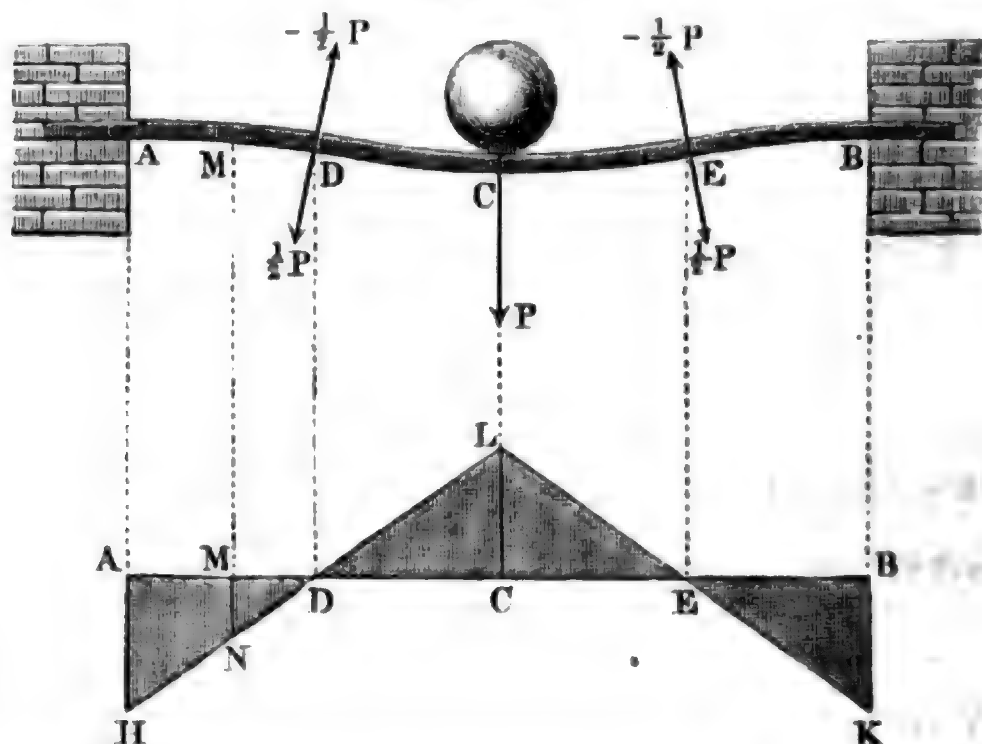
Anmerkung. Wenn die Last Q nicht gleichförmig über EF vertheilt ist, sondern je eine Hälfte derselben in den Endpunkten E und F angreift, so ist die Linie GMH eine gerade, und das größte Moment die Ordinate $\overline{GE}$, also:

$$\frac{Q l_2}{l}\left(l_1 - \frac{c}{2}\right) = \frac{WT}{e}$$

zu setzen, wofern l_1 den größeren Abstand DA, und l_2 den kleineren Abstand DB der Mitte D von den Enden A und B bezeichnet.

§. 246 **An beiden Enden eingemauerte Balken.** Ist ein in der Mitte C belasteter Balken AB, Fig. 391, an beiden Enden eingeklemmt, so

Fig. 391.



nimmt derselbe in der Mitte C eine Biegung nach oben, und in jedem der beiden Auflagerungspunkte A und B eine Biegung nach unten an, und es bilden sich dabei in den Mittelpunkten D und E der Balkenhälften CA und CB Wendepunkte, wo die Biegung Null oder der Krümmungshalbmesser unendlich groß ist. Das Gewicht P wird zur Hälfte von AD und zur Hälfte von BE getragen, und es ist daher anzunehmen, daß beide Balkenviertel AD und BE an ihren Enden D und E durch $\frac{P}{2}$ abwärts, und dagegen die Balkenhälfte DE an jedem ihrer Enden D und E durch $\left(-\frac{P}{2}\right)$ aufwärts gebogen wird. Jede dieser Kräfte hat den Hebelarm $AD = CD$ u. s. w. $= \frac{AB}{4}$

$= \frac{l}{4}$, es ist folglich das Moment derselben:

$$\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}, \text{ daher auch:}$$

$$\frac{Pl}{8} = \frac{WT}{e}, \text{ und die Tragkraft}$$

$$P = \frac{8\,WT}{le} = 2 \cdot \frac{4\,WT}{le} \text{ zu setzen.}$$

Es trägt also ein solcher Balken doppelt so viel, als wenn er an beiden Enden frei aufliegt.

Macht man die Ordinaten $\overline{AH} = \overline{BK} = \overline{CL} = \frac{Pl}{8}$, und zieht man die Geraden HL und KL, so schneiden die letzteren die den Kraftmomenten und Biegungen proportionalen Ordinaten $(\overline{MN})$ für jede andere Stelle (M) des Balkens ab.

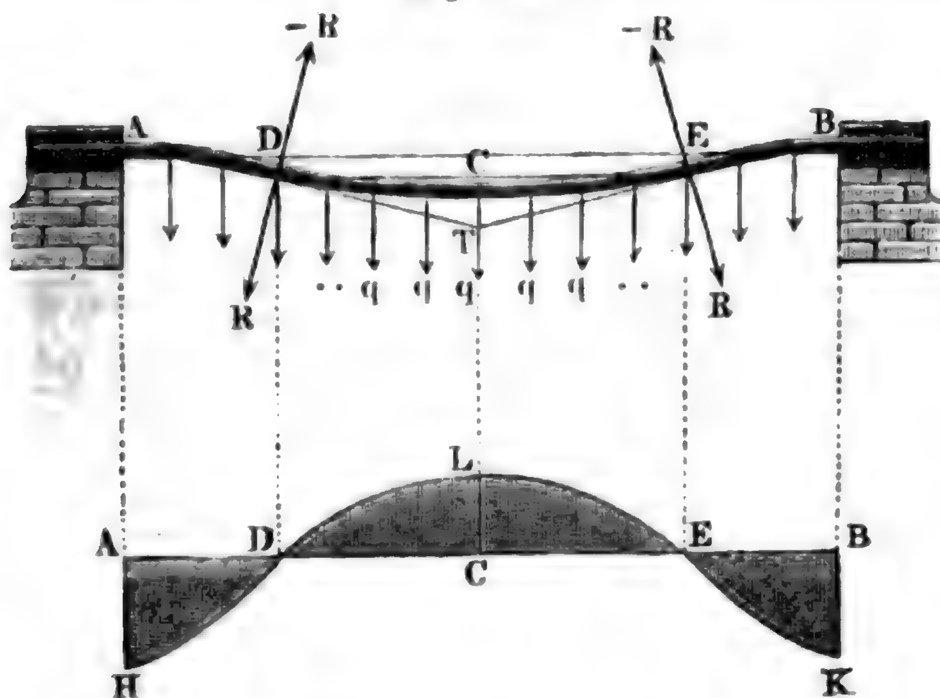
Setzt man in der gefundenen Formel den Festigkeitsmodul K statt des Tragmoduls T ein, so giebt sie natürlich die Kraft zum Zerbrechen des Balkens, also:

$$P = \frac{8\,WK}{le}.$$

Da die Krümmungen in A, B und C gleich groß sind, so erfolgt natürlich auch das Zerbrechen in A, B und C zugleich.

Wenn bei der vorigen Balkenlage die Last $Q = lq$ gleichmäßig vertheilt ist, so nimmt der Balken zwar auch zwei Biegungen nach unten und zwei Biegungen nach oben an, nur liegen die Wendepunkte D und E, Fig. 392,

Fig. 392.



nicht in der Mitte der Balkenhälften, da die Biegungskräfte R, R der Stücke AD und BE noch durch die darauf liegende Last unterstützt, und

dagegen die Wirkung der Biegungskräfte $-R$, $-R$ des Mittelstückes DE von dieser Last geschwächt werden. Setzen wir die Länge $AD = BE = l_1$, und die Länge $CD = CE = l_2$, so haben wir die ganze Länge des Balkens: $l = 2(l_1 + l_2)$, ferner die Last auf AD oder BE, $Q_1 = q l_1$, und dagegen die auf DE, $= Q_2 = 2R = 2 q l_2$. Da nun AD durch R und Q_1 niedergebogen wird, so ist nach §. 216 und §. 223 für den Neigungswinkel $EDT = DET = \alpha$ der Wendestelle D gegen den Horizont:

$$\alpha = \frac{R l_1^2}{2WE} + \frac{Q_1 l_1^2}{6WE},$$

und da umgekehrt CD von $(-R)$ aufwärts, und von Q_2 abwärts gebogen wird, so hat man für dieselbe Stelle (D) auch:

$$\alpha = \frac{R l_2^2}{2WE} - \frac{Q_2 l_2^2}{6WE}.$$

Setzt man nun beide Werthe für α einander gleich, so ergiebt sich die Beziehung:

$$3R(l_2^2 - l_1^2) = Q_1 l_1^2 + Q_2 l_2^2, \text{ oder}$$
$$3 q l_2 (l_2^2 - l_1^2) = q(l_1^3 + l_2^3), \text{ d. i.}$$
$$3 l_2 \left[l_2^2 - \left(\frac{l}{2} - l_2\right)^2\right] = l_2^3 + \left(\frac{l}{2} - l_2\right)^3.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man:

$$l_2 = \frac{l}{2}\sqrt{1/3} \text{ und } l_1 = \frac{l}{2}(1 - \sqrt{1/3}),$$

so daß sich nun das Kraftmoment in Hinsicht auf die Mitte C:

$$M = R l_2 - \frac{R l_2}{2} = \frac{R l_2}{2} = \frac{q l_2^2}{2} = \frac{q l^2}{24} = \frac{Q l}{24},$$

und das in Hinsicht auf einen Endpunkt A oder B:

Fig. 393.

$$M_1 = R l_1 + \frac{Q_1 l_1}{2} = q l_1 l_2 + \frac{q l_1^2}{2} = q l_1 \left(l_2 + \frac{l_1}{2}\right)$$
$$= \frac{q l^2}{8} (1 - \sqrt{1/3}) (1 + \sqrt{1/3})$$
$$= \frac{q l_2 (1 - 1/3)}{8} = \frac{Q l}{12} = 2 \frac{Q l}{24} \text{ ergiebt.}$$

Es ist hiernach die Tragkraft dieses Balkens:

$$Q = 12 \cdot \frac{W T}{l e} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8 W T}{l e},$$

d. i. $^3/_2$ mal so groß als im vorigen Falle, wo die Last in der Mitte C wirkt.

Trägt man $\frac{Q l}{12}$ als Ordinaten in A und B, sowie $\frac{Q l}{24}$ als solche in C auf, macht man also $\overline{AH} = \overline{BK} = \frac{Q l}{12}$ und $\overline{CL} = -\frac{Q l}{24}$, so erhält man drei Punkte H, K und L der Curve $HDLEK$, wodurch die Veränderlichkeit der Biegung des Balkens an verschiedenen Stellen veranschaulicht wird.

Beispiel. Wie hoch läßt sich in einem Getreidemagazine das Korn aufschütten, wenn der Boden auf Balken von 25 Fuß Länge, 10 Zoll Breite und 12 Zoll Höhe ruht, die Entfernung zwischen den Axen von je zwei Balken, = 3 Fuß beträgt und ein Cubikfuß Kornmasse 46,5 Pfund wiegt? Wenden wir die letzte Formel $Q l = 12 . 167 . b h^2$ an, so müssen wir setzen:

$$b = 10,\ h = 12,\ l = 25 . 12 = 300,$$

folglich:

$$Q = \frac{12 . 167 . 10 . 144}{300} = 9619 \text{ Pfund.}$$

Nun wiegt aber ein Parallelepiped Kornmasse von 25 Fuß Länge, 3 Fuß Breite und x Fuß Höhe $= 25 . 3 . x . 46,5$ Pfund; setzen wir daher diesen Werth $= Q$, so folgt die fragliche Höhe der Aufschüttung:

$$x = \frac{9619}{75 . 46,5} = 2,76 \text{ Fuß.}$$

Ungleich unterstützte Balken. Wenn ein Balken ABC, Fig. 394 (a. f. S.), an einem Ende A eingemauert ist, und am anderen Ende B aufruht, und die Last P in der Mitte zwischen A und B wirkt, so ist nach §. 221 der von der Stütze B aufzunehmende Druck: §. 24

$$P_1 = \frac{5}{16} P;$$

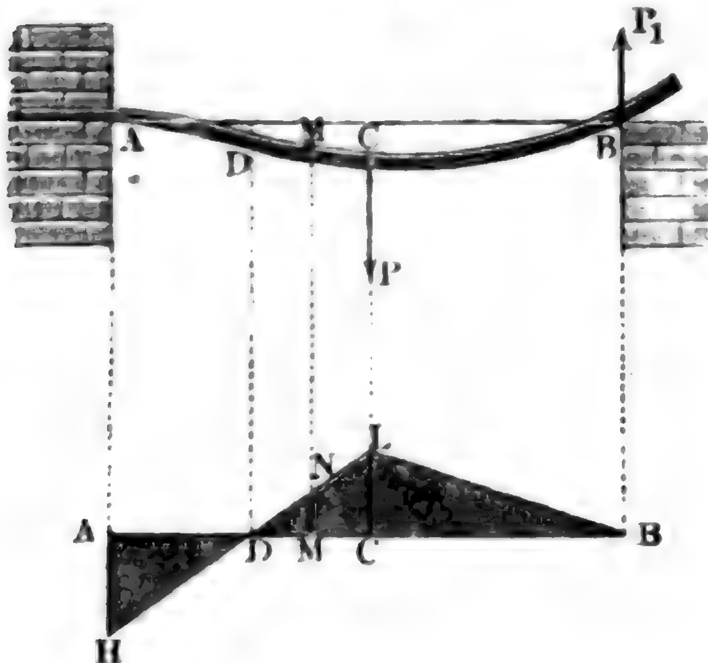
daher das Kraftmoment in Hinsicht auf C:

$$\overline{CL} = \frac{P_1 l}{2} = \frac{5}{32} P l,$$

hingegen das Moment in Hinsicht auf A:

$$\overline{AH} = P\frac{l}{2} - P_1 l = Pl\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{16}\right) = \frac{3}{16}Pl = \frac{6}{32}Pl,$$

Fig. 394.



also größer, und hiernach die Tragkraft:

$$P = \frac{16}{3} \cdot \frac{WT}{le}$$

zu setzen.

Für einen Zwischenpunkt M, welcher um $CM = x$ von der Mitte C absteht, ist dieses Moment:

$$\overline{MN} = P_1\left(\frac{l}{2} + x\right) - Px = P_1\frac{l}{2} - (P - P_1)\,x.$$

Nimmt man $x = \frac{\frac{1}{2}P_1 l}{P - P_1} = \frac{5}{16 - 5} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{22}l$ an, so erhält man denjenigen Punkt D, wo das Moment Null, also der Krümmungshalbmesser unendlich groß ist. Die Veränderlichkeit dieses Momentes und die der Biegung des Balkens wird durch die Ordinaten der Geraden HL und LB veranschaulicht, welche durch die Endpunkte von $\overline{AH} = \frac{6}{32}Pl$ und von $\overline{CL} = \frac{5}{32}Pl$ gehen.

Ist endlich der auf dieselbe Weise unterstützte und festgehaltene Balken AB,

Fig. 395.

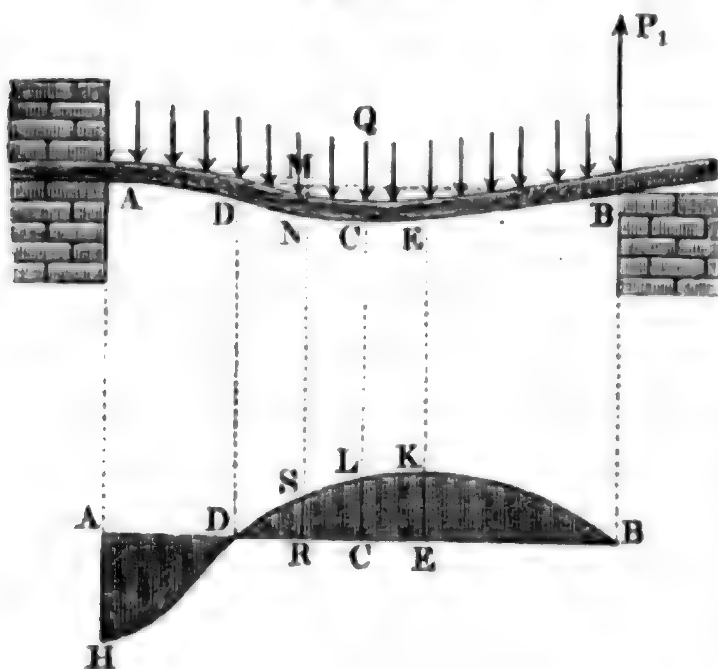


Fig. 395, gleichmäßig, und zwar wie wir seither gewöhnlich angenommen haben, auf den laufenden Fuß Balkenlänge mit q belastet, so läßt sich zunächst die Stützkraft P_1 in B wie folgt bestimmen. Bei der Balkenlänge $AB = l$ ist die ganze Last $Q = lq$ und das Kraftmoment in Hinsicht auf einen Punkt M im Abstande $BM = x$ vom Stützpunkte B:

$$\overline{RS} = P_1 x - \frac{q x^2}{2},$$

folglich der entsprechende Neigungswinkel:

$$\alpha = \frac{P_1 (l^2 - x^2)}{2 WE} - \frac{q (l^3 - x^3)}{6 WE},$$

und (nach §. 217 und §. 223) die zugehörige Durchbiegung:

$$y = MN = \frac{P_1 (l^2 x - \frac{1}{3} x^3)}{2 WE} - \frac{q (l^3 x - \frac{1}{4} x^4)}{6 WE}.$$

Da nun aber A so hoch wie B liegt, so ist die Ordinate in A, d. i. für $x = l$, $y = 0$, und daher zu setzen:

$$3 P_1 . \frac{2}{3} l^3 = q . \frac{3}{4} l^4,$$

woraus nun der gesuchte Druck in B:

$$P_1 = \frac{3}{8} q l = \frac{3}{8} Q \text{ folgt.}$$

Setzt man diesen Werth für P_1 in den Ausdruck für das Moment, so erhält man dieses:

$$\overline{RS} = \frac{3}{8} Qx - \frac{q x^2}{2} = \frac{q x}{2} (\frac{3}{4} l - x); \text{ und daher für } x = l:$$

$$\overline{AH} = - \frac{q l^2}{8} = - \frac{Q l}{8}.$$

Für $x = BD = \frac{3}{4} l$ ist ferner dieses Moment = Null, und für $x = BE = \frac{3}{8} l$ ist es ein Maximum:

$$\overline{EK} = \frac{9 q l^2}{128} = \frac{9}{128} Q l.$$

Da $\frac{Q l}{8} = \frac{16}{128} Q l > \frac{9}{128} Q l$ ist, so fällt das Moment $\overline{AH}$ in Hinsicht auf den festen Punkt A größer aus als das Moment $\overline{KE}$ in Hinsicht auf die Mitte E von BD, und es ist daher die Tragkraft dem Momente $\frac{Q l}{8}$ entsprechend zu bestimmen, d. i.

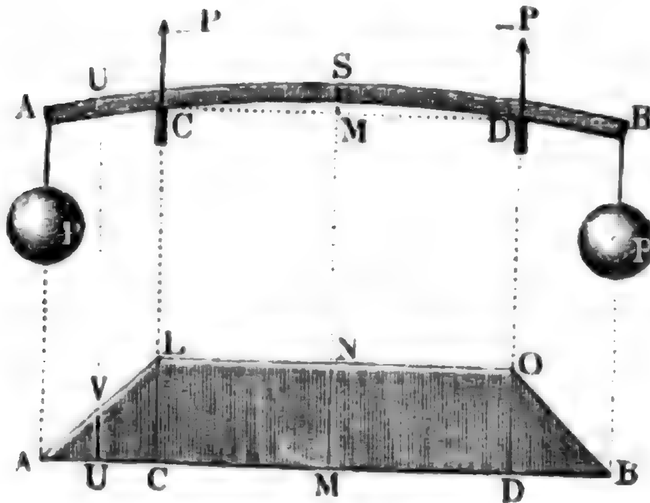
$$Q = 8 \frac{W T}{l e}$$

zu setzen, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß der Tragmodul für Druck und Zug einer und derselbe ist.

Diese Tragkraft ist $8 . \frac{3}{16} = \frac{3}{2}$ mal so groß, als wenn bei derselben Auflagerung des Balkens die Last in der Mitte wirkte.

§. 248 **In Zwischenpunkten belastete Balken.** Wenn ein an beiden Enden mit gleichen Gewichten P, P belasteter Balken AB, Fig. 396, in zwei Punkten C und D unterstützt ist, welche von den Enden A und B um $AC = BD = l_1$ abstehen, so nimmt jeder dieser Punkte die Kraft P auf, und es ist für einen Punkt M innerhalb CD das Biegungsmoment

Fig. 396.



$\overline{CL} = \overline{DO} = \overline{MN}$
$= P(x_1 - l_1) - Pz_1 = Pl_1$
constant, also die neutrale Axe von CD kreisförmig gebogen, wogegen für einen Punkt U innerhalb AC dieses Moment $UV = Px$ veränderlich, jedoch kleiner als Pl_1 ausfällt.

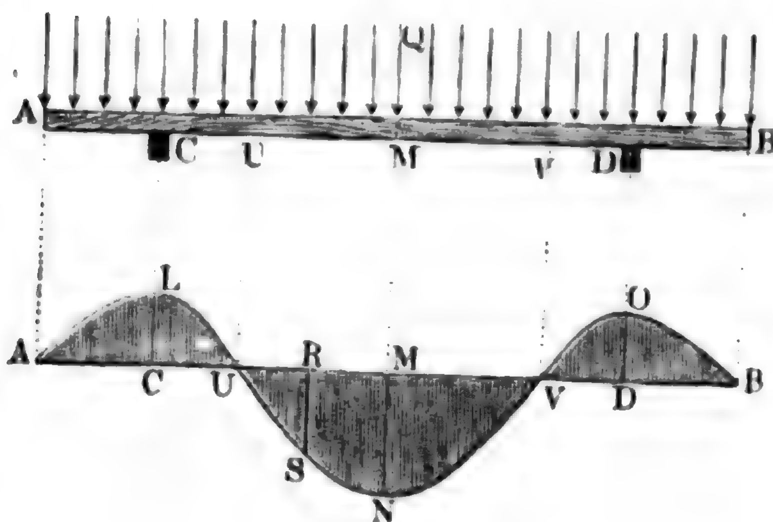
Der Krümmungshalbmesser vom Mittelstück CD ist $r = \frac{WE}{Pl_1}$, folglich der Neigungswinkel der Balkenaxe in C und D, $\alpha_1 = \frac{l}{2r} = \frac{Pll_1}{2WE}$, wenn l die Länge dieses Mittelstückes bezeichnet. Ferner folgt die Bogenhöhe $MS = a = \frac{(\frac{1}{2}l)^2}{2r} = \frac{l^2}{8r} = \frac{Pl^2 l_1}{8WE}$, sowie die Bogenhöhe von CA

$$a_1 = \alpha_1 l_1 + \frac{Pl_1^3}{3WE} = \frac{Pll_1^2}{2WE} + \frac{Pl_1^3}{3WE} = \frac{Pl_1^2}{WE}\left(\frac{l}{2} + \frac{l_1}{3}\right).$$

Das Tragvermögen dieses Balkens ist $Pl_1 = \frac{WT}{e}$.

Ist derselbe Balken AB, wie Fig. 397 darstellt, gleichmäßig, und zwar auf den laufenden Fuß mit q belastet, so fällt bei gewissen Verhältnissen das Biegungsmoment theils positiv, theils negativ, und daher in zwei Punkten U und V Null aus.

Fig. 397.



Für einen Punkt innerhalb AC und BD ist dieser Moment $\frac{1}{2}qx^2$, für einen Punkt zwischen C und der Mitte M oder D und M dagegen, da der Druck in C und D den Werth $\frac{1}{2}Q = (\frac{1}{2}l + l_1)q$ hat:

$\overline{RS} = y = \frac{1}{2}(x + l_1)^2 q - (\frac{1}{2} l + l_1) x q = \frac{1}{2}(x^2 - l x + l_1^2) q$ und fällt daher Null aus für $x^2 - lx = - l_1^2$, d. i. für

$$\overline{CU} = x = \frac{l}{2} - \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2} \text{ und für}$$

$$\overline{CV} = x = \frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2};$$

welches natürlich bedingt, daß $l_1 =< \frac{l}{2}$, d. i. $CA < CM$ ist. Außerdem bleibt das Biegungsmoment stets positiv, wie z. B. Fig. 398 darstellt.

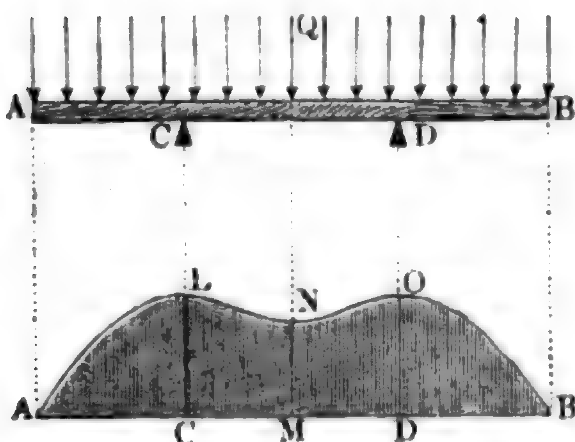


Fig. 398.

Das Biegungsmoment ist ein Maximum oder Minimum für $x = \frac{l}{2}$, und zwar

$$\overline{MN} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2\right] q;$$

während das Biegungsmoment in C und D, $\overline{CL} = \overline{DO} = \frac{1}{2} q l_1^2$ beträgt.

Ist hiernach im ersten Falle, Fig. 397, $\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2 > l_1^2$, oder $\left(\frac{l}{2}\right)^2 > 2 l_1^2$, d. i. $l > l_1 \sqrt{8}$, so fällt $\overline{MN} > \overline{CL}$ aus und man hat das Tragvermögen des Balkens, da sich $q = \frac{Q}{l + 2 l_1}$ setzen läßt:

$$\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2\right] \frac{Q}{2(l + 2 l_1)} = \frac{WT}{e}, \text{ wogegen}$$

$$\frac{Q l_1^2}{2(l + 2 l_1)} = \frac{WT}{e} \text{ zu setzen ist, wenn } l < l_1 \sqrt{8} \text{ ausfällt.}$$

Ungleichförmig belastete Balken. Wenn ein Balken AB, Fig. 399, ungleichförmig, jedoch so belastet ist, daß die Last auf den laufenden Fuß Balkenlänge mit der Entfernung von der Balkenmitte C nach den Enden zu gleichmäßig wächst, so finden folgende statischen Verhältnisse statt. §. 2

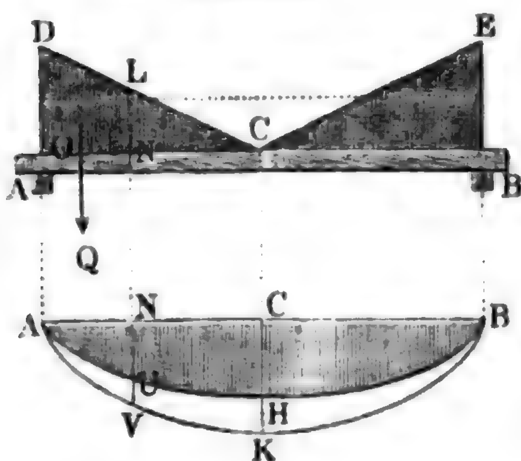


Fig. 399.

Ist $l = AB = 2\,CA = 2\,CB$, die Länge des Balkens, zwischen den Stützpunkten A und B gemessen, q das Gewicht der Last pro Flächeneinheit Querschnitt, und ϱ der Neigungswinkel $ACD = BCE$ der Begrenzungsebenen CD und CE der Last, so hat man das Gewicht eines Lastprismas ACD

$= BCE$, welches von einem Stützpunkte getragen wird,

$$\frac{Q}{2} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}\,.\,\overline{AD}\,.\,q = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 tang.\,\varrho\,.\,q = \frac{1}{8}\,q\,l^2\,tang.\,\varrho,$$

und folglich das Moment dieser Kraft in Hinsicht auf einen Punkt N, welcher um $AN = x$ vom Stützpunkte A absteht,

$$y_1 = \frac{Q}{2}\cdot x = \frac{1}{8}\,q\,l^2\,x\,tang.\,\varrho.$$

Das Gewicht des Lastprismas über $AN = x$ ist $q\left(\frac{AD + NL}{2}\right)AN$, und der Schwerpunkt desselben steht von N um $NO = \frac{2\,AD + NL}{AD + NL}\cdot\frac{AN}{3}$ ab, folglich ist das Moment dieses Prismas in Hinsicht auf N:

$$y_2 = q\,(2\,AD + NL)\,\frac{\overline{AN}^2}{6} = q\left[l\;tang.\,\varrho + \left(\frac{l}{2} - x\right)tang.\,\varrho\right]\frac{x^2}{6}$$

$$= \frac{q\,x^2}{6}\;tang.\,\varrho\;(\tfrac{3}{2}\,l - x),$$

und das ganze Biegungsmoment des Balkens in N:

$$\overline{NU} = y = y_1 - y_2 = \frac{q\;tang.\,\varrho}{24}\,(3\,l^2 x - 6\,l\,x^2 + 4\,x^3)$$

$$= \frac{q\,x\;tang.\,\varrho}{24}\,(3\,l^2 - 6\,l\,x + 4\,x^2) = \frac{q}{6}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - x_1^3\right]tang.\,\varrho,$$

wenn man $CN = x_1 = \frac{l}{2} - x$ setzt, also die Abscisse x_1 von C aus mißt.

Dasselbe ist für $x = \frac{l}{2}$ ein Maximum, und zwar $\frac{q\,l^3}{48}\,tang.\,\varrho$, daher ist auch das Tragvermögen dieses Balkens:

$$\frac{q\,l^3}{48}\;tang.\,\varrho,\ \text{d. i.}\ \frac{Q\,l}{12} = \frac{W\,T}{e},$$

während bei gleichmäßiger Belastung das Biegungsmoment

$$\overline{NV} = y_0 = \frac{q\,l\,x}{2} - \frac{q\,x^2}{2} = \frac{q\,x}{2}\,(l - x) = \frac{q}{2}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x_1^2\right]$$

$$= \frac{Q}{2\,l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x_1^2\right]\ \text{ist},$$

und daher das Tragvermögen $\frac{Q\,l}{8} = \frac{W\,T}{e}$ folgt.

250 **Zweifach belasteter Balken.** Wenn ein an beiden Enden frei aufliegender Balken AB, Fig. 400 und Fig. 401, in einem Punkte C, welcher von den Stützpunkten A und B um $CA = l_1$ und $CB = l_2$ absteht, eine Last P und überdies noch eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = q\,l$ trägt, so nehmen die Stütz-

punkte A und B die Lasten $R_1 = \frac{l_2 P}{l} + \frac{Q}{2}$, und $R_2 = \frac{l_1 P}{l} + \frac{Q}{2}$ auf, und es ist das Biegungsmoment in einem Punkte N, welcher um $AN = x$ vom Stützpunkte A absteht,

$$\overline{NV} = y = R_1 x - \frac{q x^2}{2} = \left(R_1 - \frac{q x}{2}\right) x = \frac{q}{2}\left(\frac{2 R_1}{q} - x\right) x.$$

Fig. 400.

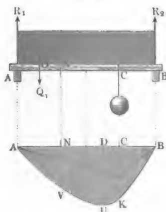
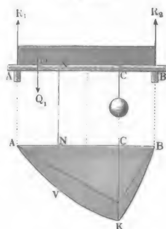


Fig. 401.



Dieses Moment ist ein Maximum für $\frac{2 R_1}{q} - x = x$, d. i. für $x = \frac{R_1}{q}$, und zwar

$$y = \overline{DU} = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{R_1}{q}\right)^2 = \frac{R_1^2}{2 q} = \frac{1}{2 q}\left(\frac{l_2 P}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 = \frac{l}{2 Q}\left(\frac{l_2}{l} P + \frac{Q}{2}\right)^2.$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß $CA > CB$, d. i. $l_1 > l_2$ ist, und $x < l_1$ ausfällt. Ist $x \overline{\gtrless} l_1$, so fällt das Maximum des Biegungsmomentes nach C (Fig. 401) und es folgt

$$y = \overline{CK} = R_1 l_1 - \frac{q l_1^2}{2} = \frac{l_1 l_2}{l} P + \frac{Q l_1}{2} - \frac{Q l_1^2}{2 l} = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{l_1 l_2}{l}.$$

Wenn man

$$x = \frac{R_1}{q} = \left(\frac{l_2 P}{l} + \frac{Q}{2}\right) \frac{l}{Q} = l_1 \text{ setzt, so folgt}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{l_1 - \frac{1}{2} l}{l_2} = \frac{2 l_1 - l}{l_2} = \frac{l_1 - l_2}{2 l_2};$$

und es ist das Tragvermögen des Balkens in dem Falle, wenn

$$\frac{P}{Q} < \frac{l_1 - l_2}{2 l_2} \text{ ausfällt,}$$

$$\left(\frac{Pl_2}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2Q} = \frac{WT}{e}$$, und dagegen dann, wenn sich

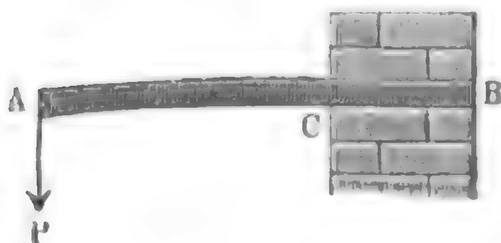
$$\frac{P}{Q} \gtreqless \frac{l_1 - l_2}{2l_2}$$ herausstellt, dasselbe

$$\left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{l_1 l_2}{l} = \frac{WT}{e}$$ zu setzen.

Diese Formeln finden insbesondere ihre Anwendung, wenn man das Gewicht G des Trägers mit in Rechnung bringen will, wo dann G statt Q einzusetzen ist.

§. 251 **Der Brechungsquerschnitt.** In den bisher behandelten Fällen der Biegung der Körper AB, Fig. 402, haben wir immer eine prismatische Form derselben, und folglich auch ein constantes Biegungsmoment WE vorausgesetzt, weshalb wir mittels der Grundformel (aus §. 215)

Fig. 402.



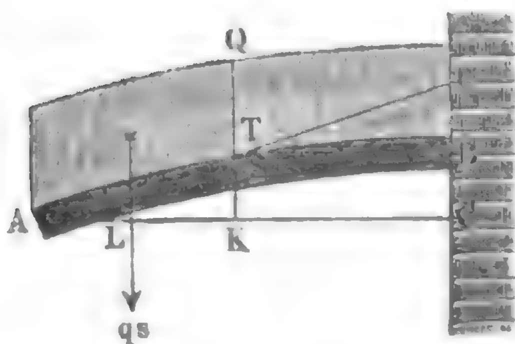
$$Pxr = WE$$

schließen können, daß der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{WE}{Px}$$

umgekehrt, und daher die Biegung selbst direct dem Momente (Px) der auf den Körper von außen wirkenden Kraft P proportional ist und folglich auch die Biegung mit Px zugleich ein Maximum und Minimum wird. Ist daher die Kraft P constant, oder wächst dieselbe mit x (wie z. B. $Q = qx$, in dem Fig. 403 abgebildeten Falle), so nimmt die Biegung mit x ab und zu, und ist auch mit x zugleich ein Maximum und Minimum. Wenn hingegen der Querschnitt F des Körpers an verschiedenen Stellen seiner Axe verschieden ist, so fällt natürlich auch $W = \Sigma(Fz^2)$ veränderlich aus, und dann ist der Krümmungshalbmesser r dem Quotienten $\frac{W}{Px}$, und also die Krümmung selbst dem Ausdrucke $\frac{Px}{W}$ proportional. Kommt es folglich darauf an, die Stellen der stärksten und schwächsten Biegungen zu finden, so hat man nur diejenigen Werthe für die Axenlänge x zu bestimmen, bei welchen der Ausdruck $\frac{Px}{W}$ zum Maximum und zum Minimum wird.

Fig. 403.



Ebenso ist der Formel

$$S = \frac{Pxe}{W}$$

aus §. 235 zufolge die Spannung S eines Körpers dem Ausdruck $\frac{Pxe}{W}$ proportional, und mit demselben ein Maximum oder Minimum.

Bei einem **prismatischen Körper** ist $\frac{W}{e}$ eine constante Zahl, und folglich diese Maximalspannung S nur dem Kraftmomente Px proportional; bei Körpern von **veränderlichem Querschnitte**, wo $\frac{W}{e}$ eine veränderliche Zahl ist, hängt dagegen diese Spannung auch noch mit von diesem Quotienten ab; im ersteren Falle ist diese Spannung mit Px zugleich, also bei einer in einem Punkte angreifenden Kraft P und bei einer auf x gleichmäßig vertheilten Last $Q = qx$, für $x = l$, ein Maximum; im zweiten Falle läßt sich hingegen dieses Maximum von S ohne nähere Kenntniß der Veränderlichkeit des Querschnittes im Voraus nicht angeben. Um diese Stelle oder den Querschnitt des Balkens zu finden, wo die Maximalspannung vorkommt, ist es nöthig, das Maximum von dem Ausdrucke $\frac{Pxe}{W}$ algebraisch zu bestimmen. Jedenfalls ist die Stelle im Körper, wo diese Maximalspannung vorkommt, auch diejenige, wo bei hinreichender Belastung die Spannung S zuerst in T oder gar in K übergeht, und folglich zunächst die Elasticitätsgrenze erreicht wird oder das Zerbrechen eintritt. Man nennt deshalb auch den dieser Stelle des Maximalwerthes von $\left(\frac{Pxe}{W}\right)$ entsprechenden Querschnitt des Körpers den **Brechungsquerschnitt** (franz. section de rupture; engl. section of rupture) oder auch den **gefährlichen** (schwachen) Querschnitt.

Hat der Körper einen **rectangulären Querschnitt** mit der veränderlichen Breite u und der veränderlichen Höhe v, so ist

$$\frac{W}{e} = \frac{uv^2}{6},$$

und daher der schwache Querschnitt durch das Maximum von $\frac{Px}{uv^2}$ oder das Minimum von $\frac{uv^2}{Px}$ bestimmt. Bei einem Körper mit **elliptischem Querschnitte**, dessen veränderliche Halbaxen u und v sind, hat man:

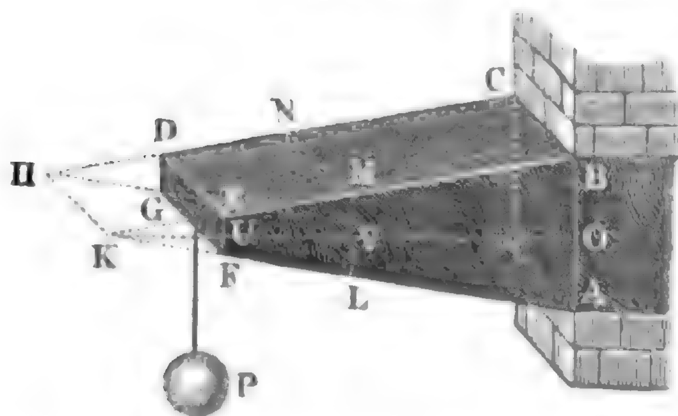
$$\frac{W}{e} = \frac{\pi uv^2}{4},$$

und daher wieder das Minimum von $\frac{u\,v^2}{P\,x}$ aufzusuchen, wenn es darauf ankommt, die schwache Stelle des Körpers zu bestimmen.

Bei constantem Gewichte kommt P ganz außer Betracht, ist also bloß das Minimum von $\frac{u\,v^2}{x}$ zu ermitteln, ist dagegen das Gewicht $Q = q\,x$, also gleichmäßig auf den Balken vertheilt, so muß man das Minimum von $\frac{u\,v^2}{x^2}$ bestimmen, um den Brechungsquerschnitt zu finden.

§. 252 Bildet der Körper $ACDF$, Fig. 404, einen abgestumpften Keil, oder ein liegendes Prisma mit trapezoidaler Seitenfläche $ABEF$, dessen unveränderliche Breite $BC = DE = b$ ist, und wirkt die Kraft P an dem Ende DF desselben, so hat man nur das Minimum von $\frac{v^2}{x}$ zu ermitteln, um den schwachen Querschnitt desselben zu finden. Setzen wir die Höhe $DG = EF$ seiner Endfläche $= h$ und die Höhe KU des Ergänzungsstückes HKU, $= c$, und nehmen wir unserer seitherigen Bezeichnung entsprechend an, daß der Brechungsquerschnitt LMN um $UV = x$ von der Endfläche DEF abstehe, so haben wir die Höhe desselben:

Fig. 404.



$$ML = v = h + \frac{x}{c}\,h = h\left(1 + \frac{x}{c}\right),$$

und daher nur das Minimum des Ausdruckes:

$$\frac{v^2}{x} = \frac{h^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)^2 = h^2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{c} + \frac{x}{c^2}\right),$$

oder, da h und c bestimmt sind, nur von $\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}$ zu ermitteln.

Nimmt man $x = c$ an, so ergiebt sich der letzte Ausdruck $= \frac{2}{c}$, macht man aber x wenig (um x_1) größer oder kleiner, so erhält man:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c \pm x_1} = \frac{1}{c\left(1 \pm \frac{x_1}{c}\right)} = \frac{1}{c}\left(1 \mp \frac{x_1}{c} + \frac{x_1^2}{c^2}\right) \text{ und}$$

$$\frac{x}{c^2} = \frac{c \pm x_1}{c^2} = \frac{1}{c} \pm \frac{x_1}{c^2},$$

folglich

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2} = \frac{2}{c} + \frac{x_1^2}{c^3},$$

also jedenfalls größer als $\frac{2}{c}$. Es giebt also $x = c$ das gesuchte Minimum, d. i. der schwache Querschnitt LMN steht um die Höhe $KU = c$, nämlich eben so viel von der Endfläche DEF ab, als die abgeschnittene Kante HK auf der anderen Seite.

Die Höhe dieses schwachen Querschnittes ist

$$v = h + \frac{h}{c} \cdot c = 2h,$$

und folglich die Tragkraft dieses Körpers:

$$P = \frac{b\,(2\,h)^2}{c} \cdot \frac{T}{6} = \frac{4\,b\,h^2}{c} \cdot \frac{T}{6}.$$

Ein parallelepipedischer Balken hat bei gleicher Länge $l = c$, gleicher Breite b und gleichem Volumen $V = b\,h_1\,l$ die Höhe:

$$h_1 = \frac{h + 2\,h}{2} = {}^3/_2\,h,$$

und folglich die Tragkraft:

$$P = \frac{b\,h_1^2}{c} \cdot \frac{T}{6} = \frac{9}{4}\,\frac{b\,h^2}{c} \cdot \frac{T}{6},$$

trägt also nur $^9/_{16}$ mal so viel als der behandelte keilförmige Körper.

Ist der Körper eine abgekürzte Pyramide, so schneiden sich die Ebenen AE, BD u. s. w. gehörig erweitert, in einer Spitze, und wenn man die Höhe der abgeschnittenen oder Ergänzungspyramide wieder mit c bezeichnet, so ist:

$$MN = u = b\left(1 + \frac{x}{c}\right) \text{ und } LM = v = h\left(1 + \frac{x}{c}\right);$$

und man hat daher das Minimum von

$$\frac{u\,v^2}{x} = \frac{b\,h^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)^3$$

oder von

$$\frac{1}{x} + \frac{3\,x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}$$

zu ermitteln, um den Brechungsquerschnitt zu finden. Durch Differenzialrechnung findet man

$$x = {}^1/_2\,c,$$

auch kann man sich leicht von der Richtigkeit dieses Werthes überzeugen, wenn man einmal $x = \frac{1}{2}c + x_1$ und ein anderes Mal $\frac{1}{2}c - x_1$ setzt. In jedem Falle erhält man einen größeren Werth als

$$\frac{2}{c} + \frac{3}{2c} + \frac{1}{4c} = \frac{15}{4c}, \text{ welchen der Ausdruck:}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}$$

für $x = \frac{1}{2}c$ annimmt. Es ist also der Abstand der Brechungsfläche LN von der Endfläche DF gleich der Hälfte der Höhe c des Ergänzungsstückes der abgestumpften Pyramide. Die Dimensionen dieser Fläche sind:

$$u = b\,(1 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}\,b \text{ und } v = \tfrac{3}{2}\,h,$$

folglich ist die gesuchte Tragkraft des Balkens:

$$P = \frac{\frac{3}{2}\,b\,(\frac{3}{2}\,h)^2}{\frac{1}{2}\,c}\,\frac{T}{6} = \frac{27}{4}\,\frac{b\,h^2}{c}\,\frac{T}{6}.$$

Für einen Körper in Form eines abgekürzten Kegels hat man bei dem Halbmesser r seiner Endfläche und der Höhe c des abgeschnittenen Stückes, den Halbmesser der Brechungsfläche, $r_1 = \frac{3}{2}\,r$, und daher:

$$P = \frac{27}{4} \cdot \frac{\pi\,r^3}{c} \cdot \frac{T}{4}.$$

§. 253 **Körper von gleichem Widerstande.** Wenn ein Körper so gebogen wird, daß sowohl die Maximalspannung S auf der Zugseite der neutralen Axe als auch die größte Spannung auf der Druckseite derselben an allen Stellen eine und dieselbe ist, so heißt er ein Körper von gleichem Widerstande (franz. corps d'égale résistance; engl. body of the strongest form). Ein solcher Körper erreicht bei einer gewissen Kraft in allen Querschnitten die Grenze der Elasticität zugleich, hat also an jeder Stelle den der Tragkraft entsprechenden Querschnitt, und erfordert deshalb unter allen Körpern, bei übrigens gleichen Verhältnissen, die kleinste Menge an Stoff. Wegen Ersparniß und zur Vermeidung unnöthiger Belastungen sind daher in dem Bauwesen vorzugsweise solche Körperformen in Anwendung zu bringen. Da die stärkste Spannung in einem Querschnitte durch den Ausdruck

$$S = \frac{Pxe}{W} \text{ (s. §. 251)}$$

bestimmt ist, so fordert ein Körper von gleichem Widerstande, daß die Größe $\frac{Pxe}{W}$ für alle Querschnitte des Körpers eine und dieselbe sei.

Ist die Kraft P constant und greift dieselbe am Ende des Körpers an, so hat man folglich einfacher

$$\frac{ex}{W} \text{ oder } \frac{W}{ex}$$

constant zu setzen, wogegen dann, wenn die Kraft $Q = qx$, also gleichmäßig auf den Balken vertheilt ist,

$$\frac{ex^2}{W} \text{ oder } \frac{W}{ex^2}$$

constant gefordert werden muß. Bei einem Balken mit rectangulären Querschnitten (s. §. 251), deren Dimensionen u und v sind, ist im ersteren Falle:

$$\frac{uv^2}{x}, \text{ und im zweiten:}$$

$$\frac{uv^2}{x^2} \text{ constant zu setzen.}$$

Ist an einer anderen Stelle in dem Abstande l von der Endfläche die Breite b und die Höhe h, so hat man folglich im ersteren Falle:

$$\frac{uv^2}{x} = \frac{bh^2}{l},$$

und dagegen im letzteren:

$$\frac{uv^2}{x^2} = \frac{bh^2}{l^2}$$

zu fordern. Bei constanter Breite $u = b$ ist daher im ersteren Falle:

$$\frac{v^2}{x} = \frac{h^2}{l}, \text{ d. i.:}$$

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l} \text{ oder } \frac{v}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}.$$

Da die Gleichung $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l}$ einer Parabel zukommt (s. §. 35, Anmerkung), so hat folglich das Längenprofil ABE, Fig. 405, eines solchen

Fig. 405.

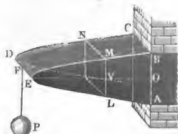
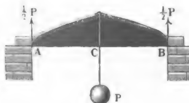


Fig. 406.

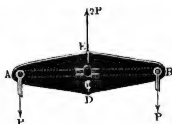


Körpers die Form einer Parabel, und zwar einer Parabel, deren Scheitel E mit dem End- oder Aufhängepunkt der Last P zusammenfällt.

Ruht der Balken AB, Fig. 406, von gleicher Breite, mit seinen Enden auf, und trägt er die Last P in seiner Mitte, oder wird der Balken AB,

Fig. 407, in der Mitte C unterstützt und an den Enden A und B durch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte ergriffen, so erhält das Längenprofil die Gestalt von zwei in der Mitte zusammenstoßenden Parabeln. Der letzte Fall kommt bei Balanciers und Wagbalken vor. Da dieselben durch die Zapfenlöcher A, C, B geschwächt werden, so versieht man sie noch mit Rippen, oder giebt ihnen noch ein Mittelstück AB.

Fig. 407.



Ist die Höhe $r = h$ constant, so hat man:

$$\frac{u}{x} = \frac{b}{l} \text{ oder } \frac{u}{b} = \frac{x}{l},$$

dann ist also die Breite u ihrer Entfernung von dem Ende proportional, es bildet deshalb die Horizontalprojection des Balkens ACE, Fig. 408, ein Dreieck BCD, und der ganze Balken einen Keil mit verticaler, in die Kraftrichtung fallender Schärfe DE.

Fig. 408.

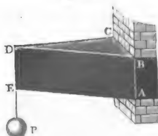


Fig. 409.

Man ersetzt gewöhnlich die parabolischen Träger in Fig. 405 durch ebenflächige Träger, wie ACB in Fig. 409. Um hierbei so viel wie möglich Material zu ersparen, giebt man diesem Träger in der Mitte M dieselbe Höhe $MO = h_m = h\sqrt{1/2}$, welche der parabolische Träger erhalten würde, und führt die ebene Begrenzungsfläche CD tangential an die entsprechende Parabelfläche. Nun ist

$$\frac{BC}{MO} = \frac{3\,AM}{2\,AM} = {}^3/_2, \text{ und } \frac{AD}{MO} = \frac{AM}{2\,AM} = {}^1/_2;$$

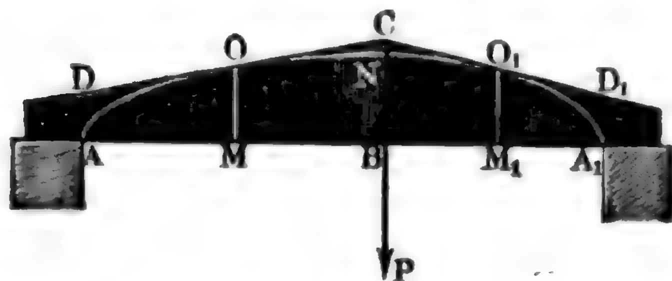
daher folgt, wenn man die größere Höhe BC des Körpers durch h_1 und die kleinere Höhe AD desselben durch h_2 bezeichnet,

$$h_1 = {}^3/_2\, h_m = {}^3/_2\, h\sqrt{1/2} = 1{,}0607\, h \text{ und}$$
$$h_2 = {}^1/_2\, h_m = {}^1/_2\, h\sqrt{1/2} = 0{,}3536\, h,$$

wobei die Höhe $BN = h$ mittels der bekannten Formel $Pl = bh^2 \frac{T}{6}$ zu bestimmen ist.

Das Volumen eines solchen ebenflächigen Trägers ist $\frac{bl(h_1 + h_2)}{2}$ $= 0{,}7071\, b l h$, wogegen das des parabolischen Trägers von gleichem Widerstande, $= \frac{2}{3} b l h = 0{,}667\, b l h$, d. i. 5,7 Procent kleiner ausfällt.

Fig. 410.

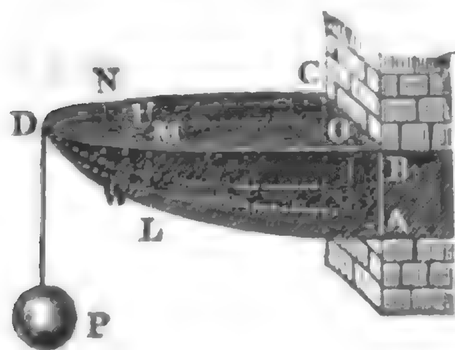


Ebenso kann man den an den Enden A und B unterstützten Träger ANA_1, Fig. 410, aus zwei ebenflächigen Stücken zusammensetzen, welche im Aufhängepunkte die gemeinschaftliche Höhe $\overline{BC} = h_1 = 1{,}0607\, h$ und an den Enden die Höhe $\overline{AD} = \overline{A_1 D_1} = h_0 = 0{,}3536\, h$ haben; nur ist hier die Höhe $\overline{BN} = h$ durch die Formel

$$\frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{b h^2 T}{6} \text{ zu bestimmen.}$$

Soll der Körper ABD, Fig. 411, lauter ähnliche Querschnitte LMN, ABC u. s. w. haben, so ist zu setzen:

Fig. 411.



$$\frac{v}{h} = \frac{u}{b}, \text{ daher:}$$

$$\frac{u \cdot u^2 h^2}{b^2 x} = \frac{b h^2}{l},$$

d. i.:

$$\frac{u^3}{b^3} = \frac{x}{l}, \text{ oder } \frac{u}{b} = \frac{v}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}};$$

dann wachsen also die Breiten und Höhen wie die Cubikwurzeln aus den entsprechenden Hebelarmen. In der achtfachen Entfernung vom Ende ist z. B. die Höhe und Breite nur doppelt so groß als in der einfachen Entfernung.

Man kann diesen Körper durch eine abgekürzte Pyramide $ACEG$, Fig. 412 (a. f. S.), ersetzen, welcher in der halben Länge die Höhe $MO = h_m$ $= \sqrt[3]{1/2} \cdot h = 0{,}7937\, h$ und die Breite $MN = b_m = \sqrt[3]{1/2} \cdot b = 0{,}7937\, b$ mit dem gefundenen Körper von genau gleichem Widerstande gemeinschaftlich hat. Für den Tangentenwinkel der Curve $\frac{v}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$, oder $v = \frac{h}{\sqrt[3]{l}} x^{1/3}$, ist nach analyt. Hülfslehren Art. 10, $tang.\, \alpha = \frac{h}{3\sqrt[3]{l}} x^{-2/3} = \frac{h}{3\sqrt[3]{l x^2}}$, daher

folgt für

$$\frac{x}{l} = {}^1\!/_2,\ {}^1\!/_2\, l\, tang.\, \alpha = {}^1\!/_6\, h \sqrt[3]{\left(\frac{l}{x}\right)^2} = {}^1\!/_6\, h \sqrt[3]{4} = \frac{h}{3}\sqrt[3]{{}^1\!/_2}$$

$= 0,2646\, h$, und ebenso folgt für die Curve

$$\frac{u}{b} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}},\ tang.\, \beta = \frac{b}{3\sqrt[3]{l^2 x^2}},\ \text{und}$$

$${}^1\!/_2\, l\, tang.\, \beta = \frac{b}{3}\sqrt[3]{{}^1\!/_2}.$$

Hieraus ergeben sich nun die Dimensionen der großen Grundfläche ABC:

$AB = h_1 = h_m + {}^1\!/_2\, l\ tang.\, \alpha = {}^4\!/_3 \sqrt[3]{{}^1\!/_2}\, .\, h = 1,0583\, h$ und

$BC = b_1 = b_m + {}^1\!/_2\, l\ tang.\, \beta = {}^4\!/_3 \sqrt[3]{{}^1\!/_2}\, .\, b = 1,0583\, b$,

sowie die der kleinen Grundfläche EFG:

Fig. 412.

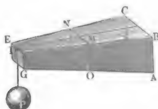


Fig. 413.

$FG = h_2 = h_m - {}^1\!/_2\, l\ tang.\, \alpha = {}^2\!/_3 \sqrt[3]{{}^1\!/_2}\, .\, h = 0,5291\, h$ und

$EF = b_2 = b_m - {}^1\!/_2\, l\ tang.\, \beta = {}^2\!/_3 \sqrt[3]{{}^1\!/_2}\, .\, b = 0,5291\, b$.

Uebrigens ist natürlich $Pl = \frac{b\, h^2\, T}{6}$ zu setzen.

Giebt man dem Körper von gleichem Widerstande **kreisförmige Querschnitte**, so gilt für den veränderlichen Querschnittshalbmesser die Gleichung

$$u = v = z = \sqrt[3]{\frac{x}{l}},$$

und wenn man diesen Körper durch einen **abgekürzten Kegel** ABE, Fig. 413, ersetzt, so sind die Halbmesser desselben:

$MO = r_m = \sqrt[3]{{}^1\!/_2}\, .\, r = 0,7937\, r,\ CA = r_1 = 1,0583\, r$ und

$DE = r_2 = 0,5291\, r$,

und es ist der Halbmesser r der Grundfläche des Körpers von gleichem Widerstande nach der Formel

$$Pl = \frac{\pi\, r^3}{4}\, T \text{ zu berechnen.}$$

Ist ein Balken **gleichförmig belastet** und die **Breite unveränderlich**, also $u = b$, so hat man:

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x^2}{l^2}, \text{ also auch:}$$

$$\frac{v}{h} = \frac{x}{l},$$

und es erhält deshalb derselbe die Gestalt eines Keiles mit triangulärem Längenprofil ABD, Fig. 414.

Fig. 414.

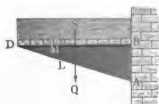
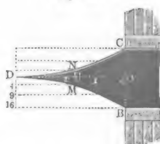


Fig. 415.

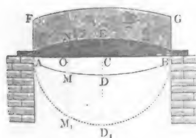


Bei constanter Höhe ist in diesem Falle $\frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2}$, und daher der Grundriß des Balkens eine von umgekehrten Parabelbögen BD und CD begrenzte Fläche BDC, wie Fig. 415.

Macht man wieder ähnliche Querschnitte, so ist $\frac{u^3}{b^3} = \frac{v^3}{h^3} = \frac{x^2}{l^2}$, dann hat man es also sowohl im Vertical- als auch im Horizontalprofile mit der cubischen Parabel, bei welcher die Cuben der Ordinaten wie die Quadrate der Abscissen wachsen, zu thun.

Wird ein in beiden Enden aufruhender Körper AEB, Fig. 416, gleichförmig und zwar auf den laufenden Fuß durch q, also auf die ganze Länge $AB = l$ durch $Q = ql$ belastet, so hat man das Kraftmoment für einen Punkt O in der Entfernung $AO = x$ von einem Stützpunkte A:

Fig. 416.



$$\frac{Q}{2} \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2}\,(lx - x^2),$$

dagegen für die Mitte C:

$$= \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Ql}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

Nehmen wir einen Körper von unveränderlicher Breite b an, so haben wir zu setzen:

$$bv^2 \cdot \frac{T}{6} = \frac{q}{2}\,(lx - x^2) \text{ und}$$

$$bh^2 \cdot \frac{T}{6} = \frac{ql^2}{8},$$

wenn h die Höhe CE des Körpers in der Mitte bezeichnet, und es folgt nun durch Division:

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{lx - x^2}{{}^1/_4\, l^2}, \text{ oder}$$

$$v^2 = \left(\frac{h}{{}^1/_2\, l}\right)^2 (lx - x^2).$$

Wäre $h = {}^1/_2\, l$, so würde $v^2 = lx - x^2$, und deshalb das Längenprofil der mit ${}^1/_2\, l$ als Halbmesser construirte Kreis AD_1B sein; weil aber $lx - x^2$ noch durch $\left(\frac{h}{{}^1/_2\, l}\right)^2$ zu multipliciren ist, um das Quadrat v^2 der jedesmaligen Höhe $MO = NO$ zu erhalten, so geht dieser Kreis in eine Ellipse ADB oder AEB über, deren Halbaxen $CA = a_1 = {}^1/_2\, l$ und $CD = CE = b_1 = h$ sind.

Man kann diesen Körper durch einen ebenflächigen Träger $AABDB$, Fig. 417, ersetzen, welcher in dem Abstande $AM = {}^1/_4\, l$ von den Stützpunkten B und B, die Höhe $MO = h_m$ $= \frac{h}{{}^1/_2\, l} \sqrt{{}^1/_4\, l^2 - {}^1/_{16}\, l^2}$ $= {}^1/_2 \sqrt{3}\,.\,h$ hat. Der Neigungswinkel α der Fläche BD gegen die Axe AC ist durch die Gleichung

Fig. 417.

$$tang.\,\alpha = \frac{h}{{}^1/_2\, l} \cdot \frac{{}^1/_2\, l - x}{\sqrt{lx - x^2}} = \frac{2h}{l} \cdot \frac{{}^1/_4\, l}{\sqrt{{}^3/_{16}\, l^2}} = \frac{2h}{\sqrt{3}} = {}^2/_3 \sqrt{3}\,.\,h$$

bestimmt; daher folgt $\frac{l}{4}\, tang.\,\alpha = {}^1/_6 \sqrt{3}\,.\,h$ und die Höhe des Körpers in der Mitte:

$$CD = MO + \frac{l}{4}\, tang.\,\alpha = {}^2/_3 \sqrt{3}\,.\,h = 1{,}1548\, h,$$

dagegen die Höhe desselben an den Enden:

$$AB = MO - \frac{l}{4}\, tang.\,\alpha = {}^1/_3 \sqrt{3}\,.\,h = 0{,}5774\, h.$$

255) Die Biegung eines Körpers von gleichem Widerstande ist natürlich unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen eine größere als die eines prismatischen Balkens. Für den Fall, daß der Balken an einem

Ende festgeklemmt ist und am anderen Ende von einer Kraft P ergriffen wird, bestimmt sich die Durchbiegung wie folgt.

Die bekannte Proportion $\frac{r}{e} = \frac{E}{T}$ führt auf die Formel $r = \frac{E}{T} e$, wodurch der Krümmungshalbmesser als Function des Abstandes e ausgedrückt wird. Ist nun noch die Abhängigkeit zwischen e und x bekannt, so erhält man auf diese Weise einen Ausdruck zwischen r und x, aus welchem sich auf die (aus §. 218) bekannte Weise die Coordinatengleichung der entsprechenden elastischen Linie entwickeln läßt. Setzen wir eine kleine Biegung voraus, so können wir wieder die Bogenlänge s der Abscisse x, und folglich auch die Elemente ∂s und ∂x einander gleichsetzen und daher, wie oben,

$$r = -\frac{\partial x}{\partial \alpha} \text{ annehmen.}$$

Hiernach erhalten wir:

$$\partial x = -\frac{E}{T} e \partial \alpha,$$

und daher durch Integration den Tangentenwinkel:

$$\alpha = -\frac{T}{E}\int \frac{\partial x}{e}.$$

Bei einem Balken mit rectangulärem Querschnitt ist $e = \frac{1}{2} v$, und daher

$$\alpha = -\frac{2\,T}{E}\int \frac{\partial x}{v}.$$

Wäre nun noch die Breite des Balkens constant, also $v = b$, so hätte man:

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l} \text{ (s. §. 253), daher:}$$

$$v = h\sqrt{\frac{x}{l}} \text{ und}$$

$$\alpha = -\frac{2\,T}{E}\cdot\frac{\sqrt{l}}{h}\int x^{-1/2}\partial x = -\frac{2\,T}{E}\cdot\frac{\sqrt{l}}{h}\cdot 2\sqrt{x} + Con.,$$

also, da für $x = l$, $\alpha =$ Null und folglich $Con. = \frac{2\,T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}\cdot 2\sqrt{l}$ ist,

$$\alpha = \frac{4\,T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}(\sqrt{l} - \sqrt{x}).$$

Setzt man nun noch $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, so erhält man:

$$\partial y = \frac{4\,T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}(\sqrt{l} - \sqrt{x})\,\partial x,$$

und daher die gesuchte Coordinatengleichung:

$$y = \frac{4\,T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}(x\sqrt{l} - \tfrac{2}{3}\,x\sqrt{x}) = 4\frac{T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}(\sqrt{l} - \tfrac{2}{3}\sqrt{x})x$$

Für $x = l$ geht y in a über; es ist also für diesen Fall die Größe der Durchbiegung:

$$a = \frac{4}{3} \frac{Tl^2}{Eh}.$$

Noch ist $Pl = bh^2 \cdot \frac{T}{6}$, oder $T = \frac{6\,Pl}{bh^2}$, daher ergiebt sich endlich die Durchbiegung:

$$a = \frac{8\,Pl^3}{Ebh^3} = 2 \cdot \frac{4\,Pl^3}{Ebh^3},$$

d. i. 2 mal so groß als bei dem parallelepipedischen Balken von der Breite b und Höhe h (vergl. §. 227).

Wirkt die Kraft in der Mitte des Körpers, während der Balken an den beiden Enden aufliegt, so ist natürlich statt P, $\frac{P}{2}$, und statt l, $\frac{l}{2}$ einzuführen, und es fällt natürlich

$$a = \frac{1}{16} \cdot \frac{8\,Pl^3}{Ebh^3},$$

d. i. sechszehn Mal kleiner aus als bei einseitiger Wirkung der Kraft.

Bei einem Körper von gleichem Widerstande mit triangulärer Basis wie Fig. 408 darstellt, ist die veränderliche Breite $u = \frac{x}{l} b$, und

$$Prx = \frac{uh^3}{12} E = \frac{bh^3 x}{12 l} E,$$

daher der Krümmungshalbmesser $r = \frac{bh^3}{12 l} \frac{E}{P}$ constant, also die Biegungscurve ein Kreis, und die entsprechende Bogenhöhe

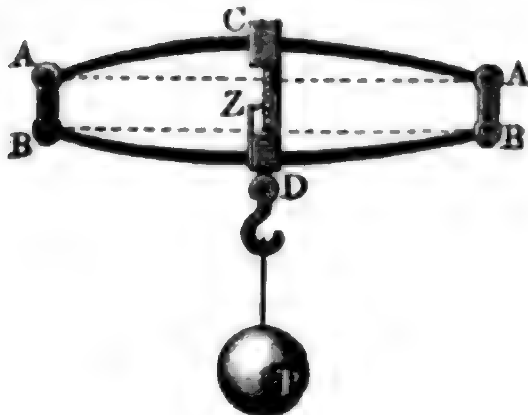
$$a = \frac{l^2}{2r} = \frac{6\,Pl^3}{bh^3 E} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4\,Pl^3}{bh^3 E},$$

d. i. $\frac{3}{2}$ mal so groß als bei dem parallelepipedischen Balken.

256 **Biegung der Metallfedern.** Körper von gleichem Widerstande, sowie auch solche, welche sich nach einem Kreise biegen, kommen vorzüglich bei den Stahl- und anderen Metallfedern in Anwendung. Die Federn, welche zu den sogenannten Federdynamometern verwendet werden, bestehen aus dem feinsten Stahl, haben bei einer Länge von $\frac{1}{2}$ bis 1 Meter eine Breite von 4 bis 5 Centimeter und in der Mitte eine Dicke von 8 bis 21 Millimeter. Sie bilden Körper von gleichem Widerstande, haben also ein aus zwei Parabeln zusammengesetztes Längenprofil (siehe §. 253). Um die Wirkung derselben zu erhöhen, wird jedes Federdynamometer aus zwei solchen parabolischen Federn, wie AA, BB, Fig. 418, zusammengesetzt, welche an den Enden durch

Gelenke AB, AB verbunden werden. (S. Morin's Leçons de Mécaniques pratique, Résistance des matériaux, No. 198.) Diese Dynamometer messen die an der Fassung D in der Mitte der einen Feder angreifende Kraft P durch den Weg s des Punktes D, welcher natürlich gleich ist der Größe der Durchbiegung beider Federn zusammen. Nun ist aber nach dem Obigen:

Fig. 418.



$$a = {}^1/_{16} \frac{8 P l^3}{b h^3 E},$$

daher hat man hier

$$s = 2a = \frac{P l^3}{b h^3 E},$$

und folglich

$$P = \left(\frac{b h^3 E}{l^3}\right) s,$$

die dem Zeigerwege s entsprechende Spannkraft der Feder.

Bei einem Versuche an einem solchen Instrumente, dessen Federn folgende Dimensionen hatten: $b = 0{,}05$, $h = 0{,}0211$, $l = 1{,}0$ Meter, fiel bei der Last $P = 1000$ Kilogramm der Zeigerweg $s = 9{,}7$ Millimeter aus; daher ist für dieses Dynamometer der Coefficient

$$\frac{b h^3 E}{l^3} = \frac{P}{s} = \frac{1000}{9{,}7} = 103{,}09,$$

und für andere Fälle

$$P = 103{,}09\, s \text{ Kilogramm}$$

zu setzen, wenn s in Millimetern angegeben, oder die Zeigerscala in Millimeter eingetheilt ist.

Wenn man statt der parabolischen Federn trianguläre Federn von gleichem Widerstande (s. Fig. 408) anwendet, so ist

$$\frac{s}{2} = a = {}^1/_{16} \cdot \frac{6 P l^3}{b h^3 E}, \text{ daher}$$

$$P = {}^4/_3 \left(\frac{b h^3 E}{l^3}\right) s,$$

also um ein Drittel größer als bei dem Dynamometer mit parabolischen Federn.

Wagenfedern sollen mit einer großen Biegsamkeit ein großes Tragvermögen verbinden, wogegen die genaue Kenntniß der Beziehung zwischen P und a nicht nöthig ist. Aus diesem Grunde setzt man diese Federn oft aus über einander liegenden einfachen Federn zusammen. Besteht die zusammengesetzte Feder aus n über einander liegenden parallelepipedischen Einzelfedern, so ist bei der Breite b, Dicke h und Länge l der-

selben die Höhe des Bogens, welche der Kraft P am Ende A der ganzen Feder entspricht: $a = \frac{4 P l^3}{n E b h^3}$, und die Tragkraft

$$P = n \frac{b h^2}{l} \frac{T}{6}, \text{ daher auch}$$

$$a = {}^2/_3 \frac{T}{E} \frac{l^2}{h}, \text{ oder } \frac{a}{l} = {}^2/_3 \frac{T}{E} \frac{l}{h}.$$

Besteht die ganze Feder ACD, Fig. 419, aus n triangulären einfachen Federn, so hat man

$$a = \frac{6 P l^3}{n E b h^3}, \quad \text{während} \quad P = n \frac{b h^2}{l} \frac{T}{6}$$

unverändert bleibt, daher

$$a = \frac{T}{E} \frac{l^2}{h}, \text{ oder } \frac{a}{l} = \frac{T}{E} \frac{l}{h}.$$

Es wächst also in beiden Fällen das Maß $\frac{a}{l}$ der Biegsamkeit mit den Verhältnissen $\frac{T}{E}$ und $\frac{l}{h}$, und ist daher auch ebenso groß wie bei einer einfachen Feder von der $n$fachen Breite $(n b)$.

Fig. 419.

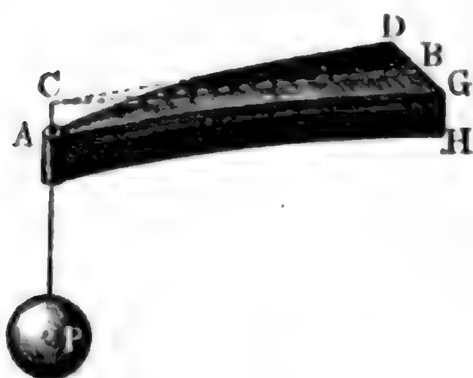
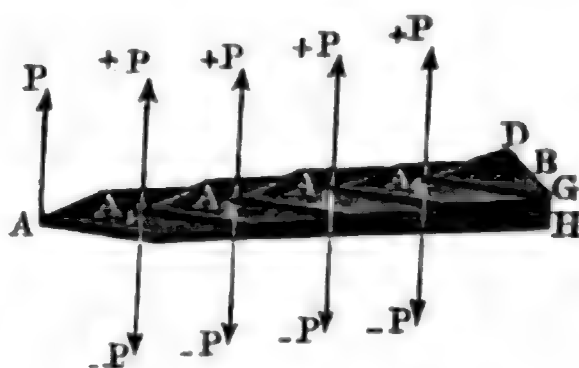


Fig. 420.



Um an Material zu ersparen, legt man Federn von verschiedenen Längen über einander und formt sie so, daß sie sich bei Einwirkung der Kraft P am Ende A der ganzen Feder nach Kreisbögen von ganz oder nahe gleichen Halbmessern krümmen. Die Kraft P biegt das unterste trianguläre Stück $A A_1$ der ganzen Feder ABH, Fig. 420, dessen Länge $= \frac{l}{n}$ ist, nach einem Kreisbogen vom Halbmesser $r = n \frac{b h^3}{12 l} \cdot \frac{E}{P}$, und damit das übrige parallelepipedische Stück der unteren Feder ebenso gebogen werde, ist nöthig, daß dieselbe in A_1 mit der Kraft P auf die folgende Feder drücke, weil dann das

Biegungsmoment dieser Feder gleich ist dem Momente $\frac{Pl}{n}$ eines Kräftepaares $(P, -P)$ mit der Armlänge $\frac{l}{n}$. Bei der zweiten Feder, welche um $\frac{l}{n}$ kürzer ist als die obere, wiederholt sich das Biegungsverhältniß der ersteren Feder; dieselbe biegt sich ebenfalls nach dem Krümmungshalbmesser $r = \frac{n b h^3}{12 l} \cdot \frac{E}{P}$, wenn das Endstück $A_1 A_2$ desselben triangulär, und das übrige Stück parallelepipedisch geformt ist, und wenn es in A_2 mit der Kraft P auf die dritte Feder drückt. Ebenso ist es mit der dritten Feder $A_2 G D$ u. s. w., bis zur letzten Feder, bei welcher das parallelepipedische Stück ganz fehlt, und welches in Folge der Kraft P am Ende ebenfalls nach dem obigen Halbmesser r gekrümmt ist. Die ganze Bogenhöhe dieser zusammengesetzten Feder ist $a = \frac{l^2}{2r} = \frac{6 P l^3}{n E b h^3}$, und die Tragkraft $P = n \frac{b h^2}{l} \frac{T}{6}$, daher bleibt

$$a = \frac{T}{E} \frac{l^2}{h}, \text{ oder } \frac{a}{l} = \frac{T}{E} \frac{l}{h}.$$

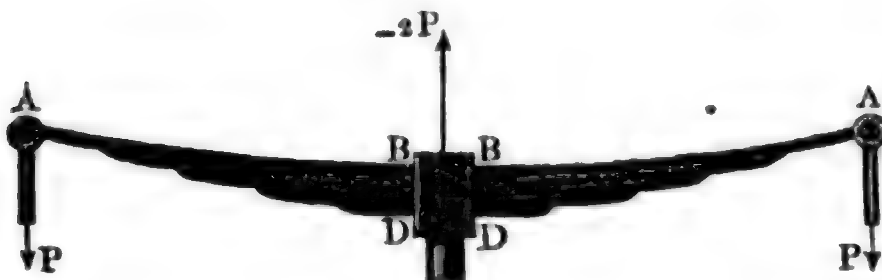
Es sind also hier die Biegungsverhältnisse genau dieselben wie bei dem Federwerke, welches aus lauter gleichen triangulären Einzelfedern zusammengesetzt ist; auch läßt sich leicht nachweisen, daß beide Federverbindungen eine gleiche Menge von Material erfordern.

Es ist übrigens nicht nöthig, die Federenden genau triangulär zu gestalten; man kann dafür auch jede andere Form von gleicher Krümmung anwenden, z. B. denselben eine constante Breite b und im Abstande x vom Ende A die Höhe

$$y = h \sqrt[3]{\frac{n x}{l}} \text{ geben.}$$

Eine solche Doppelfeder stellt Fig. 421 dar. Hier ist natürlich die ganze

Fig. 421



Tragkraft $2P$, übrigens aber die Länge l nicht von der Mitte, sondern von den Enden BD, BD der Fassung aus zu messen.

Anmerkung. Ueber die Wagenfedern ist nachzulesen: F. Reuleaux, die Construction und Berechnung der für den Maschinenbau wichtigsten Federarten. Winterthur 1857; ferner Redtenbacher: die Gesetze des Locomotivenbaues, Mannheim 1855, und Philips: Mémoire sur les ressorts en acier etc. in den Annales des Mines, Tome I, 1852.

Drittes Capitel.

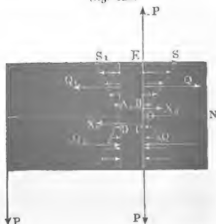
Die Wirkung der Schub-Elasticität bei der Biegung und der Drehung der Körper.

§. 257 **Die Schubkraft parallel zur neutralen Axe.** Bei einem Körper, welcher bloß der Zug- oder Druckkraft ausgesetzt ist, werden die Grundflächen AC und BD eines Körperelementes $ABCD$, Fig. 422, von entgegen-

Fig. 422.

gesetzten und sich das Gleichgewicht haltenden Kräften P_1 und $-P_1$ ergriffen, während die Seitenflächen AB und CD desselben frei von äußeren Kräften bleiben, da die benachbarten Körperelemente dieselbe Axenspannung erleiden wie das gedachte Element $ABCD$ selbst. Anders ist es aber bei einem der Biegung unterworfenen Körper, wo auf der einen Seite AB des Elementes $ABCD$ eine Spannung stattfindet, welche der auf der anderen Seite CD desselben entgegengesetzt ist, und in Folge der seitlichen Cohäsion in AB und CD das Element $ABCD$

Fig. 423.



von einem Kräftepaare ergriffen wird. Am stärksten tritt dieses Kräftepaar bei einem in der neutralen Axe befindlichen Elemente hervor; da hier das Stück des Körpers auf der Seite AB bloß einer Ausdehnung, und dagegen das auf der Seite CD nur einer Compression ausgesetzt ist.

Ist S die Spannung einer Faser in der Entfernung e von der neutralen Axe, bei dem Querschnitte Eins, so sind die Spannungen in den Theilen F_1, F_2, $F_3 \ldots$ des ganzen Körperquerschnittes, welche um z_1, z_2, $z_3 \ldots$ von der neutralen Axe abstehen:

$$\frac{F_1 z_1}{e} S, \quad \frac{F_2 z_2}{e} S, \quad \frac{F_3 z_3}{e} S \text{ u. s. w.},$$

und es folgt die ganze Spannung im Querschnitte $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$,

$$Q = \frac{S}{e}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots) = \frac{S}{e} \Sigma (F z).$$

Ist nun $F_1 + F_2 + \cdots$ der Theil des Querschnittes auf der einen Seite der neutralen Axe, so giebt auch Q die ganze Spannkraft auf dieser Seite der neutralen Axe an. Die Spannung auf der anderen Seite ist der Theorie des Schwerpunktes zufolge (vergl. §. 215), der ersteren der Größe nach zwar gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt.

Uebrigens hat man nach §. 235, $S = \frac{P x e}{W}$, also $\frac{S}{e} = \frac{P x}{W}$, daher folgt auch $Q = \frac{P x}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots)$.

In einem Querschnitte, welcher um $AB = x_1$ vom ersteren absteht, ist die Spannung

$$Q_1 = \frac{P(x - x_1)}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots);$$

daher ergiebt sich die ganze Kraft, mit welcher das Stück ABE über AB fortzugleiten sucht:

$$Q - Q_1 = \frac{P x_1}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots).$$

Ist nun b_0 die Breite des Querschnittes in der neutralen Axe, so folgt daher die Schubkraft längs einer Flächeneinheit in dieser Axe:

$$X_0 = \frac{Q - Q_1}{b_0 x_1} = \frac{P}{b_0 W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots) = \frac{P \Sigma (F z)}{b_0 W}.$$

Damit sich daher der Balken längs der neutralen Axe durch Abschieben nicht trenne, ist X_0 = dem Festigkeitsmodul K zu setzen, und damit er dieselbe Sicherheit gegen dieses Abschieben besitze, wie gegen das Zerbrechen, ist nöthig, daß X_0 höchstens den Tragmodul T erreiche, daß also

$$T = \frac{P}{b_0 W} \Sigma (F z), \text{ oder } P = \frac{b_0 W T}{\Sigma (F z)}, \text{ sowie}$$

$$b_0 = \frac{P}{T W} \Sigma (F z) \text{ sei.}$$

Uebrigens ist $\Sigma (F z)$ auch $= F_1 s_1 = F_2 s_2$, wenn F_1 und F_2 die Inhalte der zu beiden Seiten der neutralen Axe liegenden Theile des ganzen Querschnittes $F = F_1 + F_2$, und s_1, s_2 die Abstände der Schwerpunkte dieser Theile von der neutralen Axe bezeichnen.

Für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte $F = b h$ hat man $\Sigma (F z) = F_1 s_1 = \frac{b h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b h^2}{8}$, $W = \frac{b h^3}{12}$, und $b_0 = b$, daher $P = {}^2/_3\, b h T$ und $b_0 = b = {}^3/_2 \frac{P}{T h}$.

Für einen Träger mit kreisförmigem Querschnitte $F = \frac{\pi d^2}{4}$ ist, da der Schwerpunkt des Halbkreises um $\frac{2}{3 \pi} d$ vom Mittelpunkte absteht,

$$\Sigma (F z^2) = F_1 s_1 = \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2}{3 \pi} d = \frac{d^3}{12}, \text{ ferner nach §. 232,}$$

$$W = \frac{\pi d^4}{64}, \text{ und } b_0 = d, \text{ daher}$$

$$P = \frac{\pi d^5}{64 \,.\, {}^1/_{12}\, d^3} T = \frac{3 \pi}{16} d^2 T, \text{ und}$$

$$d = 4 \sqrt{\frac{P}{3 \pi T}} = 1{,}303 \sqrt{\frac{P}{T}}.$$

Ebenso ist für einen Träger mit elliptischem Querschnitte $F = \pi a b$, da hier $W = \frac{\pi a^3 b}{4}$, $F_1 s_1 = \frac{\pi a b}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot {}^2/_3\, a = {}^2/_3\, a^2 b$ und $b_0 = 2 b$ ist, $P = {}^3/_4\, \pi a b T$, oder $b = \frac{4}{3 \pi} \frac{P}{a T} = 0{,}4244 \frac{P}{a T}$.

Endlich hat man einen hohlen parallelepipedischen Träger mit dem Querschnitte $F = b h - b_1 h_1$ (Fig. 354, §. 228)

$$F_1 s_1 = \frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{8}, \; W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12} \text{ und } b_0 = b - b_1, \text{ daher}$$

$$P = {}^2/_3 \frac{(b - b_1)(b h^3 - b_1 h_1^3) T}{b h^2 - b_1 h_1^2}.$$

Die Schubkraft X nimmt ab, je mehr die Fläche derselben von der neutralen Axe absteht, und geht zuletzt am Umfang des Körpers in Null über, wo der Abstand von der neutralen Axe seinen größten Werth e erreicht hat. Die Größe der Schubkraft X in einem gegebenen Abstande $O B = h_1$ von der

neutralen Axe des Körpers MN, Fig. 424, giebt die oben gefundene Formel $X = \frac{P \Sigma (F z)}{b_0 W}$ ebenfalls an, wenn man statt $\Sigma (F z)$ die Summen der Producte $F_1 z_1$, $F_2 z_2 \ldots$ für die auf der einen Seite von $ABCD$ liegenden Flächenelemente $F_1, F_2 \ldots$, sowie statt b_0 die Breite b_1 der Fläche bei dem gegebenen Abstande h_1 einsetzt. Die Summe der Producte $F_n z_n$, $F_{n+1} z_{n+1}$ auf der anderen Seite ist übrigens gleich der Summe der Producte $F_1 z_1$, $F_2 z_2 \ldots$, weil die Producte derjenigen Flächentheile zu beiden Seiten der neutralen Axe, welche bis zu $\pm h_1$ reichen, sich gegenseitig aufheben.

Fig. 424.

Z. B. für einen Träger mit rectangulärem Querschnitte ist für die Mitten zwischen der neutralen Axe und den Endflächen, also im Abstande $\frac{h}{4}$ von der neutralen Axe:

$$\Sigma (F z) = F_1 s_1 = \frac{b h}{4} \cdot {}^3/_8 h = {}^3/_{32} b h^2,$$

daher die Schubkraft:

$$X = \frac{P \cdot {}^3/_{32} b h^2}{b \cdot \frac{b h^3}{12}} = {}^9/_8 \frac{P}{b h},$$

während sie in der neutralen Axe die Größe $X_0 = {}^4/_3 \frac{P}{b h}$ hat.

Die Schubkraft in der Querschnittsfläche. So wie sich die §. 25
Druck- oder Zugkräfte der Endflächen eines Balkenelementes $ABCD$, Fig. 424, das Gleichgewicht halten, ebenso sind die zwei Kräftepaare bildenden Schubkräfte desselben mit einander im Gleichgewichte. Ist nun ξ die Länge AB, sowie ζ die Höhe BC des Elementes, so hat man die Schubkräfte längs AB und CD, ξX und $-\xi X$, sowie das Moment des von diesen Kräften gebildeten Paares: $\xi X . \zeta = \xi \zeta X$; und ebenso die Schubkräfte längs BC und DA, ζZ und $-\zeta Z$, sowie das Moment des von denselben Kräften gebildeten Paares $= \zeta Z . \xi = \xi \zeta Z$; und es ist folglich zur Erhaltung des Gleichgewichtes nöthig, daß $\xi \zeta X = \xi \zeta Z$, d. i. daß $X = Z$ sei.

Es ist also auch die Formel $X = \frac{P\Sigma(Fz)}{bW}$ auf die Bestimmung der Schubkraft Z längs der ganzen Querschnittsfläche anwendbar. Sie ist z. B. für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte, bei einem Querschnittselemente in der neutralen Axe, $= {}^4/_3 \frac{P}{bh}$, und in einem solchen, welches $\pm {}^1/_4 h$ von der neutralen Axe absteht, $= {}^9/_8 \frac{P}{bh}$ u. s. w.

Die Summe der Schubkräfte längs des ganzen Querschnittes muß natürlich gleich sein der Kraft P, oder wenn mehrere Kräfte rechtwinkelig gegen die Balkenaxe wirken, gleich der Summe $\Sigma(P)$ dieser Kräfte. Dies läßt sich auch wie folgt nachweisen. Theilt man den größten Abstand e der Querschnittselemente von der neutralen Axe in n gleiche Theile, so kann man sich den Querschnitt auf der entsprechenden Seite der neutralen Axe aus den Streifen $b_1 \frac{h}{n}$, $b_2 \frac{h}{n}$, $b_3 \frac{h}{n}$ u. s. w. bestehend denken, welche in Hinsicht auf die neutrale Axe die Momente

$$b_1 \left(\frac{h}{n}\right)^2,\ 2\,b_2 \left(\frac{h}{n}\right)^2,\ 3\,b_3 \left(\frac{h}{n}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

haben, deren Summe $= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (1\,b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3 + 4\,b_4 + \cdots)$ ist.

In Hinsicht auf die Axe, welche um $\frac{h}{n}$ von der neutralen Axe absteht, ist diese Summe der Momente von den Flächenelementen außerhalb dieser Axe

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (2\,b_2 + 3\,b_3 + 4\,b_4 + \cdots).$$

ferner in Hinsicht auf die Axe im Abstande $2\frac{h}{n}$ ist sie

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (3\,b_3 + 4\,b_4 + \cdots) \text{ u. s. w.,}$$

und daher ist die Summe aller dieser Summen, bis zum Abstande e gegangen:

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 [b_1 + (2 + 2)\,b_2 + (3 + 3 + 3)\,b_3 + \cdots]$$

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 b_n).$$

Es folgt nun die Summe aller Schubkräfte längs des Querschnittes auf einer Seite der neutralen Axe:

$$R_1 = X_1 b^1 \left(\frac{h}{n}\right) + X_2 b_2 \left(\frac{h}{n}\right) + X_3 b_3 \left(\frac{h}{n}\right) + \cdots$$

$$= \frac{P}{W}\frac{h}{n} \cdot \text{ mal die zuletzt gefundene Summe}$$

$$= \frac{P}{W}\left(\frac{h}{n}\right)^3 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 . b_n).$$

Aber es ist auch das Maß des Biegungsmomentes für diese Querschnittshälfte:

$$W_1 = \Sigma(F z^2) = \frac{h}{n}\left[b_1 \left(\frac{h}{n}\right)^2 + b_2 \left(\frac{2h}{n}\right)^2 + b_3 \left(\frac{3h}{n}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^3 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 . b_n),$$

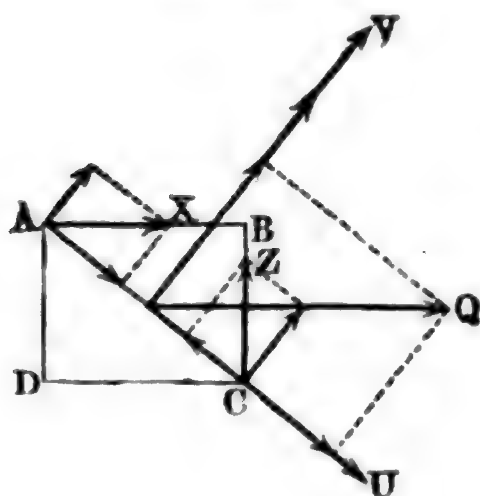
daher folgt die gesuchte Schubkraft längs dieser Fläche:

$$R_1 = \frac{P W_1}{W}.$$

Ebenso findet man auch für die Querschnittshälfte auf der anderen Seite von der neutralen Axe die Schubkraft $R_2 = \frac{P W_2}{W}$, und es folgt so schließlich die Schubkraft des ganzen Querschnitts, $R = \frac{P(W_1 + W_2)}{W} = P$, weil das Biegungsmoment W des ganzen Querschnittes gleich ist der Summe $W_1 + W_2$ von den Biegungsmomenten W_1 und W_2 der beiden Theile desselben.

Maximal- und Minimalspannungen. Aus den verschiedenen Spannungen in einem Querschnitte des gebogenen Körpers lassen sich nun auch durch gewöhnliche Kraftzerlegung und -Zusammensetzung die Spannungen in jedem andern Schnitte desselben bestimmen. Um die Spannungen eines Flächenelementes AC, Fig. 425, zu finden, dessen Ebene um den veränderlichen Winkel $BAC = \psi$ von der Längenaxe des Körpers abweicht, zerlegen wir die Spannungen in den Projectionen AB und BC dieses Flächenelementes in je zwei Seitenkräfte, wovon die eine in der Ebene von AC und die andere rechtwinkelig gegen AC wirkt, und vereinigen dann die Seitenkräfte in AC zu einer einzigen Schubkraft, sowie die Seitenkräfte, welche rechtwinkelig gegen AC gerichtet sind, zu einer einzigen Zug- oder Druckkraft. Bei der Breite Eins der Flächenelemente AB, BC §. 259

Fig. 425.



und AC, ist die Schubkraft längs AB, $= \overline{AB}\,.\,X$ zu setzen, und in die Seitenkräfte $\overline{AB}\,.\,X\cos.\psi$ und $\overline{AB}\,.\,X\sin.\psi$ zu zerlegen; und ebenso die Schubkraft längs BC, $= \overline{BC}\,.\,Z = \overline{BC}\,.\,X$ zu setzen, und in die Seitenkräfte

$$-\overline{BC}\,.\,X\sin.\psi \text{ und } \overline{BC}\,.\,X\cos.\psi \text{ zu zerlegen.}$$

Dagegen giebt die Zugkraft $\overline{BC}\,.\,Q = \overline{BC}\cdot\frac{Sz}{e}$, welche rechtwinkelig gegen $\overline{BC}$ gerichtet ist, die Seitenkräfte $\overline{BC}\,.\,Q\cos.\psi$ und $\overline{BC}\,.\,Q\sin.\psi$, und es folgt nun die ganze Schubkraft längs AC, bezogen auf die Einheit der Fläche:

$$U = (\overline{AB}\,.\,X\,.\cos.\psi + \overline{BC}\,.\,X\sin.\psi + \overline{BC}\,.\,Q\cos.\psi) : AC,$$

so wie die Zugkraft rechtwinkelig gegen AC, pro Flächeneinheit:

$$V = (\overline{AB}\,.\,X\sin.\psi + \overline{BC}\,.\,X\cos.\psi + \overline{BC}\,.\,Q\sin.\psi) : AC.$$

Nun ist aber $\frac{AB}{AC} = \cos.\psi$ und $\frac{BC}{AC} = \sin.\psi$, daher folgt auch

$$U = X(\cos.\psi)^2 - X(\sin.\psi)^2 + Q\sin.\psi\cos.\psi \text{ und}$$
$$V = 2X\sin.\psi\cos.\psi + Q(\sin.\psi)^2, \text{ oder, da}$$
$$(\cos.\psi)^2 - (\sin.\psi)^2 = \cos.2\psi \text{ und } 2\sin.\psi\cos.\psi = \sin.2\psi \text{ ist,}$$
$$U = X\cos.2\psi + \tfrac{1}{2}Q\sin.2\psi = X\cos.2\psi + \frac{Sz}{2e}\sin.2\psi,$$

und

$$V = X\sin.2\psi + Q(\sin.\psi)^2 = X\sin.2\psi + \frac{Sz}{2e}(1-\cos.2\psi).$$

Natürlich geben die Spannungen der Flächen AD und CD, welche in Vereinigung mit den Flächen AB und BC das Körperelement $ABCD$ völlig begrenzen, gleiche und entgegengesetzte Schub- und Zugkräfte. Dagegen ist für ein solches Körperelement auf der Druckseite von der neutralen Axe, Q negativ, und daher

$$U = X\cos.2\psi - \tfrac{1}{2}Q\sin.2\psi = X\cos.2\psi - \frac{Sz}{2e}\sin.2\psi, \text{ und}$$

$$V = X\sin.2\psi - \tfrac{1}{2}Q(1-\cos.2\psi) = X\sin.2\psi - \frac{Sz}{2e}(1-\cos.2\psi).$$

Um nun diejenigen Werthe des Neigungswinkels ψ zu finden, bei welchem sowohl die Schubkraft U als auch die Normalkraft V zum Maximum oder Minimum wird, setzen wir statt 2ψ, $2\psi + \mu$, wo μ einen sehr kleinen Zuwachs von 2ψ bezeichnet, und machen dann die Bedingung, daß dadurch der entsprechende Werth von U oder V nicht geändert werde. Für

$U = X\cos.2\psi + \tfrac{1}{2}Q\sin.2\psi$, erhält man so einen zweiten Werth

$$U_1 = X\cos.(2\psi+\mu) + \tfrac{1}{2}Q\sin.(2\psi+\mu)$$
$$= X(\cos.2\psi\cos.\mu - \sin.2\psi\sin.\mu) + \tfrac{1}{2}Q(\sin.2\psi\cos.\mu + \cos.2\psi\sin.\mu),$$

oder, da $\cos.\mu = 1$ gesetzt werden kann:

$U_1 = X\,cos.\,2\,\psi + \frac{1}{2}\,Q\,sin.\,2\,\psi - (X\,sin.\,2\,\psi - \frac{1}{2}\,Q\,cos.\,2\,\psi)\,sin.\mu$ wenn man nun $U_1 = U$ setzt, so muß $X\,sin.\,2\,\psi - \frac{1}{2}\,Q\,cos.\,2\,\psi = 0$ und daher

$$sin.\,2\,\psi = \frac{Q}{2\,X}\,cos.\,2\,\psi, \text{ d. i.:}$$

$$tang.\,2\,\psi = \frac{Q}{2\,X} = \frac{S\,z}{2\,X\,e} \text{ sein.}$$

Auch folgt hiernach

$$sin.\,2\,\psi = \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4\,X^2}} = \frac{S\,z}{\sqrt{(S\,z)^2 + (2\,X\,e)^2}}, \text{ sowie}$$

$$cos.\,2\,\psi = \frac{2\,X}{\sqrt{Q^2 + 4\,X^2}} = \frac{2\,X\,e}{\sqrt{(S\,z)^2 + (2\,X\,e)^2}},$$

und endlich der gesuchte Maximalwerth der Schubkraft U:

$$U_m = \frac{2\,X^2 + \frac{1}{2}\,Q^2}{\sqrt{Q^2 + 4\,X^2}} = \sqrt{(\frac{1}{2}\,Q)^2 + X^2} = \sqrt{\left(\frac{S\,z}{2\,e}\right)^2 + X^2}.$$

In der neutralen Axe ist $Q = 0$, daher $U_m = X_0$, und $tang.\,2\,\psi = 0$, d. i. $2\,\psi = 0$ und 180^0, oder $\psi = 0$ und 90^0; für die entfernteste Faser ist dagegen $X = 0$, und $z = e$, daher $U_m = \frac{Q}{2} = \frac{S}{2}$ und $tang.\,2\,\psi = \infty$, also $2\,\psi = 90^0$ und $\psi = 45$ Grad.

Von der neutralen Axe allmälig bis zur äußersten Faser gegangen, ändern sich folglich die Neigungswinkel für die Maximalspannungen allmälig von 0 und 90 Grad in solche von 45 Grad um, und geht die Maximalspannung allmälig aus X_0 in $\frac{S}{2}$ über.

Damit diese Spannung nicht größer als die nach der Formel $S = \frac{P\,x\,e}{W}$ zu berechnende und dem Tragmodul T gleichzusetzende Axenspannung S ausfalle, muß folglich X_0 höchstens $= S$, oder vielmehr

$$\frac{P\,\Sigma\,(F\,z)}{b_0\,W} < \frac{P\,x\,e}{W}, \text{ d. i. } \frac{\Sigma\,(F\,z)}{b_0} < x\,e \text{ sein.}$$

Setzt man ebenso in $V = X\,sin.\,2\,\psi + \frac{Q}{2}\,(1 - cos.\,2\,\psi)$, $\psi + \mu$ statt ψ ein und nimmt auch wieder $cos.\,\mu = 1$ an, so erhält man:

$$V_1 = X\,(sin.\,2\,\psi\,cos.\,\mu + cos.\,2\,\psi\,sin.\,\mu) + \frac{Q}{2}\,(1 - cos.\,2\,\psi\,cos.\,\mu$$
$$+ sin.\,2\,\psi\,sin.\,\mu) = X\,sin.\,2\,\psi + \frac{Q}{2}\,(1 - cos.\,2\,\psi)$$
$$+ \left(X\,cos.\,2\,\psi + \frac{Q}{2}\,sin.\,2\,\psi\right)sin.\mu,$$

und damit nun ψ auf ein Maximum oder Minimum von V führe, muß $V_1 = V$, also $X \cos. 2\psi + \frac{Q}{2} \sin. 2\psi = 0$, d. i.:

$$\tang. 2\psi = -\frac{2X}{Q} = -\frac{2Xe}{Sz}, \text{ sowie}$$

$$\sin. 2\psi = \mp \frac{2X}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} \text{ und } \cos. 2\psi = \pm \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} \text{ sein.}$$

Das entsprechende Minimum von V ist

$$V_n = -\frac{2X^2}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} + \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}}\right) = \frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + X^2}$$
$$= \frac{Sz}{2e} - \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2},$$

und dagegen das des Maximum:

$$V_m = \frac{2X^2}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} + \frac{Q}{2}\left(1 + \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}}\right) = \frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + X^2}$$
$$= \frac{Sz}{2e} + \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2}.$$

Es ist zu fordern, daß V_m höchstens gleich dem Tragmodul T gleich also

$$\frac{Sz}{2e} + \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2} < T \text{ sei.}$$

In der neutralen Axe ist $Q = 0$, daher $\tang. 2\psi = -\infty$, also $2\psi = 270^0$, und $\psi = 135$ oder 45 Grad, und $V_n = -X_0$, dagegen $V_m = +X_0$; in der entferntesten Faser ist dagegen $X = 0$, und $Q = S$, daher $\tang. 2\psi = 0$, also $2\psi = 0$ oder 180^0, und $\psi = 0$ oder 90^0; und $V_n = 0$, dagegen $V_m = S$. Bei den gewöhnlichen Balken oder Trägern wächst also die Maximalspannung V_m allmälig von $X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{bW}$ bis $S = \frac{Pxe}{W}$, während man von der neutralen Axe aus allmälig bis zur äußersten Faser fortschreitet.

Für einen parallelepipedischen Balken ist $\Sigma(Fz) = \frac{bh^2}{8}$, $W = \frac{bh^3}{12}$, $b_0 = b$ und $e = \frac{h}{2}$, daher sind die Grenzwerthe $X_0 = {}^3/_2 \frac{P}{bh}$ und $S = \frac{6Px}{bh^2}$; allgemein ist aber

$$X = \frac{P\left(\frac{h}{2} - z\right)\left(\frac{h}{2} + z\right)}{2\,W} = \frac{6\,P}{b\,h^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right] \text{ und } \frac{S\,z}{e} = \frac{12\,P\,x\,z}{b\,h^3},$$

daher:

$$V_m = \frac{6\,P\,x\,z}{b\,h^3} + \sqrt{\left(\frac{6\,P\,x\,z}{b\,h^3}\right)^2 + \left(\frac{6\,P}{b\,h^3}\right)^2\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]^2}$$

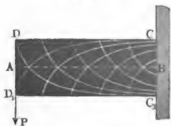
$$= \frac{6\,P}{b\,h^3}\left[x\,z + \sqrt{(x\,z)^2 + \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right)^2}\right], \text{ z. B. für } z = \tfrac{1}{4}h,$$

$$V_m = \frac{3\,P}{2\,b\,h^2}\left[x + \sqrt{x^2 + (\tfrac{3}{4})^2 h^2}\right], \text{ und für } x = 0,$$

$$V_m = \frac{9\,P}{8\,b\,h}, \text{ u. s. w.}$$

Ist ein solcher Balken AB, Fig. 426, an einem Ende B eingemauert, so lassen sich die Richtungen der größten und kleinsten Normalkräfte V_m und V_n durch zwei Liniensysteme darstellen, welche die neutrale Axe unter 45 Grad und die Endfasern sowie auch sich selbst unter 90 Grad schneiden. Die Curven, welche unten concav sind, entsprechen den Zug-, dagegen diejenigen, welche oben concav sind, den Druckkräften. Die steileren Enden einer jeden Curve entsprechen den Minimal-, dagegen die flacheren Enden den Maximalkräften. An den Enden bei D und D_1 sind diese Spannkräfte zu Null geworden, wogegen sie an den Enden C und C_1 den allergrößten Werth haben.

Fig. 426.



Einfluss der Schubfestigkeit auf die Tragkraft der Balken. §. 261 Die Tragfähigkeit eines Balkens fordert nicht allein, daß die Spannung $S = \frac{P\,x\,e}{W}$ in der äußersten Faser, sondern auch, daß die Schubkraft $X_0 = \frac{P\,\Sigma(F\,z)}{b_0\,W}$ in der neutralen Axe den Tragmodul T nicht übertreffe. Welche Momente in den gewöhnlich vorkommenden Fällen statt $P\,x$ in dem Ausdrucke für S einzusetzen sind, ist im vorigen Capitel vielfach gezeigt worden; es bleibt daher nur noch anzugeben übrig, welche Kraftwerthe man in den gewöhnlich vorkommenden Fällen statt P im Ausdrucke für X_0 einzuführen hat.

Wenn der Balken an einem Ende festgehalten und am anderen Ende von einer Kraft P ergriffen wird, so findet P in der Formel $X_0 = \frac{P\,\Sigma(F\,z)}{b_0\,W}$ seine unmittelbare Anwendung; trägt aber der Balken außerdem eine gleichmäßig vertheilte Last, welche pro Längeneinheit die Größe q hat, so ist in

diesem Ausdrucke statt P, $P + qx$, und insbesondere $P + ql$ einzusetzen, wenn es darauf ankommt, den größten Werth von X_0 zu bestimmen. Liegt dagegen der Balken an beiden Enden frei auf, und trägt in den Abständen l_1 und $l_2 = l - l_1$ von den Stützpunkten eine Last P, so ist für das eine Balkenstück $\frac{l_2}{l} P$, und für das andere $\frac{l_1}{l} P$ statt P in die Formel für X_0 zu setzen, um die Schubkraft in der neutralen Axe zu finden. Ist dagegen dieser Balken mit ql gleichmäßig belastet, so trägt jede Stütze $\frac{ql}{2}$ und es ist die Schubkraft P des ganzen Balkenquerschnittes an einer Stelle, welche um x von einem Stützpunkte abweicht, $P = q\left(\frac{l}{2} - x\right)\cdot$ Dieselbe fällt in der Mitte, wo $x = \frac{l}{2}$ ist, Null aus, wird nach dem Ende immer größer und größer, und ist an den Stützpunkten, $P = \frac{ql}{2}\cdot$

Trägt der an beiden Enden frei aufliegende Balken nur theilweise eine gleichmäßig vertheilte Last, welche den Theil c seiner Länge einnimmt, während der zweite Theil $l - c$ unbelastet bleibt, so trägt der Stützpunkt des ersten Theiles von der ganzen Last qc den Theil $qc\left(1 - \frac{c}{2l}\right)$ und der des zweiten den Theil $\frac{qc^2}{2l}$, und es ist die verticale Schubkraft in dem Abstande x vom ersten Stützpunkte:

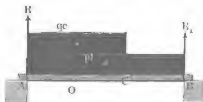
$$P = qc\left(1 - \frac{c}{2l}\right) - qx = q\left(c - \frac{c^2}{2l} - x\right).$$

Dieselbe hat für $x = c$, die Größe $-\frac{qc^2}{2l}$, welche sie auch in den Abständen $x > c$ behält. Bedeckt die Last gerade die eine Balkenhälfte, ist also $c = \frac{l}{2}$, so hat man

$$P = q\left(\frac{3l}{8} - x\right), \text{ also für } x = \frac{l}{2},\ P = -\frac{ql}{8}.$$

Wenn endlich der Balken AB, Fig. 427, eine auf die ganze Länge l desselben gleichmäßig vertheilte Last pl und eine auf die Länge $AC = c$ gleichmäßig vertheilte Last qc gleichzeitig trägt, so sind die Drücke in den Stützpunkten:

Fig. 427.



$$R_1 = \frac{pl}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2l}\right)$$

und $R_2 = \frac{pl}{2} + \frac{qc^2}{2l}$, und es

folgt die verticale Schubkraft im Abstande $AO = x$ vom Stützpunkte A:

$$P = \frac{pl}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2l}\right) - (p + q)x.$$

Dieselbe nimmt für $x = c$ den Werth $p\left(\frac{l}{2} - c\right) - \frac{qc^2}{2l}$ an und fällt in Abständen $x > c$,

$$\frac{pl}{2} + \frac{qc^2}{2l} - p(l - x) = -\frac{pl}{2} + \frac{qc^2}{2l} + px \text{ aus.}$$

Die verticale Schubkraft $P = p\left(\frac{l}{2} - c\right) - \frac{qc^2}{2l}$ in C ist = Null für $c^2 + \frac{2p}{q}lc = \frac{p}{q}l^2$, d. i.

$$c = \left(-\frac{p}{q} + \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q}}\right)l.$$

Ist überhaupt an einer Stelle des Balkens die Schubkraft $P = R - qx$ so hat man das Biegungsmoment daselbst:

$$M = Rx - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}\left(\frac{2R}{q} - x\right).$$

Dasselbe ist aber für $x = \frac{2R}{q} - x$, d. i. für $x = \frac{R}{q}$, ein Maximum, wobei $P = 0$ ausfällt; es nimmt also das Biegungsmoment eines Trägers an derselben Stelle den Maximalwerth an, wo die verticale Schubkraft = Null ist, und es giebt daher im vorstehenden Falle c diejenige Länge der Belastung qc an, bei welcher das Moment $\left[\frac{pl}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2l}\right)\right]c - \frac{(p+q)c^2}{2}$ zum Maximum, und zwar $= \frac{(p+q)c^2}{2}$ wird.

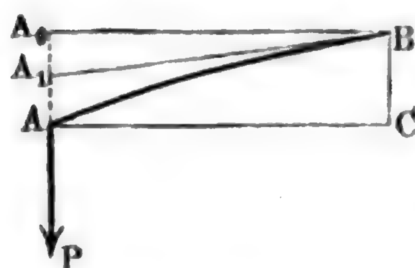
Diese Formeln finden ihre Anwendung bei Brückenträgern, wo dann qc die Größe der mobilen Last bezeichnet.

Die Schubkraft $X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{b_0 W}$ ist besonders noch bei Körpern von gleichem Widerstande zu berücksichtigen, welche nach dem Obigen (§. 253) ohne Rücksicht auf diese Schubkraft an manchen Stellen einen unendlich kleinen Querschnitt erhalten könnten. Z. B. bei dem parabolischen Träger in Fig. 406, ist $X_0 = T = {}^3/_2 \cdot \frac{{}^1/_2 P}{b_0 h_0}$, und daher der nöthige Querschnitt an jedem Ende: $F_0 = b_0 h_0 = {}^3/_4 \frac{P}{T}$, wo T den Tragmodul des Abschiebens bezeichnet.

Einfluss der Schub-Elasticität auf die Gestalt der elastischen Linie. Es ist nun noch zu untersuchen, welchen Einfluß die Schub-Elasti- §. 262.

cität auf die elastische Linie oder die Gestalt der neutralen Axe eines belasteten Balkens AB, Fig. 428, hat. Nach der Formel $P = \iota F C$, wo C den Modul der Schub-Elasticität und F den Querschnitt des Balkens bezeichnet, ist die durch die Schubkraft hervorgebrachte Neigung des Balkens

Fig. 428.



$A_1 B$, $\iota = \frac{X_0}{c}$, und daher die entsprechende Senkung des Balkenendes A_1, bei der Länge $A_0 B = l$ des Balkens:

$$A_0 A_1 = a_1 = \iota l = \frac{X_0 l}{C} = \frac{P l \Sigma (F z)}{b_0 W C}.$$

Hierzu kommt nun noch die Senkung $A_1 A = a_2$, welche aus der Biegung des Balkens hervorgeht, und welche nach §. 217 die Größe $a_2 = \frac{P l^3}{3 W E}$ hat; es ist daher die ganze Senkung oder Durchbiegung des Balkens:

$$B C = A_0 A = a = a_1 + a_2 = \frac{P l}{W}\left(\frac{\Sigma (F z)}{b_0 C} + \frac{l^2}{3 E}\right).$$

Für den parallelepipedischen Balken ist $b_0 = b$, $\Sigma (F z) = \frac{b h^3}{8}$ und $W = \frac{b h^3}{12}$, daher

$$a = \frac{4 P l^3}{b h^3 E}\left[1 + {}^3/_8 \frac{E}{C}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right],$$

oder $\frac{E}{C} = 3$ angenommen:

$$a = \frac{4 P l^3}{b h^3 E}\left[1 + {}^9/_8 \left(\frac{h}{l}\right)^2\right].$$

Z. B. für $l = 10 h$, folgt $a = 1{,}01125 \cdot \frac{4 P l^3}{b h^3 E}$, wenn also der Balken nur 10 mal so lang als dick ist, so ist seine Senkung am belasteten Ende in Folge der Schubkraft im Vergleich zur Senkung durch die Biegung so klein, daß sie in gewöhnlichen Fällen außer Acht gelassen werden kann.

Um die Elasticitätsmodel eines Balkens AB zu ermitteln, belastet man denselben ein Mal durch ein kleineres Gewicht P im größeren Abstande l, und ein anderes Mal durch ein größeres Gewicht P_1 im kleineren Abstande l_1 vom Stützpunkte B, und beobachtet die entsprechenden Bogenhöhen a und a_1 der Länge l des Balkens. Es ist dann

$$a = \frac{P l \Sigma (F z)}{b_0 W C} + \frac{P l^3}{3 W E} \text{ und}$$

$$a_1 = \frac{P_1 \, l \, \Sigma (F z)}{b_0 \, W C} + \frac{P_1 \, l_1^3}{3 \, W E} + \frac{P_1 \, l_1^2 \, (l - l_1)}{2 \, W E}.$$

Um C zu eliminiren, dividiren wir die erste Gleichung durch P und die zweite durch P_1, und subtrahiren dann beide Gleichungen von einander. Es folgt auf diese Weise

$$\frac{a}{P} - \frac{a_1}{P_1} = \frac{1}{W E}\left(\frac{l^3 - l_1^3}{3} - \frac{l_1^2 (l - l_1)}{2}\right) = \frac{1}{W E}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l \, l_1^2}{2} + \frac{l_1^3}{6}\right),$$

und daher der Elasticitätsmodul der Zug- und Druckkraft:

$$E = \frac{P P_1}{(a \, P_1 - a_1 \, P) \, W}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l \, l_1^2}{2} + \frac{l_1^3}{6}\right).$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes und der Formel für a bestimmt sich nun der Elasticitätsmodul der Schubkraft durch die Formel:

$$C = \frac{P l}{b_0} \cdot \frac{3 \, \Sigma (F z) \, E}{3 \, W E a - P l^3}.$$

Drehungselasticität. Bei der Theorie der Drehung oder Torsion eines Körpers (s. §. 202), können wir wieder den Fall, daß ein Körper $HCDL$, Fig. 429, an einem Ende festgeklemmt ist, zu Grunde legen, §. 262

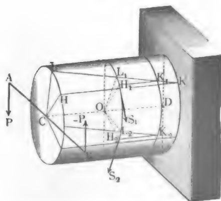


Fig. 429.

müssen aber, um keine zusammengesetzte Formveränderung zu erhalten, annehmen, daß er am freien Ende von einem Kräftepaare $(P, -P)$ ergriffen werde, dessen Ebene AHB mit der Umdrehungsebene der Axe CD zusammenfällt. Denken wir uns den Körper wieder aus lauter Längenfasern, wie z. B. HK zusammengesetzt, und nehmen wir an, daß in Folge der Torsion diese Fasern eine schraubenförmige Lage annehmen, wobei z. B. HK in die Lage LK kommt, und die ganze Endfläche eine Drehung um den Winkel $HCL = \alpha$ erleidet. Wenn hierbei die Faserstücke $H_1 K_1$, $H_2 K_2$ u. s. w. von der Länge Eins und den Querschnitten F_1, F_2 u. s. w., die seitlichen Verschiebungen $H_1 L_1 = \sigma_1$, $H_2 L_2 = \sigma_2$ u. s. w. erleiden, so lassen sich bei dem Elasticitätsmodul C, die entsprechenden Schubkräfte $S_1 = \sigma_1 F_1 C$, $S_2 = \sigma_2 F_2 C$ u. s. w. setzen. Ist nun noch der ent-

sprechende Torsionswinkel $H_1 O L_1 = H_1 O L_2 = \varphi$, und sind die Entfernungen dieser Fasern von der Axe CD des Körpers, $OH_1 = z_1$, $OH_2 = z_2$, so hat man $\sigma_1 = \varphi z_1$, $\sigma_2 = \varphi z_2 \dots$, daher die Kräfte $S_1 = \varphi C F_1 z_1$, $S_2 = \varphi C F_2 z_2 \dots$, und deren Momente

$$S_1 z_1 = \varphi C F_1 z_1^2, \quad S_2 z_2 = \varphi C F_2 z_2^2 \dots$$

Die sämmtlichen Kräfte $S_1, S_2 \dots$ eines Querschnittes $H_1 O L_2$ halten jedenfalls dem Kräftepaare $(P, -P)$ das Gleichgewicht; ist folglich a der Hebelarm AB dieses Paares, also Pa das Moment desselben, so hat man zu setzen:

$$Pa = S_1 z_1 + S_2 z_2 + \cdots = \varphi C F_1 z_1^2 + \varphi C F_2 z_2^2 + \cdots$$
$$= \varphi C (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots).$$

Bezeichnet man noch das geometrische Maß $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ des Torsionsmomentes durch W, so hat man folglich $Pa = \varphi C W$.

Nun ist aber der Torsionswinkel für die ganze Körperlänge $CD = l$, $\alpha = \varphi l$, daher läßt sich auch setzen:

$$1) \quad Pa = \frac{\alpha C W}{l}, \text{ oder } Pal = \alpha C W,$$

und der Torsionswinkel

$$2) \quad \alpha = \frac{Pal}{CW}.$$

Man kann in Uebereinstimmung mit dem Früheren (§. 215), WC das Drehungsmoment, und folglich W das Maß des Drehungsmomentes nennen, und hiernach behaupten, daß das Kraftmoment Pa direct wie der Torsionswinkel und wie das Torsions- oder Drehungsmoment und umgekehrt wie die Länge des Körpers wächst.

Das Arbeitsquantum, welches die Torsion um den Winkel α erfordert, läßt sich, da der Weg der entsprechenden Kraft P, αa ist,

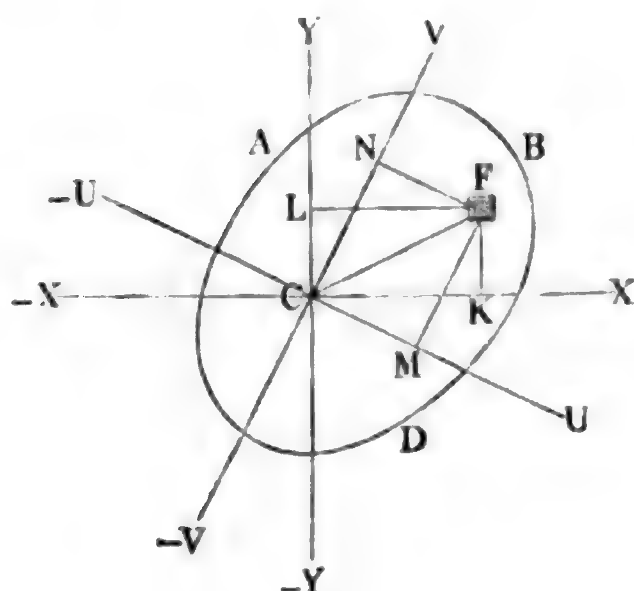
$$L = \frac{P}{2} \cdot \alpha a = \frac{\alpha^2 W C}{2 l} = \frac{P^2 a^2 l}{2 W C}$$

setzen. Diese Formeln gelten zunächst nur für prismatische Körper, bei Körpern von anderen Formeln muß man statt $\frac{l}{W}$ einen mittleren Werth in dieselben einsetzen.

§. 263 **Torsionsmomente.** Das Maß $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ des Drehungsmomentes läßt sich nach einer in §. 225 entwickelten Regel aus dem Maße des Biegungsmomentes für denselben Querschnitt leicht ermitteln. Ist nämlich

W_1 das Biegungsmaß einer Fläche ABD, Fig. 430, in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$, und W_2 das Biegungsmaß in Hinsicht auf eine Axe $\overline{Y}Y$, welche winkelrecht gegen die erste steht, so hat man das Maß des Drehungsmomentes in Hinsicht auf den Durchschnitt zwischen beiden Axen:

Fig. 430.



$$W = W_1 + W_2.$$

Für einen quadratischen Schaft oder eine Welle mit quadratischem Querschnitte $ABDE$, Fig. 431, ist, wenn b die Seite

$$AB = DE$$

desselben bezeichnet, nach §. 226, das Maß des Biegungsmomentes in Hinsicht auf jede der Axen $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$:

$$W_1 = W_2 = \frac{b\,b^3}{12} = \frac{b^4}{12},$$

folglich das Maß des Torsionsmomentes:

$$W = W_1 + W_2 = 2\,\frac{b^4}{12} = \frac{b^4}{6},$$

und das Kraftmoment:

$$Pa = \frac{\alpha\,W\,C}{l} = \frac{\alpha\,b^4\,C}{6\,l} = 0{,}1667\,\frac{\alpha\,C\,b^4}{l}.$$

Für einen Schaft mit rectangulärem Querschnitt $(b\,h)$ wäre dagegen

$$Pa = \frac{\alpha\,b\,h\,(b^2 + h^2)}{12\,l}\,C = 0{,}0833\,\frac{\alpha\,b\,h\,(b^2 + h^2)\,C}{l}.$$

Fig. 431.

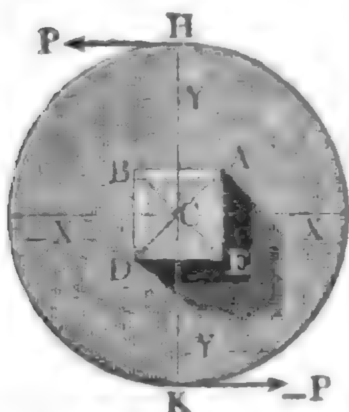
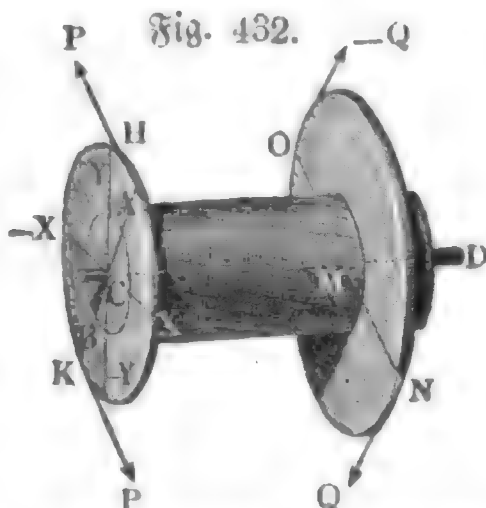


Fig. 432.



Für eine cylindrische Welle mit kreisförmigem Querschnitte AB, Fig. 432, ist, wenn der Halbmesser CA desselben $= r$ mißt, das Maß des Biegungsmomentes in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$ oder $\overline{Y}Y$ (nach §. 231):

$$W_1 = W_2 = \frac{\pi r^4}{4},$$

daher das Maß des Drehungsmomentes in Hinsicht auf den Axpunkt C:

$$W = 2 W_1 = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Wirkt folglich das Umdrehungskräftepaar $(P, -P)$ an einem Arme $HK = a$, oder jeder der beiden Componenten desselben an einem Arme $CH = CK = \frac{a}{2}$, so ist:

$$Pa = \frac{\alpha W C}{l} = \frac{\alpha \pi r^4 C}{2 l} = 1,5708 \frac{\alpha r^4 C}{l}.$$

Ist die Welle hohl, und sind ihre Halbmesser r_1 und r_2, so gilt natürlich die Formel:

$$Pa = \frac{\alpha \pi (r_1^4 - r_2^4) C}{2 l} = 1,5708 \alpha \frac{(r_1^4 - r_2^4) C}{l}.$$

In der Regel wird die Torsion einer Welle ABM, Fig. 432, durch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräftepaare $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ hervorgebracht, und deshalb ist statt l nicht die ganze Länge der Welle, sondern nur der Abstand CM zwischen den Ebenen, in welchen beide Paare wirken, in die Formel einzuführen; es kann übrigens aber gleichgültig sein, ob man das Torsionsmoment dem Momente des Kräftepaares $(P, -P)$ oder dem Momente des Kräftepaares $(Q, -Q)$ gleichsetzt. Bezeichnet man den Hebelarm HK des Paares $(P, -P)$ durch a, und den Hebelarm NO des Paares $(Q, -Q)$ durch b, so hat man also

$$Pa = Qb = \frac{\alpha W C}{l}$$

zu setzen.

Die vorstehende Theorie giebt uns bei Körpern, welche von ebenen Flächen begrenzt werden, von der Wahrheit etwas abweichende Torsionsmomente, weil bei ihrer Entwickelung vorausgesetzt worden ist, daß die Endflächen des Prismas, welches eine Torsion erleidet, bei der Torsion eben bleiben, wogegen dieselben in Wirklichkeit windschief ausfallen. Nach den Untersuchungen von Saint-Venant, Wertheim u. s. w. (siehe Comptes rendus des séances de l'académie des sciences à Paris, T. 24 und T. 27, sowie l'Ingénieur, Nro. 1 und 2, 1858, deutsch im Civilingenieur, 4. Bd., 1858) ist für einen quadratischen Schaft:

$$Pa = 0,841 \frac{\alpha b^4 C}{6 l} = 0,1402 \frac{\alpha b^4 C}{l},$$

wobei b die Seitenlänge des quadratischen Querschnittes bezeichnet.

Bei Körpern, deren Querschnittsdimensionen sehr von einander abweichen, fallen die Abweichungen größer aus. Z. B. für ein Parallelepiped, dessen Höhe h von seiner Breite b vielfach übertroffen wird, sind die Abweichungen noch weit größer.

Für einen prismatischen Körper mit rectangulärem Querschnitte von der Breite b und Höhe h hat man

$$W = W_1 + W_1 = \frac{b h^3}{12} + \frac{h b^3}{12} = \frac{b h (b^2 + h^2)}{12}, \text{ daher}$$

$$P a = \frac{\alpha W C}{l} = \frac{\alpha b h (b^2 + h^2) C}{12 l}.$$

Wenn nun diese Formel für $h = b$, wo $P a = \frac{\alpha b^4 C}{6 l}$ ausfällt, schon einen Correctionscoefficienten erfordert, so ist zu erwarten, daß dann, wenn h bedeutend von b abweicht, wo jedenfalls die Seitenflächen eine noch größere windschiefe Verdrehung erleiden, dieselbe nicht mehr die erforderliche Genauigkeit gewährt. In der That findet man durch die höhere Analysis bei Berücksichtigung der windschiefen Verdrehung:

$$P a = \frac{\alpha h^3 b^3 C}{3 (b^2 + h^2) l},$$

und es ist nach den neueren Versuchen von Werthheim, der erforderliche Correctionscoefficient im Mittel = 0,903, also

$$P a = 0{,}903 \, \frac{\alpha h^3 b^3 C}{3 (b^2 + h^2) l} = 0{,}301 \, \frac{\alpha h^3 b^3 C}{(b^2 + h^2) l}$$

zu setzen.

Ist b sehr klein gegen h, so folgt dann

$$P a = 0{,}301 \, \frac{\alpha h b^3 C}{l}.$$

Giebt man den Torsionswinkel in Graden an, setzt man also $\alpha = \frac{\alpha^0 \pi}{180^0}$, $= 0{,}017453 \, \alpha^0$ so erhält man

1) für prismatische Balken oder Wellen mit kreisförmigem Querschnitte vom Durchmesser $d = 2 r$,

$$P a l = \frac{\alpha \pi r^4}{2} C = \frac{\alpha \pi d^4}{32} C = \frac{\alpha^0 \pi^2 r^4}{180^0 . 2} C = \frac{\alpha_0 \pi^2}{180^0} \frac{d^4}{32} C$$
$$= 1{,}571 \, \alpha r^4 C = 0{,}0982 \, \alpha d^4 C = 0{,}02742 \, \alpha^0 r^4 C$$
$$= 0{,}001714 \, \alpha^0 d^4 C, \text{ und}$$

2) für prismatische Balken, Wellen oder Schäfte mit quadratischem Querschnitte von der Seitenlänge b, ohne Rücksicht auf den Correctionscoefficienten:

$$P a l = \frac{\alpha b^4 C}{6} = 0{,}1667\, \alpha b^4 C = \frac{\alpha^0 \pi b^4 C}{1080^0} = 0{,}00291\, \alpha^0 b^4 C.$$

Umgekehrt ist

$$\alpha = 0{,}637 \frac{P a l}{r^4 C} = 10{,}18 \frac{P a l}{d^4 C} = 6 \frac{P a l}{d^4 C}, \text{ sowie}$$

$$\alpha^0 = 36{,}4 \frac{P a l}{r^4 C} = 583 \frac{P a l}{d^4 C} = 344 \frac{P a l}{b^4 C}.$$

Die Werthe für C sind aus der Tabelle III. in §. 213 zu entnehmen. Hiernach ist z. B.:

1) Für Gußeisen: $C = 2'700000$ Pfund, daher
$P a l = 74000\, \alpha^0 r^4 = 4630\, \alpha^0 d^4 = 7860\, \alpha^0 b^4$ und

$$\alpha^0 = 0{,}00001348^0 \frac{P a l}{r^4} = 0{,}0002161^0 \frac{P a l}{d^4}$$
$$= 0{,}0001274^0 \frac{P a l}{b^4}.$$

2) Für Schmiedeeisen: $C = 8'600000$ Pfund, daher
$P a l = 235800\, \alpha^0 r^4 = 14740\, \alpha^0 d^4 = 25000\, \alpha^0 b^4$ und

$$\alpha^0 = 0{,}00000424 \frac{P a l}{r^4} = 0{,}0000678 \frac{P a l}{d^4} = 0{,}00004 \frac{P a l}{b^4}.$$

3) Für Holz: $C = 570000$ Pfund, daher
$P a l = 15630\, \alpha^0 r^4 = 977\, \alpha^0 d^4 = 1654\, \alpha^0 b^4$ und

$$\alpha^0 = 0{,}0000639^0 \frac{P a l}{r^4} = 0{,}001023^0 \frac{P a l}{d^4} = 0{,}000604 \frac{P a l}{b^4}.$$

Beispiele. 1) Welches Umdrehungsmoment kann ein quadratischer Schaft aus Schmiedeeisen von 10 Fuß Länge und 5 Zoll Stärke aufnehmen, ohne eine Torsion über $^1/_4$ Grad zu erleiden? Es ist nach dieser Tabelle:

$$P a = 25000 \cdot {}^1/_4 \cdot \frac{5^4}{10 \cdot 12} = 2500 \cdot \frac{25^2}{48} = 32550 \text{ Zollpfund} = 2713 \text{ Fußpfund}.$$

2) Welche Torsion erleidet eine hohle gußeiserne Welle von der Länge $l = 100$ Zoll und den Halbmessern $r_1 = 6$ Zoll und $r_2 = 4$ Zoll, durch ein Kraftmoment $P a = 10000$ Fußpfund? Es ist hier:

$$P a = 74000 \frac{\alpha^0 (r_1^4 - r_2^4)}{l},$$

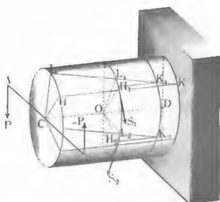
folglich:

$$\alpha^0 = \frac{P a l}{74000\, (r_1^4 - r_2^4)} = \frac{10000 \cdot 12 \cdot 100}{74000\, (6^2 + 4^2)(6^2 - 4^2)}$$
$$= \frac{12000}{74 \cdot 52 \cdot 20} = \frac{75}{481} \text{ Grad} = 9{,}35 \text{ Min.} = 9 \text{ Min. } 21 \text{ Sec.}$$

§. 264 **Drehungsfestigkeit.** Ist bei einem durch ein Kräftepaar $(P, -P)$ verdrehten Prisma CKL, Fig. 433, die Schubkraft pro Flächneinheit ein einem bestimmten Abstande e von der Axe CD, $= S$, so hat man die

Schubkraft in einem anderen Abstande z_1, $\frac{z_1}{e} S$, sowie deren Moment

Fig. 433.



$= \frac{z_1^2}{e} S$, und bei dem Querschnitte F_1,

$$\frac{F_1 z_1^2}{e} S = \frac{S}{e} F_1 z_1^2,$$

und ebenso sind die Momente der Schubkräfte für andere Querschnittselemente $F_2, F_3 \ldots$, welche um z_2, $z_3 \ldots$ von der Axe CD abstehen, $\frac{S}{e} F_2 z_2^2$, $\frac{S}{e} F_3 z_3^2$ u. s. w., und es folgt das ganze **Drehungsmoment** des Körpers:

$$Pa = \frac{S}{e} F_1 z_1^2 + \frac{S}{e} F_2 z_2^2 + \frac{S}{e} F_3 z_3^2 + \cdots$$

$$= \frac{S}{e} (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \ldots), \text{ d. i.}$$

1) $Pa = \frac{SW}{e}$, oder $Pae = SW$, sowie $\frac{W}{e} = \frac{Pa}{S}$.

Führt man nun für S den **Tragmodul** T der Schubfestigkeit und für e den größten Abstand der Querschnittselemente von der neutralen Axe ein, so erhält man in der Formel

2) $Pae = TW$ eine Gleichung zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen, bei welchen der Körper nirgends bis über die Elasticitätsgrenze hinaus gespannt oder verschoben wird. Und ebenso erhält durch diese Formel das Kraftmoment $P_1 a$, bei welchem der Körper abgewürgt wird, wenn man statt S den **Festigkeitsmodul** K der **Schubkraft** einsetzt; es ist

3) $P_1 a = \frac{KW}{e}$.

Für eine **massive cylindrische Welle** vom Durchmesser $d = 2r$ ist

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2}, \text{ daher}$$

$$Pa = \frac{\pi r^3 T}{2} = \frac{\pi d^3 T}{16} = 0{,}1963\, d^3 T, \text{ sowie}$$

$$P_1 a = \frac{\pi r^3 K}{2} = \frac{\pi d^3 K}{16} = 0{,}1963\, d^3 K.$$

Ist eine hohle cylindrische Welle von den Durchmessern $d_1 = 2\,r_1$ und $d_2 = 2\,r_2$, wo

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi\,(r_1^4 - r_2^4)}{2\,r_1} \text{ ist, hat man dagegen}$$

$$P\,a = \frac{\pi\,(r_1^4 - r_2^4)}{2\,r_1}\,T = \frac{\pi\,(d_1^4 - d_2^4)}{16\,d_1}\,T = \frac{F(d_1^2 + d_2^2)}{4\,d_1}\,T.$$

wobei $F = \dfrac{\pi\,(d_1^2 - d_2^2)}{4}$, den Querschnitt des Körpers bezeichnet.

Für einen prismatischen Körper mit quadratischem Querschnitte, dessen Seitenlänge $= b$ ist, hat man

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e = {}^1\!/_2\, b\sqrt{2} = b\sqrt{{}^1\!/_2}\text{, daher}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{b^3}{6\sqrt{{}^1\!/_2}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}}\text{, und } P\,a = \frac{b^3\,T}{3\sqrt{2}} = 0{,}2357\,b^3\,T.$$

Wenn man in der Grundformel $P\,a = \varphi\,C\,W$ aus §. 262, $\varphi = \dfrac{\sigma}{e}$ $= \dfrac{tang.\,\delta}{e}$ einsetzt, wobei e die Entfernung der entferntesten Faser von der Umdrehungsaxe $C\,D$, so wie δ den Winkel $H\,K\,L$ bezeichnet, um welchen diese Faser bei der Torsion aus ihrer ursprünglichen Lage verrückt wird, so erhält man

$$P\,a\,e = C\,W\,tang.\,\delta\text{; nun ist aber auch}$$
$$P\,a\,e = S\,W\text{, daher folgt}$$
$$S = C\,tang.\,\delta\text{, und es ergiebt sich}$$
$$T = C\,tang.\,\delta\text{, sowie } tang.\,\delta = \frac{T}{C},$$

wenn δ den Verschiebungswinkel bezeichnet, wobei die Spannung des Körpers die Grenze der Elasticität erreicht hat.

Die mechanische Arbeit, welche erfordert wird, um die Welle nach und nach bis um den Winkel α zu verdrehen, ist nach §. 262,

$L = \dfrac{P^2\,a^2\,l}{2\,W\,C}$, und läßt sich daher, wenn man $P\,a = \dfrac{S\,W}{e}$ einführt, auch

$L = \dfrac{S^2}{C}\,\dfrac{W\,C}{2\,e}$ setzen, wobei natürlich S die Maximalspannung bezeichnet.

Bei der Elasticitätsgrenze ist $S = T$, und es folgt daher auch die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um den Körper bis zur Grenze der Elasticität zu spannen:

$$L = \frac{T^2}{C} \cdot \frac{W\,l}{2\,e^2}\,.$$

Für einen prismatischen Körper mit kreisrundem Querschnitt ist $W = \frac{\pi r^4}{2}$, und $e = r$, daher:

$$L = \frac{T^2}{2C} \cdot \frac{\pi r^2 l}{2} = \frac{T^2}{4C} V,$$

dagegen für einen solchen mit quadratischem Querschnitte:

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e^2 = \frac{b^2}{2}, \text{ daher:}$$

$$L = \frac{T^2}{2C} \cdot \frac{b^4 l}{3 b^2} = \frac{T^2}{6C} \cdot b^2 l = \frac{T^2}{6C} V.$$

Nun ist aber $\frac{T^2}{2C} = \frac{\sigma C T}{2C} = \frac{\sigma T}{2}$ der Arbeitsmodul A der Elasticitätsgrenze, daher hat man für den Cylinder: $L = \frac{1}{2} A V$, und für das Parallelepiped: $L = \frac{1}{3} A V$.

Es ist also in beiden Fällen dieser Arbeitsaufwand nur dem Volumen V des Körpers proportional (vergl. §. 206 und §. 235).

Jedenfalls läßt sich auch die Arbeit zum Abdrehen oder Abwürgen $L = \frac{1}{2} B V$ und $\frac{1}{3} B V$ setzen, wenn B den Arbeitsmodul des Abwürgens bezeichnet.

Nimmt man mit Herrn General Morin für alle Stoffe

$$\frac{T}{C} = tang. \delta = 0{,}000667,$$

also den Verschiebungswinkel $\delta = 2$ Min. 18 Sec. an, so erhält man für Gußeisen:

$$T = 200000 \,.\, 0{,}000667 = 134 \text{ Kilogr.} = 1833 \text{ Pfund},$$

daher bei Anwendung des französischen Maßes:

$$P a = 26{,}3\, d^3 = 31{,}6\, b^3 \text{ Kilogr.-Centimeter},$$

dagegen bei Anwendung des preuß. Maßes:

$$P a = 360\, d^3 = 432\, b^3 \text{ Zollpfund}.$$

Unter derselben Bedingung erhält man für Schmiedeeisen:

$$T = 630000 \,.\, 0{,}000667 = 420 \text{ Kilogr.} = 5746 \text{ Pfund};$$

daher bei Anwendung des französischen Maßes:

$$P a = 82{,}4\, d^3 = 99{,}2\, b^3 \text{ Kilogr.-Centimeter},$$

und bei Anwendung des preuß. Maßes:

$$P a = 1128\, d^3 = 1357\, b^3 \text{ Zollpfund}.$$

Für Holz erhält man unter denselben Bedingungen im Mittel:

$$T = 41650 \,.\, 0{,}000667 = 27{,}8 \text{ Kilogr.} = 380 \text{ Pfund},$$

daher bei Anwendung des franz. Maßes:

$$P a = 5{,}46\, d^3 = 6{,}55\, b^3 \text{ Kilogr.-Centimeter},$$

und beim Gebrauch des preuß. Maßes:

$$P a = 74{,}6\, d^3 = 89{,}6\, b^3 \text{ Zollpfund}.$$

Die Coefficienten dieser Formeln gelten nur für ruhende Körper und ganz langsam und sanft umlaufende Wellen; bei gewöhnlichen Wellen giebt man doppelte Sicherheit, nimmt also die Coefficienten nur halb so groß an; für schnell umlaufende Wellen nimmt man wohl vierfache, und bei sehr raschen und mit Stößen verbundenen Bewegungen ist man sogar genöthigt, eine achtmal größere Sicherheit zu geben.

Beispiele. 1) Die gußeiserne Welle einer Turbine übt am Umfange eines auf ihr sitzenden Zahnrades von 6 Zoll Halbmesser eine Kraft von 4000 Pfund aus, welche Dicke muß man derselben geben? Es ist hier das Kraftmoment $Pa = 4000 . 6 = 24000$ Zollpfund, und folglich der Durchmesser der Welle, wenn wir $P a = \frac{360}{2} d^3$ setzen,

$$d = \sqrt[3]{\frac{2 . 24000}{360}} = \sqrt[3]{400/3} = 5{,}11 \text{ Zoll.}$$

Ist der Abstand des gedachten Zahnrades von dem Wasserrade, $l = 48$ Zoll, so hat man nach dem vorigen Paragraphen, den Torsionswinkel:

$$0{,}0002161^0 \cdot \frac{24000 . 48}{5{,}11^4} = 0{,}365^0 = 21{,}9 \text{ Minuten.}$$

2) Bei einer vierkantigen Welle aus Fichtenholz wirkt die Kraft $P = 600$ Pfund an einem Hebelarme $a = 15$ Fuß $= 180$ Zoll, während die Last Q an einem Hebelarme von 2 Fuß in einer nach der Axenrichtung gemessenen Entfernung $l = 6$ Fuß $= 72$ Zoll zieht, wie dick ist diese Welle zu machen und wie groß ist die Verdrehung derselben?

Es ist, wenn man 4fache Sicherheit giebt,

$$P a = 600 . 180 = 108000 = \frac{89{,}6\, b^3}{4},$$

daher die gesuchte Seite:

$$b = \sqrt[3]{\frac{4 . 108000}{89{,}6}} = 16{,}9 \text{ Zoll,}$$

und die Verdrehung:

$$\alpha^0 = 0{,}000604 \cdot \frac{108000 . 72}{(16{,}9)^4} = 0{,}0576 \text{ Grad} = 3^1/_2 \text{ Min.}$$

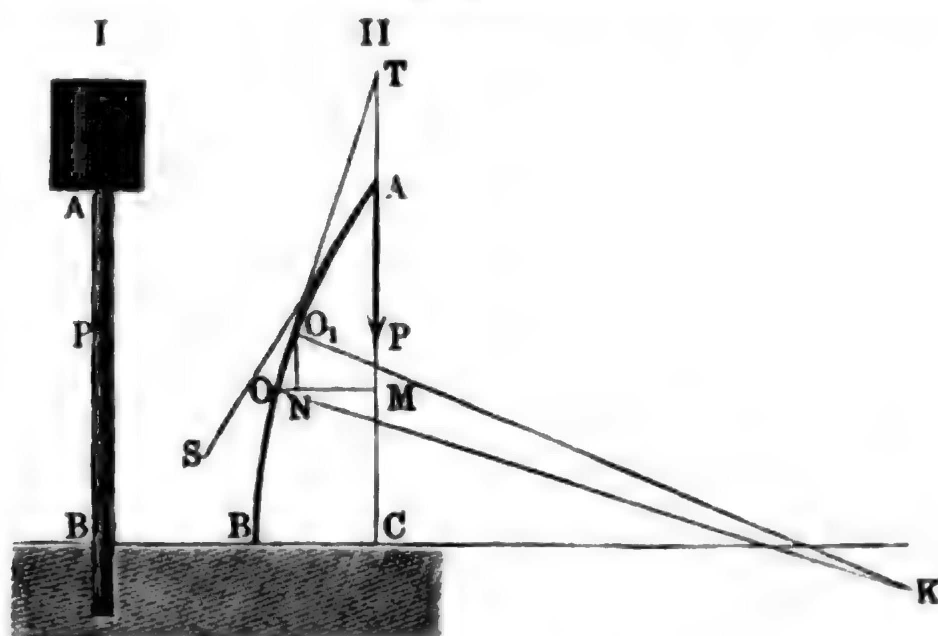
Viertes Capitel.

Die Tragkraft langer Säulen oder die Festigkeit des Zerknickens.

265 **Tragkraft einer an einem Ende festgehaltenen Säule.** Wird ein prismatischer Körper AB (I.), Fig. 434, an einem Ende B festgehalten, und am

anderen Ende A von einer Kraft P ergriffen, welche in der Richtung der Längenaxe des Körpers wirkt, so stellen sich die Biegungsverhältnisse ganz

Fig. 434.



anders heraus, als wenn diese Kraft, wie wir im Obigen (§. 214 u. s. w.) gefunden haben, winkelrecht zu dieser Axe wirkt. Die neutrale Axe AB (II.) nimmt in diesem Falle eine andere Gestalt an, weil der Hebelarm der Kraft P nicht durch die Abscisse $AM = x$, sondern durch die Ordinate $MO = y$ gebildet wird, also das Moment M derselben nicht Px, sondern Py ist. Man hat folglich hier den Krümmungshalbmesser $\overline{OK} = r$, durch den Ausdruck

$$r = \frac{WE}{Py}$$

zu bestimmen, während er nach §. 215, für eine rechtwinkelige Biegungskraft:

$$r = \frac{WE}{Px} \text{ zu setzen ist.}$$

Im Befestigungspunkte B geht y in die Bogenhöhe $BC = a$ über, und ist der Krümmungshalbmesser $r = \frac{WE}{Pa}$ am kleinsten, also die Krümmung selbst am größten, wogegen im Angriffspunkte A, wo $y = 0$ ist, der Krümmungshalbmesser unendlich groß, also die Krümmung Null ausfällt.

Bezeichnet man das Bogenmaß des Krümmungswinkels OKO_1 vom Bogenelemente $OO_1 = \sigma$, durch δ, so hat man für dasselbe $r = \frac{\sigma}{\delta}$ und daher $Py\sigma = WE\delta$; und ist β^0 der Neigungswinkel OO_1N desselben gegen die Axe AC, so läßt sich das Ordinatenelement $NO = v = \sigma\beta$, daher

$$Pyv = WE\beta\delta, \text{ und ebenso}$$
$$P\Sigma(yv) = WE\Sigma(\beta\delta) \text{ setzen.}$$

Um für den Bogen AO die Summe $\Sigma(yv)$ zu bestimmen, setze man für y nach und nach $v, 2v, 3v \dots nv$ in derselben ein. Es folgt dann

$$\Sigma(yv) = v\Sigma(y) = v(v + 2v + 3v + \cdots + nv) = v\frac{n^2 v}{2} = \frac{n^2 v^2}{2},$$

oder da $nv = MO = y$ ist,

$$\Sigma(yv) = \frac{y^2}{2}, \text{ und } P\Sigma(yv) = \tfrac{1}{2} P y^2.$$

Um ebenso $\Sigma(\beta\delta)$ zu finden, setzen wir für β nach und nach die Werthe $\beta, \beta + \delta, \beta + 2\delta \dots \beta + n\delta$, und vollziehen die Summation wie folgt:

$$\Sigma(\beta\delta) = \delta\Sigma(\beta) = \delta(\beta + \beta + \delta + \beta + 2\delta + \cdots + \beta + n\delta)$$
$$= \delta[n\beta + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\delta]$$
$$= \delta\left(n\beta + \frac{n^2\delta}{2}\right) = n\delta\left(\beta + \frac{n\delta}{2}\right).$$

Ist der Neigungswinkel in $A, = \alpha$, so läßt sich auch $\beta + n\delta = \alpha$ setzen, und es folgt:

$$\Sigma(\beta\delta) = (\alpha - \beta)\left(\beta + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2),$$

sowie

$$WE\Sigma(\beta\delta) = \tfrac{1}{2} WE(\alpha^2 - \beta^2), \text{ und endlich}$$
$$Py^2 = WE(\alpha^2 - \beta^2).$$

Für den Endpunkt B ist $y = a$ und $\beta = 0$, daher

$$Pa^2 = WE\alpha^2, \text{ und}$$
$$P(a^2 - y^2) = WE\beta^2, \text{ woraus der Tangentenwinkel}$$
$$1)\ \beta = \sqrt{\frac{P(a^2 - y^2)}{WE}} \text{ folgt.}$$

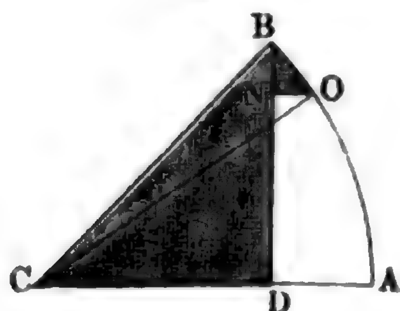
Aus β und dem Ordinatenelemente $NO = v$ folgt das Abscissenelement

$$NQ = \xi = \frac{v}{\beta} = v\sqrt{\frac{WE}{P(a^2 - y^2)}} = \frac{v}{\sqrt{a^2 - y^2}}\sqrt{\frac{WE}{P}}, \text{ oder}$$

$$\xi\sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{v}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Wenn man mit der Hypotenuse $CB = a$ des rechtwinkeligen Dreieckes BCD, Fig. 435, dessen Katheten $BD = y$ und $CD = \sqrt{a^2 - y^2}$ sind, den Bogen AB beschreibt, so gilt für das Element $BO = \psi$ desselben die Proportion:

Fig. 435.



$$\frac{BO}{BN} = \frac{CB}{CD}, \text{ d. i. } \frac{\psi}{v} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}};$$

es folgt daher

$$\frac{v}{\sqrt{a^2 - y}} = \frac{\psi}{a} \text{ und}$$

$$\xi \sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\psi}{a}, \text{ sowie auch}$$

$$\sqrt{\frac{P}{WE}}\, \Sigma(\xi) = \frac{1}{a}\, \Sigma(\psi).$$

Nun ist aber $\Sigma(\xi)$, d. i. die Summe aller Elemente von der Abscisse AM, $= x$, und $\Sigma(\psi)$, d. i. die Summe aller Elemente des Bogens AB, der Bogen AB selbst; daher hat man auch

$$x \sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\text{Bog. } AB}{a} = arc. \left(sin. = \frac{y}{a}\right).$$

Es ist also die Abscisse der elastischen Linie AB, in Fig. 434, II.,

$$2)\; x = \sqrt{\frac{WE}{P}} \cdot arc. \left(sin. = \frac{y}{a}\right),$$

sowie die Ordinate derselben

$$3)\; y = a\, sin. \left(x \sqrt{\frac{P}{WE}}\right).$$

Ist $x = AB = AC = l$, die Länge der Säule, so hat man $y =$ der Durchbiegung $BC = a$, daher

$$a = a\, sin. \left(l \sqrt{\frac{P}{WE}}\right), \text{ d. i. } sin. \left(l \sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = 1,$$

wonach

$$l \sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\pi}{2}, \text{ und die Biegungskraft}$$

$$4)\; P = \left(\frac{\pi}{2\,l}\right)^2 WE \text{ folgt.}$$

Da diese Formel die Bogenhöhe a nicht enthält, so ist anzunehmen, daß die durch sie bestimmte Kraft P bei jeder Biegung den Körper im Gleichgewicht zu halten vermag. Dieses eigenthümliche Verhältniß hat seinen Grund darin, daß mit der Zunahme der Biegung nicht allein ein Wachsen des Widerstandes, sondern auch ein Wachsen des Hebelarmes a und folglich auch des Kraftmomentes Pa verbunden ist. Hiernach ist also auch die Kraft zum Abbrechen oder Zerknicken:

$$P = \left(\frac{\pi}{2\,l}\right)^2 WE = 2,4674\, \frac{WE}{l^2} \text{ zu setzen.}$$

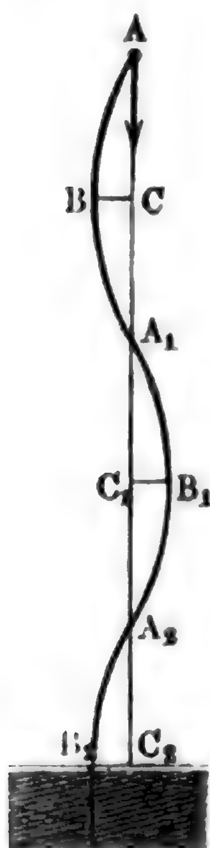
Anmerkung. Führt man in der Formel $y = a\, sin. \left(x \sqrt{\frac{P}{WE}}\right)$, $P = \left(\frac{\pi}{2\,l}\right)^2 WE$ ein, so erhält man folgende Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall der Kraftwirkung:

$$y = a \sin. \left(\frac{\pi x}{2l}\right).$$

Setzt man hierin $x =$	0	l	$2l$	$3l$	$4l$	$5l$	$6l$ u. s. w.,
so erhält man $y =$	0	a	0	$-a$	0	a	0 u. s. w.

Wenn man also die Säule von der einfachen Länge l beliebig verlängert, so wird sie von der Kraft $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$ nach einer Rankenlinie $A B A_1 B_1 A_2 \ldots$, Fig. 436, gebogen, welche aus einer vielfachen Zusammensetzung eines und desselben Bogens AB besteht, in den Abständen AA_1, $AA_2 \ldots$ die Axe AX durchschneidet, und in den Abständen AC, AC_1, $AC_2 \ldots$ die größten Abstände $CB = + a$, $C_1B_1 = -a$, $CB_2 = + a \ldots$ von derselben hat.

Fig. 436.



§. 266 **Parallelepipedische und cylindrische Säulen.** Für eine parallelepipedische Säule, wo b die größere und h die kleinere Querschnittsdimension ist, hat man $W = \frac{bh^3}{12}$ (s. §. 226), daher ist die Kraft zum Zerknicken derselben:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{bh^3 E}{12} = 0,2056 \, \frac{bh^3 E}{l^2}.$$

Es wächst also die Festigkeit des Zerknickens eines Parallelepipedes direct wie die Breite b oder größere, und wie der Cubus (h^3) der Dicke oder kleinere Querschnittsdimension h, sowie umgekehrt wie das Quadrat (l^2) der Länge desselben.

Für eine cylindrische Säule vom Halbmesser r oder Durchmesser d ist

$$W = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \text{ (s. §. 231), daher hat man hier}$$

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \cdot \frac{\pi r^4}{4} E = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{r^4 E}{l^2} = \frac{\pi^3}{256} \cdot \frac{d^4 E}{l^2} = 1,9381 \cdot \frac{r^4 E}{l^2}$$

$$= 0,1211 \, \frac{d^4 E}{l^2}.$$

Es wächst also die (rückwirkende) Festigkeit des Zerknickens einer cylindrischen Säule direct wie das Biquadrat ihres Durchmessers, und umgekehrt wie das Quadrat ihrer Länge.

Für eine hohle Säule mit den Halbmessern r und r_1, oder den Durchmessern d und $d_1 = \mu d$ hat man

$$P = \frac{\pi^3}{16} \frac{(r^4 - r_1^4)\,E}{l^2} = \frac{\pi^3}{256} \frac{(d^4 - d_1^4)\,E}{l^2}$$
$$= \frac{\pi^3}{256} (1 - \mu^4) \frac{d^4\,E}{l^2} = 0{,}1211\,(1 - \mu^4) \frac{d^4\,F}{l^2}.$$

Wird die Säule ABA, Fig. 437, am unteren Ende A_1 nicht festgehalten, sondern nur aufgestämmt, so biegt sich ihre Axe nach einer symmetrischen Curve, wovon jede Hälfte BA und BA_1 die Gestalt der Axe einer an einem Ende festgehaltenen Säule (Fig. 434) hat. Es findet deshalb auch hier die oben gefundene Formel ihre unmittelbare Anwendung, wenn man darin $\frac{l}{2}$ statt l einführt, wofern natürlich l die ganze Länge AA_1 der Säule bezeichnet. Es ist folglich hier die Tragkraft vier Mal so groß als im ersten Falle, und zwar

$$P = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 WE = \frac{\pi^2}{12} \frac{b\,h^3}{l^2}\,E = \frac{\pi^3}{64} \frac{d^4}{l^2}\,E.$$

Dieser Fall der Biegung tritt vorzüglich ein, wenn, wie Fig. 437 I. und

Fig. 437

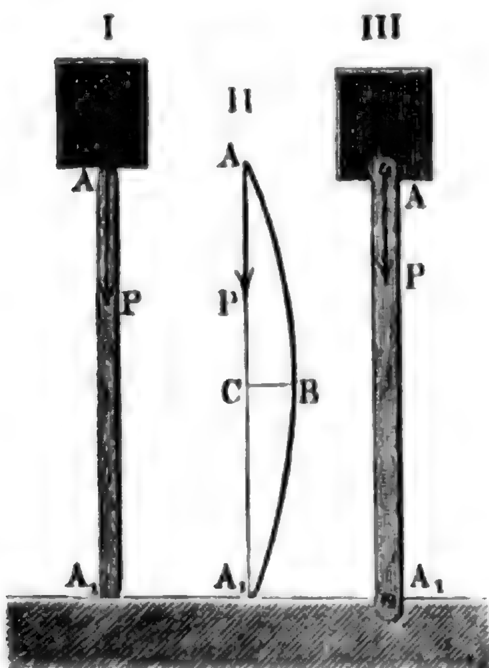
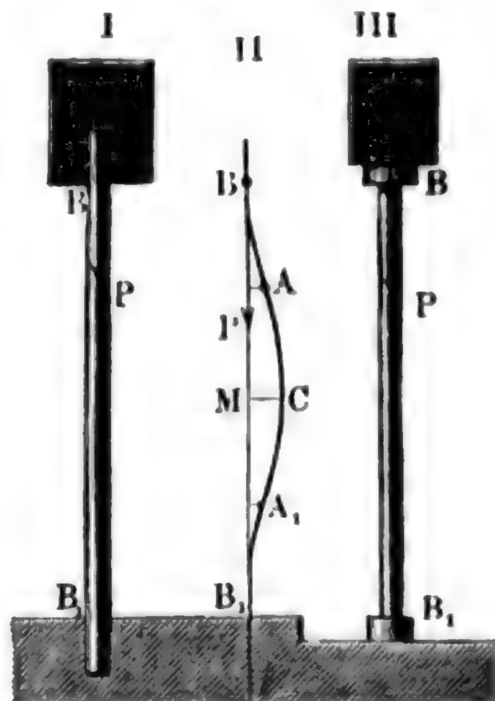


Fig. 438.



III. darstellt, die Säule an den Enden abgerundet oder um Bolzen drehbar ist. In dem letzteren Zustande der Biegung befindet sich z. B. die **Kurbelstange** einer Dampfmaschine u. s. w.

Wird ferner eine Säule an beiden Enden festgehalten, wie z. B. BAB_1, Fig. 438 I. und III. darstellt, so wird die Axe derselben nach einer Curve $BACA_1B_1$, Fig. 438 II., mit zwei Wendepunkten A und A_1 gebogen, worin die Biegung des ersten oder Normalfalles vier Mal wiederholt ist. Setzt man deshalb in der Formel für den Normalfall $\frac{l}{4}$, statt l, so erhält

man die Tragkraft einer solchen an beiden Enden festgehaltenen Säule, d. i.

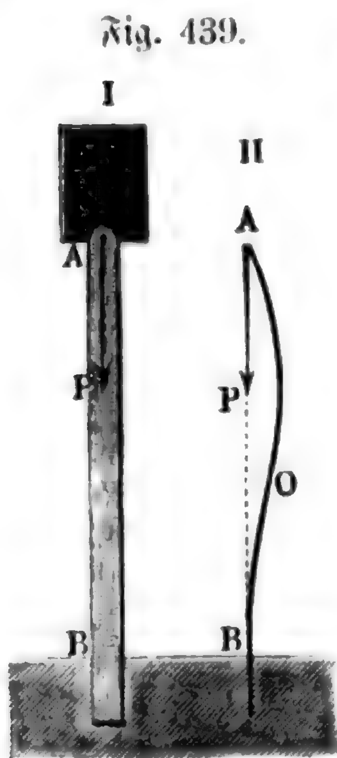
$$P = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 W E = \frac{\pi^2}{3}\frac{b h^3}{l^2} E = \frac{\pi^3}{16}\frac{d^4}{l^2} E.$$

Versuchen von Hodgkinson zufolge ist die Tragkraft der Säule in diesem Falle nur zwölfmal so groß als im Normalfalle (Fig. 434), während sie den letzten Formeln zufolge sechszehnmal so groß wäre.

Dieser Fall der Biegung kommt vorzüglich auch noch bei der Kolbenstange einer Dampfmaschine u. s. w. vor.

Wenn endlich eine Säule ABC, Fig. 439, an einem Ende B festgehalten und am Ende verhindert wird, auszugleiten, so ist die Tragkraft P achtmal so groß als im Normalfalle, also

Fig. 439.



$$P = 8\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 W E = \frac{\pi^2}{6}\frac{b h^3 E}{l^2} = \frac{\pi^3}{32}\frac{d^4 E}{l^2}.$$

Die Kraft, welche nöthig ist, um eine Säule vom Querschnitte F und dem Festigkeitsmodul K zu zerdrücken, giebt nach §. 205 die einfache Formel $P = FK$ an.

Setzt man diese Kraft gleich der Kraft

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 W E$$

für das Zerknicken beim Normalfall, so erhält man die Gleichung

$$\frac{F l^2}{W} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{E}{K}, \text{ oder } l\sqrt{\frac{F}{W}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{K}}.$$

Für eine cylindrische Säule von der Dicke d, wo $\frac{F}{W} = \frac{16}{d^2}$ ist, folgt hiernach

$$\frac{l}{d} = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{E}{K}} = 0,3927\sqrt{\frac{E}{K}}.$$

Für Gußeisen ist $E = 16'400000$ und $K = 100000$ Pfund, daher

$$\sqrt{\frac{E}{K}} = \sqrt{164} = 12,8, \text{ und } \frac{l}{d} = 5.$$

Für Schmiedeeisen ist dagegen $E = 27'800000$ und $K = 30000$, daher

$$\sqrt{\frac{E}{K}} = \sqrt{927} = 30,5 \text{ und } \frac{l}{d} = 12.$$

Endlich ist für Holz im Mittel

$E = 1'600000$ und $K = 6500$, daher

$$\sqrt{\frac{E}{K}} = \sqrt{246} = 15,7 \text{ und } \frac{l}{d} = 6.$$

Ist die Säule an beiden Enden frei, so fallen die Werthe von $\frac{l}{d}$ doppelt so groß aus, als im Vorstehenden gefunden worden ist.

Bei diesen Längenverhältnissen ist also, wenn man in beiden Fällen einerlei Sicherheitsmaß voraussetzt, die Tragkraft des Zerknickens gleich der des Zerdrückens, und nur erst bei längeren Säulen wird der Widerstand des Zerknickens von dem des Zerdrückens übertroffen, sind also die Querschnittsdimensionen nach den im Obigen gefundenen Formeln für die Zerknickungsfestigkeit zu berechnen.

Beispiele. 1) Für eine 12 Fuß lange und 11 Zoll dicke cylindrische Säule aus Fichtenholz, welche an beiden Enden frei aufsteht, ist bei 10facher Sicherheit, die Tragkraft

$$P = \frac{\pi^3}{64} \frac{d^4}{l^2} \frac{E}{10} = 0,4845 \left(\frac{11}{12}\right)^4 . 160000 = 77520 . 0,7061 = 54800 \text{ Pfund.}$$

2) Welche Stärke muß eine solche Säule aus Gußeisen erhalten, damit sie bei einer Länge von 20 Fuß eine Last von 100 Centner tragen könne? Hier ist, wenn man statt E, $\frac{E}{10} = 1'610000$ Pfund in Rechnung bringt,

$$d = \sqrt[4]{\frac{64\ P l^2}{\pi^3 . 1'640000}} = \sqrt[4]{\frac{640000 . 240^2}{31 . 1'640000}} = \sqrt[4]{\frac{240^2}{79,5}}$$

$$= \sqrt{\frac{240}{8,92}} = 5,20 \text{ Zoll.}$$

Nach der Zerdrückungsformel ist

$$d = \sqrt{\frac{4\ P}{\pi\ K}},$$

also, wenn man statt $\frac{K}{10} = 10000$ Pfund in Rechnung bringt,

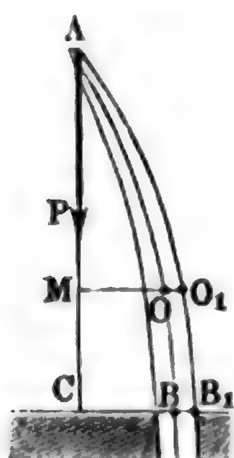
$$d = \sqrt{\frac{4 . 10000}{\pi . 10000}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{2}{1,77} = 1,13 \text{ Zoll.}$$

Wäre die Länge der Säule noch nicht 10 . 1,13 = 11,3 Zoll, so würde die erforderliche Stärke derselben auch nur 1,13 Zoll betragen.

Körper von gleicher Zerknickungsfestigkeit. Wenn eine Säule (§. AB, Fig. 440 (a. f. S.), welche an einem Ende B festgehalten wird, so geformt ist, daß sie in allen Querschnitten eine und dieselbe Spannung erleidet, so bildet sie einen Körper von gleichem Widerstande, wobei sie die möglich kleinste Menge an Material in Anspruch nimmt (s. §. 208 und §. 253). Jedenfalls ist der Querschnitt einer solchen Säule an der Befestigungsstelle B am größten und nimmt nach dem Ende A zu allmälig ab. Das Gesetz dieser Abnahme wird aus Folgendem hervorgehen. Bezeichnen wieder x und y die Coordinaten eines Punktes O in der Axe der Säule,

ferner sei α der Tangentenwinkel MAO für diesen Punkt, W das Maß des Biegungsmomentes, z der Halbmesser OO_1 der Säule an dieser Stelle, endlich drücke S die constante Spannung an dem äußersten Umfang AO_1B_1, also auch im Punkte O_1 des Querschnittes durch O aus. Es ist

Fig. 440.



$$S = \frac{Mz}{W} = \frac{Pyz}{W} \text{ (s. §. 235), und}$$

$$M = Py = \frac{WE}{r} = -\,WE\,\frac{\partial\, tang.\,\alpha}{\partial x}$$

(s. §. 218), daher folgt

$$S = -\,Ez\,\frac{\partial\, tang.\,\alpha}{\partial x}, \text{ oder da } tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \text{ ist,}$$

$$S\,\partial y = -\,Ez\, tang.\,\alpha\;\partial\, tang.\,\alpha.$$

Da man aber für einen kreisförmigen Querschnitt $\frac{W}{z} = \frac{\pi z^3}{4}$ hat (s. §. 236), so folgt

$$S = Py\,\frac{z}{W} = \frac{4Py}{\pi z^3}, \text{ oder } \frac{\pi}{4}\,Sz^3 = Py, \text{ daher}$$

$$\partial y = \frac{\pi}{4}\,\frac{S}{P}\,\partial(z^3) = \frac{3\pi}{4}\,\frac{S}{P}\,z^2\partial z, \text{ und } S\partial y = \frac{3\pi}{4}\,\frac{S^2}{P}\,z^2\partial z,$$

so daß sich nun

$$\frac{3\pi}{4}\,\frac{S^2}{PE}\,z\,\partial z = -\,tang.\,\alpha\;\partial\, tang.\,\alpha \text{ ergiebt.}$$

Durch Integration erhält man nun

$$\tfrac{3}{4}\pi\,\frac{S^2}{PE}\,z^2 = Const. - tang.\,\alpha^2,$$

und daher, wenn man den Querschnittshalbmesser in B, wo $\alpha = 0$ ist, mit r bezeichnet,

$$\tfrac{3}{4}\pi\,\frac{S^2}{PE}\,(r^2 - z^2) = tang.\,\alpha^2, \text{ oder}$$

$$tang.\,\alpha = S\sqrt{\frac{3\pi}{4PE}}\cdot\sqrt{r^2 - z^2}\,.$$

Setzt man nun $tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{3}{4}\pi\,\frac{S}{P}\cdot\frac{z^2\partial z}{\partial x}$, so folgt

$$\sqrt{\frac{3\pi E}{4P}}\cdot\frac{z^2\partial z}{\partial x} = \sqrt{r^2 - z^2}, \text{ und}$$

$$\partial x = \sqrt{\frac{3\pi E}{4P}}\cdot\frac{z^2\partial z}{\sqrt{r^2 - z^2}} = r^2\sqrt{\frac{3\pi E}{4P}}\cdot\frac{u^2\partial u}{\sqrt{1 - u^2}},$$

wenn man $\frac{z}{r}$ mit u bezeichnet.

Nun ist aber

$$\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \text{ daher folgt}$$

$$\int \frac{u^2 \partial u}{\sqrt{1-u^2}} = -\int \sqrt{1-u^2} . \partial u + \int \frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\, {}^1\!/_2\, u \sqrt{1-u^2} + {}^1\!/_2 \int \frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= -\, {}^1\!/_2\, u \sqrt{1-u^2} + {}^1\!/_2\, arc. (sin. = u)$$

(s. analyt. Hülfslehren, Art. 27 und 26).

Hiernach ergiebt sich

$$x = \sqrt{\frac{3 \pi E}{16 P}} \left[r^2 arc. \left(sin. = \frac{z}{r} \right) - z \sqrt{r^2 - z^2} \right].$$

Für $x = l$ ist $z = r$, der Halbmesser des Querschnittes an der Basis, wobei $arc. \left(sin. = \frac{z}{r} \right) = arc. (sin. = 1) = \frac{\pi}{2}$, und

$z \sqrt{r^2 - z^2} = 0$, ausfällt. Daher folgt

$$l = \frac{\pi}{2} r^2 \sqrt{\frac{3 \pi E}{16 P}} \text{ und es ergiebt sich die Tragkraft}$$

$$P = \left(\frac{\pi}{2 l} \right)^2 \frac{3 \pi r^4}{16} E = {}^3\!/_4 \left(\frac{\pi}{2 l} \right)^2 \frac{\pi r^4}{4} E,$$

d. i. drei Viertel der Tragkraft einer cylindrischen Säule vom Halbmesser r (vergl. §. 265). Es ist folglich der Basishalbmesser der Säule von gleichem Widerstande $= \sqrt{{}^4\!/_3} = 1{,}075$mal so groß als der Halbmesser einer cylindrischen Säule von gleicher Länge und gleicher Tragkraft.

Vergleicht man die Abscisse x mit der ganzen Säulenlänge l, so erhält man

$$\frac{x}{l} = \frac{\pi}{2} \left[arc. (sin. = r) - \frac{z}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{r} \right)^2} \right] = \frac{\pi}{2} \text{ mal}$$

Inhalt eines Kreissegmentes vom Halbmesser = 1 und der Sehne $= \frac{2 z}{r}$.

Wenn man daher $\frac{2}{\pi} \frac{x}{l}$ als den Inhalt eines Kreissegmentes ansieht, so kann man mittels der Segmententafel (s. den Ingenieur, Seite 152) den entsprechenden Centriwinkel φ bestimmen, und hiernach den einer gegebenen Abscisse x entsprechenden Querschnittshalbmesser $z = r\, sin. \frac{\varphi}{2}$ berechnen. Z. B.

für $x = \frac{1}{2} l$, ist $\frac{2x}{\pi l} = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183$, wonach mittels der Segmententafel, $\varphi = 93^{\circ}\,49'$ folgt, und sich der Querschnittshalbmesser in der Mitte der Säule:

$$z = r \sin.\ 46^{\circ}\,50' = 0{,}729\, r \text{ ergiebt.}$$

Wegen der Druckfestigkeit ist der Halbmesser des Querschnitts am Säulenkopfe, $r_0 = \sqrt{\frac{P}{\pi T}}$ zu machen; auch ist dieser Halbmesser noch an denjenigen Stellen beizubehalten, wo die Zerknickungsformel noch kleinere Werthe für z giebt.

Steht die Säule am Fuße wie Fig. 437 darstellt, frei auf, so ist natürlich diese Berechnung für eine Hälfte $\left(\frac{l}{2}\right)$ derselben durchzuführen. Der größte Querschnittshalbmesser r fällt dann in die Mitte und entspricht der Formel $P = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot \frac{\pi r^4 E}{4}$.

268 **Hodgkinson's Versuche.** — Die Versuche, welche in neueren Zeiten Hodgkinson über die (rückwirkende) Festigkeit des Zerknickens angestellt hat (s. Barlow's Bericht in den Philosophical Transactions, 1840) bestätigen wenigstens eine angenäherte Richtigkeit der im Vorstehenden entwickelten Formeln. Nach diesem Experimentator ist die Formel

$$P = \left(\frac{\pi}{2\, l}\right)^2 W E = \left(\frac{\pi}{2 l}\right)^2 \frac{\pi d^4 E}{64} = \left(\frac{\pi}{2 l}\right)^2 \cdot \frac{b^4 E}{12}$$

für prismatische Säulen mit kreisförmigen und quadratischen Querschnitten, wenn man darin für E einen besonderen Erfahrungswerth einsetzt, für Holz unbedingt richtig, dagegen für Schmiedeeisen nur dann genügend, wenn man statt d^4, die Potenz $d^{3,55}$, und für Gußeisen ausreichend genau, wenn man statt d^4 und l^2 die Potenzen $d^{3,55}$ und $l^{1,7}$ einführt.

Die Hauptergebnisse der Hodgkinson'schen Versuche mit prismatischen Säulen an kreisförmigen und quadratischen Querschnitten enthält folgende Tabelle. Die in derselben angegebenen Coefficienten beziehen sich auf den Fall, daß die Säulen an beiden Enden rechtwinkelig gegen ihre Axen abgeschnitten sind, und mit diesen Endflächen platt aufliegen. Bei abgerundeten Endflächen, wo sich Säulenenden ungehindert neigen können, sind diese Coefficienten nahe drei Mal so klein ausgefallen. Wenn dagegen die Säule an einem Ende festgehalten wird, und am anderen Ende drehbar ist, so hat sich dieser Coefficient halb so groß herausgestellt als im ersten Falle. Wenn endlich das eine Ende der Säule festgehalten wird, und das andere dreh- und verschiebbar ist, so beträgt die Tragkraft ein Zehntel von der im ersten Falle, wo beide Enden festgehalten werden.

Tabelle der Kräfte zum Zerknicken langer Säulen.

Namen der prismatischen Säulen	Kraft zum Zerknicken.		
	In engl. Maße (Tonnen)	In franz. Maße (Kilogramm)	In Neupfund.
Gußeiserne Säulen mit kreisförmigen Querschnitten	$44{,}16\,\frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$	$10900\,\frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$	$94700\,\frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$
Schmiedeeiserne Säulen mit kreisförmigen Querschnitten	$133{,}75\,\frac{d^{3,55}}{l^2}$	$46140\,\frac{d^{3,55}}{l^2}$	$284400\,\frac{d^{3,55}}{l^2}$
Quadratische Säulen aus trockenem Danziger Eichenholz	$10{,}95\,\frac{b^4}{l^2}$	$2480\,\frac{b^4}{l^2}$	$23570\,\frac{b^4}{l^2}$
Quadratische Säulen aus trockenem Fichtenholz	$7{,}81\,\frac{b^4}{l^4}$	$1770\,\frac{b^4}{l^2}$	$16840\,\frac{b^4}{l^2}$

In der Columne für das englische Maß sind d und b in Zollen, l in Fußen und P in Tonnen zu je $20 \, . \, 112 = 2240$ engl. Pfund; in der für das französische Maß sind dagegen d und b in Centimetern, l in Decimetern und P in Kilogramm, und in der letzten Columne hat man d und b in Zollen, l in Fußen und P in Neupfunden zu geben.

Noch hat Hodgkinson gefunden, daß gußeiserne Säulen eher zerdrückt als zerknickt werden, bei abgerundeten Enden, wenn $l < 15\,d$, und bei flachen Enden, wenn $l < 30\,d$ ist. Auch soll das trockene Holz doppelt so viel Tragkraft besitzen als das frisch gefällte.

In Fällen der Anwendung dieser Formeln bei Berechnung der Tragkraft von Säulen, giebt man 4- bis 12fache Sicherheit, nimmt also die Coefficienten dieser Formeln 4 bis 12 Mal kleiner an.

Bei sechsfacher Sicherheit ist hiernach für gußeiserne Säulen, wenn d und l in Zollen gegeben wird,

$$P = \frac{94700}{6} \cdot \frac{12^{1,7}}{100}\,\frac{d^{3,55}}{l^{1,7}} = \frac{947}{6} \cdot 68{,}3\,\frac{d^{3,55}}{l^{1,7}} = 10800\,\frac{d^{3,55}}{l^{1,7}} \text{ Centner,}$$

und $d = 0{,}0731\,(P\,l^{1,7})^{0,2817}$ Zoll zu setzen.

Für schmiedeeiserne Säulen hat man bei derselben Sicherheit

$$P = 68300\,\frac{d^{3,55}}{l^2} \text{ Centner, und}$$

$$d = 0{,}0435\,(P\,l^2)^{0,2817} \text{ Zoll.}$$

Für Säulen aus Eichenholz, bei zehnfacher Sicherheit ist ferner

$$P = 3394 \left(\frac{b}{l}\right)^2 F = 3394 \frac{b^4}{l^2} = 5762 \frac{d^4}{l^2} \text{ Centner, und}$$

$$b = 0{,}131\,(Pl^2)^{1/4}, \text{ sowie } d = 0{,}115\,(Pl^2)^{1/4} \text{ Zoll.}$$

Endlich ist für Säulen aus Fichtenholz:

$$P = 2425 \frac{b^4}{l^2} = 4117 \frac{d^4}{l^2} \text{ Centner, und}$$

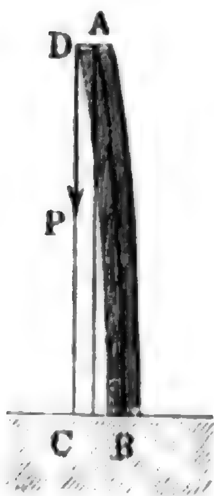
$$b = 0{,}1425\,(Pl^2)^{1/4}, \text{ sowie } d = 0{,}125\,(Pl^2)^{1/4} \text{ Zoll.}$$

Beispiel. Für eine cylindrische Säule aus Fichtenholz, von 11 Zoll Stärke und 12 . 12 = 144 Zoll Länge, welche an beiden Enden festgehalten wird, ist die Tragkraft $P = 411700 \cdot \left(\frac{121}{144}\right)^2 = 290700$ Pfund. Wenn die Enden einer solchen Säule frei drehbar sind, so ist dagegen die Tragkraft $P_1 = \frac{1}{3} P = 96900$ Pfund, während nach der theoretischen Formel, $P_1 = 54800$ Pfund ist (s. Beispiel 1 zu §. 266).

269 **Einfachere Bestimmung der Tragkraft der Säulen.** Die vorstehenden Formeln für das Biegen und Zerknicken der Säulen sind unter der Voraussetzung entwickelt worden, daß die Kraft P genau im Endpunkte A der Längenaxe der Säule angreift; da aber dieser Forderung in der Praxis nie genau Genüge geschehen kann, und dieses centrische Angreifen auch aufhört, sowie die Biegung des Körpers eintritt, so ist es rathsam, bei Bestimmung der Tragkraft einer Säule gleich von vornherein mit auf den excentrischen Angriff Rücksicht zu nehmen.

Setzen wir bei dieser Bestimmung voraus, daß der Angriffspunkt D der Kraft P, um $DA = c$ von dem Ende A der Axe der Säule AB, Fig. 441, abstehe, und nehmen wir an, daß die Durchbiegung $BC = a$ der Säule klein sei gegen c. Dann können wir die von der Säulenaxe gebildete elastische Linie als einen Kreis vom Halbmesser $r = \frac{l^2}{2a}$ ansehen. Nun ist aber

Fig. 441.



$$P(a + c)r = WE, \text{ daher folgt}$$
$$P(a + c)l^2 = 2WEa, \text{ sowie}$$
$$a = \frac{Pl^2 c}{2WE - Pl^2}, \text{ und}$$
$$a + c = \frac{2WEc}{2WE - Pl^2}.$$

Bezeichnet nun F den Querschnitt der Säule, und e die halbe Dicke derselben, gemessen in der Ebene ABD, so ist die durch den Druck P hervorgebrachte gleichmäßige Spannung in jedem Querschnitte der Säule:

$$S_1 = \frac{P}{F},$$

und die durch das Kraftmoment $P(a+c)$ hervorgebrachte Spannung, am äußern Umfang derselben:

$$S_2 = \frac{P(a+c)e}{W} = \frac{2PEce}{2WE - Pl^2},$$

und es folgt daher die Maximalspannung der Säule:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{P}{F} + \frac{2PEce}{2WE - Pl^2} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{2EFce}{2WE - Pl^2}\right).$$

Setzt man nun $S =$ dem Tragmodul T, so folgt

$$P\left(1 + \frac{2EFce}{2WE - Pl^2}\right) = FT, \text{ oder}$$

$$P(2WE - Pl^2 + 2EFce) = (2WE - Pl^2)FT.$$

Ist nun Pl^2 gegen $(W + Fce)E$ klein, so läßt sich setzen

$$P = \frac{2WEFT}{2E(W + Fce) + FTl^2} = \frac{FT}{1 + \frac{Fce}{W} + \frac{FT}{2WE}l^2}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{FT}{\varphi + \psi\frac{l^2}{d^2}},$$ wenn φ und ψ besondere Erfahrungszahlen bezeichnen.

Der Civilingenieur Love (s. Mémoire sur la Résistance du fer et de la fonte etc., Paris 1852) folgert aus den Versuchen von Hodgkinson die Werthe $\varphi = 0{,}45$ und $\psi = 0{,}00337$; es ist also hiernach:

$$P = \chi FT = \frac{FT}{1{,}45 + 0{,}00337\left(\frac{l}{d}\right)^2},$$

woraus sich dann folgende Tabelle für den Coefficienten

$$\chi = \frac{1}{1{,}45 + 0{,}00337\left(\frac{l}{d}\right)^2}$$ berechnen läßt.

$\frac{l}{d} =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\chi =$	0,559	0,357	0,223	0,146	0,101	0,0735	0,0556	0,0435	0,0347	0,0285

Diese Werthe für χ sind also mit dem oben (§. 211 und 212) angegebenen Tragmodul T des Zerdrückens zu multipliciren, um bei einem gegebenen Längenverhältnisse die Tragmodel langer Säulen zu bestimmen.

Der General Morin theilt nach Rondelet folgende Tabelle mit, welche jedoch für Säulen von mittlerer Länge zu große Werthe für χ giebt.

$\frac{l}{d} =$	1	12	24	36	48	60	72
$\chi =$	1	$5/6$	$1/2$	$1/3$	$1/6$	$1/12$	$1/24$

Beispiele. 1) Welche Last kann eine Säule aus Fichtenholz tragen, deren Länge 15 Fuß und Stärke 12 Zoll beträgt? Für eine kurze Säule wäre nach Tabelle auf Seite 370, der Tragmodul $T = 2500$ Pfund, da aber hier das Verhältniß der Länge zur Stärke, $\frac{l}{d} = 15/1$ ist, so hat man:

$$\chi = \frac{1}{1,45 + 0,00337 \,.\, 15^2} = \frac{1}{2,208} = 0,453,$$

daher den Tragmodul nur $\chi T = 0,453 \,.\, 2500 = 1132$ Pfund und endlich die gesuchte Tragkraft:

$$P = 1132 \frac{\pi d^2}{4} = 1132 \,.\, 0,7854 \,.\, 144 = 128000 \text{ Pfund zu setzen.}$$

Der Sicherheit wegen ist jedoch nur ein Drittel dieses Werthes als Belastung anzunehmen, also

$$P = \frac{128000}{3} = 42700 \text{ Pfund}$$

zu setzen.

2) Wie stark ist eine frei aufstehende hohle cylindrische Säule aus Gußeisen zu machen, welche bei einer Länge l von 25 Fuß eine Last $P = 100000$ Pfund zu tragen vermag?

Nehmen wir an, daß der Durchmesser d_1 der Höhlung gleich drei Fünftel des äußeren Durchmessers (d) der Säule sei, so können wir in der theoretischen Formel:

$$P = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{r^4}{l^2} E \text{ (§. 266) statt}$$

$$r^4 = \frac{d^4 - d_1^4}{16} = \frac{d^4}{16} [1 - (3/5)^4[= 0,0544\, d^4 \text{ setzen, so daß nun}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{4 P l^2}{0,0544\, \pi^3 E}} \text{ folgt.}$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $P = 100000$, $l^2 = (25 \,.\, 12)^2 = 90000$, $\pi^3 = 31$, und statt E nur

$$\frac{E}{10} = \frac{13'680000}{10} = 1'368000 \text{ Pfund}$$

ein, so erhalten wir die gesuchte äußere Stärke der Säule:

$$d = \sqrt[4]{\frac{400000 \,.\, 90}{0,0544 \,.\, 31 \,.\, 1368}} = \sqrt[4]{\frac{1000000}{1,6864 \,.\, 38}} = 11,17 \text{ Zoll.}$$

Nehmen wir $d = 11,25$ Zoll an, so erhalten wir $d_1 = 0,6 \,.\, 11,25 = 6,75$ Zoll.

Unsere letzte Formel giebt, wenn wir

$$\frac{l}{d} = \frac{25}{1} = 25$$

annehmen, den gesuchten Querschnitt der Säule:

$$F = \left[1{,}45 + 0{,}00337\left(\frac{l}{d}\right)^2\right]\frac{P}{T} = \frac{3{,}556\,.\,100000}{T} = \frac{355600}{T},$$

und setzen wir nun noch nach §. 212,

$$T = \frac{18000}{3} = 6000 \text{ Pfund},$$

so erhalten wir

$$F = \frac{355600}{6000} = 59{,}3 \text{ und hiernach, da auch}$$

$$F = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2) = [1 - (3/5)^2]\,\frac{\pi d^2}{4} = 0{,}16\,\pi d^2$$

ist, die gesuchte äußere Stärke der Säule:

$$d = \sqrt{\frac{F}{0{,}16\,\pi}} = \sqrt{\frac{59{,}3}{0{,}16\,\pi}} = 10{,}86 \text{ Zoll}.$$

Nimmt man $d = 11$ Zoll an, so erhält man:

$$d_1 = 0{,}6\,d = 0{,}6\,.\,11 = 6{,}6 \text{ Zoll}.$$

Fünftes Capitel.

Die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.

Zusammengesetzte Festigkeit. Nicht selten wird ein Körper von zwei Kräften, z. B. von einer Zug- und einer Biegungskraft u. s. w., zugleich ergriffen, wodurch er natürlich auch zweierlei Formveränderungen, z. B. eine Ausdehnung und eine Biegung, zugleich erleidet. Wir haben die Kraft, mit welcher der Körper dieser zweifachen Gestaltsveränderung widersteht, die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit genannt, und werden in der Folge die vorzüglichsten Fälle dieser Art näher untersuchen. §. 270

Streng genommen hatten wir es schon in dem bei der Biegung eines Körpers $AKBO$, Fig. 442 (a. f. S.), zu Grunde gelegten Falle (§. 214) mit der zusammengesetzten Festigkeit zu thun, da sich eine am Ende A dieses Körpers angreifende Kraft $\overline{AP} = P$ auf ein Kräftepaar $(P, -P)$ und auf eine Kraft $\overline{SP} = P$ zurückführen läßt, wovon das erstere, welches wir zeither nur in Betracht gezogen haben, das Körperstück AS biegt, und die andere

ein Abreißen dieses Stückes von dem übrigen Theile SB zu bewirken sucht. Die letztere Kraft besteht wieder aus zwei Seitenkräften:

Fig. 442.

$$P_1 = P \cos. \alpha$$

und

$$P_2 = P \sin. \alpha$$

(§. 215), wovon die eine winkelrecht gegen die Fasern und die andere in der Axenrichtung der Fasern wirkt. Die letztere vereinigt sich mit den Spannungen der Fasern in Folge der Biegung, vergrößert folglich die Ausdehnungen auf der Zugseite der neutralen Axe und vermindert dagegen die Zusammendrückungen auf der Druckseite. Die Größe der Ausdehnung, welche jede Faser

$$RS = KN$$

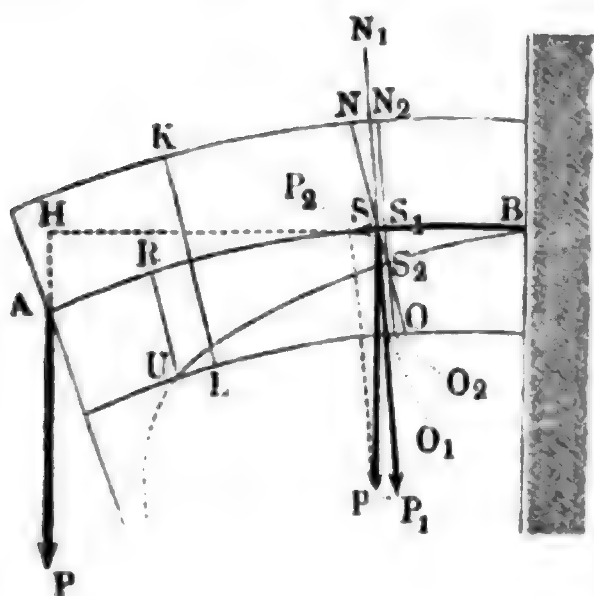
u. s. w. von der Länge = Eins durch die Zugkraft $P \sin. \alpha$ erleidet, ist (nach §. 204)

$$\sigma_1 = \frac{P \sin. \alpha}{F E},$$

wenn F den Querschnitt NO des Körpers bezeichnet. Ziehen wir in diesem Abstande mit der Linie $N_1 O_1$, Fig. 443, welche die Enden der durch die Biegung ausgedehnten Fasern KN_1, RS_1, LO_1 bestimmt, eine Parallele $N_2 O_2$, so deutet dieselbe die Begrenzung der beiden Längenveränderungen unterworfenen Fasern an, und schneidet die ursprüngliche Begrenzung in einem Punkte S_2, welcher dem Ende der unausgedehnten Faser entspricht, und folglich die neue oder wahre Lage der neutralen Axe angiebt. Der Abstand $SS_2 = e_1$ dieser neutralen Axe von der ursprünglichen neutralen

Axe, welche nur dem Biegungsmomente entspricht, bestimmt sich durch die Proportion:

Fig. 443.



$$\frac{SS_2}{SS_1} = \frac{SN}{NN_1}, \text{ d. i. } \frac{e_1}{e} = \frac{\sigma_1}{\sigma},$$

wonach also $e_1 = \frac{e}{\sigma}\,\sigma_1$ folgt.

Nun ist aber noch $\frac{\sigma}{e} = \frac{1}{r}$ (§. 235)

daher ergiebt sich einfach:

$$e_1 = r\,\sigma_1 = \frac{P\,r\,sin.\,\alpha}{F\,E}.$$

Um diese Größe (e_1) ist auch der Krümmungshalbmesser r_1 der auf diese Weise schärfer bestimmten neutralen Axe größer als der Krümmungshalbmesser der seither in Betracht gezogenen neutralen Axe; es ist also:

$$r_1 = r + e_1 = r\,(1 + \sigma_1) = r\left(1 + \frac{P\,sin.\,\alpha}{F\,E}\right).$$

Anlangend den Winkel α, um welchen der veränderliche Querschnitt $N_1\,O_1$ oder $N_2\,O_2$ von der Richtung der Kraft P abweicht, so ist dieser auch gleich dem (in §. 216) bestimmten Tangentenwinkel α; es ist also wegen der gewöhnlichen Kleinheit dieses Winkels:

$$sin.\,\alpha = \alpha = \frac{P\,(l^2 - x^2)}{2\,W\,E}$$

zu setzen, und da nun $r = \frac{W\,E}{P\,x}$ (§. 215) ist, so folgt:

$$r\,sin.\,\alpha = r\,\alpha = \frac{l^2 - x^2}{2\,x}, \text{ und daher:}$$

$$e_1 = \frac{P\,(l^2 - x^2)}{2\,F\,E\,x}.$$

Hiernach fällt also z. B. im Anfangspunkte B, wo $x = l$ ist, $e_1 = 0$ aus, und am Endpunkte A, wo $x = 0$ ist, $e_1 = \frac{P\,l^2}{0} = \infty$; dagegen ist für $x = \frac{P\,(l^2 - x^2)}{2\,F\,E\,e}$, $e_1 = e$; es fällt folglich die neutrale Axe in B mit der ersten zusammen, entfernt sich, von B nach A fortschreitend, immer mehr und mehr von derselben, erreicht später die concave Seite des Körpers, und ist endlich, wenn man sie auch außerhalb des Körpers fortsetzend annimmt, am Ende A unendlich von dieser Axe entfernt.

Da die größte Ausdehnung in Folge der Biegung,

$$\sigma = \frac{P e x}{W E},$$

und die in Folge der Zugkraft $P \sin. \alpha$,

$$\sigma_1 = \frac{P \sin. \alpha}{F E}$$

ist, so folgt die Gesammtdehnung:

$$N N_2 = N N_1 + N_1 N_2 = \frac{P}{E}\left(\frac{e x}{W} + \frac{\sin. \alpha}{F}\right),$$

und wenn dieselbe die Elasticitätsgrenze $\frac{T}{E}$ erreicht, so können wir

$$P\left(\frac{e x}{W} + \frac{\sin. \alpha}{F}\right) = T,$$

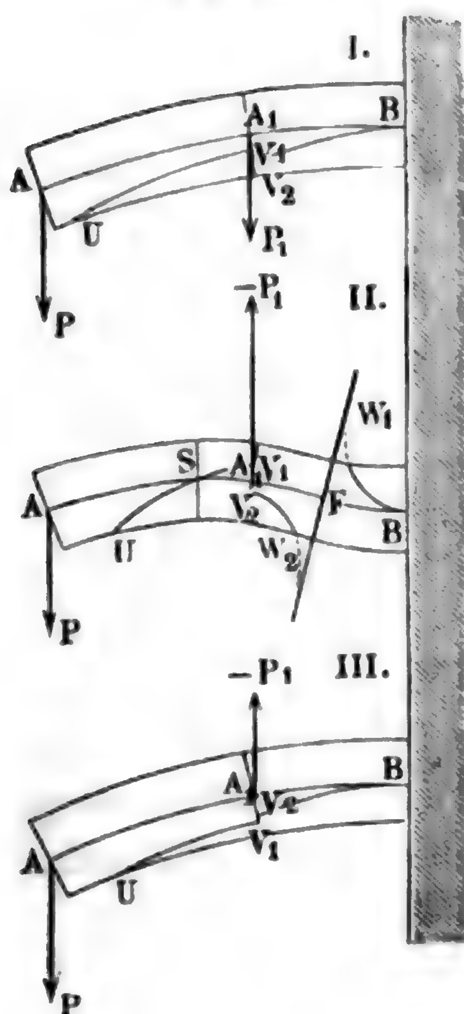
und daher die Tragkraft

$$P = \frac{W T}{e x + \frac{W}{F} \sin. \alpha} = \frac{W T}{e x + \frac{P (l^2 - x^2)}{2 F E}} \text{ setzen.}$$

Bei den mäßigen Biegungen, welchen die Balken gewöhnlich ausgesetzt sind, ist dieser Werth ein Minimum für $x = l$, und zwar, wie wir schon oben gefunden haben:

$$P = \frac{W T}{e l}.$$

Fig. 444.



Anmerkung. Wird der Balken, wie z. B. $A A_1 B$, Fig. 444 I., II. und III., von zwei Kräften ergriffen, so kommen zwei- und nach Befinden dreifache Verrückungen der neutralen Axe aus dem Schwerpunkte vor. Wirken die beiden Kräfte P und P_1 in derselben Richtung, wie Fig. 444, I., speciell vor Augen führt, so ist diese Verrückung auf der einen Seite vom Querschnitt A_1 durch die Formel

$$e_1 = \frac{P r \sin. \alpha}{F E},$$

und dagegen die auf der anderen Seite durch die Formel

$$e_2 = \frac{(P + P_1)\, r \sin. \alpha}{F E}$$

bestimmt. An der Aufhängestelle A_1 ändert sich diese Verrückung

$$\overline{A_1 V_1} = e_1 = \frac{P r \sin. \alpha}{F E} \text{ in}$$

$$\overline{A_1 V_2} = e_2 = \left(\frac{P + P_1}{P}\right) e_1$$

um, wenn man von der einen Seite auf die

andere übergeht, wogegen im festen Punkte B, wo $\alpha = 0$ ist, wieder $e_2 =$ Null ausfällt.

Wenn die beiden Kräfte einander entgegengesetzt wirken, und hierbei das Moment

$$P_1 \, . \, \overline{A_1 B} = P_1 l_1$$

der negativen Kraft größer ist als das Moment

$$P \, . \, \overline{A B} = P \, (l_1 + l)$$

der positiven Kraft, wobei der Balken zwei entgegengesetzte Biegungen annimmt, welche in einem Wendepunkte F an einander anstoßen, so besteht die neutrale Axe aus drei discontinuirlichen Zweigen $U V_1$, $V_2 W_2$ und $W_1 B$ (wie Fig. 444, II.), wovon die beiden letzteren die Normale durch den Wendepunkt F zu Asymptoten haben; denn es ist hier $r = \infty$ und folglich auch

$$e_1 = \frac{P r \sin. \alpha}{F E} = \infty.$$

Sind zwar die Kräfte einander entgegengesetzt, ist aber $P \, (l + l_1) > P_1 l_1$, wie Fig. 444, III. vor Augen führt, so ist einerseits von A_1 die Verrückung der neutralen Axe

$$\overline{A_1 V_1} = e_1 = \frac{P r \sin. \alpha}{F E}$$

und andererseits

$$\overline{A_1 V_2} = e_2 = \frac{(P - P_1) \, r \sin. \alpha}{F E},$$

und es bilden daher die beiden Zweige $U V_1$ und $V_2 B$ der neutralen Axe im Querschnitte durch A_1 einen Sprung von der Größe

$$\overline{V_1 V_2} = \frac{P_1 r \sin. \alpha}{F E}.$$

Excentrischer Zug und Druck. Wenn ein Balken oder eine Säule $A B$, Fig. 445 und Fig. 446, von einer Zug- oder Druckkraft ergriffen wird, welche zwar parallel zur Axe dieses Körpers, nicht aber in dieser Axe selbst wirkt, so wird ebenfalls die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit in Anspruch genommen. Diese excentrische Kraft P läßt sich, wie bekannt, in eine Axenkraft P, §. 271

Fig. 445.

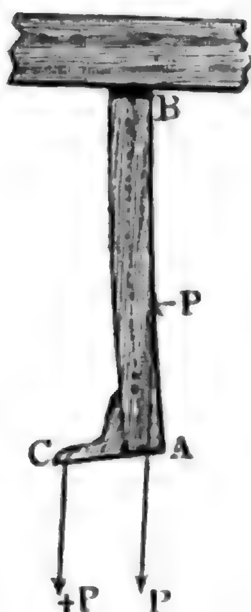
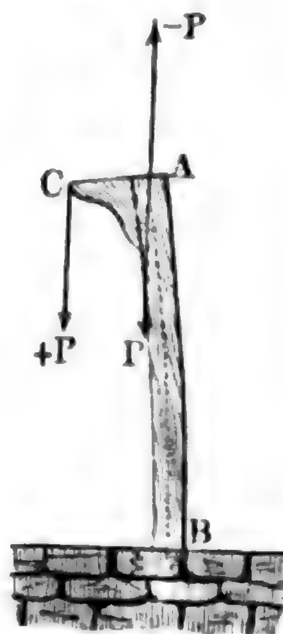


Fig. 446.



und in ein Kräftepaar $(P, -P)$ zerlegen, dessen Armlänge c der Abstand CA des Angriffspunktes C der Kraft P von der Axe des Körpers, und dessen Moment folglich $= Pc$ zu setzen ist. Die resultirende Axenkraft $\overline{AP} = P$ spannt alle Fasern mit der constanten Kraft $S_1 = \frac{P}{F}$, wenn F den Querschnitt des Körpers bezeichnet; das Kräftepaar hingegen biegt den Körper nach

einem Halbmesser, welcher sich aus der bekannten Grundformel $Pxr = WE$ (§. 215) bestimmt, wenn man darin für das Kraftmoment Px das Moment Pc des Paares einführt. Es ist folglich $r = \frac{WE}{Pc}$, constant bei constantem W oder Querschnitt F, und daher die von der neutralen Axe des Körpers gebildete Curve ein Kreisbogen.

Ist wieder e der größte Abstand der Fasern von der durch den Querschnitt des Körpers gehenden neutralen Axe, so hat man die Maximalspannung, welche durch das Kräftepaar hervorgebracht wird:

$$S_2 = \frac{Pce}{W},$$

daher die Gesammtspannung:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{P}{F} + \frac{Pce}{W},$$

und folglich, wenn man dieselbe dem Tragmodul T gleichsetzt, also einen bis zur Elasticitätsgrenze der äußersten Fasern gehenden Zug annimmt:

$$T = \frac{P}{F} + \frac{Pce}{W} = \left(1 + \frac{Fce}{W}\right)\frac{P}{F}.$$

Es ist also hiernach die Tragkraft der Säule:

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{Fce}{W}},$$

z. B. für einen rectangulären Querschnitt mit den Dimensionen b und h:

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{6c}{h}},$$

und für einen kreisrunden Querschnitt mit dem Halbmesser r:

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{4c}{r}}.$$

Es läßt sich hiernach ermessen, daß durch den excentrischen Angriff einer Zug- oder Druckkraft die Festigkeit des Körpers weit mehr in Anspruch genommen wird als durch eine gleiche Kraft in der Axe des Körpers.

Wird die Biegung der Säule durch eine Stütze zur Seite verhindert, wie z. B. BAC, Fig. 447, darstellt, so bleibt natürlich $P = FT$.

Wirkt die Kraft am Umfange einer parallelepipedischen Säule AB, Fig. 448, und zwar im Abstande $c = \frac{h}{2}$ von der Axe, so hat man:

$$P = \frac{FT}{1+3} = \frac{1}{4}FT;$$

es ist also dann die Tragkraft nur ein Viertel von der Tragkraft beim centrischen Angriff (Fig. 449).

Fig. 447. Fig. 448. Fig. 449.

Für eine cylindrische Säule mit einer am Umfang angreifenden Kraft ist $c = r$, und daher:

$$P = \frac{FT}{1+4} = \frac{1}{5}FT,$$

d. i. ein Fünftel von der Tragkraft, welche ihren Angriffspunkt in der Axe des Körpers hat.

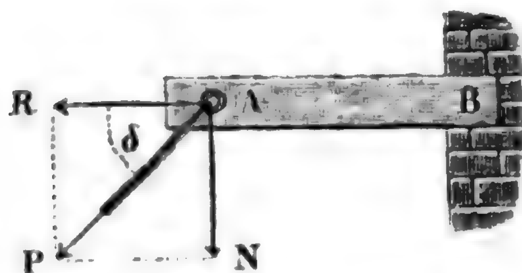
Diese Formeln lassen sich auch auf das Zerreißen, Zerdrücken und Abbrechen der Körper anwenden; es ist jedoch dann nöthig für jede Art der Zertheilung einen besonderen Festigkeitscoefficienten einzuführen, also statt

$$P = \frac{FK}{1 + \frac{Fce}{W}}, = \frac{F}{\frac{1}{K_1} + \frac{Fce}{WK_2}}$$

zu setzen, wobei K_1 den Festigkeitscoefficienten für das Zerreißen (oder Zerdrücken) und K_2 den für das Zerbrechen bezeichnet.

Schiefe Zug- und Druckkraft. Die Theorie der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit kommt vorzüglich auch dann zur Anwendung, wenn eine Kraft P unter einem schiefen Winkel $RAP = \delta$ gegen die Axe eines Balkens AB, Fig. 450 wirkt. Von den beiden Componenten $R = P\cos.\delta$ und $N = P\sin.\delta$ wirkt der eine ziehend und der andere biegend auf den Körper, und es vereinigt sich auch hier die durch die erstere Seitenkraft bewirkte Spannung über den ganzen Querschnitt F: §. 2

Fig. 450.



$$S_1 = \frac{P\cos.\delta}{F}$$

mit der durch das Moment $Pl\sin.\delta$ des zweiten Componenten bewirkten Spannung:

$$S_2 = \frac{P\sin.\delta\,.\,le}{W}$$

der äußersten Fasern, so daß sich auch wieder

$$T = S = S_1 + S_2 = \frac{P\cos.\delta}{F} + \frac{P l e \sin.\delta}{W},$$

oder vereinfacht,

$$T = P\left(\frac{\cos.\delta}{F} + \frac{l e \sin.\delta}{W}\right) \text{ setzen läßt.}$$

Hiernach ist das gesuchte Tragvermögen:

$$P = \frac{F T}{\cos.\delta + \frac{F l e}{W}\sin.\delta},$$

und umgekehrt, der entsprechende Querschnitt:

$$F = \frac{P}{T}\left(\cos.\delta + \frac{F l e}{W}\sin.\delta\right),$$

oder wenn man für die Biegung einen anderen Tragmodul T_1 einführt als für den einfachen Zug (T):

$$F = P\left(\frac{\cos.\delta}{T} + \frac{F l e}{W T_1}\sin.\delta\right).$$

Für einen parallelepipedischen Balken ist

$$\frac{F e}{W} = \frac{6}{h}, \text{ und folglich:}$$

$$F = P\left(\frac{\cos.\delta}{T} + \frac{6 l}{h T_1}\sin.\delta\right),$$

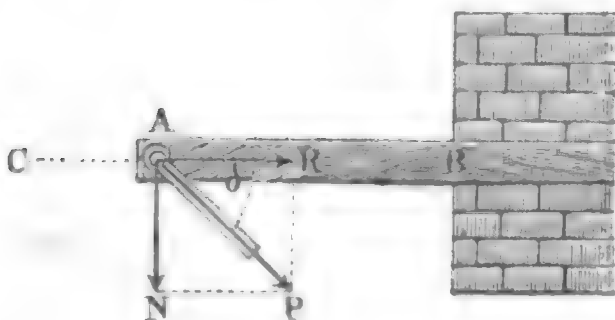
und für einen cylindrischen Balken hat man

$$\frac{F e}{W} = \frac{4}{r}, \text{ daher:}$$

$$F = P\left(\frac{\cos.\delta}{T} + \frac{4 l}{r T_1}\sin.\delta\right).$$

Dieselben Formeln gelten auch für den in Fig. 451 abgebildeten Fall, wo der erste Component R durch Druck auf den Balken wirkt. Ist hier wieder δ der Winkel PAR, um welchen die Kraft P von der Balkenaxe AB abweicht, so behalten die Seitenkräfte die Werthe:

Fig. 451.



$$R = P\cos.\delta \text{ und}$$
$$N = P\sin.\delta.$$

Um die Tragkraft des Balkens zu finden, hat man natürlich hier die Spannung durch R:

$$S_1 = \frac{P\cos.\delta}{F}$$

mit der größten Spannung

$$S_2 = \frac{P\, l\, e \sin.\delta}{W}$$

durch Biegung zu vereinigen, und daher in der oben gefundenen Formel:

$$T = P\left(\frac{\cos.\delta}{F} + \frac{l\, e \sin.\delta}{W}\right) \text{ oder: }$$

$$F = \frac{P}{T}\left(\cos.\delta + \frac{F\, l\, e}{W} \sin.\delta\right)$$

für T nicht den Tragmodul des Zerreißens, sondern den des Zerdrückens zu substituiren.

In jedem der im Vorstehenden behandelten Fälle wird natürlich die neutrale Fasernschicht aus dem Schwerpunkte verrückt, und zwar um die Größe:

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\, e = \frac{S_1}{S_2}\, e = \frac{W \cotg.\delta}{F\, e\, x},$$

z. B. für den parallelepipedischen Balken um

$$e_1 = \frac{h \cotg.\delta}{6\, x}.$$

Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß aus der Vereinigung der durch die Biegung bewirkten größten Ausdehnung und Compression mit der über den ganzen Querschnitt des Körpers gleichmäßig verbreiteten Ausdehnung oder Compression der Fasern, die Ausdehnung oder Compression

$$\sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{S_1 \pm S_2}{E} = \frac{P}{E}\left(\frac{\cos.\delta}{F} \pm \frac{l\, e \sin.\delta}{W}\right)$$

hervorgeht.

Durch Einführung der Tragmodeln erhalten wir, wenn wir noch der Sicherheit wegen, bei Holz und Gußeisen nur $\frac{T}{3}$ in Rechnung bringen,

1) für Holz in beiden Fällen:

$$P = \frac{750\, F}{\cos.\delta + \frac{6\, l}{h} \sin.\delta} = \frac{750\, F}{\cos.\delta + \frac{4\, l}{r} \sin.\delta},$$

2) für Gußeisen, im ersten Falle (Fig. 450):

$$P = \frac{3500\, F}{\cos.\delta + \frac{6\, l}{k} \sin.\delta} = \frac{3500\, F}{\cos.\delta + \frac{4\, l}{r} \sin.\delta},$$

und in dem zweiten Falle (Fig. 451):

$$P = \frac{9000\, F}{\cos.\delta + \frac{6\, l}{h} \sin.\delta} = \frac{9000\, F}{\cos.\delta + \frac{4\, l}{r} \sin.\delta}.$$

§. 273 Der im Vorstehenden behandelte Fall kommt in vielen Fällen der Anwendung vor. Hängt z. B. ein Gewicht P an einer gegen den Horizont geneigten Säule AB, Fig. 452, so ist, wenn deren Axe um den Winkel $PAR = \delta$ von der Verticalen abweicht, die Zugkraft $R = P\cos.\delta$, und die Biegungskraft $N = P\sin.\delta$, und daher

$$P = \frac{FT}{\cos.\delta + \frac{6l}{h}\sin.\delta}$$

zu setzen.

Fig. 452.

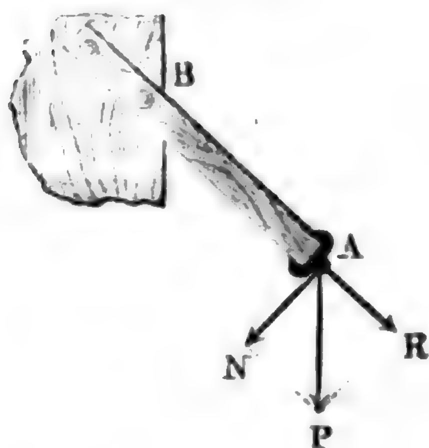
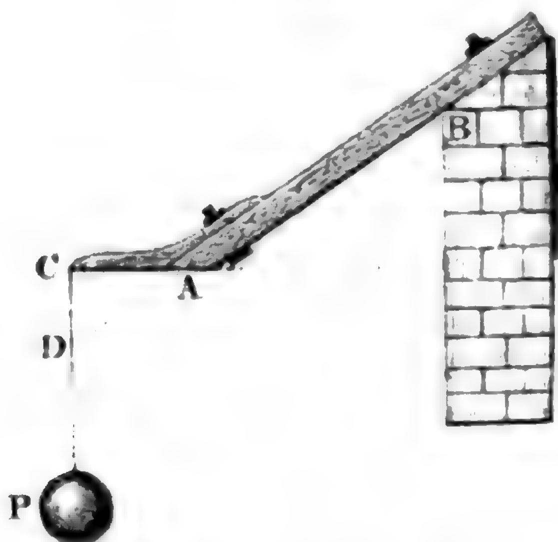


Fig. 453.



Wenn, wie Fig. 453 vor Augen führt, bei der schiefen Wirkung der Kraft P auch noch der Angriffspunkt C derselben excentrisch liegt, so muß man zur Beurtheilung der Tragkraft desselben diesen Angriffspunkt erst nach D in die Verlängerung der Axe AB des Balkens legen, also statt der Länge $BA = l$, die Länge $BD = BA + AD = l + \frac{c}{\sin.\delta}$ in Rechnung bringen, wobei vorausgesetzt wird, daß der Horizontalabstand CA durch c und die Abweichung CDA der Balkenaxe von der Verticalen durch δ bezeichnet wird.

Ebenso ist für die schiefe Säule AB, Fig. 454, wenn dieselbe um den Winkel δ von der Verticalen abweicht, die mit Sicherheit zu tragende Last:

$$P = \frac{FT}{\cos.\delta + \frac{6l}{h}\sin.\delta} = \frac{FT}{\cos.\delta + \frac{4l}{r}\sin.\delta},$$

worin für T der Modul für die Compression einzusetzen ist, während in den ersten Fällen der für die Ausdehnung zu nehmen war.

Wenn ein belasteter Balken AA, Fig. 455, nicht frei aufliegt, sondern zwischen zwei Wänden eingezwängt ist, so kommt ebenfalls eine Kraftzerlegung vor, aus welcher eine Compression und eine Biegung desselben hervorgeht. Weichen die Endflächen A, A dieses Balkens um den Winkel δ von dem

Querschnitt desselben ab, und wirkt die Last P in der Mitte B des Balkens, so reagiren die Seitenwände mit zwei Kräften Q und Q auf die Enden des

Fig. 454.

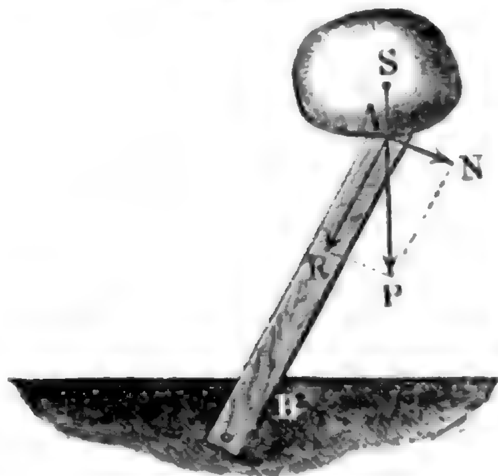
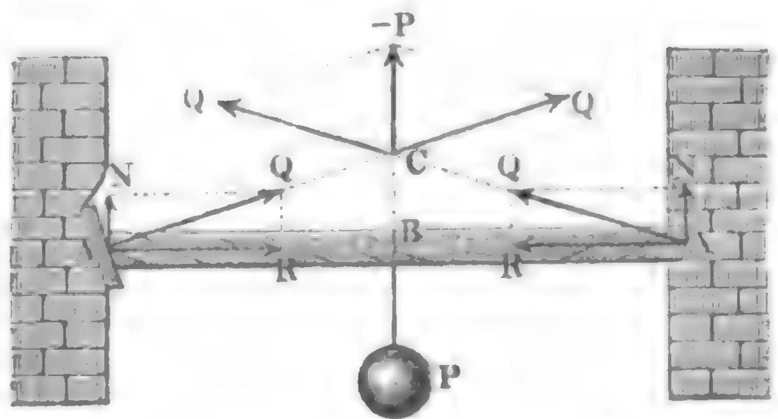


Fig. 455.



Balkens, welche unter dem Winkel δ gegen den Horizont geneigt sind und eine Mittelkraft $\overline{CP} = -P$ geben, wodurch die Kraft P aufgehoben wird.

Es ist hiernach:

$$P = 2\,Q\,cos.\,S\,C\,P = 2\,Q\,sin.\,\delta,$$

folglich umgekehrt:

$$Q = \frac{P}{2\,sin.\,\delta}.$$

Ferner resultirt aus der Reaction S die Axen- oder Druckkraft:

$$R = Q\,cos.\,\delta = \frac{P}{2}\,\frac{cos.\,\delta}{sin.\,\delta} = {}^1/_2\,P\,cotg.\,\delta,$$

und die Normal- oder Biegungskraft:

$$N = Q\,sin.\,\delta = \frac{P}{2},$$

und es ist folglich:

$$T = S = S_1 + S_2 = \frac{R}{F} + \frac{N\,.\,{}^1/_2\,l\,e}{W},$$

d. i.:

$$T = \frac{P\,cotg.\,\delta}{2\,F} + \frac{P\,l\,e}{4\,W},$$

und daher die Tragkraft:

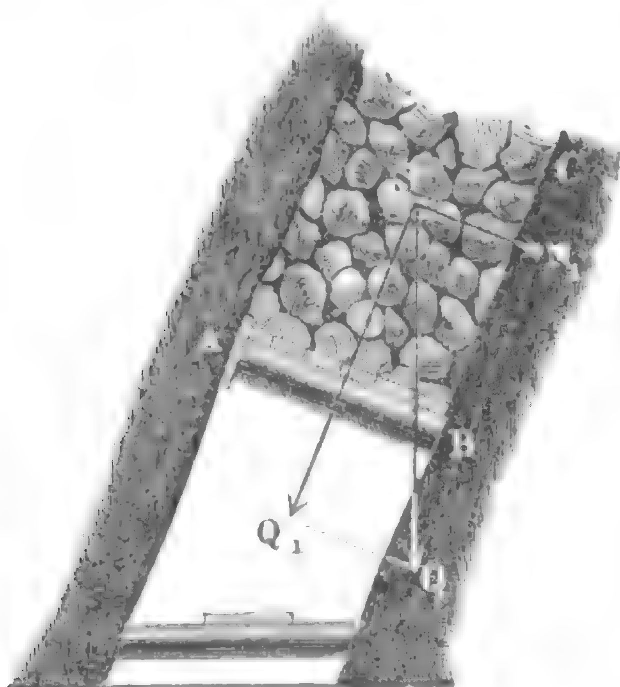
$$P = \frac{2\,F\,T}{cotg.\,\delta + {}^1/_2\,\frac{F\,l\,e}{W}}$$

zu setzen.

Derselbe Fall tritt auch ein, wenn ein geneigt liegender Stempel $A\,B$, Fig. 456 (a. f. S.), eine über ihm aufgeschüttete Last Q trägt. Nur ist hier Q erst in eine Normalkraft Q_1 rechtwinkelig zur Axe des Stempels und

in eine Seitenkraft N_1 rechtwinkelig gegen die Seitenwand (in der bergmännischen Sprache: das Liegende) zu zerlegen. Sehen wir der Sicherheit wegen von der Reibung der lockeren Masse (Gesteinsstücke) auf dem Liegenden ab; bezeichnen die Abweichung der Endfläche des Stempels von dem Querschnitte desselben durch δ, und die Neigung des Liegenden $B\,C$ gegen den Horizont durch β, so erhalten wir:

Fig. 456.



$Q_1 = Q\, sin.\beta$ und

$$= \frac{2\,F\,T}{cotg.\,\delta + {}^1/_4\, \frac{F\,l\,e}{W}}$$

(s. §. 240), und daher:

$$Q = \frac{2\,F\,T}{\left(cotg.\,\delta + {}^1/_4\, \frac{F\,l\,e}{W}\right) sin.\beta}.$$

Beispiele. 1) Welche Querdimensionen muß man einem schiefliegenden Balken $A\,B$, Fig. 452, aus Fichtenholz geben, welcher eine Länge von 9 Fuß, eine Neigung von 60 Grad gegen den Horizont hat und am Ende A eine Last $P = 6000$ Pfund trägt? Die Formel

$$P = \frac{F\,T}{cos.\,\delta + \frac{6\,l}{h}\, sin.\,\delta}$$

giebt, wenn man $P = 6000$, $T = 750$ Pfund, $\delta = 90^0 - 60^0 = 30^0$, $l = 9\,.\,12 = 108$ Zoll einführt, und $\frac{b}{h} = {}^5/_7$ annimmt:

$$F = b\,h = {}^5/_7\, h^2 = \frac{6000}{750}\left(cos.\,30^0 + \frac{6\,.\,108}{h}\, sin.\,30^0\right), \text{ d. i.:}$$

$$h^2 = 11{,}2\,.\left(0{,}866 + \frac{648\,.\,0{,}500}{h}\right) = 9{,}70 + \frac{3629}{h}.$$

Es ist annähernd:

$$h = \sqrt[3]{3629} = 15{,}37,$$

hiernach schärfer:

$$h = \sqrt[3]{3629 + 9{,}70\,.\,15{,}37} = \sqrt[3]{3778} = 15{,}6 \text{ Zoll}$$

und folglich

$$b = {}^5/_7\, h = 11{,}1 \text{ Zoll}.$$

2) In welcher Entfernung von einander sind die 12 Zoll starken Tragstempel $A\,B$ eines sogenannten Förstenbaues $A\,B\,C$, Fig. 456, zu legen, wenn derselbe 4 Fuß weit ist und sich 60 Fuß hoch auf einem 70 Grad fallenden Gange in die Höhe zieht, und vorausgesetzt wird, daß das Gewicht eines Cubikfußes Berge (Gesteinsstücken) 65 Pfund beträgt? Wird die gesuchte Entfernung mit x bezeichnet, so hat man das auf je einem Stempel ruhende Gewicht:

$$Q = 4 \,.\, 60 \,.\, 65\, x = 15600\, x,$$

und folglich den Druck auf den Stempel:

$$Q_1 = Q \sin. 70^0 = 15600\, x \sin. 70^0 = 15600 \,.\, 0{,}9397\, x = 14659\, x \text{ Pfd.}$$

Sind die Endflächen $A\,A$ eines Stempels unter einem Winkel von $\delta = 20$ Grad abgeschrägt, so hat man:

$$14659\, x = \frac{2\,F\,T}{cotg.\, 20^0 + \frac{2\,l}{d}} = \frac{2 \,.\, 113{,}1 \,.\, 750}{2{,}747 + \frac{2 \,.\, 48}{12}} = \frac{169650}{10{,}747},$$

und daher:

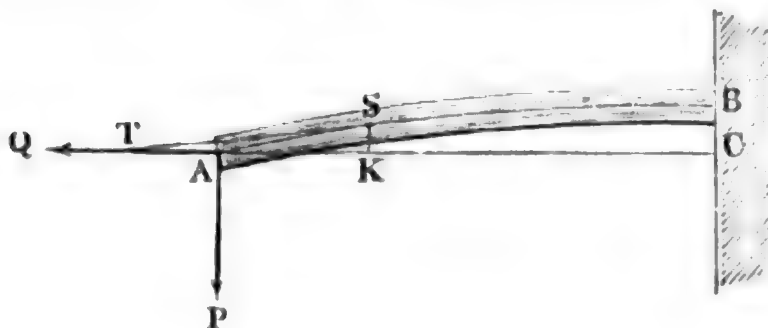
$$x = \frac{169650}{10{,}747 \,.\, 14659} = 1{,}077 \text{ Fuß} = 12{,}9 \text{ Zoll};$$

also der nöthige Zwischenraum zwischen je zwei Stempeln:

$$x - d = 0{,}9 \text{ Zoll}.$$

Biegung der gespannten Balken. Die normale Tragkraft P (§. 27 eines Balkens $A\,B$, Fig. 457, wird nur bei einem kurzen Balken und durch Hinzutritt einer kleinen Axenkraft Q vermindert; wenn hingegen die Länge des Balkens und die Zugkraft eine gewisse Grenze überschreiten, so wirkt die letztere durch ihr Moment dem Momente der Normalkraft in dem Maße entgegen, daß dadurch die Biegung des Körpers herabgezogen und das Tragvermögen des Balkens vergrößert wird.

Fig. 457.



Setzen wir wieder die Coordinaten der von der neutralen Axe des Balkens gebildeten elastischen Linie $A\,S\,B$, Fig. 457, $A\,K = x$ und $K\,S = y$, so haben wir das Moment der Kräfte in Hinsicht auf einen Punkt S in dieser Axe:

$$P\,x - Q\,y,$$

und können daher (nach §. 215)

$$(P\,x - Q\,y)\, r = W\,E$$

setzen.

Führen wir wieder

$$r = -\frac{\partial x}{\partial \alpha}$$

ein, wo α den Tangentenwinkel $S\,T\,K$ bedeutet, und bezeichnen wir noch, zur Vereinfachung,

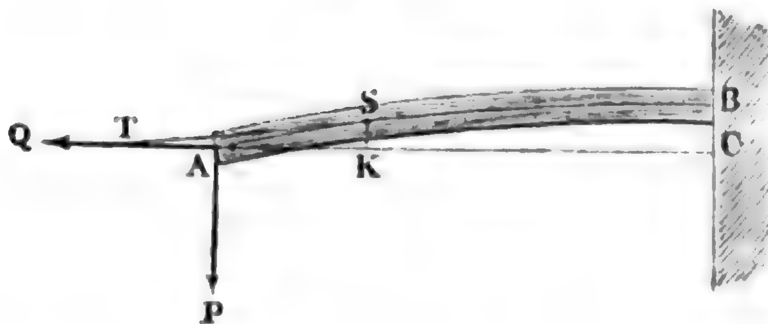
$\sqrt{\frac{P}{W\,E}}$ durch p, sowie $\sqrt{\frac{Q}{W\,E}}$ durch q, so erhalten wir die Gleichung:

$$\partial \alpha = -\frac{\partial x}{r} = -\frac{(P\,x - Q\,y)\,\partial x}{W\,E} = -(p^2\,x - q^2\,y)\,\partial x.$$

Setzen wir nun

$$1)\ y = \frac{p^2 x}{q^2} - (m\,\varepsilon^{qx} + n\,\varepsilon^{-qx}),$$

Fig. 458.



worin m und n noch zu bestimmende Constanten und ε die Grundzahl der natürlichen Logarithmen (s. analyt. Hülfslehren, Art. 19) bezeichnen, so erhalten wir:

$$2)\ \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p^2}{q^2} - (m\,\varepsilon^{qx} - n\,\varepsilon^{-qx})\,q,$$

und da nun das Differenzial des letzten Ausdruckes, nämlich:

$$\partial\alpha = -(m\,\varepsilon^{qx} + n\,\varepsilon^{-qx})\,q^2\,\partial x,$$

durch Substitution der Gleichung 1) wieder auf die obige Grundformel:

$$\partial\alpha = \left(y - \frac{p^2 x}{q^2}\right) q^2\,\partial x = -(p^2 x - q^2 y)\,\partial x$$

führt, so ist auch hiermit die Richtigkeit des Ausdruckes unter 1) für y dargethan.

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so erhalten wir durch Substitution dieser Werthe in 1) folgende Gleichung:

$$0 = 0 - (m\,\varepsilon^0 + n\,\varepsilon^0),\ \text{d. i.}$$
$$m + n = 0,$$

und da für $x = l$, $\alpha = 0$ ist, so ergiebt sich durch Substitution dieser Werthe in 2) die Gleichung:

$$0 = \frac{p^2}{q^2} - (m\,\varepsilon^{ql} - n\,\varepsilon^{-ql})\,q,$$

oder, wenn man aus der vorigen Gleichung $n = -m$ einsetzt:

$$0 = \frac{p^2}{q^2} - m\,q\,(\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}),$$

so daß sich nun:

$$m = -n = \frac{p^2}{q^3\,(\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql})}$$

bestimmt, und das Kraftmoment:

$$Px - Qy = Q\,m\,(\varepsilon^{qx} - \varepsilon^{-qx})$$
$$= \frac{P}{q}\left(\frac{\varepsilon^{qx} - \varepsilon^{-qx}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}\right) \text{ ausfällt.}$$

Jedenfalls ist das letztere ein Maximum für den festen Punkt B des Körpers, welcher sich durch $x = AC = l$ und $y = BC = a$ bestimmt, und zwar:

$$Pl - Qa = \frac{P}{q}\left(\frac{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}\right).$$

Ist die Axenkraft ql ein ächter Bruch, hat man es also mit einem kurzen Balken und mit einer kleinen Axenkraft Q zu thun, so läßt sich

$$\varepsilon^{ql} = 1 + ql + \frac{q^2 l^2}{2} + \frac{q^3 l^3}{6} + \cdots$$

sowie

$$\varepsilon^{-ql} = 1 - ql + \frac{q^2 l^2}{2} - \frac{q^3 l^3}{6} + \cdots,$$

und hiernach das Kraftmoment:

$$Pl - Qa = \frac{Pl(1 + \frac{1}{6} q^2 l^2)}{1 + \frac{1}{2} q^2 l^2} = Pl(1 + \frac{1}{6} q^2 l^2)(1 - \frac{1}{2} q^2 l^2)$$

$$= Pl(1 - \frac{1}{3} q^2 l^2) = Pl\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right)$$

setzen.

Ist dagegen die Axenkraft Q so groß, daß ql mindestens die Zahl 2 erreicht, so läßt sich

$$\varepsilon^{-ql} = \frac{1}{\varepsilon^{ql}}$$

gegen ε^{ql} vernachlässigen, daher:

$$\frac{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}} = \frac{\varepsilon^{ql}}{\varepsilon^{ql}} = 1$$

setzen, so daß dann einfach das Kraftmoment:

$$Pl - Qa = \frac{P}{q} = P\sqrt{\frac{WE}{Q}}$$

ausfällt.

Tragkraft eines gespannten Balkens. Mit Hülfe des im vorstehenden Paragraphen gefundenen Momentes der äußeren Kräfte P und Q läßt sich nun die Tragkraft des Balkens auf dem in dem Obigen mehrfach betretenen Wege wie folgt bestimmen. (§. 275)

Die Kraft Q zieht den Körper in seiner Axenrichtung mit der Kraft

$$S_1 = \frac{Q}{F}$$

pr. Flächeneinheit, und durch das Moment $Pl - Qa$ beider Kräfte P und Q erleidet die Faser im größten Abstande e_1 von der neutralen Axe die Spannung

$$S_2 = \frac{(Pl - Qa)\, e}{W},$$

und es ist folglich die ganze Spannung

$$S = S_1 + S_2 = \frac{Q}{F} + \frac{(Pl - Qa)\,e}{W}.$$

Wenn dieselbe die Elasticitätsgrenze erreicht, so ist natürlich $S = T$, daher läßt sich

$$T = \frac{Q}{F} + \frac{(Pl - Qa)\,e}{W} \text{ setzen.}$$

Uebrigens ist auch noch dann, wenn der Tragmodul T_1 der Druckelasticität von dem Tragmodul T der Zugelasticität abweicht,

$$T_1 = -\frac{Q}{F} + \frac{(Pl - Qa)\,e}{W}$$

zu setzen, wobei aber e den größten Abstand der zusammengedrückten Fasern von der neutralen Axe bezeichnet. In beiden Fällen hat man statt

$$Pl - Qa = \frac{P}{q}\left(\frac{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}\right)$$

einzuführen, so daß sich nun die gesuchte Tragkraft entweder:

$$P = \left(\frac{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}\right)\left(1 - \frac{Q}{FT}\right)\frac{WTq}{e},$$

oder:

$$P = \left(\frac{\varepsilon^{ql} + \varepsilon^{-ql}}{\varepsilon^{ql} - \varepsilon^{-ql}}\right)\left(1 + \frac{Q}{FT_1}\right)\frac{WT_1q}{e} \text{ ergiebt.}$$

Da für eine kleine Spannkraft Q:

$$Pl - Qa = Pl\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right)$$

gesetzt werden kann, so hat man hier, wenn man nur die Ausdehnung in Betracht zieht,

$$P = \frac{(FT - Q)\,W}{\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right)Fle} = \left(1 + \frac{Ql^2}{3WE}\right)\left(1 - \frac{Q}{FT}\right)\frac{WT}{le}.$$

Ohne die Spannung Q wäre die Tragkraft:

$$P_1 = \frac{WT}{le},$$

es ist daher das Verhältniß:

$$\frac{P}{P_1} = \left(1 + \frac{Ql^2}{3WE}\right)\left(1 - \frac{Q}{FT}\right),$$

und hiernach leicht zu ermessen, daß dieselbe durch Q entweder vermindert oder vergrößert wird, je nachdem $\frac{Q}{FT}$ größer oder kleiner als $\frac{Ql^2}{3WE}$, d. i. je nachdem $\frac{3W}{Fl^2}$ größer oder kleiner als $\frac{T}{E}$ ist.

Für eine große Spannkraft, wo sich

$$Pl - Qa = P\sqrt{\frac{WE}{Q}}$$

setzen läßt, hat man dagegen die Tragkraft:

$$P = \left(1 - \frac{Q}{FT}\right)\sqrt{\frac{QW}{E}} \cdot \frac{T}{e}.$$

Dieser Ausdruck wird mit $\sqrt{Q} - \frac{\sqrt{Q^3}}{FT}$ zum Maximum, und zwar, wie sich durch einfaches Differenziiren und Nullsetzen des erhaltenen Differenzialquotienten leicht ergiebt, für

$$Q = \frac{FT}{3}.$$

Es ist die Größe dieses Maximalwerthes:

$$P = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{FWT}{3E}} \cdot \frac{T}{e},$$

und das Verhältniß desselben zur Tragkraft P_1 des ungespannten Balkens:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{2}{3}l\sqrt{\frac{FT}{3WE}} = \frac{2}{3}l\sqrt{\frac{\sigma F}{3W}}.$$

Für einen parallelepipedischen Balken von der Breite b und der Höhe h hat man $F = bh$, $W = \frac{bh^3}{12}$ und $e = \frac{1}{2}h$, daher:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{4l}{3h}\sqrt{\frac{T}{E}} = \frac{4l}{3h}\sqrt{\sigma}.$$

Besteht dieser Balken aus Holz, so ist

$$\sigma = \frac{T}{E} = \frac{1}{600},$$

und daher:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{600}} \cdot \frac{l}{h} = 0{,}0544\,\frac{l}{h},$$

z. B. für $\frac{l}{h} = 30$, $P = 1{,}632\,P_1$;

es trägt also dann der Balken fast um zwei Drittel mehr, als wenn er nicht gespannt ist.

Für $\frac{l}{h} = \frac{10000}{544} = 18{,}4$ ist $P_1 = P$, und für Werthe von $\frac{l}{h}$, welche kleiner als 18,4 sind, fällt sogar P_1 kleiner als P aus, wird also die Tragkraft P des Balkens durch die Spannung Q vermindert.

§. 276 **Torsion in Verbindung mit Zug- oder Druckkraft.** Wird eine Säule AB, Fig. 459, von einer Axenkraft Q und einem Umdrehungskräftepaare $(P, -P)$ zugleich ergriffen, so findet eine Zusammensetzung von Torsions- und Zug- oder Druck-Elasticität statt, deren Resultat sich wie folgt beurtheilen läßt. Ist $S_1 = \frac{Q}{F}$ die von der Kraft Q hervorgebrachte Axenspannung pro Einheit der Querschnittsfläche, und $S_2 = \frac{Pae}{W}$ die dem Torsionsmomente entsprechende Spannung pro Flächeneinheit, im

Fig. 459.

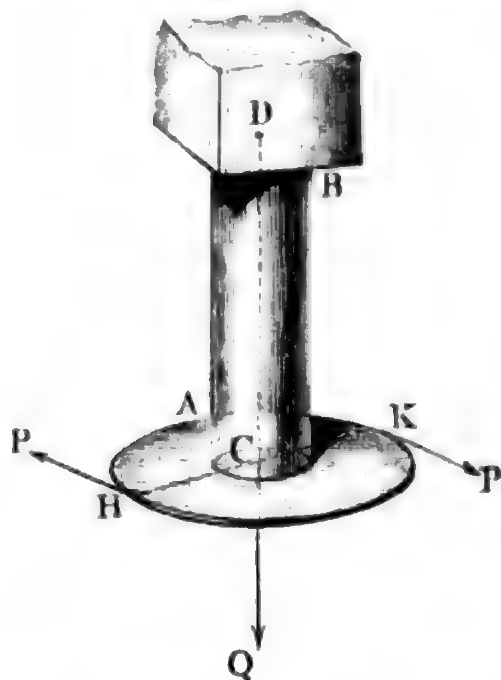
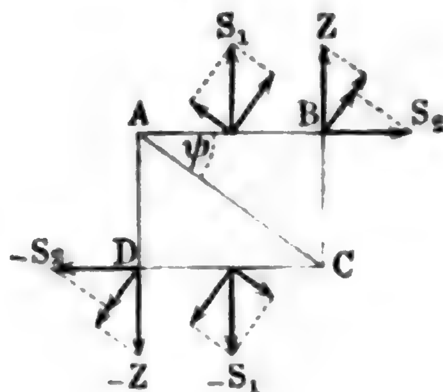


Fig. 460.



Abstande e von der Längenaxe des Körpers, so können wir annehmen, daß ein parallelepipedisches Körperelement $ABCD$, Fig. 460, von den Normalkräften $\overline{AB}.S_1$ und $-\overline{CD}.S_1$ auf AB und CD, sowie von dem Kräftepaare $(\overline{AB}.S_2, -\overline{CD}.S_2)$ längs AB und CD, und von dem Gegenkräftepaare $(\overline{BC}.Z, -\overline{AD}.Z)$ längs BC und AD ergriffen wird. Wenn nun die Diagonalebene AC den Winkel ψ mit der Axe des Körpers oder der Richtung der Kraft S_1 einschließt, so sind die Componenten der Kräfte S_1, S_2 und Z auf der einen Seite von AC,

$$\overline{AB}.S_1 \sin.\psi,\ \overline{AB}.S_2 \cos.\psi \text{ und } \overline{BC}.Z \sin.\psi,$$

und es folgt daher die ganze Normalkraft auf AC:

$$\overline{AC}.S = \overline{AB}.S_1 \sin.\psi + \overline{AB}.S_2 \cos.\psi + \overline{BC}.Z \sin.\psi,$$

oder da das Moment von $(\overline{BC}.Z, -\overline{AD}.Z)$ gleich ist dem Momente von $(\overline{AB}.S_2, -\overline{CD}.S_2)$, d. i.:

$$AB.BC.Z = BC.AB.S_2, \text{ also } Z = S_2 \text{ ist},$$

$$\overline{AC}.S = \overline{AB}.S_1 \sin.\psi + (\overline{AB} \cos.\psi + \overline{BC} \sin.\psi)\,S_2,$$

so daß schließlich die Normalspannung AC pro Flächeneinheit:

$$S = \frac{AB}{AC} \cdot S_1 \sin.\psi + \left(\frac{AB}{AC}\cos.\psi + \frac{BC}{AC}\sin.\psi\right) S_2 \text{ folgt.}$$

Nun ist aber $\frac{AB}{AC} = \sin.\psi$ und $\frac{BC}{AC} = \cos.\psi$, daher folgt:

$$S = S_1 (\sin.\psi)^2 + 2 S_2 \sin.\psi \cos.\psi = S_1 (\sin.\psi)^2 + S_2 \sin. 2\psi$$

$$= S_1 \left(\frac{1 - \cos. 2\psi}{2}\right) + S_2 \sin. 2\psi. \text{ (Vergl. §. 259).}$$

Dieser Werth ist ein Maximum von S für $tang. 2\psi = -\frac{2 S_2}{S_1}$ oder

$\sin. 2\psi = \frac{2 S_2}{\sqrt{S_1^2 + (2 S_2)^2}}$ und $\cos. 2\psi = -\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + (2 S_2)^2}}$, und zwar

$$S_m = \frac{S_1}{2}\left(1 + \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + (2 S_2)^2}}\right) + \frac{2 S_2^2}{\sqrt{S_1^2 + (2 S_2)^2}}$$

$$= \frac{S_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{S_1}{2}\right)^2 + S_2^2}.$$

Setzen wir die obigen Werthe von S_1 und S_2 hier ein, so erhalten wir die gesuchte Maximalspannung

$$S_m = \frac{Q}{2F} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2F}\right)^2 + \left(\frac{Pae}{W}\right)^2},$$

und damit der Körper den Wirkungen dieser Kräfte P und Q mit Sicherheit widerstehe, ist S_m dem Tragmodul T, also

$$\frac{Q}{2F} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2F}\right)^2 + \left(\frac{Pae}{W}\right)^2} = T$$

zu setzen, woraus die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{Pae}{W}\right)^2 = T^2 - \frac{QT}{F} \text{ folgt.}$$

Es ist daher das zulässige Torsionsmoment

1) $Pa = \frac{W}{e}\sqrt{T^2 - \frac{QT}{F}}$, sowie die zulässige Axenkraft

2) $Q = FT - \frac{F}{T}\left(\frac{Pae}{W}\right)^2.$

Um die gegebenen Kräften P und Q entsprechenden Querschnittsdimensionen zu finden, setzen wir, je nachdem die Torsions- oder die Axenkraft überwiegend ist, entweder

$$\frac{W}{e} = \frac{Pa}{\sqrt{T^2 - \frac{QT}{F}}}, \text{ oder}$$

$$F = \frac{Q}{T - \frac{1}{T}\left(\frac{P a e}{W}\right)^2}.$$

Für eine parallelepipedische Säule mit den Querdimensionen b und h ist

$$F = b h,\ W = (b^2 + h^2)\frac{b h}{12} \text{ und } e = {}^1/_2 \sqrt{b^2 + h^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{b h}{6}\sqrt{b^2 + h^2} = \frac{P a}{\sqrt{T^2 - \frac{Q T}{b h}}} = \frac{P a}{T}\left(1 - \frac{Q}{b h T}\right)^{-1/2}, \text{ sowie}$$

$$F = b h = \frac{Q}{T - \frac{36}{(b^2 + h^2) T}\left(\frac{P a}{b h}\right)^2} = \frac{Q}{T}\left[1 - \left(\frac{6 P a}{\sqrt{b^2 + h^2}.b h T}\right)^2\right]^{-1}.$$

Kennt man noch das Dimensionsverhältniß $\nu = \frac{b}{h}$, so kann man mittels dieser Formeln die Dimensionen b und h selbst berechnen.

Für eine Säule mit quadratischer Basis ist $b = h$, daher

$$\frac{h^3 \sqrt{2}}{6} = \frac{P a}{T}\left(1 - \frac{Q}{h^2 T}\right)^{-1/2}, \text{ und}$$

$$h = b = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{{}^1/_2}\, P a}{T}}\left(1 - \frac{Q}{h^2 T}\right)^{-1/6}, \text{ sowie}$$

$$h^2 = \frac{Q}{T}\left[1 - {}^1/_2\left(\frac{6 P a}{h^3 T}\right)^2\right]^{-1}, \text{ und}$$

$$h = b = \sqrt{\frac{Q}{T}}\left[1 - {}^1/_2\left(\frac{6 P a}{h^3 T}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Für eine cylindrische Säule oder Welle hat man:

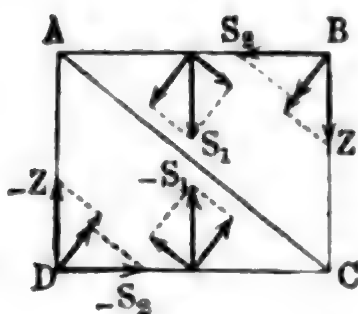
$$F = \pi r^2,\ W = \frac{\pi r^4}{2}, \text{ und } e = r, \text{ daher}$$

$$\frac{\pi r^3}{2} = \frac{P a}{\sqrt{T^2 - \frac{Q T}{\pi r^2}}} \text{ und } r = \sqrt[3]{\frac{2 P a}{\pi T}}\left(1 - \frac{Q}{\pi r^2 T}\right)^{-1/6}, \text{ sowie}$$

$$\pi r^2 = \frac{Q}{T - \frac{1}{T}\left(\frac{2 P a}{\pi r^2}\right)^2}, \text{ und } r = \sqrt{\frac{Q}{\pi T}}\left[1 - \left(\frac{2 P a}{\pi r^2 T}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Wirkt die Axenkraft Q zusammendrückend, so behalten die im Vorstehenden gefundenen Formeln ihre Anwendung, da hier nicht bloß die Richtung der Kraft S_1 (Fig. 461) die entgegengesetzte wird, sondern auch die Kräfte S_2 und Z entgegengesetzt angenommen werden können, wenn es darauf ankommt, eine möglichst große Mittelkraft S_m zu erhalten.

Fig. 461.



Beispiel. Wenn eine stehende Holzwelle von 10000 Pfund Gewicht das Umdrehungsmoment $Pa = 72000$ Zollpfund aufzunehmen hat, so ist bei dem Tragmodul $T = 400$ Pfund, der erforderliche Halbmesser derselben:

$$r = \sqrt[3]{\frac{2\,P\,a}{\pi\,T}}\left(1 - \frac{Q}{\pi\,r^2\,T}\right)^{-1/6} = \sqrt[3]{\frac{0,6366\,.\,72000}{400}}\left(1 - \frac{10000}{400\,\pi\,r^2}\right)^{-1/6}$$

$$= \sqrt[3]{0,6366\,.\,180}\left(1 - \frac{7,958}{r^2}\right)^{-1/6}.$$

Annähernd ist

$$r = \sqrt[3]{114,6} = 4,85, \text{ daher}$$

$$\frac{7,958}{r^2} = \frac{7,958}{23,52} = 0,3383,$$

und

$$\left(1 - \frac{7,958}{r^2}\right)^{-1/6} = \frac{1}{\sqrt[6]{0,6617}} = 1,071,$$

so daß nun schärfer der gesuchte Wellenhalbmesser

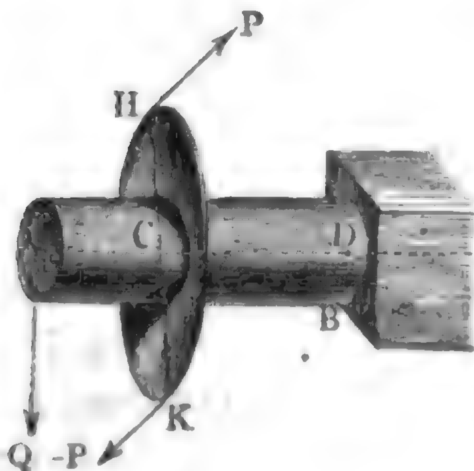
$$r = 4,85\,.\,1,071 = 5,194 \text{ Zoll},$$

und folglich der Durchmesser der Welle,

$$d = 10,39 \text{ Zoll folgt.}$$

Torsion in Verbindung mit Biegung. Nicht selten kommen auch Fälle vor, daß ein Balken oder eine Welle von einer Torsions- und einer Biegungskraft zugleich ergriffen wird, namentlich sind die liegenden Radwellen in der Regel einer Torsion und Biegung zugleich ausgesetzt. Denken wir uns, um die Verhältnisse des Zusammenwirkens dieser zwei Kräfte zu erforschen, wieder einen prismatischen Körper $ABCD$, Fig. 462, welcher an einem Ende BD festgehalten und am anderen Ende A von einer Normal- oder Biegungskraft Q, zugleich aber noch an einer Stelle C von einem Umdrehungs-Kräftepaare $(P, -P)$ ergriffen wird. Ist l_1 die Länge AC der Welle, W_1 das Maß des Biegungsmomentes derselben und e_1 die größte Entfernung §. 277

Fig. 462.



eines Querschnittselementes von der neutralen Axe, so hat man die von der Kraft Q erzeugte größte Axenspannung

$$S_1 = \frac{Q\,l_1\,e_1}{W_1} \text{ (vergl. §. 235)};$$

bezeichnet dagegegen a die Armlänge HK des Kräftepaares $(P, -P)$, W das Maß des Torsionsmomentes, und e den größten Abstand eines Querschnittselementes von der Axe CD dieses Körpers, so läßt sich die von dem Paare $(P, -P)$ erzeugte größte Schubspannung

$$S_2 = \frac{P\,a\,e}{W} \text{ setzen.}$$

Nun vertritt aber, wie leicht zu ermessen ist, die Spannung $S_1 = \frac{Q\,l_1\,e_1}{W_1}$ die Stelle der absoluten Spannung $S_1 = \frac{Q}{F}$ im vorigen Paragraphen, daher läßt sich auch hier die Maximalspannung im ganzen Körper $ABCD$, Fig. 462,

$$S_m = \frac{S_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{S_1}{2}\right)^2 + S_2^2}, \text{ oder}$$

$$T = \frac{Q_1\,l_1\,e_1}{2\,W_1} + \sqrt{\left(\frac{Q_1\,l_1\,e_1}{2\,W_1}\right)^2 + \left(\frac{P\,a\,e}{W}\right)^2}$$

setzen, woraus dann die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{P\,a\,e}{W}\right)^2 = T^2 - \frac{Q\,l_1\,e_1\,T}{W_1} \text{ folgt.}$$

Es ist daher das zulässige Torsionsmoment

$$1)\quad P\,a = \frac{W}{e}\sqrt{T^2 - \frac{Q\,l_1\,e_1\,T}{W_1}} = \frac{W\,T}{e}\sqrt{1 - \frac{Q\,l_1\,e_1}{W_1\,T}},$$

sowie die Axenkraft

$$2)\quad Q = \frac{W_1}{l_1\,e_1\,T}\left[T^2 - \left(\frac{P\,a\,e}{W}\right)^2\right], \text{ wonach entweder}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{P\,a}{\sqrt{T^2 - \frac{Q\,l_1\,e_1\,T}{W_1}}}, \text{ oder}$$

$$\frac{W_1}{e_1} = \frac{Q\,l_1}{T - \frac{1}{T}\left(\frac{P\,a\,e}{W}\right)^2} \text{ zu setzen ist.}$$

Für den quadratischen Schaft ist

$$\frac{W}{e} = \frac{h^3\sqrt{2}}{6} \text{ und } \frac{W_1}{e_1} = \frac{h^3}{6}, \text{ daher}$$

$$h^3 = \frac{6\sqrt{1/_2}\,Pa}{T}\left(1 - \frac{6\,Q l_1}{h^3\,T}\right)^{-1/_2}, \text{ und}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\sqrt{1/_2}\,Pa}{T}}\left(1 - \frac{6\,Q l_1}{h^3\,T}\right)^{-1/_6}, \text{ sowie}$$

$$h^3 = \frac{6\,Q l_1}{T}\left[1 - \left(\frac{6\sqrt{1/_2}\,Pa}{h^3\,T}\right)^2\right]^{-1} \text{ und}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\,Q l_1}{T}}\left[1 - {}^1/_2\left(\frac{6\,Pa}{h^3\,T}\right)^2\right]^{-1/_3};$$

wogegen für die cylindrische Welle

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi r^3}{2} \text{ und } \frac{W_1}{e_1} = \frac{\pi r^3}{4}, \text{ folglich}$$

$$r^3 = \frac{2}{\pi}\,\frac{Pa}{T}\left(1 - \frac{4\,Q l_1}{\pi r^3\,T}\right)^{-1/_2}, \text{ und}$$

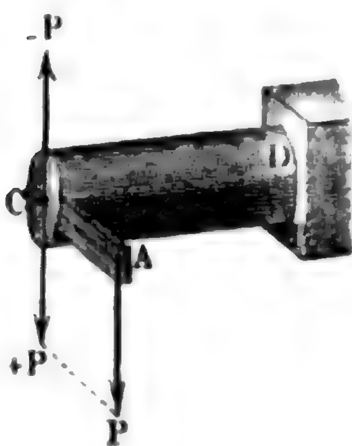
$$r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\,\frac{Pa}{T}}\left(1 - \frac{4\,Q l_1}{\pi r^3\,T}\right)^{-1/_6}, \text{ sowie}$$

$$r^3 = \frac{4}{\pi}\,\frac{Q l_1}{T}\left[1 - \left(\frac{2\,Pa}{\pi r^3\,T}\right)^2\right]^{-1}, \text{ und}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}\,\frac{Q l_1}{T}}\left[1 - \left(\frac{2\,Pa}{\pi r^3\,T}\right)^2\right]^{-1/_3} \text{ zu setzen ist.}$$

Sehr gewöhnlich ist es nicht ein Kräftepaar $(P, -P)$, sondern eine excentrisch wirkende Kraft P, welche die Torsion eines Körpers BCD, Fig. 463, hervorbringt. Da sich eine solche Kraft in eine gleiche Centralkraft $\overline{CP} = +P$, und in ein Kräftepaar $(P, -P)$ zerlegen läßt, dessen Armlänge a der Normalabstand CA zwischen der Axe CD des Körpers und der Angriffslinie der Kraft P ist, so hat man es in diesem Falle, selbst ohne Hinzutritt einer anderen Kraft Q, mit der zusammengesetzten Festigkeit zu thun, indem sich die aus $(P, -P)$ hervorgehende Torsion mit der durch die Axenkraft $+P$ bewirkten Biegung vereinigt. Es finden daher bei Bestimmung der Stärke eines solchen Körpers die letzten Formeln ihre unmittelbare Anwendung, wenn man darin $Pl = Ql_1$ setzt.

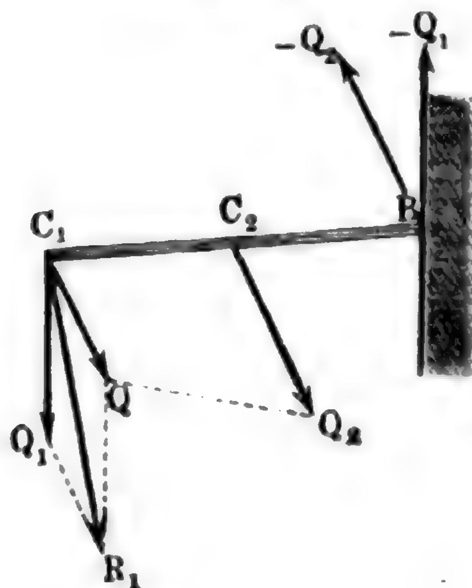
Fig. 463.



Tritt zu der excentrischen Kraft P noch eine besondere Biegungskraft Q mit dem Momente Ql_1 hinzu, so muß man natürlich in den letzten Formeln $Pl + Ql_1$ statt Pl setzen.

§. 278 **Biegungskräfte in verschiedenen Ebenen.** Wenn ein Balken oder eine Welle BC, Fig. 464, von zwei Biegungskräften Q_1 und Q_2 ergriffen wird, deren Richtungen $C_1 Q_1$ und $C_2 Q_2$ zwar rechtwinkelig auf der Axe $C_1 B$ des Körpers stehen, aber unter sich selbst nicht parallel sind, so wird das Stück $C_2 B$ desselben von zwei Kräftepaaren $(Q_1, -Q_1)$ und $(Q_2, -Q_2)$ gebogen, welche daher zu einem einzigen Kräftepaare zu vereinigen sind, um die Art und Größe der Biegung beurtheilen zu können. Bezeichnen l_1 und l_2 die Hebelarme der Kräfte Q_1 und Q_2 in Hinsicht auf den festen Punkt B, sind also $Q_1 l_1$ und $Q_2 l_2$ die Momente derselben, und ist α der Winkel, welchen die Kraftrichtungen zwischen sich einschließen, wenn man sie durch einen einzigen Punkt legt, so hat man nach §. 95 das Moment des resultirenden Kräftepaares:

Fig. 464.



$$Rc = \sqrt{(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2\,(Q_1 l_1)\,(Q_2 l_2)\,cos.\,\alpha},$$

und es ist für den Winkel β, welchen die Ebene dieses Kräftepaares mit der des Paares $(Q_1, -Q_1)$ einschließt,

$$sin.\,\beta = \frac{Q_2 l_2}{Rc}.$$

Um die Größe dieses Kräftepaares $(R, -R)$ und die Ebene desselben zu finden, kann man die Kraft Q_2 von C_2 nach C_1 reduciren und die reducirte Kraft $Q = \frac{Q_2 l_2}{l_1}$ mit der Kraft Q_1 durch das Kräfteparallelogramm zu einer Mittelkraft R_1 vereinigen; das Product $R_1 l_1 = Rc$ ist dann die Größe des resultirenden Kräftepaares, und der Winkel $Q_1 C_1 R_1$, der Winkel β, welchen die Ebene dieses Paares mit der des Paares $(Q_1, -Q_1)$ einschließt. Diese Ebene ist natürlich auch diejenige, nach welcher der Körper gebogen wird, auch ergiebt sich mit Hülfe des gefundenen Momentes $Rc = R_1 l_1$ die größte Spannung des Körpers:

$$S = \frac{Rce}{W},$$

also wenn man diese dem Tragmodul T gleichsetzt:

$$\frac{TW}{e} = \sqrt{(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2\,(Q_1 l_1)\,(Q_2 l_2)\,cos.\,\alpha}.$$

Wirkt nun auf diesen Körper AB noch ein Umdrehungskräftepaar $(P, -P)$ mit dem Momente Pa, so ist die Maximalspannung

$$S_m = T = \frac{R c e_1}{2 W_1} + \sqrt{\frac{R c e_1}{2 W_1} + \left(\frac{P a e}{W}\right)^2}$$

zu setzen, wobei natürlich W_1 das Maß des Biegungsmomentes, W das des Drehungsmomentes, und e_1 den größten Abstand des Körperumfanges von der neutralen Axe, dagegen e den von der Längenaxe des Körpers in D bezeichnet.

Hiernach ist

$$\left(\frac{P a e}{W}\right)^2 = T^2 - \frac{R c e_1 T}{W_1}$$

$$= T^2 - [(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2 (Q_1 l_1)(Q_2 l_2) \cos. \alpha] \frac{e_1 T}{W_1}.$$

Mit Hülfe der Formeln des vorigen Paragraphen lassen sich auch die erforderlichen Querschnittsdimensionen des Körpers finden, wenn man in denselben statt $Q l_1$ die Summe $Q_1 l_1 + Q_2 l_2$ einsetzt.

Wenn nur eine Biegungskraft Q_1 auf den Körper wirkt, und derselbe anstatt des Kräftepaares $(P, -P)$ von einer einzigen Umdrehungskraft P ergriffen wird, welche sich in eine Axenkraft P und in ein Umdrehungskräftepaar $(P, -P)$ zerlegen läßt, so hat man statt $Q_2 l_2$ das Moment $P l$ in den letzten Formeln einzusetzen.

Schlußanmerkung. Obgleich über keinen Gegenstand der Mechanik bis jetzt so viele Versuche angestellt worden sind, als über die Elasticität und Festigkeit der Körper, so bleibt doch noch vieles zu untersuchen und manche Unsicherheit zu beseitigen übrig. Wir haben Versuche hierüber von Ardant, Banks, Barlow, Bevan, Brix, Buffon, Burg, Duleau, Ebbels, Eytelwein, Finchan, Gerstner, Girard, Gauthey, Fairbairn und Hodgkinson, Lagerjhelm, Musschenbroek, Morveau, Navier, Rennie, Rondelet, Tredgold, Wertheim u. s. w. Die älteren Versuche werden sehr ausführlich abgehandelt in Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Bd. II., nächstdem in von Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. I. Eine umfänglichere Abhandlung über diesen Gegenstand liefert auch v. Burg im 19ten und 20sten Bande der Jahrbücher des polytechn. Instituts zu Wien. Man findet in diesen Schriften zum Theil auch abweichende Theorien abgehandelt. Der Versuche von Brix und Lagerjhelm ist schon oben (S. 360) gedacht worden. Neue und sehr umfängliche Versuche über die rückwirkende Festigkeit der Steinarten, von Brix, rapportirt der 32ste Jahrgang (1853) der Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen. Eine einfache Theorie der Biegung von Brix findet man in der Abhandlung „elementare Berechnung des Widerstandes prismatischer Körper gegen die Biegung“, welche aus den Verhandlungen des preußischen Gewerbevereins besonders abgedruckt ist. Die neuesten Untersuchungen über die Elasticität von Wertheim sind ebenfalls schon oben (S. 362) besprochen worden. Ueber Hodgkinson's Versuche findet man einen Auszug in Moseley's Mechanical Principles of Engineering and Architecture. Das Hauptwerk von Hodgkinson ist unter dem Titel „Experimental Researches on the strength and other properties of cast iron etc., bei

John Weale, 1846, erschienen. Eine französische Uebersetzung von Pirel enthält Tome IX, 1855, der Annales des ponts et chaussées, auch wird hiervon in einem Aufsatze von Couche, Tome XX, 1855, der Annales des Mines gehandelt. Tredgold handelt in einer besondern Abhandlung „über die Stärke des Gußeisens und anderer Metalle", welche in Leipzig 1826 auch deutsch erschienen ist. Uebrigens ist zum Studium zu empfehlen: Poncelet's Introduction à la Mécanique industrielle, ferner Navier's Résumé des leçons sur l'application de la Mécanique, Part. I., deutsch von Westphal, unter dem Titel „Mechanik der Baukunst", zu welcher Schrift Poncelet in seiner Theorie von dem Widerstande fester Körper (s. dessen Lehrbuch der Anwendung der Mechanik, Band II., deutsch von Schnuse) Ergänzungen liefert. Vorzüglich und auch im vorliegenden Werke mehrfach benutzt ist: Résistance des matériaux (Leçons de Mécanique pratique) par A. Morin, ferner Theorie der Holz- und Eisenconstructionen mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen von Georg Rebhan. Wien 1856. Auch ist zu empfehlen: die schon oben (S. 425) citirte Schrift, die Festigkeit der Materialien, von Moll und Reuleaux, ferner Mémoire sur la Résistance du Fer et de la Fonte etc. par G. H. Love, Paris 1852; sowie Tate, die Festigkeit eiserner Balken und Träger, nach dem Englischen von von Weber, Dresden 1851. Die Theorie der zusammengesetzten Festigkeit ist zuerst von dem Verfasser in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann u. s. w. Bd. I. abgehandelt worden. In dem ersten Bande der neuen Folge dieser Zeitschrift („Civilingenieur" 1854) wird vom Herrn Kunstmeister Bornemann die graphische Darstellung der relativen Festigkeit abgehandelt; auch werden in demselben die Ergebnisse der Biegungsversuche von Bornemann sowie von Lamarle mitgetheilt.

Weitere Ausführungen der Lehre von der Elasticität und Festigkeit kommen in der Folge bei der Theorie der Schwingungen und der des Stoßes vor.

W. Fairbairn's Useful Information for Engineers I. and II. Series, berichten mehrfache Versuche über die Festigkeit des Schmiedeeisens in verschiedenen Formen, sowie auch über die von Steinen, Glas u. s. w. In theoretischer Beziehung ist vorzüglich zu empfehlen: Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides par Lamé, sowie A Manual of applied Mechanics by W. J. M. Rankine, nächstdem auch Cours de Mécanique appliquée, I. Partie, par Bresse, sowie Théorie de la Résistance et de la flexion plane des solides par Belanger. Die Schrift von Laissle und Schübler: „Ueber den Bau der Brückenträger" ist dem dermaligen Stand der Wissenschaft entsprechend bearbeitet, und daher sehr zu empfehlen; auch enthalten Rühlmann's Grundzüge der Mechanik, 3. Auflage (1860), einen lesenswerthen Abriß der Festigkeitslehre.

Der Civilingenieur und die Zeitschrift des deutschen Ingenieurvereins enthalten mehrere werthvolle Abhandlungen über Elasticitäts- und Festigkeitslehre, namentlich von Grashof, Schwedler, Winkler u. s. w., sowie auch mehrere gute Uebersetzungen von französischen und englischen Abhandlungen von Barlow, Bouniceau, Fairbairn, Love u. s. w.; auch findet man in diesen Zeitschriften die Ergebnisse vielfacher Versuche über die Festigkeit, z. B. von Fairbairn, Karmarsch, Schönemann, Völkers u. s. w.

Fünfter Abschnitt.

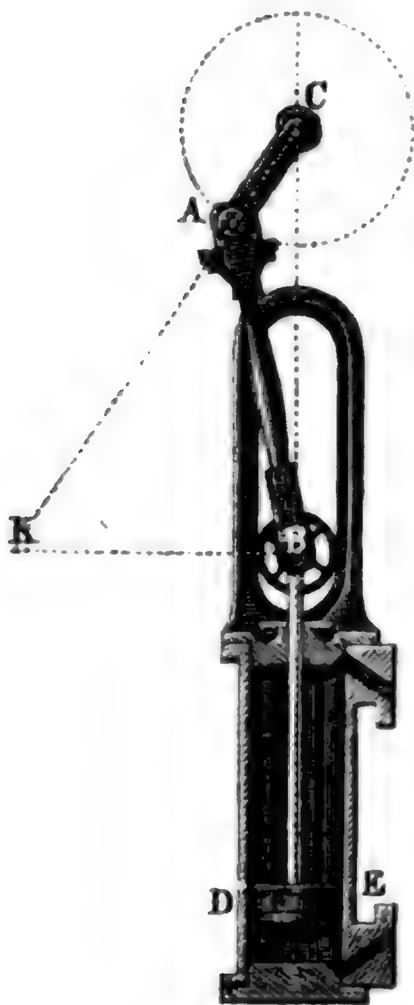
Dynamik fester Körper.

Erstes Capitel.

Die Lehre von den Trägheitsmomenten.

Bewegungsarten. Die Bewegung eines festen Körpers ist entweder fortschreitend, oder drehend, oder beides zugleich. Bei der fortschreitenden oder progressiven Bewegung (franz. mouvement de translation; engl. motion of translation) sind die gleichzeitig zurückgelegten Wege der Körpertheile unter sich parallel und gleich, bei der drehenden oder rotirenden Bewegung (franz. mouvement de rotation; engl. motion of rotation) hingegen beschreiben die Theile des Körpers um eine gewisse gerade Linie, die man die Umdrehungsaxe (franz. axe de rotation; engl. axis of revolution) nennt, concentrische Kreisbögen. Jede zusammengesetzte Bewegung läßt sich als eine drehende Bewegung um eine bewegliche Axe ansehen. Letztere ist wieder entweder veränderlich oder unveränderlich. §. 27

Fig. 465.



In progressiver Bewegung befindet sich der Kolben DE und die Kolbenstange BF einer Pumpe oder Dampfmaschine, Fig. 465, in drehender Bewegung, dagegen ist die Kurbel oder der Krummzapfen AC, in zusammengesetzter Bewegung endlich die Kurbelstange AB, denn das eine Ende B derselben hat eine fortschreitende, und das andere Ende A eine drehende Bewegung. Bei einem sich wälzenden Cylinder ist die Umdre-

hungsaxe unveränderlich, bei der Kurbelstange AB hingegen ist dieselbe veränderlich, denn sie ist der Durchschnitt M zwischen dem Perpendikel BK zur Axenrichtung CB der Kolbenstange und der Verlängerung des Kurbelarmes CA (s. §. 101).

§. 280 **Geradlinige Bewegung.** Bei der geradlinig fortschreitenden Bewegung eines Körpers finden die §. 82 und §. 98 gefundenen Bewegungsgesetze eines materiellen Punktes ihre unmittelbare Anwendung. Die Massentheile M_1, M_2, M_3 u. s. w. eines mit der Acceleration p fortschreitenden Körpers widerstehen der Bewegung vermöge ihrer Trägheit mit den Kräften $M_1 p$, $M_2 p$, $M_3 p$ u. s. w. (§. 54), und da die Bewegungen aller dieser Theile in parallelen Linien erfolgen, so sind auch die Richtungen dieser Kräfte unter sich parallel; es ist daher die Mittelkraft von allen diesen aus der Trägheit entspringenden Kräften gleich der Summe

$$M_1 p + M_2 p + M_3 p + \cdots = (M_1 + M_2 + M_3 + \cdots) p = Mp,$$

wo M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet, und es fällt auch der Angriffspunkt derselben mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammen. Um also einen übrigens frei beweglichen Körper von der Masse M oder dem Gewichte $G = Mg$ in eine geradlinig fortschreitende Bewegung mit der Acceleration p zu versetzen, ist eine Kraft

$$P = Mp = \frac{Gp}{g}$$

nöthig, deren Richtung durch den Schwerpunkt S des Körpers geht.

Aendert sich in Folge der Einwirkung der Kraft P die Geschwindigkeit c während der Zurücklegung des Weges s in die Geschwindigkeit v um, so ist die von der Masse in sich aufgenommene mechanische Arbeit (§. 72):

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - k)\, G.$$

Beispiel. Der Kolben sammt Stange von einer Pumpe, Dampfmaschine, Gebläsemaschine u. s. w. hat eine ungleichförmige Bewegung, bei seinem höchsten und tiefsten Stande ist er ohne Geschwindigkeit, und nahe bei seinem mittleren Stande ist die Geschwindigkeit desselben am größten. Ist das Gewicht des Kolbens und seiner Stange $= G$, und seine größte Geschwindigkeit in der Mitte seines Auf- oder Niederganges $= v$, so beträgt hiernach das Arbeitsvermögen, welches er vermöge seiner Trägheit in der ersten Hälfte seines Weges in sich aufnimmt und in der zweiten Hälfte desselben wieder ausgiebt:

$$L = \frac{v^2}{2g} G.$$

Für $G = 800$ Pfund und $v = 5$ Fuß ist diese Arbeit:

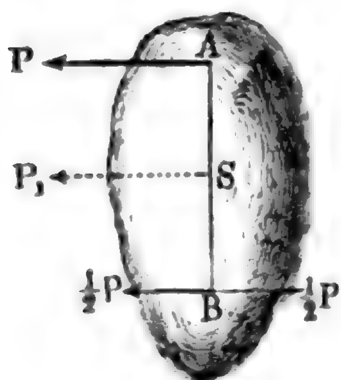
$$L = 0{,}016 \,.\, 5^2 \,.\, 800 = 320 \text{ Fußpfund};$$

wäre nun noch der halbe Kolbenweg $s = 4$ Fuß, so hätte man die mittlere Kraft, welche nöthig ist, um den Kolben in der ersten Hälfte dieses Weges zu beschleunigen, und welche derselbe in der zweiten Hälfte durch seine Verzögerung ausübt:

$$P = \frac{L}{s} = \frac{v^2}{2\,g\,s} \cdot G = \frac{320}{4} = 80 \text{ Pfund.}$$

Drehende Bewegung. Geht die bewegende Kraft P eines Körpers AB, Fig. 466, nicht durch den Schwerpunkt S, so nimmt der Körper eine Drehung um diesen Punkt an, und es schreitet dieser fort, als wenn die Kraft unmittelbar in ihm angriffe, wie sich folgendergestalt beweisen läßt. Man fälle vom Schwerpunkte S ein Perpendikel $SA = a$ gegen die Kraftrichtung, verlängere dasselbe rückwärts, mache die Verlängerung SB dem Perpendikel gleich und lasse zwei sich das Gleichgewicht haltende und parallel mit P wirkende Kräfte, die eine $+ \,^1/_2\, P$ und die andere $- \,^1/_2\, P$, in B angreifen. Die Kraft $+ \,^1/_2\, P$ giebt in Vereinigung mit der einen Hälfte der in A angreifenden Kraft P die im Schwerpunkte S angreifende Mittelkraft §. 281

Fig. 466.



$$P_1 = \,^1/_2\, P + \,^1/_2\, P = P,$$

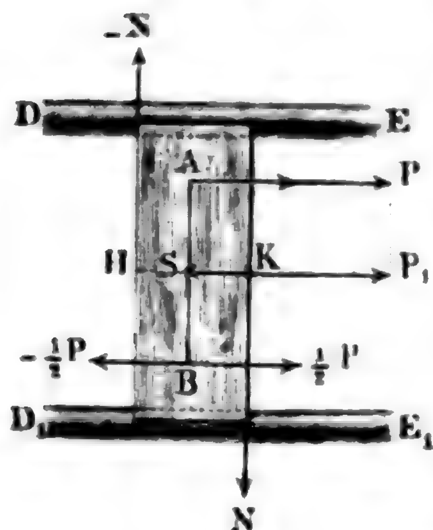
wogegen die Kraft $- \,^1/_2\, P$ mit der zweiten Hälfte ($^1/_2\, P$) von der in A angreifenden Kraft P ein Kräftepaar bildet; es resultirt also aus der excentrisch wirkenden Kraft P eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft $P_1 = P$, welche diesen Punkt sammt dem ganzen Körper progressiv bewegt, und ein Kräftepaar ($^1/_2\, P, - \,^1/_2\, P$), welches den Körper um den Schwerpunkt dreht, ohne einen Druck in demselben zu erzeugen. Das statische Moment dieses Kräftepaares ist aber

$$= \,^1/_2\, P . \overline{SA} + \,^1/_2\, P . \overline{SB} = P . \overline{SA} = P a$$

gleich dem statischen Momente der in A angreifenden Kraft P in Hinsicht auf den Schwerpunkt S; es ist folglich auch die resultirende Umdrehung dieselbe, als wenn der Schwerpunkt S festgehalten würde und P allein wirkte.

Wird ein Körper AB, Fig. 467, durch eine Führung oder Leitung DE, D_1E_1 gezwungen, eine progressive Bewegung anzunehmen, so übt die excentrische Kraft $\overline{AP} = P$ dieselbe Wirkung auf die Bewegung des Körpers aus, wie eine gleiche im Schwerpunkte S desselben angreifende Kraft $\overline{SP_1} = P_1$, weil das übrig bleibende Kräftepaar ($^1/_2\, P, - \,^1/_2\, P$) durch die Führung aufgenommen wird. Ist a die Excentricität SA der Kraft P, oder der Abstand ihrer Richtung von dem Schwerpunkte S des Körpers und bezeichnet b den Abstand HK zwischen den

Fig. 467.



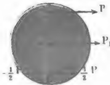
durch die einander diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte F und G gelegten Normalen der Führung, sowie $(N, - N)$ das Kräftepaar, mit welchem der Körper gegen die Führung wirkt, so hat man durch Gleichsetzen der Momente dieser Paare $(\frac{1}{2} P, - \frac{1}{2} P)$ und $(N, - N)$:

$$N b = P a, \text{ und daher:}$$

$$N = \frac{a}{b} P.$$

Wird endlich der Körper $A B$, Fig. 468, durch eine feste Axe C verhindert, fortzuschreiten, so übt die excentrische Kraft $\overline{A P} = P$, deren Richtung um $CA = a$ von der festen Axe C absteht, dieselbe Wirkung auf die Umdrehung des Körpers um diese Axe C aus als ein Kräftepaar $(\frac{1}{2} P, - \frac{1}{2} P)$ mit der Armlänge $A B = 2 C A = 2 C B = 2 a$, oder dem Momente $\frac{1}{2} P . 2 a = P a$, weil die übrig bleibende centrische Kraft $\overline{C P_1} = P_1 = P$ von den Axenlagern aufgenommen wird (vergl. §. 130).

Fig. 468.

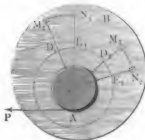


§. 282 **Trägheitsmoment.** Bei der **Umdrehung** eines Körpers $A B$, Fig. 469, **um eine feste Axe** C legen alle Punkte M_1, M_2 u. s. w. desselben in gleichen Zeiten gleiche Centriwinkel $M_1 C N_1 = M_2 C N_2$ u. s. w. $= \varphi^0$ zurück, welchen also auch bei gleichem Radius, z. B. $C D_1 = C D_2$ u. s. w. = Eins (1) ein und derselbe Bogen

$$D_1 E_1 = D_2 E_2 \text{ u. s. w.} = \varphi = \frac{\varphi^0}{180^0} \pi$$

entspricht.

Fig. 469.



Da die Geschwindigkeit durch den Quotienten aus einem Raumtheilchen φ und dem entsprechenden Zeitelemente τ bestimmt wird, so ist folglich auch die **Winkelgeschwindigkeit** (franz. vitesse angulaire; engl. angular velocity), d. i. die Geschwindigkeit derjenigen Punkte des Körpers, welche um die Längeneinheit (z. B. einen Fuß) von der Umdrehungsaxe abstehen, für den ganzen Körper eine und dieselbe, nämlich

$$\omega = \frac{\varphi}{\tau},$$

und ebenso ist auch die **Winkelacceleration**, oder die Acceleration des umlaufenden Körpers im Abstande Eins (1) von der Drehungsaxe, für den ganzen Körper eine gemeinschaftliche Größe, und zwar

$$\varkappa = \frac{\omega}{\tau},$$

wenn hier ω den im Zeitelemente τ erfolgten Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet.

Um die Wege s_1, s_2 u. s. w., Geschwindigkeiten v_1, v_2 u. s. w. und Accelerationen p_1, p_2 u. s. w. der Punkte M_1, M_2 u. s. w. des Körpers zu finden, welche um $CM_1 = r_1$, $CM_2 = r_2$ u. s. w. von der Drehungsaxe C entfernt sind, hat man natürlich den Winkelweg φ, die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelacceleration $\varkappa$ mit r_1, r_2 u. s. w. zu multipliciren; also

$$s_1 = \varphi r_1,\ s_2 = \varphi r_2 \text{ u. s. w.}$$
$$v_1 = \omega r_1,\ v_2 = \omega r_2 \text{ u. s. w. und}$$
$$p_1 = \varkappa r_1,\ p_2 = \varkappa r_2 \text{ u. s. w.}$$

zu setzen.

Besteht folglich die ganze Masse M des Körpers aus den Theilen M_1, M_2 u. s. w., welche um die Halbmesser r_1, r_2 u. s. w. von der Drehungsaxe C entfernt sind, so sind die Kräfte, mit welchen diese Massentheile der Umdrehung widerstehen:

$$P_1 = M_1 p_1 = \varkappa M_1 r_1,\ P_2 = M_2 p_2 = \varkappa M_2 r_2 \text{ u. s. w.,}$$

und ihre Momente:

$$P_1 r_1 = \varkappa M_1 r_1^2,\ P_2 r_2 = \varkappa M_2 r_2^2 \text{ u. s. w.,}$$

und es ist das erforderliche **Moment** zur Umdrehung des Körpers mit der **Winkelacceleration** $\varkappa$:

$$Pa = \varkappa M_1 r_1^2 + \varkappa M_2 r_2^2 + \cdots$$
$$= \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots).$$

Ebenso sind (nach §. 84) die mechanischen Arbeiten, welche die Massentheilchen M_1, M_2 u. s. w. erfordern, um die Geschwindigkeiten v_1 v_2 u. s. w. anzunehmen:

$$A_1 = \tfrac{1}{2} M_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} \omega^2 M_1 r_1^2,$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2} M_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} \omega^2 M_2 r_2^2 \text{ u. s. w.,}$$

und es ist daher die **mechanische Arbeit**, welche der ganze Körper in Anspruch nimmt, während er die **Winkelgeschwindigkeit** ω erhält:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots).$$

Es hängt also die Kraft und Arbeit einer rotirenden Masse vorzüglich von der Summe $M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots$ aus den einzelnen Massentheilen M_1, M_2 u. s. w. und den Quadraten ihrer Entfernungen r_1, r_2 u. s. w. von der Umdrehungsaxe ab. Man nennt diese Summe das **Trägheits-**, **Drehungs-** oder **Massenmoment** (franz. moment d'inertie; engl. momentum of inertia), und wir werden es in der Folge durch Mr^2 oder W bezeichnen. Es ist also hiernach das Moment der Kraft, wodurch der Masse $M = M_1 + M_2 + \cdots$, deren Trägheitsmoment

$$W = M r^2 = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots \text{ ist,}$$

die Winkelacceleration ertheilt wird:

$$1) \quad P a = \varkappa M r^2 = \varkappa W,$$

und dagegen die mechanische Arbeit, wodurch diese Masse M in eine Umdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω versetzt wird:

$$2) \quad P s = \tfrac{1}{2} \omega^2 M r^2 = \tfrac{1}{2} \omega^2 W.$$

Hat die Masse schon anfangs eine Winkelgeschwindigkeit ε, so ist die mechanische Arbeit, wodurch dieselbe auf ω gesteigert wird:

$$P s = \tfrac{1}{2} \omega^2 W - \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 W = \tfrac{1}{2} (\omega^2 - \varepsilon^2) W.$$

Auch läßt sich hiernach umgekehrt, aus der aufgewendeten Arbeit und Anfangsgeschwindigkeit ε die Endgeschwindigkeit ω bestimmen; es ist nämlich:

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2 P s}{W}}.$$

Beispiel. Wenn der um eine feste Axe C drehbare und anfänglich ruhende Körper $A B$, Fig. 469, ein Trägheitsmoment von 50 Fußpfund besitzt und mittels eines um eine Rolle liegenden Seiles mit einer Kraft $P = 20$ Pfund und bei Zurücklegung des Weges $s = 5$ Fuß in Umdrehung gesetzt wird, so ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit dieses Körpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 P s}{W}} = \sqrt{\frac{2 . 20 . 5}{50}} = \sqrt{4} = 2 \text{ Fuß},$$

d. h. jeder Punkt in der Entfernung eines Fußes von der Umdrehungsaxe legt nach Aufnahme dieser Arbeit in jeder Secunde 2 Fuß zurück. Die Zeit einer Umdrehung ist:

$$t = \frac{2 \pi}{\omega} = 3{,}1416 \text{ Secunden},$$

und die Zahl der Umdrehungen in der Minute:

$$u = \frac{60}{t} = \frac{60}{3{,}1416} = 19{,}1.$$

Geht die gefundene Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2$ Fuß in die Geschwindigkeit $\varepsilon = \tfrac{3}{4}$ Fuß über, so verrichtet diese Masse die Arbeit:

$P_1 s_1 = [2^2 - (\tfrac{3}{4})^2] . \tfrac{50}{2} = (4 - \tfrac{9}{16}) . 25 = \tfrac{55}{16} . 25 = 85{,}93$ Fußpfd.; hebt also z. B. ein Gewicht P_1 von 10 Pfund 8,593 Fuß hoch.

. 283 **Reduction träger Massen.** Sind die Winkelgeschwindigkeiten zweier Massen M_1 und M_2 unter sich gleich, gehören z. B. diese Massen einem und demselben rotirenden Körper an, so verhalten sich ihre lebendigen Kräfte wie ihre Trägheitsmomente $W_1 = M_1 r_1^2$ und $W_2 = M_2 r_2^2$, und sind nun auch diese unter sich gleich, so besitzen die Massen gleiche lebendige Kräfte. Zwei Massen haben also hiernach gleichen Einfluß auf den Bewegungszustand eines sich umdrehenden Körpers, und es kann eine durch die andere ersetzt werden, ohne daß dadurch eine Aenderung im Bewegungszustande vor sich geht, wenn sie gleiche Trägheitsmomente $M_1 r_1^2$ und $M_2 r_2^2$ besitzen, sich also zu einander umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdre-

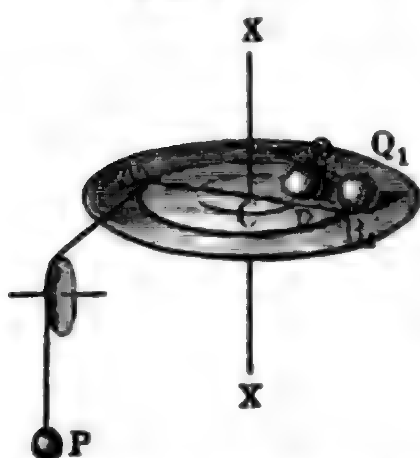
hungsaxe verhalten. Mit Hülfe der Formel $M_1 r_1^2 = M_2 r_2^2$ läßt sich eine Masse von einer Entfernung auf eine andere reduciren, d. h. es läßt sich eine Masse M_2 angeben, welche in der Entfernung r_2 eben den Antheil an dem Bewegungszustande des sich drehenden Körpers hat, als die gegebene Masse M_1 in der Entfernung r_1; es ist nämlich:

$$M_2 = \frac{M_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{W_1}{r_2^2},$$

d. i. **die auf die Entfernung r_2 reducirte Masse ist der Quotient aus dem Trägheitsmomente der Masse und dem Quadrate jener Entfernung.**

Zwei an einer Radwelle ACB, Fig. 470, festsitzende Gewichte Q und Q_1 in den Abständen $CB = b$ und $CB_1 = a$ von der Umdrehungsaxe XX haben also vermöge ihrer Massen auf die Bewegung der Radwelle gleichen Einfluß, wenn $Q_1 a^2 = Q b^2$, also $Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$ ist. Wirkt daher eine Kraft P am Hebelarme $CA = CB_1 = a$, um eine Masse vom Gewichte Q im Abstande $CB = b$ in Umdrehung zu setzen, so hat man die letztere auf den Hebelarm a der Kraft P zu reduciren, also statt Q,

Fig. 470.



$$Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$$

und die von P bewegte Masse:

$$M = \left(P + \frac{Q b^2}{a^2}\right) : g$$

zu setzen, weshalb nun die Acceleration des Gewichtes P:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P}{P + Q \frac{b^2}{a^2}} \cdot g = \frac{P a^2}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

und die Winkelacceleration:

$$\varkappa = \frac{p}{a} = \frac{P a}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

sich ergiebt.

Beispiel. Ist das Gewicht der rotirenden Masse $Q = 360$ Pfund, ihr Abstand von der Drehaxe, $b = 2,5$ Fuß, das die bewegende Kraft ausmachende Gewicht $P = 24$ Pfund und dessen Hebelarm $a = 1,5$ Fuß, so folgt die von P beschleunigte träge Masse:

$$M = \left[P + \left(\frac{2,5}{1,5}\right)^2 Q\right] : g = 0,032 \left(24 + \frac{25}{9} \cdot 360\right) = 0,032 \,.\, 1024$$
$$= 32,77 \text{ Pfund},$$

und daher die Beschleunigung des Gewichtes:

$$p = \frac{24}{32,77} = 0,732 \text{ Fuß},$$

dagegen die Acceleration der Masse Q:

$$q = \frac{b}{a} \cdot p = \frac{5}{3}\, p = \frac{5 \cdot 0,732}{3} = 1,22 \text{ Fuß},$$

und die Winkelacceleration:

$$\varkappa = \frac{p}{a} = 0,488 \text{ Fuß}.$$

Nach 4 Secunden ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = 0,488 \cdot 4 = 1,952 \text{ Fuß},$$

und der entsprechende Weg:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega\, t = \frac{1,952 \cdot 4}{2} = 3,904 \text{ Fuß},$$

folglich der Umdrehungswinkel:

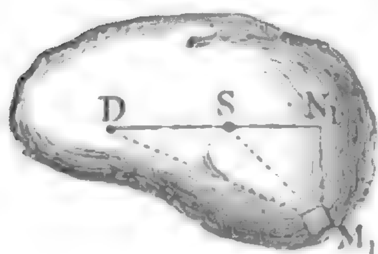
$$\varphi^0 = \frac{3,904}{\pi} \cdot 180^0 = 1,2426 \cdot 180^0 = 223^0 45',$$

endlich der von dem Gewichte P zurückgelegte Weg:

$$s = \frac{p\, t^2}{2} = \frac{0,732 \cdot 4^2}{2} = 5,856 \text{ Fuß}.$$

§. 284 **Reduction der Trägheitsmomente.** Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers oder eines Systems von Körpern in Hinsicht auf eine durch den Schwerpunkt S des Körpers gehende Axe, so läßt sich daraus leicht das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine andere mit jener parallel laufende Axe finden. Es sei S, Fig. 471, die erste durch den Schwerpunkt gehende und D die zweite Drehungsaxe, für welche das Trägheitsmoment des Körpers bestimmt werden soll; ferner sei $SD = d$ die Entfernung beider Axen von einander, und es seien $SN_1 = x_1$ und $N_1 M_1 = y_1$ die rechtwinkeligen Coordinaten eines Massentheiles M_1 des ganzen Körpers. Das Trägheitsmoment dieses Theiles in Beziehung auf D ist nun:

Fig. 471.



$$= M_1 \cdot \overline{DM_1}^2 = M_1 \left(\overline{DN_1}^2 + \overline{N_1 M_1}^2\right) = M_1 \left[(d + x_1)^2 + y_1^2\right]$$

und in Beziehung auf S:

$$= M_1 \cdot \overline{SM_1}^2 = M_1 \left(\overline{SN_1}^2 + \overline{N_1 M_1}^2\right) = M_1 \left(x_1^2 + y_1^2\right),$$

daher die Differenz beider Momente:

$$= M_1 \left(d^2 + 2 d x_1 + x_1^2 + y_1^2\right) - M_1 \left(x_1^2 + y_1^2\right) = M_1 d^2 + 2 M_1 d x_1.$$

Für einen anderen Massentheil M_2 ist sie:

$$= M_2 d^2 + 2 M_2 d x_2,$$

für einen dritten:

$$= M_3 d^2 + 2 M_3 d x_3 \text{ u. s. w.}$$

daher für alle Massentheile zusammen:

$$= (M_1 + M_2 + M_3 + \cdots)\, d^2 + 2 d\, (M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + \cdots).$$

Nun ist aber $M_1 + M_2 + \cdots$ die Summe M aller Massen und $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots$ die Summe Mx ihrer statischen Momente, es folgt daher die Differenz zwischen dem Trägheitsmomente W_1 des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe D und dem Trägheitsmomente W in Beziehung auf S:

$$W_1 - W = Md^2 + 2dMx.$$

Da aber endlich für jede Ebene durch den Schwerpunkt die Summe der statischen Momente der Theile auf der einen Seite so groß ist als die der Momente auf der anderen Seite, die algebraische Summe aller Momente also = Null ist, so hat man auch $Mx = 0$, und daher:

$$W_1 - W = Md^2,$$

d. i.

$$W_1 = W + Md^2.$$

Es ist also das Trägheitsmoment eines Körpers für eine excentrische Axe gleich dem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Parallelaxe, vergrößert um das Product aus der Masse des Körpers und dem Quadrate des Abstandes beider Axen von einander.

Man ersieht auch hieraus, daß von allen Trägheitsmomenten in Beziehung auf lauter parallele Axen dasjenige am kleinsten ausfällt, dessen Axe die Schwerlinie des Körpers ist.

Trägheitshalbmesser. Es ist nöthig, die Trägheitsmomente von den vorzüglichsten Körpern der Geometrie kennen zu lernen, weil dieselben bei den Untersuchungen der Mechanik sehr oft zur Anwendung kommen. Sind diese Körper homogen, wie wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, so sind die Massentheile M_1, M_2 u. s. w. den entsprechenden Volumentheilen V_1, V_2 u. s. w. proportional, und es läßt sich daher das Maß des Trägheitsmomentes, welches man auch wohl Trägheitsmoment schlechtweg nennt, durch die Summe aus den Volumtheilen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe ersetzen. Auch lassen sich in diesem Sinne die Trägheitsmomente von Linien und Flächen angeben. §. 28

Denkt man sich die ganze Masse eines Körpers in einen Punkt zusammengedrängt, so läßt sich die Entfernung desselben von der Axe unter der Voraussetzung bestimmen, daß die so concentrirte Masse mit der im Raume vertheilten Masse einerlei Trägheitsmoment besitze. Man nennt diese Entfernung den Drehungs- oder Trägheitshalbmesser (franz. rayon d'inertie; engl. radius of gyration). Ist W das Trägheitsmoment, M die Masse und k der Trägheitshalbmesser, so hat man $Mk^2 = W$, und daher:

$$k = \sqrt{\frac{W}{M}}.$$

Uebrigens ist zu erinnern, daß dieser Halbmesser keineswegs einen bestimmten Punkt, sondern nur einen Kreis angiebt, in dessen Umfang die Masse beliebig vertheilt angenommen werden kann.

Führt man in der Formel

$$W_1 = W + Md^2,\ W = Mk^2 \text{ und } W_1 = Mk_1^2$$

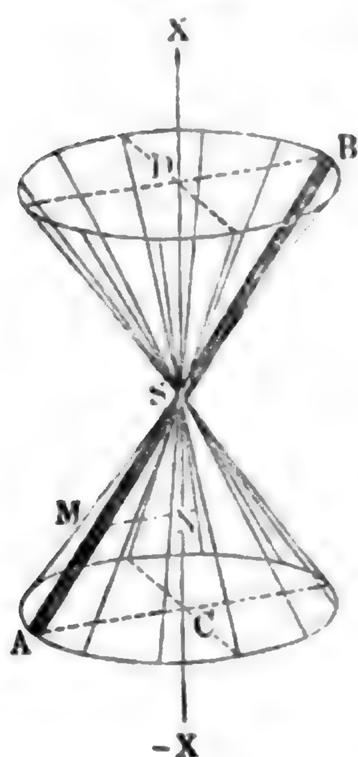
ein, so erhält man:

$$k_1^2 = k^2 + d^2,$$

d. h. es ist das Quadrat des Drehungshalbmessers in Beziehung auf eine Axe gleich dem Quadrate des Drehungshalbmessers in Beziehung auf die parallele Schwerlinie plus das Quadrat der Entfernung beider Axen von einander.

286 **Trägheitsmoment einer Stange.** Von einer Stange AB, Fig. 472, welche sich um eine Axe $\overline{X}X$ durch ihre Mitte S dreht, bestimmt sich das Trägheitsmoment auf folgende Weise. Es sei der Querschnitt der Stange, $= F$, die halbe Länge SA derselben, $= l$, und der Winkel, welchen ihre Axe mit der Drehungsaxe einschließt, d. i. $ASX = \alpha$. Theilen wir die halbe Länge in n Theile, so erhalten wir auch n Stücke, jedes von dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$; die Entfernungen dieser Stücke von der Mitte S sind $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w., daher die Abstände derselben von der Axe $\overline{X}X$, wie z. B. MN:

Fig. 472.



$$= \frac{l}{n} sin.\, \alpha,\ \frac{2l}{n} sin.\, \alpha,\ \frac{3l}{n} sin.\, \alpha \text{ u. s. w.}$$

und ihre Quadrate:

$$= \left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2,\ 4\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2,\ 9\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Durch Multiplication dieser Quadrate mit dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$ eines Elementes und durch Addition der dadurch erhaltenen Producte ergiebt sich nun das Trägheitsmoment der halben Stange:

$$T = \frac{Fl}{n}\left[\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2 + 9\left(\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{Fl^3\, sin.\, \alpha^2}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2),$$

oder, da $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3}$ ist,

$$W = \frac{F l^3 \sin. \alpha^2}{3}.$$

Da ferner $F l$ das als Masse M zu behandelnde Volumen der halben Stange ist, so folgt endlich:

$$W = \frac{1}{3} M l^3 \sin. \alpha^2.$$

Der Abstand eines Stangenendes von der Axe $\overline{X}X$ ist

$$A C = B D = a = l \sin. \alpha,$$

daher folgt einfacher

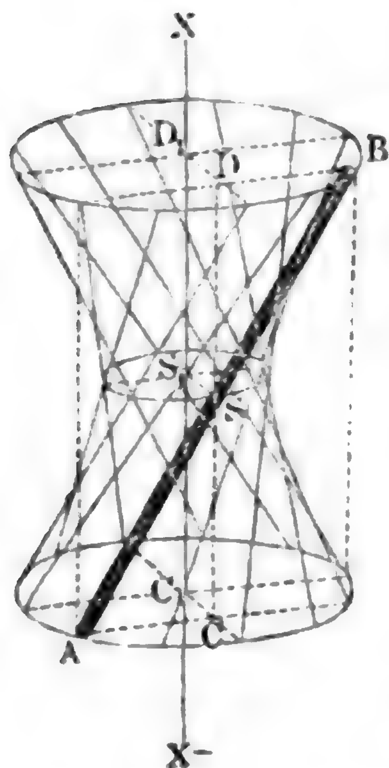
$$W = \frac{1}{3} M a^2,$$

welche Formel auch auf die ganze Stange AB anzuwenden ist, wenn man unter M die Masse der ganzen Stange versteht. Eine Masse M_1 am Endpunkte A der Stange hat das Trägheitsmoment $M_1 a^2$, macht man daher $M_1 = \frac{1}{3} M$, so hat M_1 mit der Stange einerlei Trägheitsmoment. Ob also die Masse auf die Stange gleichförmig vertheilt, oder ihr dritter Theil im Endpunkte A concentrirt sei, dies kommt in Hinsicht auf die Trägheit auf eins hinaus.

Setzt man $W = M k^2$, so bekommt man $k^2 = \frac{1}{3} a^2$, und daher den **Trägheitshalbmesser** der Stange:

$$k = a \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773 \,.\, a.$$

Fig. 473.



Steht die Stange senkrecht auf der Drehungsaxe, so ist $a = l$, daher

$$W = \frac{1}{3} M l^2.$$

Befindet sich endlich die Stange AB, Fig. 473, mit der Drehungsaxe $C_1 D_1$ nicht in einerlei Ebene, und ist der kürzeste Abstand

$$S S_1 = C C_1 = D D_1$$

der Stangenaxe von der Drehungsaxe, $= d$, sowie der Normalabstand $AC = BD$ der Stangenenden A und B von der mit $C_1 D_1$ parallelen Axe CD durch den Schwerpunkt S der Stange, $= a$, so hat man (nach §. 284), das Trägheitsmoment der Stange:

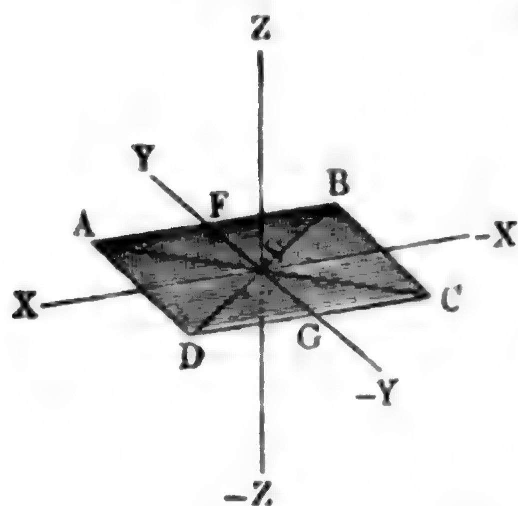
$$W_1 = W + \frac{1}{3} M a^2 = M \left(d^2 + \frac{1}{3} a^2\right)$$

Rechteck und Parallelepiped. Die Trägheitsmomente von **ebenen Flächen** bestimmen sich genau so wie die Biegungsmomente $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ derselben. Deshalb lassen sich auch die im vorigen §. 287

Abschnitt für verschiedene Flächen gefundenen Werthe von W als Trägheitsmomente W hier benutzen.

Für das Rechteck $ABCD$, Fig. 474, ist das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine Axe $\overline{XX}$, welche parallel mit einer Seite läuft, und durch die Mitte S dieser Figur geht, nach §. 226,

Fig. 474.



$$W = \frac{b\,h^3}{12},$$

wo b die Breite $AB = CD$, parallel zur Umdrehungsaxe, und h die Höhe $AD = BC$ der Fläche bezeichnet.

Nun ist aber der Inhalt $b\,h$ dieses Rechteckes als Masse M desselben einzusetzen, daher folgt das Trägheitsmoment:

$$W = \frac{M h^2}{12} = \frac{M}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

d. i. so groß als das des dritten Theiles dieser Masse, im Abstande $\overline{SF} = \overline{SG} = \frac{h}{2}$ von der Drehungsaxe angebracht.

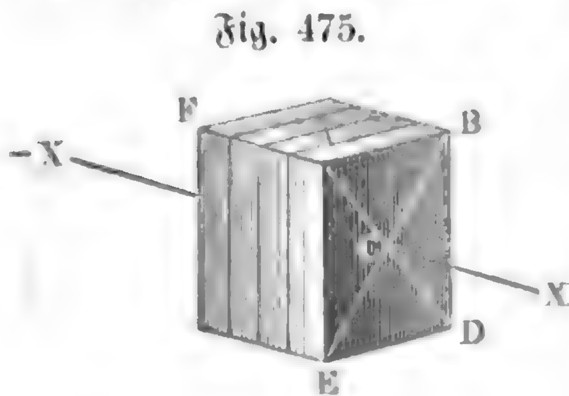
Dreht sich dieses Rechteck um eine Axe $\overline{ZZ}$, welche rechtwinkelig gegen die Ebene desselben steht und ebenfalls durch die Mitte S der Figur geht, so hat man nach §. 225:

$$W = \frac{M h^2}{12} + \frac{M b^2}{12} = \frac{M(h^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{M}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

wenn d die Diagonale $\overline{AC} = \overline{BD}$ des Rechteckes bezeichnet. Man kann sich also in diesem Falle den dritten Theil der Masse des Rechteckes in einem der Eckpunkte A, B . . . angebracht denken.

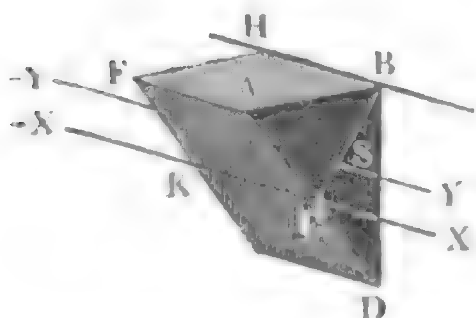
Da sich ferner ein gerades Parallelepiped BEF, Fig. 475, durch Parallelebenen in lauter gleiche rectanguläre Blätter zerlegen läßt, so gilt diese Formel auch für dieses, wenn die Umdrehungsaxe durch die Mittelpunkte von je zwei gegenüber liegenden Flächen geht. Uebrigens folgt auch aus dieser Formel, daß das Trägheitsmoment des Parallelepipeds gleich ist dem Trägheitsmomente des in einem der Eckpunkte A angebrachten dritten Theiles seiner Masse.

Fig. 475.



Prisma und Cylinder. Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Parallelepipedes läßt sich auch das eines dreiseitigen Prismas berechnen. Die Diagonalebene ADF theilt das Parallelepiped in zwei gleiche dreiseitige Prismen mit rechtwinkelig triangulären Grundflächen ABD, Fig. 476, es ist daher für eine Drehung um die durch die Mittelpunkte C und K der Hypotenusen gehende Axe $X\overline{X}$ das Trägheitsmoment $= \frac{1}{12} M d^2$. Benutzt man nun den Lehrsatz in §. 284, so erhält man das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch die Schwerpunkte S und S_1 der Grundflächen gehende Axe $Y\overline{Y}$: §. 28

Fig. 476.



$$W = \frac{1}{12} M d^2 - M.\overline{CS}^2 = M\left(\frac{d^2}{12} - \left(\frac{1}{3}\overline{CB}\right)^2\right)$$
$$= M\left[\frac{d^2}{12} - \left(\frac{d}{6}\right)^2\right],$$

d. i.:

$$W = \frac{1}{18} M d^2,$$

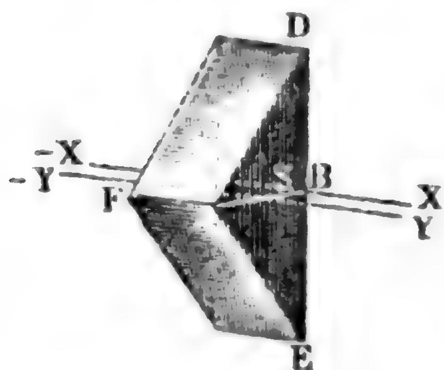
und es folgt auch das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Seitenkante BH:

$$W_1 = W + M.SB^2 = \frac{1}{18} M d^2 + M\left(\frac{1}{3} d\right)^2 = \frac{3}{18} M d^2$$
$$= \frac{1}{6} M d^2,$$

wobei d allemal die Hypotenuse AD der triangulären Grundfläche bezeichnet.

Für ein Prisma $ADFE$, Fig. 477, mit gleichschenkelig triangulären Grundflächen ist das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine Axe $X\overline{X}$, welche die Mittelpunkte der Grundlinien verbindet, $W_1 = \frac{1}{6} M d^2$, wenn d die Seite $AD = AE$ einer Grundfläche bezeichnet, weil sich diese Fläche durch die Höhenlinie AB in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke zerlegen läßt. Ist nun diese Höhe AB der gleichschenkelig triangulären Basis, $= h$, so hat man das Trägheitsmoment dieses Prismas in Beziehung auf die Axe $Y\overline{Y}$ durch die Schwerpunkte der Grundflächen:

Fig. 477.



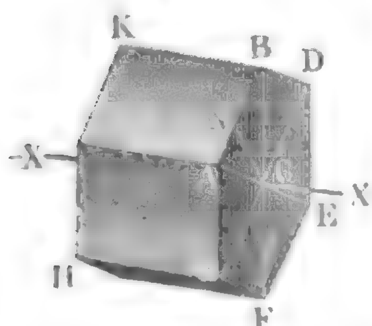
$$W = \frac{1}{6} M d^2 - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = M\left(\frac{1}{6} d^2 - \frac{1}{9} h^2\right)$$
$$= \frac{1}{3} M\left(\frac{1}{2} d^2 - \frac{1}{3} h^2\right),$$

und endlich das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Kante AF durch die Spitzen A und F der Grundflächen:

$$W_1 = W + M\,(^2/_3\,h)^2 = M\left(\frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{9} + \frac{4\,h^2}{9}\right)$$
$$= {}^1/_3\,M\,(^1/_2\,d^2 + h^2).$$

Hiernach läßt sich auch das Trägheitsmoment eines geraden regelmäßigen, sich um seine geometrische Axe drehenden Prismas $ADFK$, Fig. 478, finden. Ist $CA = CB = r$ der Halbmesser der Grundfläche oder eines Ergänzungsdreieckes der Basis, h die Höhe CN von einem der Ergänzungsdreiecke ACB, und M die Masse des ganzen Prismas, so hat man nach der letzten Formel, wenn man darin r statt d setzt:

Fig. 478.



$$W = {}^1/_3\,M\left(\frac{r^2}{2} + h^2\right).$$

Das reguläre Prisma wird zu einem geraden Cylinder, wenn $h = r$ ausfällt, daher ist das Trägheitsmoment dieses Cylinders in Beziehung auf seine geometrische Axe:

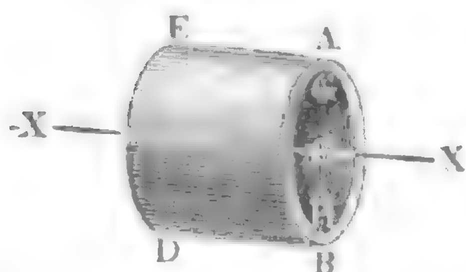
$$W = {}^1/_3\,M\left(\frac{r^2}{2} + r^2\right) = {}^1/_2\,M\,r^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Cylinders ist also gleich dem Trägheitsmomente der halben Cylindermasse concentrirt in dem Umfange desselben, oder gleich dem Trägheitsmomente der ganzen Masse befindlich im Abstande

$$k = r\sqrt{^1/_2} = 0{,}7071\,.\,r.$$

Hat man es mit einem hohlen Cylinder $ABDE$, Fig. 479, zu thun, so ist das Trägheitsmoment des leeren Raumes von dem des massiven Cylinders abzuziehen. Bezeichnet l die Länge, r_1 den äußeren Halbmesser CA und r_2 den inneren Halbmesser CG dieses Körpers, so hat man, nach dem Vorigen, das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders:

Fig. 479.



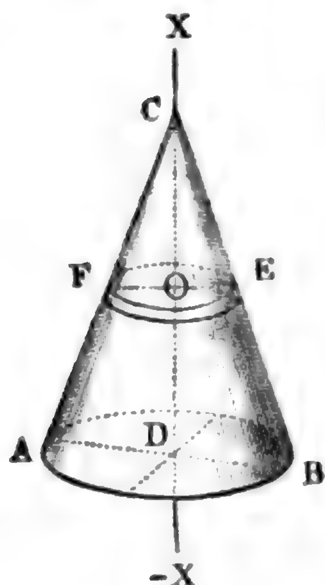
$$W = {}^1/_2\,(M_1\,r_1^2 - M_2\,r_2^2) = {}^1/_2\,\pi\,(r_1^2\,.\,r_1^2 - r_2^2\,.\,r_2^2)\,l = {}^1/_2\,\pi\,(r_1^4 - r_2^4)\,l$$
$$= {}^1/_2\,\pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,(r_1^2 + r_2^2)\,l = {}^1/_2\,M\,(r_1^2 + r_2^2),$$

weil das als Masse zu behandelnde Volumen des Körpers $= \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,l$ ist. Bezeichnet ferner r den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2}$ und b die Breite $r_1 - r_2$ der Ringfläche, so hat man auch:

$$W = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Kegel und Pyramide. Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Cylinders läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines geraden Kegels, sowie das einer Pyramide berechnen. Es sei ACB, Fig. 480, ein sich um seine geometrische Axe drehender Kegel, $r = DA = DB$, der Halbmesser seiner Basis, und $h = CD$, seine in die Axe fallende Höhe. Führen wir in gleichen Höhenabständen n Schnitte parallel zur Basis, so erhalten wir lauter dünne Scheiben von den Halbmessern §. 289

Fig. 480.



$$\frac{r}{n},\ 2\,\frac{r}{n},\ 3\,\frac{r}{n}\cdots n\,\frac{r}{n}$$

und der gemeinschaftlichen Höhe $\frac{h}{n}\cdot$ Die Volumina dieser Scheiben sind:

$$\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n},\ \pi\left(\frac{2\,r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n},\ \pi\left(\frac{3\,r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}\ \text{u. s. w.},$$

und daher die Trägheitsmomente derselben:

$$\pi\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2\,n},\ \pi\left(\frac{2\,r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2\,n},\ \pi\left(\frac{3\,r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2\,n}\ \text{u. s. w.}$$

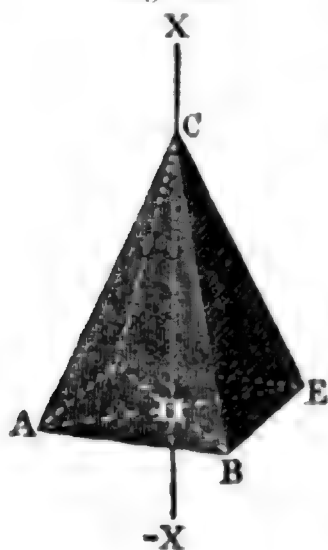
Die Summe dieser Werthe giebt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Kegels:

$$W = \frac{\pi\,r^4\,h}{2\,n^5}\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4),$$

d. i., da $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n^5}{5}$ und die Masse des Kegels $M = \frac{\pi\,r^2\,h}{3}$ zu setzen ist,

$$W = \frac{\pi\,r^4\,h}{10} = \frac{3}{10}\cdot\frac{\pi\,r^2\,h}{3}\cdot r^2 = \frac{3}{10}\,M\,r^2.$$

Fig. 481.



Ebenso ist für die gerade Pyramide ACE, Fig. 481, mit rectangulärer Basis, unter denselben Verhältnissen:

$$W = {}^1/_5\,M\,d^2,$$

wenn d die halbe Diagonale DA der Basis bezeichnet.

Auch ergiebt sich durch Subtraction von zwei Trägheitsmomenten, das Trägheitsmoment eines geraden abgekürzten Kegels ($ABEF$, Fig. 480), dessen Halbmesser DA und OF, r_1 und r_2 und Höhen CD und CO, h_1 und h_2 sind, in Beziehung auf seine geometrische Axe $X\overline{X}$:

$$W = \frac{\pi}{10}(r_1^4 h_1 - r_2^4 h_2) = \frac{\pi h_1}{10 r_1}(r_1^5 - r_2^5),$$

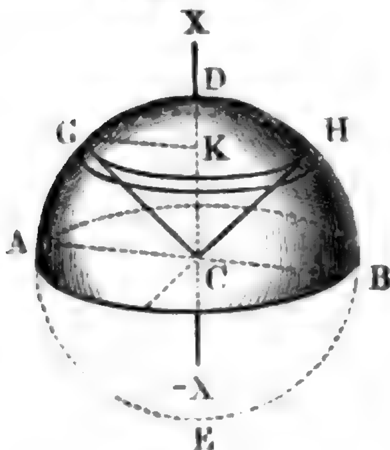
oder, da die Masse

$$M = \frac{\pi}{3}(r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2) = \frac{\pi h_1}{3 r_1}(r_1^3 - r_2^3) \text{ ist,}$$

$$W = {}^3/_{10}\, M \left(\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}\right).$$

§. 290 **Kugel.** Auf gleiche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment einer Kugel, welche sich um einen ihrer Durchmesser $DE = 2r$ dreht. Theilen wir die Halbkugel ADB, Fig. 482, durch Schnitte parallel zur Basis ACB in n gleichdicke Scheiben wie GKH u. s. w., und bestimmen wir die Momente derselben. Das Quadrat des Halbmessers GK einer solchen Scheibe ist:

Fig. 482.



$$\overline{GK}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{CK}^2 = r^2 - \overline{CK}^2,$$

daher das Trägheitsmoment derselben:

$$= {}^1/_2\, \pi \cdot \frac{r}{n}(r^2 - \overline{CK}^2)^2$$

$$= \frac{\pi r}{2n}(r^4 - 2r^2 . \overline{CK}^2 + \overline{CK}^4).$$

Setzen wir nun für CK nach und nach $\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \frac{3r}{n}$ u. s. w. bis $\frac{nr}{n}$ ein, und addiren wir die Ergebnisse, so folgt das Trägheitsmoment der Halbkugel:

$$W = \frac{\pi r}{2n}\left[n.r^4 - 2r^2\left(\frac{r}{n}\right)^2(1^2+2^2+\cdots+n^2) + \left(\frac{r}{n}\right)^4(1^4+2^4+\cdots+n^4)\right]$$

$$= \frac{\pi r}{2n}\left[n r^4 - \frac{2r^4}{n^2}\cdot\frac{n^3}{3} + \left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\frac{n^5}{5}\right], \text{ d. i.:}$$

$$W = \frac{\pi r^5}{2}(1 - {}^2/_3 + {}^1/_5) = \frac{4\pi r^5}{15}.$$

Nun ist der Inhalt einer Halbkugel, $M = {}^2/_3\, \pi r^3$, es läßt sich daher setzen:

$$W = {}^2/_5 . {}^2/_3\, \pi r^3 . r^2 = {}^2/_5\, M r^2,$$

und nimmt man M für die ganze Kugel an, so gilt die Formel auch für diese.

Der Drehungshalbmesser ist:

$$k = r\sqrt{{}^2/_5} = 0{,}6324 . r;$$

zwei Fünftel der Kugelmasse um den Kugelhalbmesser von der Drehungsaxe abstehend, hat dasselbe Trägheitsmoment wie die ganze Kugel.

Die Formel

$$W = {}^2/_5\, M r^2$$

gilt auch für ein Sphäroid, dessen Aequatorhalbmesser $= r$ ist (s. §. 123).

Dreht sich die Kugel um eine andere, von ihrem Mittelpunkte um d abstehende Axe, so hat man das Trägheitsmoment derselben zu setzen:

$$W = M\,(d^2 + {}^2/_5\, r^2).$$

Cylinder und Kegel. Das Trägheitsmoment einer Kreislinie $ABDE$, Fig. 483, in Hinsicht auf eine Axe durch den Mittelpunkt C und rechtwinkelig zur Ebene des Kreises ist, da alle Punkte um $CA = r$ von der Axe abstehen, §. 291

$$W = Mr^2,$$

und folglich dasjenige in Hinsicht auf einen der Durchmesser $\overline{X}X$ oder $\overline{Y}Y$ (vergleiche §. 231):

$$W_1 = {}^1/_2\, W = {}^1/_2\, M r^2.$$

Dagegen das Trägheitsmoment von einem kreisrunden Blatte $ABDE$, Fig. 483, welches sich um seinen Durchmesser BE dreht, ergiebt sich wie das Biegungsmoment eines Cylinders:

$$= \frac{\pi r^4}{4} = \frac{M r^2}{4},$$

es ist folglich der Halbmesser der Trägheit dieser Fläche:

$$k = r\sqrt{{}^1/_4} = {}^1/_2\, r,$$

d. i. die Hälfte vom Halbmesser des Kreises.

Fig. 483.

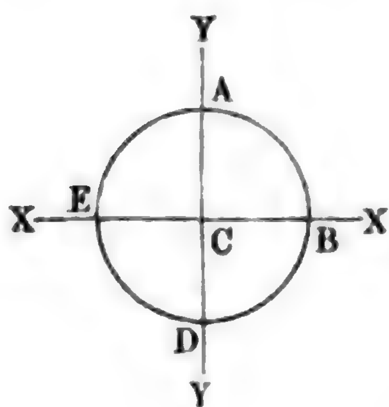
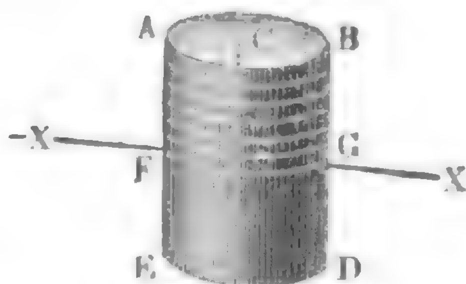


Fig. 484.



Hieraus läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines Cylinders $ABDE$, Fig. 484, finden, der sich um einen durch seinen Schwerpunkt S gehenden Durchmesser FG dreht. Ist l die halbe Höhe AF und r der Halbmesser $CA = CB$ des Cylinders, so hat man das Volumen einer Hälfte desselben $= \pi r^2 l$, und führt man Schnitte parallel zur Basis und in gleichen Abständen, so zerlegt man diesen Körper in n gleiche Theile, wovon jeder $= \frac{\pi r^2 l}{n}$ ist, und der erste um $\frac{l}{n}$, der zweite um $\frac{2l}{n}$, der dritte um $\frac{3l}{n}$ u. s. w. vom Schwerpunkte S absteht. Mittels der Formel in §. 284 folgen nun die Trägheitsmomente dieser Blätter oder Scheiben:

$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1\!/_4\, r^2 + \left(\frac{l}{n}\right)^2\right],\quad \frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1\!/_4\, r^2 + \left(\frac{2\,l}{n}\right)^2\right],$$

$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[{}^1\!/_4\, r^2 + \left(\frac{3\,l}{n}\right)^2\right] \text{ u. s. w.,}$$

deren Summe das Trägheitsmoment des halben Cylinders:

$$W = \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{n\,r^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\right]$$

$$= \pi r^2 l\Big(\frac{r^2}{4}\Big) + \frac{l^2}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3}\Big) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

liefert, und welches auch für den ganzen Cylinder gilt, wenn M die Masse desselben bezeichnet.

Auf ähnliche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment eines geraden Prismas ABD, Fig. 485, in Hinsicht auf eine Queraxe $\overline{X}X$ durch den Schwerpunkt S. Ist k der Trägheitshalbmesser der Grundfläche AB des Prismas in Hinsicht auf eine Axe $\overline{N}N$, welche durch den Schwerpunkt C der Basis geht und parallel $\overline{X}X$ läuft, und bezeichnet l die halbe Länge oder Höhe $CS = DS$ des Prismas, so hat man das gesuchte Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe $\overline{X}X$:

$$W = M\,(k^2 + {}^1\!/_3\, l^2).$$

Fig. 485.

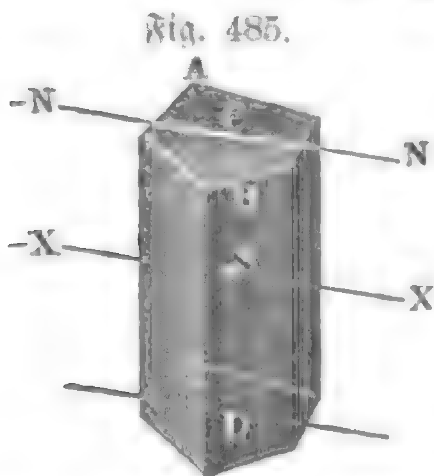
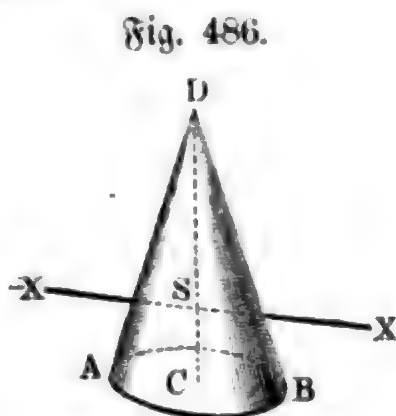


Fig. 486.



Ebenso findet man für den geraden Kegel ABD, Fig. 486, dessen Umdrehungsaxe $\overline{X}X$ durch den Schwerpunkt desselben geht und auf der geometrischen Axe CD winkelrecht steht:

$$W = {}^3\!/_{20}\, M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

292 **Segmente.** Das Trägheitsmoment eines Rotationsparaboloides BAD, Fig. 487, welches sich um seine Rotationsaxe AC dreht, wird ähnlich wie das einer Kugel bestimmt. Ist der Halbmesser der Basis,

$$\overline{CB} = \overline{CD} = a,$$

die Höhe $CA = h$, und läßt man den Körper aus n Scheiben, jede von der Höhe $\frac{h}{n}$ bestehen, so hat man die Inhalte derselben:

$$= \frac{h}{n}\pi \cdot \frac{1}{n}\, a^2,\ \frac{h}{n}\pi \cdot \frac{2}{n}\, a^2,\ \frac{h}{n}\pi \cdot \frac{3}{n}\, a^2 \text{ u. s. w.},$$

weil sich die Quadrate der Halbmesser wie die Höhen oder Abstände vom Scheitel A verhalten. Hieraus ergeben sich die Trägheitsmomente der auf einander folgenden scheibenförmigen Elemente des Körpers:

$$= \frac{h}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^4}{n^2},\ \frac{h}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\,a^4}{n^2},\ \frac{h}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9\,a^4}{n^2} \text{ u. s. w.},$$

und daher folgt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Paraboloides:

$$W = \frac{\pi\, a^4 h}{2\, n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{\pi\, a^4 h}{2\, n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{\pi\, a^4 h}{6}$$

$$= \frac{\pi\, a^2 h}{2} \cdot \frac{a^2}{3} = {}^1/_3\, M a^2,$$

weil das Volumen dieses Körpers, $M = \frac{\pi\, a^2 h}{2}$ ist.

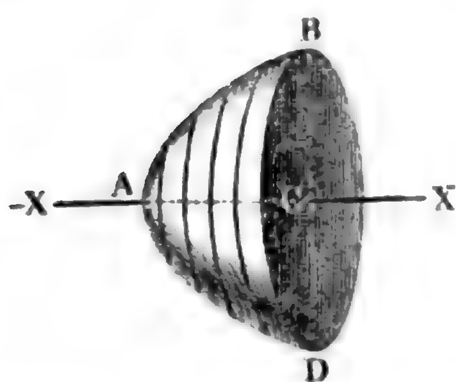


Fig. 487.

Diese Formel läßt sich auch auf ein niedriges Kugelsegment anwenden.

Ist die Höhe h eines solchen Segmentes gegen a nicht sehr klein, so hat man für das Trägheitsmoment einer Scheibe desselben:

$$W_1 = \frac{\pi\, h}{2\, n} \cdot a^4 - \frac{\pi\, h}{2\, n} \cdot h^2\,(2\, r - h)^2$$

$$= \frac{\pi\, h}{2\, n} \cdot (4\, r^2 h^2 - 4\, r\, h^3 + h^4)$$

zu setzen, wobei r den Kugelhalbmesser bezeichnet.

Nimmt man nun successiv statt h die Werthe $\frac{h}{n}$, $\frac{2\,h}{n}$, $\frac{3\,h}{n}$ u. s. w. an, so erhält man das Trägheitsmoment des Kugelabschnittes:

$$W = \frac{\pi\, h}{2\, n}\left[4\, r^2 \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cdot \frac{n^3}{3} - 4\, r \left(\frac{h}{n}\right)^3 \cdot \frac{n^4}{4} + \left(\frac{h}{n}\right)^4 \cdot \frac{n^5}{5}\right]$$

$$= \frac{\pi\, h^3}{30}\,(20\, r^2 - 15\, r\, h + 3\, h^2).$$

Der Inhalt oder die Masse des Kugelsegmentes ist:

$$M = \pi\, h^2\,(r - {}^1/_3\, h),$$

daher:

$$W = \pi\, h^2\,(r - {}^1/_3\, h) \cdot \frac{2\,h}{3}\left(r - {}^5/_{12}\, h + {}^1/_{90} \cdot \frac{h^2}{r - {}^1/_3\, h}\right)$$

$$= {}^2/_3\, M h \left(r - {}^5/_{12}\, h + {}^1/_{90} \cdot \frac{h^2}{r - {}^1/_3\, h}\right).$$

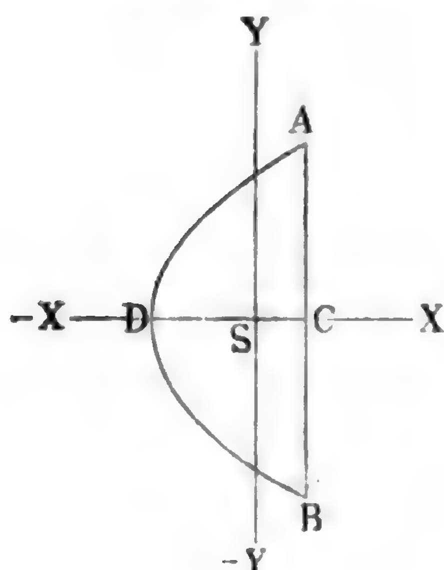
Meist ist genügend genau

$$W = {}^2/_3\, M h\,(r - {}^5/_{12}\, h) = {}^1/_3\, M\,(a^2 + {}^1/_6\, h^2).$$

Diese Formel findet ihre Anwendung bei den Pendellinsen.

§. 293 **Parabel und Ellipse.** Für eine Parabelfläche ABD, Fig. 488, ist (nach §. 233), wenn man statt der Fläche F die Masse M einführt, also F mit M vertauscht, und die Sehne AB wieder mit s, sowie die Bogenhöhe CD mit h bezeichnet, das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die geometrische Axe $\overline{X}X$ dieser Fläche:

Fig. 488.



$$W_1 = \frac{Ms^2}{20},$$

und das in Hinsicht auf die Axe $\overline{Y}Y$, welche durch den Schwerpunkt S der Fläche geht und rechtwinkelig gegen $\overline{X}X$ steht:

$$W_2 = {}^{12}/_{175}\, Mh^2.$$

Hieraus folgt das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine durch S rechtwinkelig zur Parabelfläche gehende Axe:

$$W = W_1 + W_2 = M\left(\frac{s^2}{20} + {}^{12}/_{175}\, h^2\right) = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{12}/_{35}\, h^2\right].$$

Für eine solche Axe durch den Parabelscheitel D wäre hingegen, da $DS = {}^3/_5\, h$ ist (§. 115), dieses Moment:

$$W_3 = W + M\,({}^3/_5\, h)^2 = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{15}/_7\, h^2\right]$$

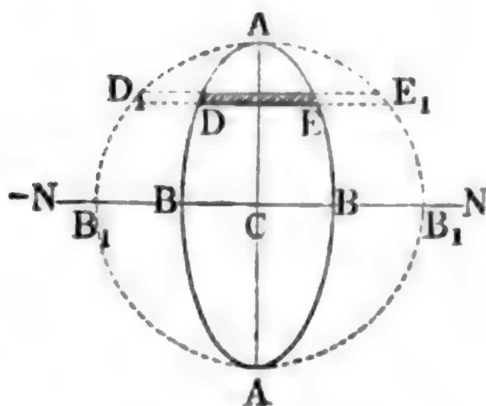
und dagegen für das Moment durch den Mittelpunkt C der Sehne:

$$W_4 = W + M\,({}^2/_5\, h)^2 = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^8/_7\, h^2\right].$$

Diese Formel gilt natürlich auch für ein Prisma mit parabolischen Grundflächen, namentlich auch für Balanciers, welche aus zwei solchen Prismen bestehen und um eine durch ihre Mitte C gehende Axe schwingen.

Für eine Ellipse $ABAB$, Fig. 489, mit den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ ist (nach §. 231) das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe BB:

Fig. 489.



$$W_1 = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{Ma^2}{4}$$

und das in Hinsicht auf die Axe AA:

$$W_2 = \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{Mb^2}{4};$$

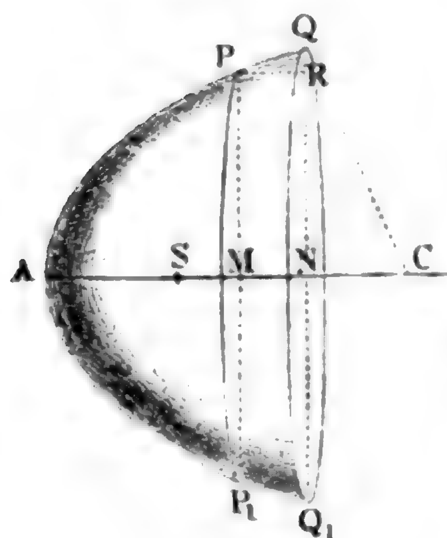
folglich das Trägheitsmoment in Hinsicht

auf eine Axe durch die Mitte C und rechtwinkelig zur Ebene der Figur: $W = W_1 + W_2 = \frac{1}{4} M (a^2 + b^2)$.

Rotationsflächen und Rotationskörper. Mit Hülfe des höheren Calculs lassen sich die Trägheitsmomente von Rotationsflächen und Rotationskörpern (s. §. 125) durch die im Folgenden entwickelten Formeln ermitteln. (§. 294)

1) Dreht sich ein Gürtel oder eine Zone $P Q Q_1 P_1$, Fig. 490, vom Halbmesser $MP = y$ und der Breite $PQ = \partial s$ um seine geometrische Axe AC, so fällt, da der Inhalt desselben (nach §. 125)

Fig. 490.



$$\partial O = 2 \pi y \partial s$$

ist, das Trägheitsmoment desselben

$$y^2 \partial O = 2 \pi y^3 \partial s$$

aus, und es ist folglich das Trägheitsmoment der ganzen Rotationsfläche $A P P_1$ in Hinsicht auf ihre Axe AC:

$$W = 2 \pi \int y^3 \partial s.$$

2) Eine Scheibe $P Q Q_1 P_1$, deren Volumen $\partial V = \pi y^2 \partial x$ zu setzen ist, hat nach §. 288 das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe AC:

$$\frac{\partial V \cdot y^2}{2} = \frac{\pi y^4 \partial x}{2},$$

folglich ist das Trägheitsmoment des ganzen Rotationskörpers $A P P_1$:

$$W = \frac{\pi}{2} \int y^4 \partial x.$$

Wäre AP ein Kreisbogen, und folglich die von ihm durch Umdrehung erzeugte Fläche eine Kugelcalotte, so hätte man:

$$y^2 = 2 r x - x^2 \text{ und } y \partial s = r \partial x,$$

folglich das Trägheitsmoment dieser Calotte:

$$W = 2 \pi \int (2 r x - x^2) r \partial x = 2 \pi r \left(2 r \int x \partial x - \int x^2 \partial x\right)$$
$$= 2 \pi r \left(r x^2 - \frac{x^3}{3}\right),$$

oder, wenn man die Höhe $AM = x$ durch h ersetzt:

$$W = 2 \pi r h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) = M h \left(r - \frac{h}{3}\right),$$

da der Inhalt oder die Masse der Calotte, $M = 2 \pi r h$ ist.

Für die ganze Kugeloberfläche ist $h = 2r$ und daher

$$W = {}^2/_3\, M r^2.$$

Wäre hingegen AP ein Ellipsenbogen und folglich der mittels der ebenen Fläche APM durch Umdrehung erzeugte Rotationskörper APP_1 die Calotte eines Rotationsellipsoides, so hätte man

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und daher das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe AC:

$$W = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{b^4}{a^4}\int (2ax - x^2)^2 \partial x$$
$$= \frac{\pi b^4}{2a^4}\int (4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)\partial x$$
$$= \frac{\pi b^4}{2a^4}\left({}^4/_3\, a^2x^3 - ax^4 + \frac{x^5}{5}\right);$$

z. B. für das ganze Ellipsoid, für welches $x = 2a$ ist:

$$W = {}^8/_{15}\,\pi b^4 a = {}^2/_5 \cdot {}^4/_3\,\pi a b^2 . b^2 = {}^2/_5\, M b^2,$$

da sich der Inhalt dieses Körpers durch $\frac{b^2}{a^2}\cdot {}^2/_3\,\pi a^3 = {}^4/_3\,\pi a b^2$ ausdrücken läßt (vergl. §. 123).

3) Dreht sich ferner der Gürtel $P\,Q\,Q_1\,P_1$ um eine Axe durch A, welche rechtwinkelig auf der geometrischen Axe AC steht, so hat man (nach §. 284 und §. 291) das Trägheitsmoment desselben

$$= \partial O\,(x^2 + {}^1/_2\, y^2) = 2\pi\,(x^2 + {}^1/_2\, y^2)\, y\,\partial s,$$

und daher das Trägheitsmoment der ganzen Calotte APP_1:

$$W = \pi\int (2x^2 + y^2)\, y\,\partial s.$$

4) Dreht sich endlich die ganze Scheibe $P\,Q\,Q_1\,P_1$ um eben diese Axe durch A, so ist deren Trägheitsmoment

$$\partial V\,(x^2 + {}^1/_4\, y^2) = \pi y^2\,(x^2 + {}^1/_4\, y^2)\,\partial x,$$

und daher das des ganzen Körpers APP_1:

$$W = \pi\int (x^2 + {}^1/_4\, y^2)\, y^2\,\partial x.$$

Für ein Rotationsparaboloid (s. §. 292) ist, wenn man dessen Höhe AM durch h und den Halbmesser MP seiner Basis durch a bezeichnet:

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x}{h},$$

folglich das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Ordinatenaxe durch A:

$$W = \frac{\pi a^2}{h}\int\left(x^2 + {}^1/_4\,\frac{a^2 x}{h}\right) x\,\partial x = \frac{\pi a^2}{h}\left({}^1/_4\, x^4 + {}^1/_{12}\,\frac{a^2 x^3}{h}\right),$$

also, wenn man $x = h$ einführt:

$$W = \frac{1}{4}\pi a^2 h \left(h^2 + \frac{1}{3} a^2\right) = \frac{1}{2} M \left(h^2 + \frac{1}{3} a^2\right),$$

da das Volumen dieses Körpers $= \frac{1}{2}\pi a^2 h$ ist (vergl. §. 124).

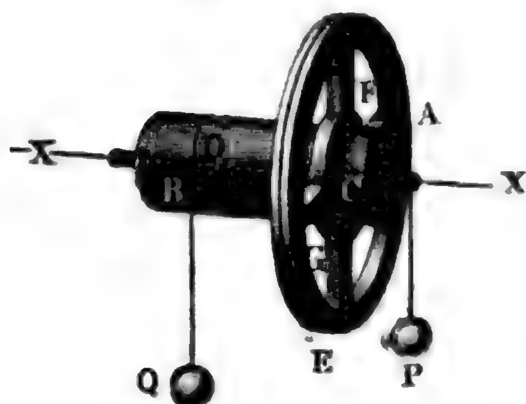
Hieraus folgt endlich wieder das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf eine Axe durch den Schwerpunkt S und rechtwinkelig zu AC:

$$W_1 = \frac{1}{2} M \left(h^2 + \frac{1}{3} a^2\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 M h^2 = \frac{1}{6} M \left(a^2 + \frac{1}{3} h^2\right).$$

Beschleunigte Umdrehung einer Radwelle. Die Theorie der Trägheitsmomente findet gerade bei Maschinen und Instrumenten die häufigsten Anwendungen, weil an diesen meist rotirende Bewegungen um eine feste Axe vorkommen. Es werden deshalb in der Folge noch vielfache Anwendungen dieser Lehre vorkommen, und möge daher genügen, zunächst nur einige einfache Fälle derselben abzuhandeln. §. 29

Wirken an einer Radwelle $ACDB$, Fig. 491, mit den Hebelarmen $CA = a$ und $DB = b$ zwei Gewichte P und Q mittelst vollkommen biegsamer Schnüre, und sind die Zapfen hinreichend dünn, um die Zapfenreibung vernachlässigen zu können, so bleibt diese Maschine im Gleichgewichte, wenn die statischen Momente $P . \overline{CA}$ und $Q . \overline{DB}$ einander gleich sind, also $Pa = Qb$ ist. Ist hingegen das Moment vom Gewichte P größer als von Q, also $Pa > Qb$, so sinkt P und steigt Q, ist dagegen $Pa < Qb$, so steigt P und sinkt Q. Untersuchen wir nun die Bewegungsverhältnisse in einem der letzteren Fälle, setzen wir z. B. voraus, daß $Pa > Qb$ sei. Die dem Gewichte Q entsprechende und am Arme b wirkende Kraft erzeugt am Hebelarme a eine Kraft: $\frac{Qb}{a}$, welche der dem Gewichte P entsprechenden Kraft entgegenwirkt, so daß die bewegende und in A angreifende Kraft, $P - \frac{Qb}{a}$ übrig bleibt. Die Masse $\frac{Q}{g}$ reducirt sich beim Versetzen aus dem Abstande b in den Abstand a auf $\frac{Qb^2}{ga^2}$, es ist daher die von der Kraft $P - \frac{Qb}{a}$ bewegte Masse:

Fig. 491.



$$M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2}\right) : g,$$

oder, wenn das Trägheitsmoment der Radwelle, $W = \frac{Gk^2}{g}$ und daher die

auf A reducirte träge Masse derselben, $= \frac{Gk^2}{g a^2}$ ist, schärfer:

$$M = \left(P + \frac{Q b^2}{a^2} + \frac{G k^2}{a^2}\right) : g = (P a^2 + Q b^2 + G k^2) : g a^2.$$

Hieraus folgt nun die Acceleration des Gewichtes P oder Radumfanges:

$$p = \frac{\text{Bewegende Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P - \frac{Q b}{a}}{P a^2 + Q b^2 + G k^2} \cdot g a^2$$

$$= \frac{P a - Q b}{P a^2 + Q b^2 + G k^2} \cdot g a;$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes Q oder des Wellenumfanges:

$$q = \frac{b}{a} p = \frac{P a - Q b}{P a^2 + Q b^2 + G k^2} \cdot g b.$$

Die Spannung des Seiles von P ist:

$$S = P - \frac{P p}{g} = P\left(1 - \frac{p}{g}\right) \text{ (s. §. 76)},$$

die des Seiles von Q:

$$S_1 = Q + \frac{Q q}{g} = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right),$$

daher der Zapfendruck:

$$S + S_1 = P + Q - \frac{Pp}{g} + \frac{Qq}{g} = P + Q - \frac{(P a - Q b)^2}{P a^2 + Q b^2 + G k^2}.$$

Es ist folglich der Druck im Zapfen bei einer umlaufenden Radwelle kleiner als bei einer im Gleichgewichte stehenden Radwelle.

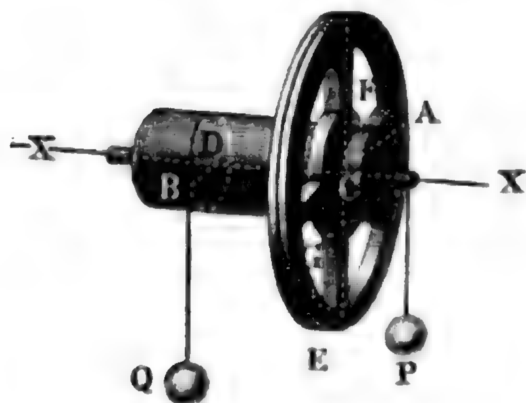
Aus den Accelerationen p und q lassen sich endlich die übrigen Bewegungsverhältnisse finden; es ist nach t Secunden die Geschwindigkeit von P:

$$v = p t,$$

von Q:

$$v_1 = q t,$$

Fig. 492.



und der durchlaufene Weg von P:

$$s = \frac{1}{2} p t^2,$$

so wie der Weg von Q:

$$s_1 = \frac{1}{2} q t^2.$$

Beispiel. Es sei das Gewicht am Rade Fig. 492, $P = 60$ Pfund, das an der Welle, $Q = 160$ Pfund, der Hebelarm von jenem, $CA = a = 20$ Zoll, und von diesem, $DB = b = 6$ Zoll; es bestehe ferner die Welle aus einem massiven Cylinder von 10 Pfund Gewicht, das Rad aber aus zwei eisernen Ringen und vier

Armen, jene zu 40 und 12 Pfund, diese zusammen von 15 Pfund Gewicht; endlich seien die Halbmesser des größeren Radringes AE, = 20 und 19 Zoll, und die des kleineren Ringes FG, = 8 und 6 Zoll. Man soll die Bewegungsverhältnisse dieser Maschine angeben. Die bewegende Kraft am Radumfange ist:

$$P - \frac{b}{a}\,Q = 60 - {}^{6}/_{20}\,.\,160 = 60 - 48 = 12 \text{ Pfund},$$

und das Trägheitsmoment der Maschine, wenn man noch die Zapfen und Seilmassen unberücksichtigt läßt, gleich Trägheitsmoment der Welle:

$$= \frac{W b^2}{2} = \frac{10\,.\,6^2}{2} = 180,$$

plus Moment des kleineren Ringes:

$$= \frac{R_1\,(r_1^2 + r_2^2)}{2} = \frac{12\,.\,(8^2 + 6^2)}{2} = 600,$$

plus Moment des größeren Ringes:

$$= \frac{R_2\,(r_3^2 + r_4^2)}{2} = \frac{40\,.\,(20^2 + 19^2)}{2} = 15220,$$

plus Moment der Arme, annähernd:

$$= \frac{A\,(r_4^3 - r_1^3)}{3\,(r_4 - r_1)} = \frac{A\,(r_1^2 + r_1\,r_4 + r_4^2)}{3} = \frac{15\,.\,(19^2 + 19\,.\,8 + 8^2)}{3} = 2885,$$

daher zusammen:

$$G k^2 = 180 + 600 + 15220 + 2885 = 18885,$$

oder für Fußmaß:

$$= \frac{18885}{144} = 131{,}14.$$

Die gesammte, auf den Radumfang reducirte Masse ist nun:

$$M = \left(P + \frac{Q b^2 + G k^2}{a^2}\right) : g = \left[60 + 160\left(\frac{6}{20}\right)^2 + \frac{18885}{20^2}\right] : g$$
$$= \left(60 + 160\,.\,0{,}09 + \frac{18885}{400}\right).\,0{,}032$$
$$= (60 + 14{,}4 + 47{,}21)\,.\,0{,}032 = 121{,}61\,.\,0{,}032 = 3{,}8915 \text{ Pfund}.$$

Hiernach folgt die Acceleration des Gewichtes P sowie die des Radumfanges:

$$p = \frac{P - \frac{b}{a}\,Q}{\frac{P a^2 + Q b^2 + G k^2}{a^2}}\cdot g = \frac{12}{3{,}8915} = 3{,}084 \text{ Fuß},$$

dagegen die von Q:

$$q = \frac{b}{a}\,p = {}^{6}/_{20}\,.\,3{,}084 = 0{,}925 \text{ Fuß};$$

ferner die Seilspannung von P:

$$S = \left(1 - \frac{p}{g}\right).\,P = \left(1 - \frac{3{,}084}{31{,}25}\right).\,60 = (1 - 0{,}099)\,.\,60 = 54{,}06 \text{ Pfd.},$$

dagegen die von Q:

$$S_1 = \left(1 + \frac{q}{g}\right).\,Q = (1 + 0{,}925\,.\,0{,}032)\,.\,160 = 1{,}030\,.\,160 = 164{,}8 \text{ Pfd.};$$

und folglich der Zapfendruck $S + S_1 = 54{,}06 + 164{,}80 = 218{,}86$ Pfund oder mit Einschluß des Gewichtes der Maschine, $= 218{,}86 + 77 = 295{,}86$ Pfund. Nach 10 Secunden hat P die Geschwindigkeit $v = p\,t = 3{,}084\,.\,10 = 30{,}84$

Fuß erlangt, und den Weg $s = \frac{vt}{2} = 30{,}84 \cdot 5 = 154{,}2$ Fuß zurückgelegt, und es ist Q um $s_1 = \frac{b}{a} s = 0{,}3 \cdot 154{,}2 = 46{,}26$ Fuß gestiegen.

296 Das Gewicht P, welches dem Gewichte Q die Acceleration

$$q = \frac{Pab - Qb^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot g$$

ertheilt, kann auch durch ein anderes Gewicht P_1 ersetzt werden, ohne die Acceleration von Q zu verändern, wenn dasselbe an einem Hebelarme a_1 wirkt, für welchen ist:

$$\frac{P_1 a_1 - Qb}{P_1 a_1^2 + Qb^2 + Gk^2} = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}.$$

Die Größe $\frac{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}{Pa - Qb}$ durch c bezeichnet, erhält man:

$$a_1^2 - ca_1 = -\frac{Qb(b+c) + Gk^2}{P_1},$$

und den in Frage stehenden Hebelarm:

$$a_1 = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{Qb(b+c) + Gk^2}{P_1}}.$$

Auch läßt sich mit Hülfe der Differenzialrechnung finden, daß Q vom Gewichte P dann am stärksten accelerirt wird, wenn der Hebelarm des letzten der Gleichung $Pa^2 - 2Qab = Qb^2 + Gk^2$ entspricht, also

$$a = \frac{bQ}{P} + \sqrt{\left(\frac{bQ}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gk^2}{P}}$$

ist.

Die im Vorstehenden gefundenen Formeln nehmen eine complicirtere Gestalt an, wenn auf die Reibung der Zapfen und Steifigkeit der Seile Rücksicht genommen wird. Bezeichnen wir den Inbegriff beider Widerstände, reducirt auf den Umfang der Zapfen, deren Halbmesser $= r$ sein möge, durch F, so ist statt der bewegenden Kraft $P - \frac{b}{a} Q$, der Werth $P - \frac{Qb + Fr}{a}$ zu substituiren, weshalb z. B. die Beschleunigung von Q:

$$q = \frac{(Pa - Fr)b - Qb^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot g$$

und

$$a = \frac{Qb + Fr}{P} + \sqrt{\left(\frac{Qb + Fr}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gk^2}{P}}$$

ausfällt.

Beispiele. 1) Wenn die Gewichte $P = 30$ Pfund, $Q = 80$ Pfund an den Hebelarmen $a = 2$ Fuß und $b = \frac{1}{2}$ Fuß einer Radwelle wirken und das Trägheitsmoment dieser Maschine, $Gk^2 = 60$ beträgt, so ist die Beschleunigung des steigenden Gewichtes Q:

$$q = \frac{30 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 80 \cdot (\frac{1}{2})^2}{30 \cdot 2^2 + 80 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 60} \cdot g = \frac{30 - 20}{120 + 20 + 60} \cdot 31{,}25 = \frac{312{,}5}{200}$$
$$= 1{,}5625 \text{ Fuß.}$$

Soll aber ein Gewicht $P_1 = 45$ Pfund dieselbe Beschleunigung von Q hervorbringen, so ist der Hebelarm von P_1:

$$a_1 = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{80 \cdot \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + c) + 60}{45}},$$

oder, da $c = \frac{200}{60 + 40} = 10$ ist,

$$a_1 = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{32}{3}} = 5 \pm \frac{1}{3} \cdot 11{,}358 = 5 \pm 3{,}786$$
$$= 8{,}786 \text{ Fuß oder } 1{,}214 \text{ Fuß.}$$

2) Die Beschleunigung von Q fällt am größten aus, wenn der Hebelarm der Kraft oder der Halbmesser des Rades,

$$a = \frac{\frac{1}{2} \cdot 80}{30} + \sqrt{\left(\frac{40}{30}\right)^2 + \frac{20 + 60}{30}} = \frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{24}{9}} = \frac{4 + \sqrt{40}}{3}$$
$$= 3{,}4415 \text{ Fuß}$$

beträgt. Es ist diese Maximalbeschleunigung:

$$q = \left(\frac{30 \cdot 1{,}7207 - 20}{30 \cdot (3{,}4415)^2 + 80}\right) g = \frac{31{,}621}{435{,}32} \cdot g = 2{,}270 \text{ Fuß.}$$

3) Ist das Moment der Reibung sammt Seilsteifigkeit, $Fr = 8$, so hat man statt Qb, $Qb + Fr = 40 + 8 = 48$ zu setzen, weshalb folgt:

$$a = \frac{48}{30} + \sqrt{\left(\frac{48}{30}\right)^2 + \frac{8}{3}} = 1{,}6 + \sqrt{5{,}227} = 3{,}886 \text{ Fuß}$$

und die entsprechende Maximalbeschleunigung:

$$q = \frac{30 \cdot 1{,}943 - 8 \cdot \frac{1}{2} - 20}{30 \cdot (3{,}886)^2 + 80} \cdot g = \frac{34{,}29}{533} \cdot 31{,}25 = 2{,}01 \text{ Fuß.}$$

Fallmaschine. Die §. 295 gefundenen Formeln für die Radwelle gelten auch für die einfache feste Rolle, denn setzt man $b = a$, so geht die Radwelle in eine Rolle oder Welle über. Behält man die übrige Bezeichnung des angeführten Paragraphen bei, so hat man für die Beschleunigung, mit welcher P sinkt und Q steigt: §. 297

$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2}{(P + Q)\, a^2 + G k^2} \cdot g,$$

oder, mit Berücksichtigung der Reibung:

$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2 - F a r}{(P + Q)\, a^2 + G k^2} \cdot g.$$

Um die Zapfenreibung herabzuziehen, legt man die Zapfen C der Rolle AB, Fig. 493 (a. f. S.), auf Frictionsräder DEF und $D_1 E_1 F_1$. Sind nun die Trägheitsmomente dieser Räder $G_1 k_1^2$ und die Halbmesser derselben,

$DE = D_1 E_1 = a_1$, so hat man, wenn F wieder die auf den Umfang des Zapfens C reducirten Reibungen bezeichnet, zu setzen:

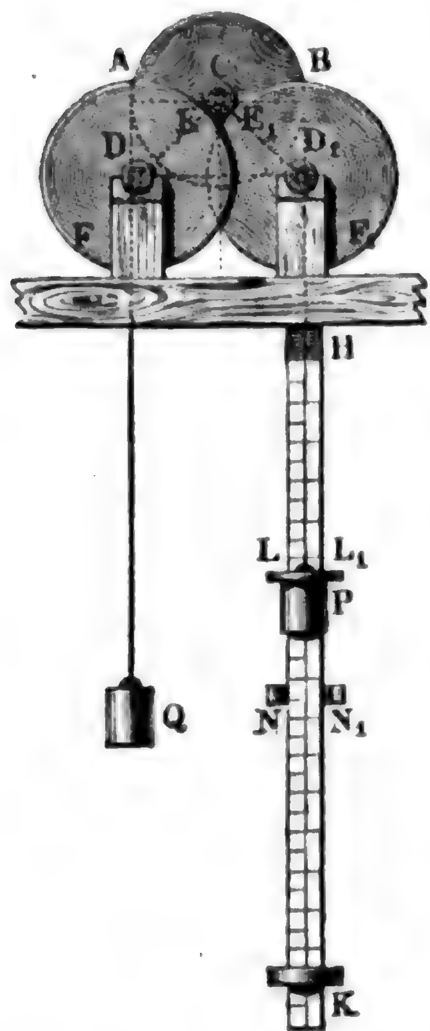
$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2 - F a r}{(P + Q)\, a^2 + G k^2 + G_1 \frac{k_1^2 r^2}{a_1^2}} \cdot g,$$

weil die auf den Umfang der Frictionsräder oder der Radzapfen reducirte träge Masse dieser Räder, $= \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2}$ beträgt. Durch Umkehrung erhält man die Beschleunigung der Schwere:

$$g = \frac{(P + Q)\, a^2 + G k^2 + G_1 \frac{k_1^2 r^2}{a_1^2}}{(P - Q)\, a^2 - F a r} \cdot p.$$

Bei einer kleinen Differenz $P - Q$ beider Gewichte fällt die Beschleunigung p klein aus, es geht daher die Bewegung langsam vor sich und es ist der Widerstand, welchen die Luft den Gewichten entgegensetzt, unbedeutend, weshalb sich mit Hülfe von Versuchen über das Sinken von Gewichten an einer solchen Vorrichtung die Beschleunigung der Schwere mit ziemlicher Sicherheit ermitteln läßt, was bei einem frei fallenden Körper geradezu unmöglich ist. Versuche der Art hat zuerst der Engländer Atwood (s. Atwood's Treatise on Rectilinear and Rotary Motion) angestellt, weshalb der Apparat unter dem Namen der Atwood'schen Fallmaschine bekannt ist. Zur Bestimmung der Fallräume dient eine Scala HK, an der das Gewicht P niedersinkt. Aus dem Fallraume s und der entsprechenden Zeit t folgt allerdings schon

Fig. 493.



$$p = \frac{2 \cdot s}{t^2};$$

hebt man aber die bewegende Kraft während des Fallens auf, indem man ein ihr gleiches und einen hohlen Ring bildendes Gewicht LL_1 von einem festen engeren Ringe NN_1 auffangen läßt, so wird der übrige Theil s_1 des Fallraumes gleichförmig durchlaufen und es ergiebt sich nun mit Hülfe der an einer guten Uhr beobachteten Zeit t_1 die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s_1}{t_1},$$

sowie die Acceleration:

$$p = \frac{v}{t} = \frac{s_1}{t t_1}.$$

Macht man endlich $t_1 = t = 1$, so giebt der Versuch unmittelbar $p = s_1$. Setzt man den so gefundenen Werth von p in die obige Formel, so bestimmt sich dadurch die Beschleunigung g der Schwere.

Beschleunigte Bewegung der Rollenzüge. Die Accelerationen der §. Gewichte P und Q, welche an einer Verbindung aus einer festen Rolle AB und einer losen Rolle EG, Fig. 494, hängen, ergeben sich auf folgende Weise. Es seien die Gewichte der Rollen AB und EG, $= G$ und G_1, die Trägheitsmomente derselben Gk^2 und $G_1 k_1^2$ und die Halbmesser $CA = a$ und $DE = a_1$, also die auf die Umfänge reducirten Massen $M = \frac{G}{g} \cdot \frac{k^2}{a^2}$ und $M_1 = \frac{G_1}{g} \cdot \frac{k_1^2}{a_1^2}$. Sinkt das Gewicht P um einen gewissen Weg s, so steigt $Q + G_1$ auf $\frac{1}{2}s$ (§. 164), es wird daher die Arbeit $Ps - (Q + G_1)\frac{s}{2}$ verrichtet;

Fig. 494.

hat bei diesem Sinken das Gewicht P die Geschwindigkeit v angenommen, so ist $Q + G_1$ in die Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ versetzt worden, und es hat die Rolle AB die Umfangsgeschwindigkeit v und die Rolle EG, da bei der rollenden Bewegung progressive Bewegung und drehende einander gleich sind, die Umfangsgeschwindigkeit $\frac{v}{2}$ erlangt. Die Summe der diesen Massen und Geschwindigkeiten entsprechenden lebendigen Kräfte ist:

$$\frac{P}{g} \cdot v^2 + \frac{Q + G_1}{g} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{Gk^2}{g a^2} \cdot v^2 + \frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2,$$

und setzt man nun ihre Hälfte der aufgewendeten Arbeit gleich, so bekommt man die Gleichung:

$$\left(P - \frac{(Q + G_1)}{2}\right) s = \left(P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Hiernach ist die dem von P zurückgelegten Raume s entsprechende Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gs\left(P - \frac{Q + G_1}{2}\right)}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}}}.$$

Für die Acceleration p ist $p s = \frac{v^2}{2}$, daher hier

$$p = \left(\frac{P - \frac{Q + G_1}{2}}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G k^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}}\right) g.$$

Die Acceleration von $Q + G_1$ ist $p_1 = \frac{p}{2}$, und ebenso groß ist auch die drehende Acceleration von G_1.

Die Spannung des beide Rollen verbindenden Seiles BE ist

$$S = P - \left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right) \frac{p}{g},$$

weil die Kraft $\left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right) \frac{p}{g}$ auf die Beschleunigung von P und G verwendet wird; die Spannung des befestigten Seiles GH hingegen:

$$S_1 = S - \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{p}{2 g},$$

weil die Rolle EG durch die Differenz $S - S_1$ der Seilspannungen in Umdrehung gesetzt wird.

Beispiel. An der Rollenverbindung in Fig. 494 hängen die Gewichte $P = 40$ Pfund und $Q = 66$ Pfund, und es wiegt jede der massiven Rollen 6 Pfund; man sucht die Beschleunigungen dieser Gewichte.

Die bewegende Kraft ist:

$$P - \frac{Q + G_1}{2} = 40 - \frac{66 + 6}{2} = 4 \text{ Pfund},$$

die Masse einer Rolle auf ihren Umfang reducirt:

$$\frac{G k^2}{g a^2} = \frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2} = \frac{G}{2 g} = \frac{6}{2 g} = \frac{3}{g} \text{ (§. 288)},$$

und die gesammte träge Masse

$$= \left(P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G k^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}\right) : g = (40 + {}^{72}/_4 + 3 + {}^3/_4) : g = \frac{247}{4 g},$$

daher die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes:

$$p = \frac{4}{247} \cdot 4 g = \frac{16 \cdot g}{247} = \frac{16 \cdot 31{,}25}{247} = {}^{500}/_{247} = 2{,}024 \text{ Fuß};$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes:

$$p_1 = \frac{p}{2} = 1{,}012 \text{ Fuß}.$$

Die Spannung des Seiles BE ist:

$$S = P - \left(P + \frac{G}{2}\right) \frac{p}{g} = 40 - 43 \cdot \frac{2{,}024}{31{,}25} = 40 - 2{,}785 = 37{,}215 \text{ Pfund};$$

die des Seiles GH:

$$S_1 = S - \frac{G}{2} \cdot \frac{p}{2 g} = 37{,}215 - 3 \cdot \frac{1{,}012}{31{,}25} = 37{,}118 \text{ Pfund}.$$

Zusammengesetzter ist die Bewegung, wenn die Rolle EG, Fig. 495, nur an einem umgeschlagenen Seile hängt. Nehmen wir an, daß P mit der Acceleration p sinkt, und Q mit q steigt, so erhalten wir die Acceleration der drehenden Bewegung am Umfang der losen Rolle: §. 299

Fig. 495.

$$q_1 = p - q \text{ (§. 45)}.$$

Setzen wir nun die Spannung des Seiles AE, $= S$, so erhalten wir:

$$P - S = \left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right)\frac{p}{g},$$

ferner:

$$S - (Q + G_1) = (Q + G_1)\frac{q}{g},$$

da nach §. 281 angenommen werden kann, daß S in dem Schwerpunkte D von EG angreift, und endlich:

$$S = \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{q_1}{g},$$

da auch anzunehmen ist, daß der Schwerpunkt D festgehalten und die Rolle durch S in Umdrehung gesetzt wird.

Die letzten drei Formeln geben die Accelerationen:

$$p = \frac{P - S}{P + \frac{G k^2}{a^2}} g, \; q = \left(\frac{S - (Q + G_1)}{Q + G_1}\right) g \text{ und } q_1 = \frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} g;$$

und alle drei in die Gleichung $q_1 = p - q$ eingesetzt, erhält man:

$$\frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} g = \frac{P - S}{P + \frac{G k^2}{a^2}} g - \frac{S - (Q + G_1)}{Q + G_1} g,$$

woraus nun die Seilspannung

$$S = \frac{2 P a^2 + G k^2}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 k_1^2} + \frac{1}{Q + G_1}\right)(P a^2 + G k^2) + a^2}$$

folgt. Aus dem Werthe für S ergeben sich nun auch durch Anwendung obiger Formeln die Beschleunigungen der Gewichte P und Q.

Vernachlässigen wir die Masse G der festen Rolle, und setzen wir auch $Q =$ Null, so erhalten wir einfach:

$$S = \frac{2 P a^2 . G_1 k_1^2}{P(a_1^2 + k_1^2) a^2 + G a^2 k_1^2} = \frac{2 P G_1 k_1^2}{G_1 k_1^2 + P(a_1^2 + k_1^2)}.$$

Ist das Seilende AE, statt daß es über die Rolle AB weggeht, fest, so hat man die Beschleunigung $p = 0$, daher $q_1 = -q$ und folglich die Spannung:

$$S = \frac{(Q + G_1)\, G_1 k_1^2}{(Q + G_1)\, a_1^2 + G_1 k_1^2};$$

für $Q =$ Null:

$$S = \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2 + k_1^2}.$$

Ist der rollende Körper G_1 ein massiver Cylinder, so hat man:

$$\frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} = \frac{1}{2} G_1,$$

und es ergiebt sich die Spannung für den ersten Fall:

$$S = \frac{2 P G_1}{3 P + G_1},$$

und für den zweiten:

$$S = \frac{G_1}{3}.$$

Soll im ersten Falle das Gewicht P steigen, so hat man p negativ, also $S > P$, d. i.:

$$2 P G_1 k_1^2 > P G_1 k_1^2 + P^2 (a_1^2 + k_1^2),$$

einfach:

$$\frac{G_1}{P} > 1 + \frac{a_1^2}{k_1^2};$$

damit ferner G_1 sinke, ist nöthig, daß $S < G_1$, also

$$\frac{G_1}{P} > 1 - \frac{a_1^2}{k_1^2} \text{ sei.}$$

Beispiel. Wenn bei der Rollenverbindung des Beispieles zu §. 298, Fig. 494, das Seil GH plötzlich reißt, so wird wenigstens anfänglich das Seil BE gespannt durch die Kraft:

$$S = \frac{2P + \frac{G k^2}{a^2}}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 k_1^2} + \frac{1}{Q + G_1}\right)\left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right) + 1} = \frac{2 . 40 + 3}{(1/3 + 1/72)(40 + 3) + 1}$$

$$= \frac{83 . 72}{25 . 43 + 72} = \frac{5976}{1147} = 5{,}210 \text{ Pfund.}$$

Hierbei ist die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes P:

$$p = \left(\frac{P - S}{P + \frac{G k^2}{a^2}}\right) g = \left(\frac{40 - 5{,}210}{40 + 3}\right) . 31{,}25 = \frac{34{,}79}{43} . 31{,}25 = 25{,}283 \text{ Fuß,}$$

ferner die Beschleunigung der sinkenden Rolle:

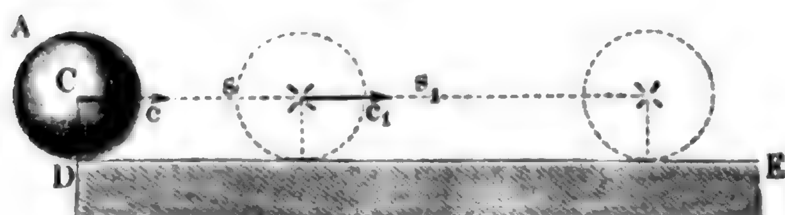
$$q = \left(\frac{Q + G_1 - S}{Q + G_1}\right) g = \left(\frac{72 - 5{,}210}{72}\right) \cdot 31{,}25 = \frac{66{,}79}{72} \cdot 31{,}25 = 29{,}0 \text{ Fuß,}$$

und die Umdrehungsacceleration dieser Rolle:

$$q_1 = \frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} \cdot g = \frac{5{,}210}{3} \cdot 31{,}25 = 54{,}27 \text{ Fuß.}$$

Fortrollen eines Körpers auf einer horizontalen Ebene. §. 30
Wenn ein runder Körper ABD, Fig. 496, mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c auf der horizontalen Bahn DE fortgeschoben wird, so nimmt derselbe in Folge der Reibung auf dieser Bahn eine Drehung mit allmälig wachsender Geschwindigkeit an, deren

Fig. 496.



Acceleration p durch die Formel

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{\varphi G a^2}{M k^2} = \frac{\varphi a^2}{k^2} g \text{ bestimmt ist,}$$

worin φ den Reibungscoefficienten, $G = Mg$ das Gewicht, also φG die Reibung, ferner Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers und a den Wälzungshalbmesser CD desselben bezeichnen. Die durch diese Acceleration in der Zeit t erzeugte Umdrehungsgeschwindigkeit im Abstande $CD = a$ von der Axe C ist

$$v = pt = \varphi \frac{a^2}{k^2} g t.$$

Dagegen erleidet die fortschreitende Bewegung des Körpers eine Retardation q, welche die Formel

$$q = \frac{\text{Widerstand}}{\text{Masse}} = \frac{\varphi G}{M} = \varphi g$$

angiebt, und wonach die Geschwindigkeit dieser Bewegung nach t Secunden

$$v_1 = c - qt = c - \varphi g t \text{ ist.}$$

Setzt man nun $v_1 = v$, also

$$\varphi \frac{a^2}{k^2} g t = c - \varphi g t,$$

so erhält man die Zeit, nach welcher die Geschwindigkeit des Drehens gleich der des Fortschreitens wird, und daher das Wälzen des Körpers eintritt:

$$t = \frac{c}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) \varphi g} = \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{\varphi g}.$$

Am Ende dieser Zeit ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

$$c_1 = \frac{a^2}{k^2} \varphi g t = \frac{a^2 c}{a^2 + k^2},$$

und der progressive Weg des Körpers:

$$s = \left(\frac{c + c_1}{2}\right) t = \frac{2a^2 + k^2}{a^2 + k^2} \frac{c}{2} \cdot \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{\varphi g} = \frac{(2a^2 + k^2) k^2}{(a^2 + k^2)^2} \cdot \frac{c^2}{2 \varphi g}.$$

Wäre der Coefficient der rollenden Reibung = Null, so würde der Körper AB mit der constanten Geschwindigkeit $c_1 = \frac{a^2 c}{a^2 + k^2}$ auf der horizontalen Ebene ohne Ende fortrollen; da aber dieser Bewegung noch die wälzende Reibung $\frac{fG}{a}$ entgegenwirkt (s. §. 192), so wird der Körper nach Zurücklegung eines gewissen Weges s_1 zur Ruhe kommen. Am Ende dieses Weges ist durch die Arbeit $\frac{f G s_1}{a}$ dieser Reibung das ganze Arbeitsvermögen

$$\frac{G c_1^2}{2g} + \frac{G k^2}{a^2} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \left(\frac{a^2 + k^2}{a^2}\right) \frac{G c_1^2}{2g}$$

der trägen Masse des Körpers aufgezehrt, und daher

$$\frac{F G s_1}{a} = \left(\frac{a^2 + k^2}{a^2}\right) \frac{G c_1^2}{2g}$$

zu setzen, wonach der Weg

$$s_1 = \frac{a^2 + k^2}{f a} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \frac{a^3}{f(a^2 + k^2)} \frac{c^2}{2g}$$

in der Zeit

$$t_1 = \frac{2 s_1}{c_1} = \frac{a^2 + k^2}{f a} \cdot \frac{c_1}{g} = \frac{a c}{f g}$$

zurückgelegt wird, bis der Körper zur Ruhe kommt.

Für eine rollende Kugel ist $\frac{k^2}{a^2} = {}^2/_5$, und für einen Cylinder $\frac{k^2}{a^2} = {}^1/_2$; s. §. 290.

Im letzteren Falle ist z. B. $t = {}^1/_3 \frac{c}{\varphi g}$, $c_1 = {}^2/_3 c$, $s = {}^5/_9 \frac{c^2}{2 \varphi g}$ und $s_1 = {}^2/_3 \frac{a}{f} \frac{c^2}{2g}$.

Zweites Capitel.

Die Centrifugalkraft starrer Körper.

§. 301 **Normalkraft.** Die Kraft der Trägheit tritt nicht bloß bei Geschwindigkeitsveränderungen, sondern auch bei Richtungsveränderungen eines bewegten Körpers hervor, da ein Körper vermöge seiner Trägheit allein

nur gleichförmig und in der geraden Linie fortgeht (s. §. 55). Die Beurtheilung der Wirkungen der Trägheit bei stetigen Richtungsveränderungen, namentlich bei der Bewegung der Körper in krummen Linien, und insbesondere im Kreise, ist Gegenstand dieses Capitels.

Bewegt sich ein materieller Punkt in einer krummen Linie, so hat derselbe an jeder Stelle eine von der jedesmaligen Bewegungsrichtung ablenkende Acceleration, die wir in der Phoronomie unter dem Namen Normalacceleration kennen gelernt haben. Ist der Krümmungshalbmesser an einer Stelle der Bahn des bewegten Punktes, $= r$ und die Geschwindigkeit dieses Punktes, $= v$, so hat man für die Normalacceleration:

$$p = \frac{v^2}{r} \text{ (§. 42).}$$

Ist nun die Masse des Punktes $= M$, so entspricht dieser Normalacceleration eine Kraft:

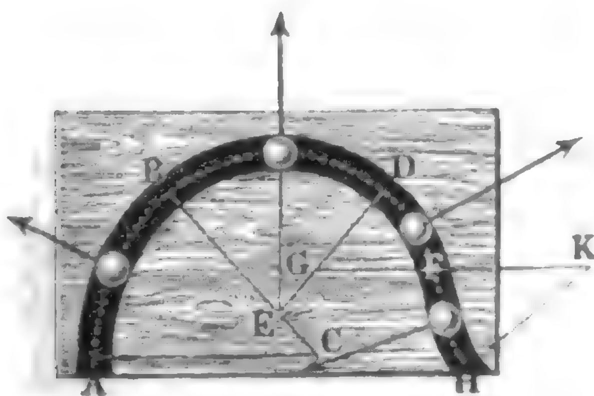
$$P = Mp = \frac{Mv^2}{r},$$

die wir als die erste Ursache, weshalb der Punkt an jeder Stelle seine Bewegungsrichtung ändert, ansehen müssen. Hat der Punkt außer der Normalkraft keine andere (Tangential-) Kraft, so ist die Geschwindigkeit v desselben unveränderlich $= c$, und daher die Normalkraft

$$P = \frac{Mc^2}{r}$$

nur abhängig von der jedesmaligen Krümmung oder von dem Krümmungshalbmesser, und zwar kleiner bei schwacher Krümmung oder großem Krümmungshalbmesser, und größer bei starker Krümmung oder kleinerem Krümmungshalbmesser. Bei doppeltem Krümmungshalbmesser ist z. B. die Normalkraft nur halb so groß als bei einfachem Krümmungshalbmesser. Wird ein materieller Punkt M durch eine horizontale Bahn, Fig. 497, gezwungen, eine krumme Linie $ABDFH$ zu durchlaufen, so behält derselbe, wenn wir die Reibung außer Acht lassen, an allen Stellen einerlei Geschwindigkeit c, und übt an jeder Stelle einen der Normalkraft gleichen Druck gegen die concave Seitenwand aus. Während der Durchlaufung des Bogens AB ist dieser Druck $= \frac{Mc^2}{CA}$, während der Durchlaufung von BD ist er $= \frac{Mc^2}{EB}$, für den Bogen DF ist er

Fig. 497.



$= \frac{Mc^2}{GD}$ und für den Bogen FH fällt er $= \frac{Mc^2}{KF}$ aus, wenn CA, EB, GD und KF die Krümmungshalbmesser der Wegtheile AB, BD, DF und FH sind.

302 **Centripetal- und Centrifugalkraft.** Bewegt sich ein materieller Punkt oder Körper im Kreise, so wirkt die Normalkraft radial einwärts, weshalb sie dann Centripetal- oder Annäherungskraft (franz. force centripède; engl. centripetal force) genannt wird, während die Kraft, mit welcher der Körper vermöge seiner Trägheit entgegengesetzt, d. i. radial auswärts wirkt, den Namen Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft (franz. force centrifuge; engl. centrifugal force) erhalten hat. Centripetalkraft ist die auf den Körper einwirkende und Centrifugalkraft ist die vom Körper zurückwirkende Gegenkraft. Beide sind an Größe einander gleich und in der Richtung entgegengesetzt (§. 65).

Bei der Umdrehung der Planeten um die Sonne besteht die Centripetalkraft in einer Anziehungskraft der Sonne; wird der bewegte Körper durch eine Führung oder Leitung, ähnlich wie Fig. 497 angiebt, gezwungen, eine Kreisbahn zu durchlaufen, so wirkt die Führung durch ihre Starrheit als Centripetalkraft und der Centrifugalkraft des Körpers entgegen, ist endlich der umlaufende Körper durch einen Faden oder durch eine Stange mit dem Drehungspunkte verbunden, so ist es die Elasticität der Stange, welche sich mit der Centrifugalkraft des Körpers ins Gleichgewicht setzt und eben dadurch als Centripetalkraft wirkt.

Ist G das Gewicht des in Umdrehung befindlichen Körpers, also dessen Masse $M = \frac{G}{g}$, ist der Halbmesser des Kreises, in welchem die Umdrehung vor sich geht, $= r$ und die Umdrehungsgeschwindigkeit $= v$, so hat man nach dem letzten Paragraphen, die Centrifugalkraft:

$$P = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Gv^2}{gr} = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{G}{r},$$

also auch:

$$P : G = 2 \cdot \frac{v^2}{2g} : r,$$

d. h. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Umdrehungshalbmesser.

Ist die Bewegung gleichförmig, welches allemal eintritt, wenn außer der Centripetalkraft keine andere Kraft (Tangentialkraft) auf den Körper wirkt, so läßt sich die Geschwindigkeit $v = c$ durch die Umdrehungszeit t ausdrücken, indem man setzt:

$$c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2\pi r}{t},$$

und man erhält hiernach für die Centrifugalkraft:

$$P = \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{t^2} \cdot Mr = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot Gr.$$

Da $4\pi^2 = 39,4784$ und für Fußmaß $\frac{1}{g} = 0,032$ ist, so hat man für die Rechnuugen bequemer:

$$P = \frac{39,4784}{t^2} \cdot Mr = 1,2633 \cdot \frac{Gr}{t^2} \text{ Pfund.}$$

Oft giebt man die Zahl u der Umdrehungen in der Minute, und ersetzt deshalb t durch $\frac{60''}{u}$, weshalb folgt:

$$P = \frac{39,4784}{3600} u^2 Mr = 0,010966\, u^2 Mr = 0,0003509\, u^2 Gr \text{ Pfund.}$$

Auch ist $P = 4,0243 \frac{Gr}{t^2} = 0,001118\, u^2 Gr$ Kilogramm.

Da $\frac{2\pi}{t}$ die Winkelgeschwindigkeit ω ist, so läßt sich auch setzen:

$$P = \omega^2 . Mr.$$

Hiernach folgt, daß bei gleichen Umdrehungszeiten oder bei gleich viel Umdrehungen in einer gewissen Zeit, und also auch bei gleichen Winkelgeschwindigkeiten, die Centrifugalkraft wie das Product aus Masse und Drehungshalbmesser wächst, und daß sie unter übrigens gleichen Umständen den Quadraten der Umdrehungszeiten umgekehrt, oder den Quadraten der Umlaufszahlen und also auch den Quadraten der Winkelgeschwindigkeiten direct proportional ist.

Beispiele. 1) Wenn ein Körper von 50 Pfund Gewicht einen Kreis von 3 Fuß Halbmesser in der Minute 400 mal durchläuft, so ist seine Centrifugalkraft: $P = 0,0003509 . 400^2 . 50 . 3 = 3,509 . 16 . 50 . 3 = 350,9 . 24 = 8422$ Pfd.

Ist dieser Körper durch ein Hanfseil mit der Axe verbunden, und der Festigkeitsmodul für Hanfseile (§. 212) 7000 Pfund, so folgt:

$$8422 = 7000 . F,$$

daher der Querschnitt dieses Seiles:

$$F = \frac{8422}{7000} = 1,203 \text{ Quadratzoll,}$$

und der Durchmesser desselben:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 0,5642 . \sqrt{4,812} = 0,5642 . 2,193 = 1,24 \text{ oder } 1\tfrac{1}{4} \text{ Zoll.}$$

Bei dreifacher Sicherheit ist aber

$$d = 1,24 . \sqrt{3} = 1,24 . 1,732 = 2,15 \text{ Zoll}$$

zu nehmen.

2) Aus dem Erdhalbmesser $r = 20\frac{1}{4}$ Million Fuß und der Umdrehungszeit oder Tageslänge $t = 24$ St. $= 24 \,.\, 60 \,.\, 60 = 86400$ Sec. folgt die Centrifugalkraft eines Körpers unter dem Aequator der Erde:

$$P = 1{,}2633 \,.\, \frac{20'250000\, G}{86400^2} = \frac{2558}{864^2} \cdot G = \frac{1}{290} \cdot G,$$

wäre aber die Tageslänge 17 mal so klein, also $\frac{24}{17} = 1$ St. 24′ 42″, so würde diese Kraft $17^2 = 289$ mal so groß, also ungefähr dem Gewichte G des Körpers gleich sein. Unter dem Aequator wäre dann die Centrifugalkraft der Schwerkraft gleich und Körper daselbst würden ebenso wenig niederfallen als in die Höhe steigen.

3) Bei der Umdrehung des Mondes um die Erde wird die Centrifugalkraft desselben von der Anziehungskraft der Erde aufgehoben. Ist G das Gewicht des Mondes, r seine Entfernung von der Erde und t seine Umdrehungszeit um dieselbe, so folgt die Centrifugalkraft dieses Weltkörpers

$$= 1{,}2633 \,.\, \frac{G r}{t^2}.$$

Ist a der Erdhalbmesser und nimmt man an, daß die Schwerkraft in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt wie die $n$te Potenz dieser Entfernungen wachse, so hat man die Schwere des Mondes oder die Anziehungskraft der Erde

$$= G \left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

und setzen wir beide Kräfte einander gleich, so erhalten wir:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^n = 1{,}2633 \cdot \frac{r}{t^2}.$$

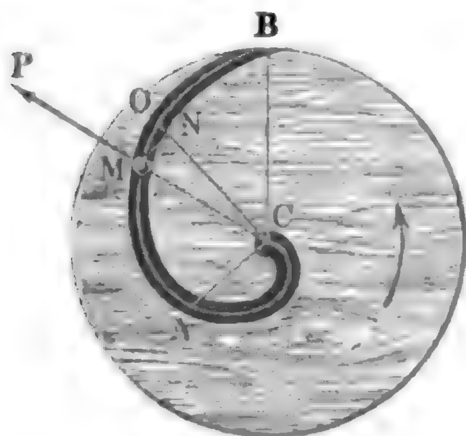
Nun ist $\frac{a}{r} = \frac{1}{60}$, $r = 1215$ Millionen Fuß und $t = 27$ Tage 7 St. 42 Min. $= 39342$ Min. $= 39342 \,.\, 60$ Sec., es folgt daher:

$$\left(\frac{1}{60}\right)^n = \frac{1{,}2633 \,.\, 1215}{393{,}4^2 \,.\, 36} = \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2,$$

und es ist hiernach $n = 2$, d. h. die Schwerkraft der Erde steht im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde.

§. 303 **Arbeit der Centrifugalkraft.** Ist die Bahn CAB, Fig. 498, in welcher sich ein Körper M bewegt, selbst nicht in Ruhe, sondern dreht sich dieselbe um eine Axe C, so theilt sie dem Körper eine Centrifugalkraft P mit, vermöge welcher er entweder eine gewisse mechanische Arbeit verrichtet, oder eine solche in Anspruch nimmt, je nachdem er sich bei seiner Bewegung in der Bahn von der Drehungsaxe C entfernt, oder sich derselben nähert. Ist M die Masse des Körpers, ω die constante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Bahn, z. B. ein Kreisel (franz. sabot; engl. top), um ihre

Fig. 498.



Axe C dreht, und bezeichnet z die veränderliche Entfernung CM des in der Bahn CAB laufenden Körpers, so hat man die veränderliche Centrifugalkraft desselben:

$$P = \omega^2 M z,$$

und es ist folglich die Arbeit dieser Kraft, während der Körper ein Wegtheilchen MO durchläuft, und der Halbmesser CM um $NO = \zeta$ wächst:

$$P\zeta = \omega^2 M z \,.\, \zeta.$$

Denken wir uns nun den Halbmesser z aus n Theilchen, jeden $= \zeta$, bestehend, setzen wir also $z = n\zeta$, und nehmen wir an, daß der Körper seinen Weg im Drehungspunkte C beginnt, so erhalten wir die Arbeit der Centrifugalkraft des Körpers beim Durchlaufen des Weges CAM, wobei die Entfernung des Körpers allmälig von 0 bis z wächst, indem wir in dem letzten Ausdrucke statt z nach und nach die Werthe ζ, 2ζ, 3ζ, ... $n\zeta$ einsetzen und die so erhaltenen Werthe addiren:

$$A = \omega^2 M \zeta (\zeta + 2\zeta + 3\zeta + \cdots + n\zeta) = \omega^2 M \zeta^2 (1 + 2 + 3 + \cdots + n),$$

oder da $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ bei einer großen Anzahl von Gliedern $\frac{n^2}{2}$ zu setzen ist:

$$A = \omega^2 M \zeta^2 \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}\, \omega^2 M z^2.$$

Da die Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels im Abstande $CM = z$ von der Umdrehungsaxe:

$$v = \omega z$$

ist, so läßt sich folglich einfacher

$$A = \frac{1}{2}\, M v^2 = \frac{v^2}{2g}\, G$$

setzen, wenn man noch statt der Masse M das Gewicht $G = Mg$ des Körpers einführt.

Wenn der Körper seine Bewegung nicht in C, sondern in irgend einem anderen Punkte A außerhalb der Umdrehungsaxe beginnt, dessen Entfernung von C, $CA = z_1$, und Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v_1 = \omega z_1$$

ist, so fällt natürlich die Arbeit $\frac{1}{2}\, \omega^2 M z_1^2$ beim Durchlaufen des Weges CA ganz aus, und es ist daher die entsprechende Arbeit der Centrifugalkraft, während der Körper von A nach M läuft:

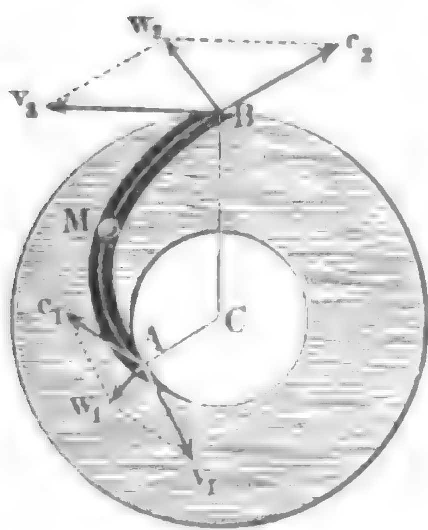
$$A = \frac{1}{2}\, \omega^2 M z^2 - \frac{1}{2}\, \omega^2 M z_1^2 = \frac{1}{2}\, \omega^2 M (z^2 - z_1^2)$$
$$= \frac{1}{2}\, M (v^2 - v_1^2) = \frac{(v^2 - v_1^2)}{2g}\, G.$$

Wenn sich also ein Körper in einer starren Bahn oder Rinne bewegt, welche sich um eine feste Axe dreht, so nimmt das Arbeitsvermögen dieses Körpers um das Product aus der Masse (M) desselben und aus der Diffe-

renz der Geschwindigkeitshöhen $\left(\frac{v^2}{2g} \text{ und } \frac{v_1^2}{2g}\right)$, welche den Umdrehungsgeschwindigkeiten der Endpunkte A und M des Weges zukommen, zu oder ab, und zwar ersteres bei einer Bewegung von innen nach außen, und letzteres bei einer Bewegung von außen nach innen.

§. 304 Wenn der Körper M seinen Weg AMB auf einem Kreisel ABC, Fig. 499, in A mit der relativen Geschwindigkeit c_1 beginnt, und den Kreisel in B mit der relativen Geschwindigkeit c_2 verläßt, und wenn die Umdrehungsgeschwindigkeiten des Kreisels in A und B, v_1 und v_2 sind, so ist unter der Voraussetzung, daß außer der Centrifugalkraft keine anderen Kräfte auf den Körper wirken, der Gewinn des Arbeitsvermögens desselben beim Durchlaufen des Weges AMB:

Fig. 499.



$$A = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} G = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} G,$$

daher:

$$c_2^2 - c_1^2 = v_2^2 - v_1^2, \text{ oder}$$

$$c_2^2 = c_1^2 + v_2^2 - v_1^2,$$

folglich die relative Austrittsgeschwindigkeit selbst:

$$c_2 = \sqrt{c_1^2 + v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{c_1^2 + \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)},$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels, sowie r_1 und r_2 die Entfernungen CA und CB des Eintritts- und des Austrittspunktes (A und B) von der Drehungsaxe C bezeichnen.

Ebenso bestimmt sich die relative Austrittsgeschwindigkeit c_1, wenn der Körper bei B mit der relativen Geschwindigkeit c_2 den Kreisel erreicht und sich auf demselben von außen nach innen bewegt; es ist nämlich:

$$c_1 = \sqrt{c_2^2 - (v_2^2 - v_1^2)} = \sqrt{c_2^2 - \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Da der Körper beim Durchlaufen des Weges AMB außer seiner relativen Geschwindigkeit (c) in der Bahn auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit (v) der letzteren hat, so ist er bei A mit einer absoluten Geschwindigkeit $\overline{Aw_1} = w_1$ einzuführen, welche sowohl der Größe als auch der Richtung nach durch die Diagonale des aus c_1 und v_1 construirten Parallelogramms bestimmt wird, und es ergiebt sich ebenso die absolute Austrittsgeschwindigkeit $\overline{Bw_2} = w_2$ des Körpers bei B durch die Diagonale des aus den relativen Geschwindigkeiten c_2 und v_2 construirten Parallelogramms $B c_2 w_2 v_2$.

Das Arbeitsquantum, welches der Körper bei Durchlaufung des Krei-

sels in der Bahn AMB gewonnen oder verloren und folglich der Kreisel verloren oder gewonnen hat, ist

$$A = \pm \left(\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}\right) G.$$

Soll der Körper beim Durchlaufen des Kreisels in der Richtung AMB sein ganzes Arbeitsvermögen $\frac{w_1^2}{2g} G$ dem Kreisel mittheilen, so muß die absolute Austrittsgeschwindigkeit $w_2 =$ Null, und deshalb nicht allein $c_2 = v_2$, sondern auch die Richtung von c_2 der von v_2 genau entgegengesetzt sein, und deshalb die Bahn bei B tangential am Umfange des Kreisels auslaufen.

Beispiel. Wenn der in Fig. 499 abgebildete Kreisel den inneren Halbmesser $CA = r_1 = 1$ Fuß und den äußeren Halbmesser $CB = r_2 = 1\frac{1}{2}$ Fuß hat, und sich pr. Minute 100 mal umdreht, so ist seine Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\pi u}{30} = 3,1416 \cdot \frac{10}{3} = 10,472 \text{ Fuß},$$

und folglich auch seine innere Umfangsgeschwindigkeit:

$v_1 = \omega r_1 = 10,472$ Fuß, dagegen aber seine äußere:

$v_2 = \omega r_2 = 10,472 \cdot 1,5 = 15,708$ Fuß.

Läßt man nun in denselben bei A einen Körper mit $w_1 = 25$ Fuß so eintreten, daß der Winkel $w_1 A v_1$, welchen seine absolute Bewegung mit der Umdrehungsrichtung einschließt, $\alpha = 30$ Grad ist, so hat man für die relative Geschwindigkeit c_1, mit welcher der Körper die Bewegung im Kreisel beginnt:

$$c_1^2 = v_1^2 + w_1^2 - 2 v_1 w_1 \cos. \alpha = 109,66 - 453,45 + 625,00 = 281,21,$$

und daher:

$$c_1 = 16,77 \text{ Fuß}.$$

Ferner ist für den Winkel $v_1 A c_1 = \beta$, unter welchem sich die Bahn bei A an den inneren Kreiselumfang anschließen muß, damit der Körper ohne Stöße in dieselbe einlaufe:

$$\frac{\sin. \beta}{\sin. \alpha} = \frac{w_1}{c_1}, \text{ also:}$$

$$\sin. \beta = \frac{25 \sin. 30^0}{16,77},$$

wonach $\beta = 48^0, 12' \frac{1}{2}$ folgt.

Für die relative Austrittsgeschwindigkeit c_2 ist

$$c_2^2 = c_1^2 + v_2^2 - v_1^2 = 281,21 + 109,66 \, [(3/2)^2 - 1^2] = 418,28,$$

folglich:

$$c_2 = 20,45 \text{ Fuß};$$

dagegen für die absolute Austrittsgeschwindigkeit w_2, wenn der Canal oder die Rinne AMB den äußeren Umfang unter einem Winkel δ von 20 Grad schneidet, also $v_2 B c_2 = 160^0$ ist:

$$w_2^2 = c_2^2 + v_2^2 - 2 c_2 v_2 \cos. \delta = 418,28 + 246,74 - 603,72 = 61,30,$$

folglich:

$$w_2 = 7,80 \text{ Fuß}.$$

Endlich ergiebt sich aus den Geschwindigkeitshöhen:

$$\frac{w_1^2}{2g} = 0,016 \cdot 625 = 10 \text{ und } \frac{w_2^2}{2g} = 0,016 \cdot 61,31 = 0,981 \text{ Fuß},$$

das Arbeitsquantum, welches der Körper vom Gewichte G beim Durchlaufen des Kreisels diesem mittheilt:

$$A = \left(\frac{w_1^2 - w_2^2}{2g}\right) G = (10 - 0{,}981)\, G = 9{,}019\, G,$$

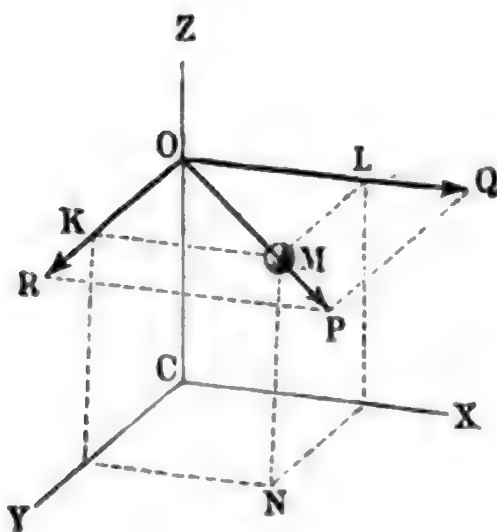
z. B. wenn dieser Körper das Gewicht $G = 10$ Pfund hat:

$$A = 9{,}019 \,.\, 10 = 90{,}19 \text{ Fußpfund}.$$

Anmerkung. Die vorstehende Theorie der Bewegung eines Körpers in einem Kreisel findet ihre Anwendung bei den Turbinen oder Kreiselrädern.

305 **Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.** Auf einen Inbegriff von Massen oder auf eine Masse von endlicher Ausdehnung ist die oben gefundene Formel für die Centrifugalkraft nicht unmittelbar anwendbar, weil man im Voraus nicht weiß, welcher Drehungshalbmesser r in die Rechnung einzuführen ist. Um diesen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Es sei in Fig. 500, CZ die Umdrehungsaxe, und CX und CY seien zwei rechtwinkelige Coordinatenaxen; es sei ferner M ein Massentheil, und $MK = x$, $ML = y$ und $MN = z$ seien dessen Abstände von den Coordinatenebenen YZ, XZ und XY. Da die Centrifugalkraft P radial wirkt, so läßt sich ihr Angriffspunkt nach dem Durchschnittspunkte O mit der Drehungsaxe verlegen. Zerlegen wir nun diese Kraft nach den Axenrichtungen CX und CY, so erhalten wir die Seitenkräfte $\overline{OQ} = Q$ und $\overline{OR} = R$, für welche gilt:

Fig. 500.



$$OQ : OP = OL : OM \text{ und } OR : OP = OK : OM,$$

weshalb nun

$$Q = \frac{x}{r} P \text{ und } R = \frac{y}{r} P$$

folgt, wobei r die Entfernung OM des Massentheilchens von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Gehen wir auf gleiche Weise mit allen Massentheilchen zu Werke, so erhalten wir zwei Systeme von Parallelkräften, eines in der Ebene XZ und das andere in der Ebene YZ, jedes aber auf die Axe CZ winkelrecht wirkend. Bedienen wir uns zur Unterscheidung der Indexzahlen 1, 2, 3 u. s. w., setzen wir also die Massentheile M_1, M_2, M_3, und ihre Abstände x_1, x_2, x_3 u. s. w., so bekommen wir hiernach die Mittelkraft des einen Systemes Fig. 501:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots = \frac{P_1 x_1}{r_1} + \frac{P_2 x_2}{r_2} + \frac{P_3 x_3}{r_3} + \cdots$$
$$= \omega^2 . (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$$

und die des anderen:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2.(M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots).$$

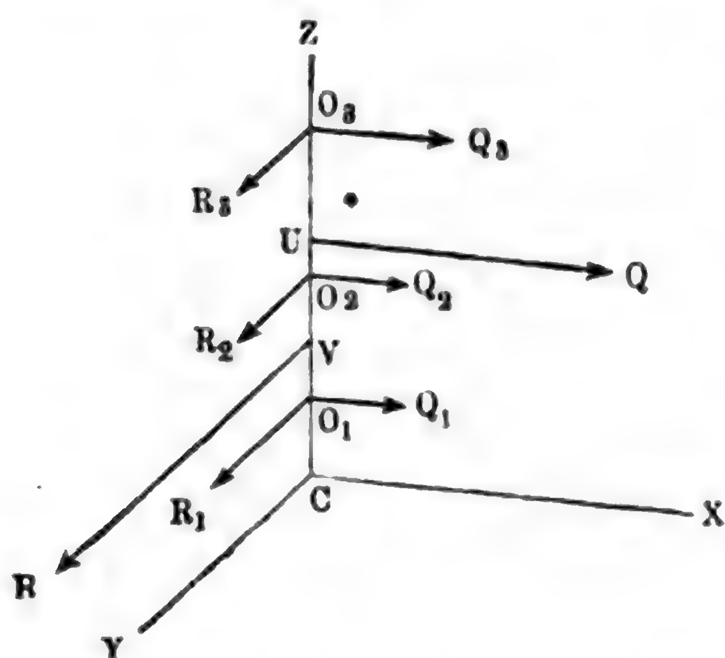


Fig. 501.

Setzen wir endlich die Abstände $C O_1$, $C O_2$ u. s. w. der Massentheile von der Ebene $X Y$, $= z_1, z_2$ u. s. w., so erhalten wir für die Angriffspunkte U und V dieser Mittelkräfte die Abstände $C U = u$ und $C V = v$ durch die Gleichungen

$(Q_1 + Q_2 + \cdots) u = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots$ und $(R + R_2 + \cdots) v = R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots$, weshalb folgt:

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots}{Q_1 + Q_2 + \cdots} = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

und

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots}{R_1 + R_2 + \cdots} = \frac{M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots}.$$

Es werden also hiernach im Allgemeinen die Centrifugalkräfte eines Massensystemes oder eines ausgedehnten Körpers auf zwei Kräfte zurückgeführt, die sich, so lange u und v ungleich sind, nicht zu einer einzigen vereinigen lassen.

Beispiel. Sind die Massen eines Systemes:

$M_1 = 10$ Pfd., $M_2 = 15$ Pfd., $M_3 = 18$ Pfd., $M_4 = 12$ Pfd.

und ihre Abstände:

$x_1 = 0$ Zoll, $x_2 = 4$ Zoll, $x_3 = 2$ Zoll, $x_4 = 6$ Zoll,
$y_1 = 3$ „ $y_2 = 1$ „ $y_3 = 5$ „ $y_4 = 3$ „
$z_1 = 2$ „ $z_2 = 3$ „ $z_3 = 3$ „ $z_4 = 0$ „

so hat man folgende mittleren Centrifugalkräfte:

$$Q = \omega^2.(10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6) = 168.\omega^2 \text{ und}$$
$$R = \omega^2.(10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3) = 171.\omega^2,$$

und hiernach die Abstände ihrer Angriffspunkte von dem Anfangspunkte C:

$$u = \frac{10.0.2 + 15.4.3 + 18.2.3 + 12.6.0}{10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6} = \frac{288}{168} = \frac{12}{7} = 1{,}714 \text{ Zoll},$$

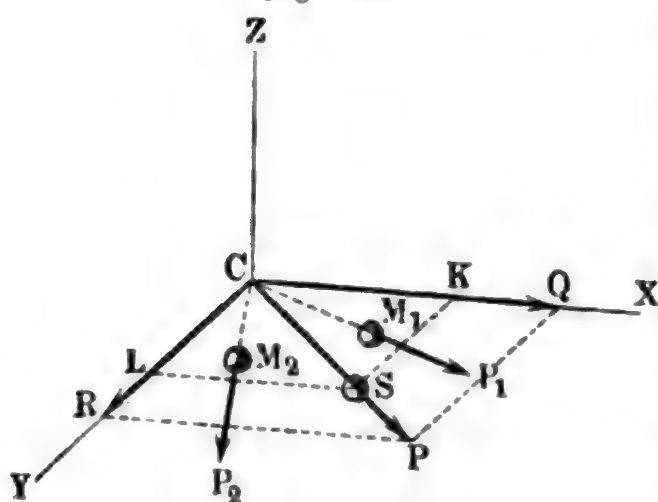
und

$$v = \frac{10.3.2 + 15.1.3 + 18.5.3 + 12.3.0}{10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3} = \frac{375}{171} = \frac{125}{57} = 2{,}193 \text{ Zoll}.$$

Die Verschiedenheit dieser Werthe von u und v zeigt an, daß die Centrifugalkräfte durch eine einzige Kraft nicht ersetzt werden können.

306 Befinden sich die Massentheile in einer Umdrehungsebene, d. i. in einer Ebene XCY, Fig. 502, welche winkelrecht auf der Umdrehungsaxe steht, wie $M_1, M_2 \ldots$, so lassen sich ihre Centrifugalkräfte in eine einzige vereinigen, weil sich ihre Richtungen in einem einzigen Punkte C der Axe CZ schneiden. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei, so erhalten wir die resultirende Centrifugalkraft in diesem Falle:

Fig. 502.



$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 \sqrt{[(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)^2 + (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)^2]}.$$

Sind nun $CK = x$ und $CL = y$ die Coordinaten des Schwerpunktes vom Massensysteme $M = M_1 + M_2 + \cdots$, so hat man:

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = Mx \text{ und}$$
$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = My,$$

und es folgt daher die Centrifugalkraft:

$$P = \omega^2 \sqrt{M^2 x^2 + M^2 y^2} = \omega^2 M \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 M r,$$

wofern noch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, den Abstand CS des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe CZ bezeichnet.

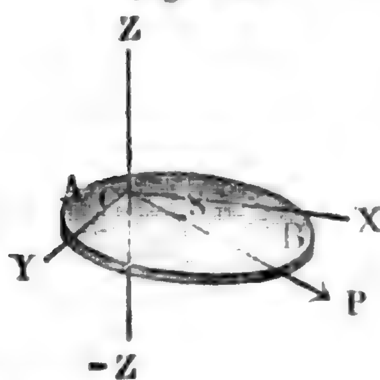
Für den Winkel $PCX = \alpha$, welchen diese Kraft mit der Axe CX einschließt, ist

$$tang.\, \alpha = \frac{R}{Q} = \frac{My}{Mx} = \frac{y}{x};$$

es geht daher die Richtung der Centrifugalkraft durch den Schwerpunkt des Systemes und es ist dieselbe genau so groß, als wenn die sämmtlichen Massentheile im Schwerpunkte vereinigt wären.

Für eine auf der Umdrehungsaxe $Z\overline{Z}$ rechtwinkelig stehende Scheibe AB, Fig. 503, ist hiernach die Centrifugalkraft ebenfalls $= \omega^2 M r$, wenn M ihre Masse und r die Entfernung CS ihres Schwerpunktes S von der Axe bezeichnet.

Fig. 503.



Liegen ebenso die Schwerpunkte der Massentheile eines Körpers in der Umdrehungsebene, oder ist diese Ebene Symmetrieebene des Körpers $ADFF_1$, Fig. 504, so lassen sich die Centrifugalkräfte der Massentheile des Körpers zu einer einzigen, im Schwerpunkte desselben an-

greifenden Mittelkraft vereinigen, welche dem Abstande S dieses Punktes von der Umdrehungsaxe entspricht und sich daher durch die Formel $P = \omega^2 P r$ bestimmen läßt.

Fig. 504.

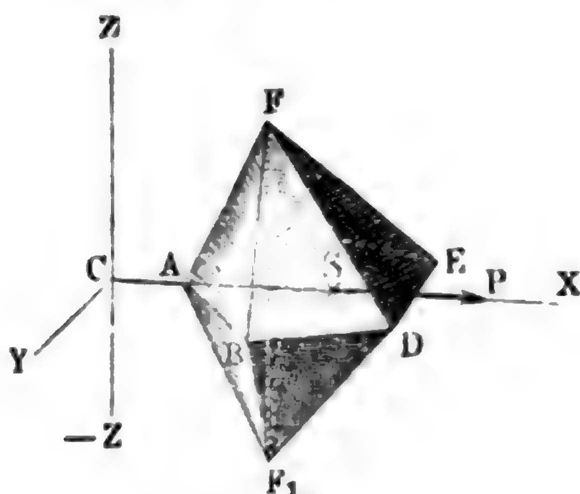
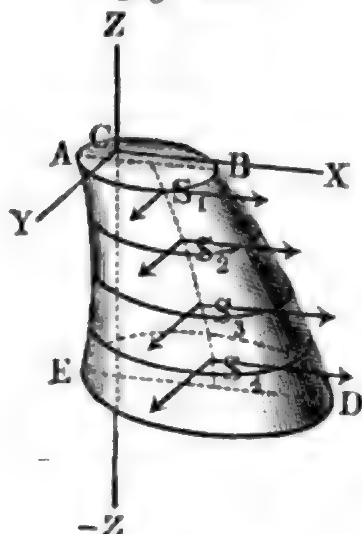


Fig. 505.



Um die Centrifugalkraft eines anderen Körpers $ABDE$, Fig. 505, zu finden, zerlegen wir denselben durch Ebenen winkelrecht zur Axe ZZ in scheibenförmige Elemente, ermitteln die Schwerpunkte S_1, S_2 u. s. w. derselben, bestimmen mit Hülfe der letzteren die Centrifugalkräfte, zerlegen jede derselben nach den Axenrichtungen CX und CY in Seitenkräfte, und vereinigen die Seitenkräfte in der Ebene ZCX zu einer Mittelkraft Q, sowie die in der Ebene ZCY zu einer Mittelkraft R.

Befinden sich die Schwerpunkte sämmtlicher Scheiben in einer Parallellinie zur Umdrehungsaxe, so ist $x = x_1 = x_2$ u. s. w., sowie $y = y_1 = y_2$ u. s. w., und daher auch $r = r_1 = r_2$ u. s. w.; es folgt daher die Centrifugalkraft des ganzen Körpers:

$$P = \omega^2 (M_1 r + M_2 r + \cdots) = \omega^2 M r,$$

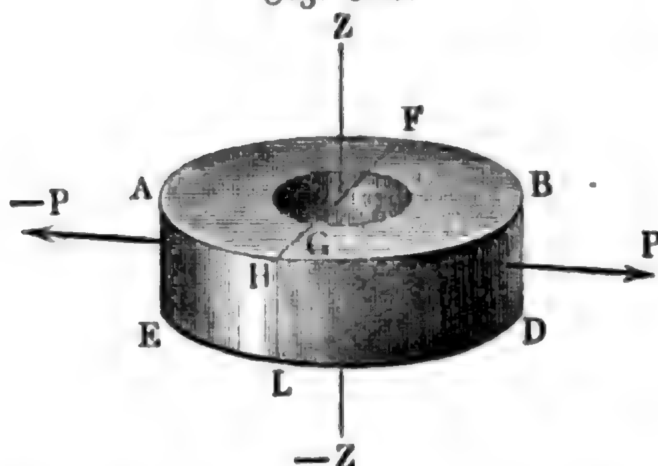
und der Abstand ihres Angriffspunktes von der Ebene XY:

$$z = \frac{(M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots) r}{(M_1 + M_2 + \cdots) r} = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots}{M_1 + M_2 + \cdots} = z.$$

Diesen Gleichungen zufolge ist die Centrifugalkraft eines Körpers, welcher sich in Elemente zerlegen läßt, deren Schwerpunkte in einer mit der Umdrehungsaxe parallel laufenden Linie liegen, gleich der Centrifugalkraft der in dem Schwerpunkte dieses Körpers vereinigten Masse desselben, und es fällt auch der Angriffspunkt dieser Kraft mit diesem Schwerpunkte zusammen. Hiernach lassen sich die Centrifugalkräfte aller symmetrischen Körper (s §. 106), deren Symmetrieaxe der Umdrehungsaxe parallel läuft, und also auch die aller Rotationskörper, deren geometrische Axen mit der Umdrehungsaxe parallel sind, finden. Fällt die geometrische Axe eines solchen Körpers mit der Umdrehungsaxe zusammen, so ist die resultirende Centrifugalkraft sogar Null.

Beispiel. Es sind die Dimensionen, die Dichtigkeit und Festigkeit eines Mühlsteines $ABDE$, Fig. 506, gegeben, man soll die Winkelgeschwindigkeit ω finden, bei welcher das Zerreißen desselben in Folge der Centrifugalkraft eintritt. Setzen wir den Halbmesser CF des Mühlsteines $= r_1$, den Halbmesser CG seines Auges $= r_2$, die Höhe $AE = HL = l$, die Dichtigkeit $= \gamma$ und den Festigkeitsmodul $= K$, so erhalten wir die Kraft zum Zerreißen desselben in einer diametralen Ebene,

Fig. 506.



$$P = 2\,(r_1 - r_2)\, l K,$$

das Gewicht des Steines:

$$G = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\, l\gamma,$$

und den Umdrehungshalbmesser für jede Hälfte des Steines, d. i. die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe (§. 114):

$$r = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Im Augenblicke des Zerreißens ist die Centrifugalkraft von einer Hälfte des Steines der Festigkeit gleich, wir bekommen daher die Bestimmungsgleichung:

$$\omega^2 . \tfrac{1}{2} \frac{G r}{g} = 2\,(r_1 - r_2)\, l K,$$

d. i.:

$$\omega^2 . \tfrac{2}{3}(r_1^3 - r_2^3)\, \frac{l\gamma}{g} = 2\,(r_1 - r_2)\, l K,$$

und $2\,l$ zu beiden Seiten aufgehoben, folgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\,g\,(r_1 - r_2)\,K}{(r_1^3 - r_2^3)\,\gamma}} = \sqrt{\frac{3\,g\,K}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\,\gamma}}.$$

Ist $r_1 = 2$ Fuß $= 24$ Zoll, $r_2 = 4$ Zoll, $K = 750$ Pfund und das specifische Gewicht der Mühlsteinmasse, $= 2{,}5$, also das Gewicht eines Cubikzolles Masse desselben, $\gamma = \frac{61{,}74 . 2{,}5}{1728} = 0{,}08934$ Pfd., so folgt die Winkelgeschwindigkeit beim Eintreten des Zerreißens:

$$\omega = \sqrt{\frac{3 . 12 . 31{,}25 . 750}{688 . 0{,}08934}} = \sqrt{\frac{210937}{15{,}367}} = 117{,}2 \text{ Zoll}.$$

Ist die Zahl der Umdrehungen in einer Minute $= u$, so hat man $\omega = \frac{2\pi u}{60}$, daher umgekehrt $u = \frac{30\,\omega}{\pi}$, hier aber $= \frac{30 . 117{,}2}{\pi} = 1119$. Die gewöhnliche Umdrehungszahl eines solchen Mühlsteines ist nur 120, also 9mal so klein.

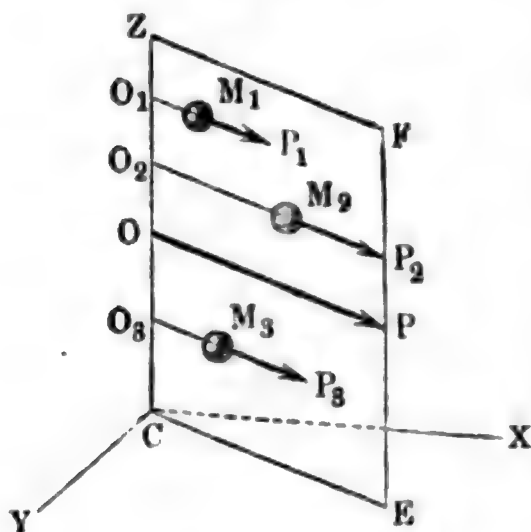
Für ein Schwungrad läßt sich $r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 = 3\,r^2$ setzen, wenn r den mittleren Halbmesser seines Ringes bezeichnet. Daher ist hier

$$\omega = \sqrt{\frac{g K}{r^2 \gamma}} \text{ oder } v = \omega r = \sqrt{\frac{g K}{\gamma}}.$$

§. 307 Befinden sich die sämmtlichen Theile M_1, M_2 eines Massensystemes, Fig. 507, oder die Schwerpunkte der Elemente eines Körpers in

einer durch die Umdrehungsaxe gehenden Ebene, so bilden die Centrifugalkräfte ein System von Parallelkräften und es lassen sich daher dieselben in der Regel auf eine einzige Kraft zurückführen. Sind die Entfernungen der Massentheile oder Elemente von der Umdrehungsaxe $Z\overline{Z}$:

Fig. 507.



$O_1 M_1 = r_1$, $O_2 M_2 = r_2$ u. s. w.,

so erhält man für ihre Centrifugalkräfte:

$P_1 = \omega^2 M_1 r_1$, $P_2 = \omega^2 M_2 r_2$

u. s. w., und daher die mittlere Centrifugalkraft:

$$P_1 = \omega^2 (M_1 r_1 + M_2 r_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 M r,$$

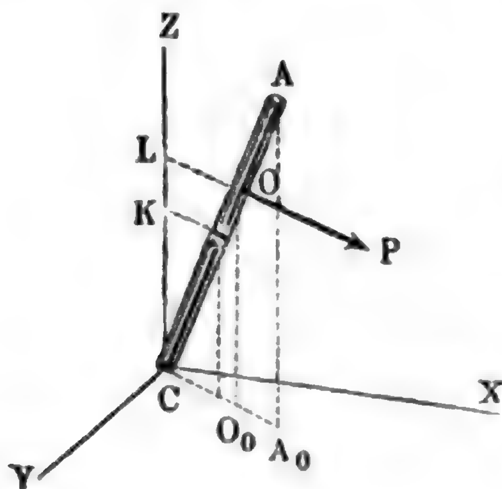
wofern r den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Masse M von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Es ist also auch hier der Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe als Drehungshalbmesser anzusehen. Um aber den Angriffspunkt O der resultirenden Centrifugalkraft P zu finden, setzen wir die Abstände der Massentheile von der Normalebene: $C O_1 = z_1$, $C O_2 = z_2$ u. s. w. in die Formel:

$$C O = z = \frac{M_1 r_1 z_1 + M_2 r_2 z_2 + \cdots}{M_1 r_1 + M_2 r_2 + \cdots}.$$

Mit Hülfe der Formel $P = \omega^2 M r$ lassen sich die Centrifugalkräfte von Rotationskörpern und von anderen Körpern der Geometrie finden, wenn die Axen dieser Körper mit der Umdrehungsaxe in eine Ebene fallen.

Für eine Stange $A B$, Fig. 508, deren Länge $A C = l$ und Neigungswinkel $A C Z$ gegen die Umdrehungsaxe $C Z$, $= \alpha$ ist, hat man:

Fig. 508.



$$r = \overline{KS} = \frac{1}{2} l \sin. \alpha,$$

und folglich die Centrifugalkraft:

$$P = \omega^2 . \frac{1}{2} M l \sin. \alpha;$$

um aber den Angriffspunkt O dieser Kraft zu finden, setzen wir in dem Ausdrucke

$$\omega^2 \cdot \frac{M}{n} x \sin. \alpha . x \cos. \alpha$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} x^2 \sin. \alpha \cos. \alpha$$

für das Moment vom Elemente $\frac{M}{n}$ der

Stange, statt x nach und nach $\frac{l}{n}$, $\frac{2l}{n}$, $\frac{3l}{n}$ u. s. w. und vereinigen die Ergebnisse durch Addition. Auf diese Weise ergiebt sich das Moment der ganzen Stange:

$$P u = \omega^2 \frac{M}{n} \sin.\alpha \cos.\alpha \frac{l^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$= \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha,$$

daher der Hebelarm $CL = O_0 O$, oder:

$$u = \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \sin.\alpha \cos.\alpha : \frac{1}{2} \omega^2 M l \sin.\alpha = \frac{2}{3} l \cos.\alpha,$$

und die Entfernung des Angriffspunktes O von dem in der Axe liegenden Stangenende C:

$$CO = \frac{2}{3} l.$$

Reicht die Stange AB, Fig. 509, nicht bis zur Axe, so hat man:

$$P = \frac{1}{2} \omega^2 F l_1^2 \sin.\alpha - \frac{1}{2} \omega^2 F l_2^2 \sin.\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \omega^2 F \sin.\alpha (l_1^2 - l_2^2),$$

und das Moment:

$$P u = \frac{1}{3} \omega^2 F \sin.\alpha \cos.\alpha (l_1^3 - l_2^3),$$

weil die Masse von CA (= Querschnitt mal Länge) $= F l_1$ und die Masse von CB, $= F l_2$ ist. Es folgt daher die Entfernung des Angriffspunktes O vom Durchschnitte C mit der Axe:

$$CO = \frac{2}{3} \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}, \text{ oder } CO = l + \frac{(l_1 - l_2)^2}{12 l},$$

wenn l die Entfernung CS des Schwerpunktes und $l_1 - l_2$ die Länge der Stange AB ausdrückt.

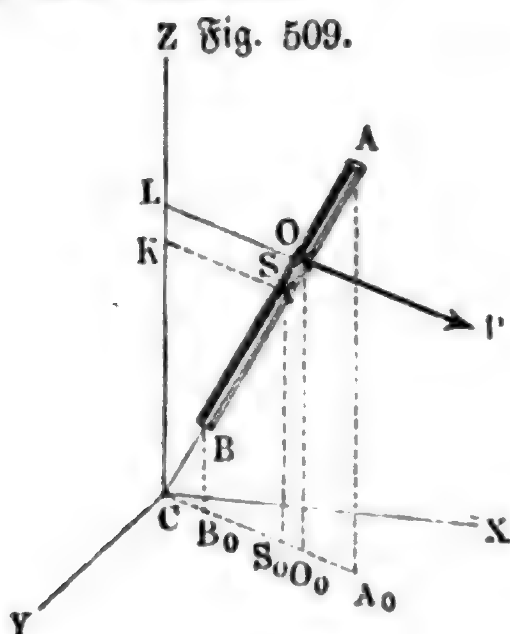


Fig. 509.

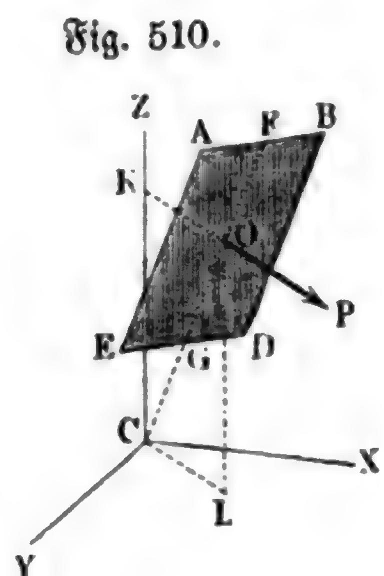


Fig. 510.

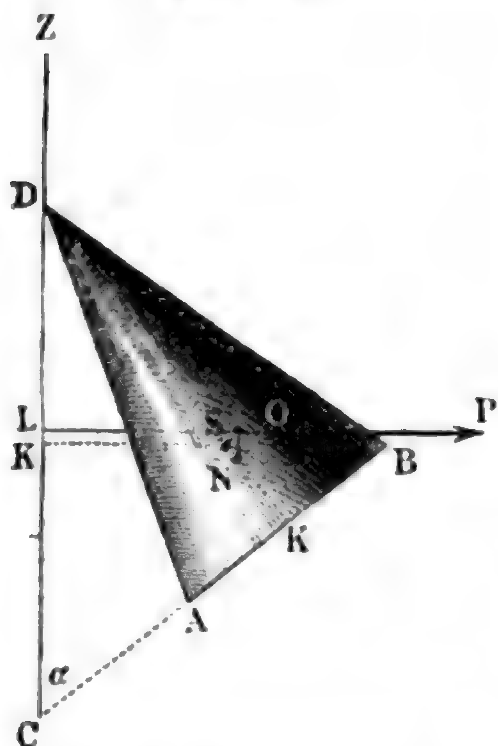
Diese Formel gilt auch für ein rectanguläres Blatt $ABDE$, Fig. 510, welches sich durch die Axenebene COZ in zwei congruente Rechtecke theilen läßt und dessen Ebene rechtwinkelig gegen diese Axenebene steht, weil die Centrifugalkraft von jedem der Elemente, welche sich durch Schnitte normal

zu CZ ergeben, in der Mittellinie FG angreift. Sind also die Entfernungen CF und CG der beiden Grundlinien AB und DE von dem Axenpunkte C, l_1 und l_2, so hat man auch hier

$$CO = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = l + \frac{(l_1 - l_2)^2}{12\, l}.$$

Ebenso ergiebt sich die Centrifugalkraft eines geraden Kreiskegels ABD, Fig. 511, welcher sich um eine durch die Spitze D desselben gehende Axe CZ dreht, wenn man in der Formel $P = \omega^2 Mr$, statt r den Abstand KS des Schwerpunktes S dieses Körpers von CZ einsetzt. Bezeichnet h die Höhe KD des Kegels und α den Winkel BCZ, um welchen die Basis AB desselben von der Umdrehungsaxe abweicht, so hat man $KS = \overline{DS}\, cos.\, DSK = {}^3/_4\, h\, cos.\, \alpha$, und daher die gesuchte Centrifugalkraft

Fig. 511.



$$P = \omega^2 M . {}^3/_4\, h\, cos.\, \alpha.$$

Der Angriffspunkt O dieser Kraft ist durch die Coordinaten $DL = u$ und $LO = v$ bestimmt, für welche die höhere Analysis unter der Voraussetzung, daß die Umdrehungsaxe CZ nicht durch die Kegelmasse hindurchgeht, folgende Ausdrücke findet:

$$u = {}^4/_5\, h\, sin.\, \alpha \left[1 - \left(\frac{r}{2\,h}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$v = {}^4/_5\, h\, cos.\, \alpha \left[1 + \left(\frac{r\, tang.\, \alpha}{2\,h}\right)^2\right]$$

findet, worin r den Halbmesser $KA = KB$ der Basis bezeichnet.

In dem Falle, wenn die Körpertheile weder in einer Normalebene zur Umdrehungsaxe, noch in einer Ebene durch die Umdrehungsaxe enthalten sind, lassen sich die resultirenden Centrifugalkräfte §. 308

$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$ und $R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$ nicht in eine einzige Kraft verwandeln, wohl aber ist es möglich, diese Kräfte durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 Mr$$

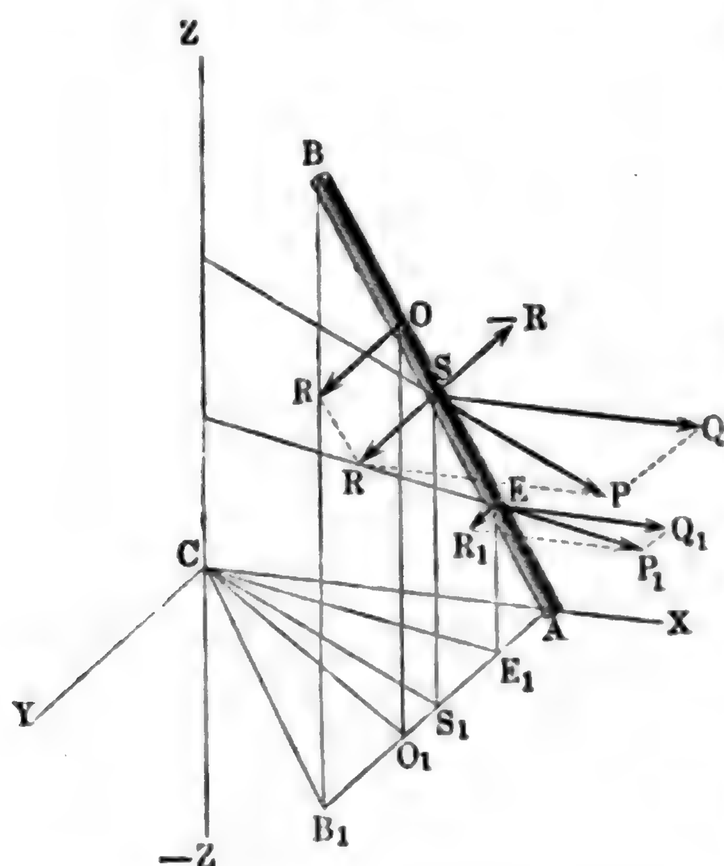
und durch ein aus Q und R zusammengesetztes Kräftepaar zu ersetzen. Bringen wir nämlich im Schwerpunkte S vier sich das Gleichgewicht haltende Kräfte $+ Q$ und $- Q$, sowie $+ R$ und $- R$ an, so geben die positiven Theile die Mittelkraft

$$P = \omega^2 \sqrt{Q^2 + R^2},$$

wogegen die negativen Theile $- Q$ und $- R$ mit den in U und V (s. Fig. 501) angreifenden Centrifugalkräften die Kräftepaare $(Q, - Q)$ und $(R, - R)$ bilden, die sich zu einem einzigen Kräftepaare zusammensetzen lassen.

Um mit dieser Zurückführung der Centrifugalkräfte eines umlaufenden Körpers auf eine Kraft und ein Kräftepaar bekannt zu werden, ziehen wir folgenden einfachen Fall in Betracht. Die Stange AB, Fig. 512, welche sich um die Axe $Z\overline{Z}$ dreht, liege parallel zur Ebene YZ und ruhe mit dem Ende A in der Axe CX. Setzen wir die Länge AB dieser Stange $= l$, das Gewicht derselben $= G$, den Winkel ABB_1, um welchen diese Stange von der Drehaxenrichtung abweicht, $= \alpha$, und ihren Abstand CA von der Ebene YZ, welches auch ihr kürzester Abstand von der Axe $Z\overline{Z}$ ist, $= a$. Ist nun E ein Element $\frac{M}{n}$ der Stange,

Fig. 512.



und $y = AE_1$ die Horizontalprojection seines Abstandes AE vom Ende A, so hat man für die Componenten der Centrifugalkraft P_1 dieses Elementes:

$$Q_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{CA} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a \text{ und } R_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{AE_1} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} y,$$

dagegen ihre Momente in Beziehung auf die Grundebene XCY, da der Abstand dieses Elementes von der Ebene XY:

$$E_1 E = \overline{AE_1}\ cotg.\ \alpha = y\ cotg.\ \alpha \text{ ist,}$$

$$Q_1 z_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \overline{CA} . \overline{E_1 E} = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, y\, cotg.\ \alpha \text{ und}$$

$$R_1 z_1 = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} y^2 \cdot cotg.\ \alpha.$$

Die sämmtlichen Seitenkräfte parallel zur Ebene XZ geben die Resultirende:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots = n \cdot \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a = \omega^2 . M a,$$

und das Moment derselben:

$$Q u = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cotg.\, \alpha\, (y_1 + y_2 + \cdots),$$

oder, da $y_1 = \frac{l\, sin.\, \alpha}{n}$, $y_2 = 2\frac{l\, sin.\, \alpha}{n}$, $y_3 = \frac{3\, l\, sin.\, \alpha}{n}$ u. s. w. zu nehmen, und $cotg.\, \alpha\, sin.\, \alpha = cos.\, \alpha$ ist,

$$Q u = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cos.\, \alpha \cdot \frac{l}{n} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cos.\, \alpha \cdot \frac{l}{n} \cdot \frac{n^2}{2}$$
$$= {}^1/_2\, \omega^2 \,.\, M\, a\, l\, cos.\, \alpha.$$

Es ist also der Abstand des Angriffspunktes dieser Seitenkraft von der Grundebene $X\,Y$:

$$S_1\, S = u = \frac{{}^1/_2\, \omega^2\, M\, a\, l\, cos.\, \alpha}{\omega^2\, M\, a} = {}^1/_2\, l\, cos.\, \alpha,$$

d. h. es fällt dieser Punkt mit dem Schwerpunkte der Stange zusammen. Die Seitenkräfte, welche parallel zu YZ wirken, geben die Resultirende:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} (y_1 + y_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \frac{l\, sin.\, \alpha}{n} \cdot \frac{n^2}{2} = {}^1/_2\, \omega^2\, M\, l\, sin.\, \alpha$$ mit dem Momente

$$R v = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot cotg.\, \alpha\, (y_1^2 + y_2^2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n}\, cotg.\, \alpha \cdot \left(\frac{(l\, sin.\, \alpha)^2}{n^2} + \frac{(2\, l\, sin.\, \alpha)^2}{n^2} + \cdots\right)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \frac{l^2}{n^2} (sin.\, \alpha)^2\, cotg.\, \alpha\, (1 + 4 + 9 + \cdots + n^2)$$
$$= \omega^2 \cdot \frac{M}{n} \cdot \frac{l^2}{n^2}\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha \cdot \frac{n^3}{3}$$
$$= {}^1/_3\, \omega^2\, M\, l^2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha.$$

Es ist hiernach der Abstand des Angriffspunktes O dieser Kraft von der Grundebene $X\,Y$:

$$O_1\, O = v = \frac{{}^1/_3\, \omega^2\, M\, l^2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{{}^1/_2\, \omega^2\, M\, l\, sin.\, \alpha} = {}^2/_3\, l\, cos.\, \alpha,$$

d. i. dieser Angriffspunkt liegt um $({}^2/_3 - {}^1/_2)\, l\, cos.\, \alpha = {}^1/_6\, l\, cos.\, \alpha$ senkrecht, oder überhaupt um $S\,O$ = ein Sechstel der Stangenlänge $A\,B$ über dem Schwerpunkte S der Stange.

Aus den Kräften $Q = \omega^2\, M\, a$ und $R = {}^1/_2\, \omega^2\, M\, l\, sin.\, \alpha$ folgt die im Schwerpunkte der Stange angreifende Endresultirende:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2\, M \sqrt{a^2 + {}^1/_4\, l^2\, sin.\, \alpha^2},$$

und das Kräftepaar $(R, -R)$ mit dem Momente

$$R.\overline{SO} = \frac{1}{2}\omega^2 Ml\,sin.\,\alpha\,.\,\frac{1}{6}\,l\,cos.\,\alpha$$
$$= \frac{1}{12}\omega^2 Ml^2 sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha = \frac{1}{24}\omega^2 Ml^2 sin.\,2\,\alpha.$$

§. 309 **Freie Axen.** Im Allgemeinen üben zwar die Centrifugalkräfte eines sich um eine Axe gleichförmig umdrehenden Körpers einen Druck auf die Axe aus, es ist jedoch auch möglich, daß diese Kräfte sich gegenseitig aufheben und deshalb die Axe gar keinen Druck auszuhalten hat. Dieser Fall kommt z. B. vor bei jedem sich um seine geometrische oder symmetrische Axe drehenden Rotationskörper, bei einer Radwelle und einem Wasserrade insbesondere, u. s. w. Wenn auf einen unter diesen Umständen sich umdrehenden Körper oder auf ein solches Massensystem keine äußeren Kräfte einwirken, so bleibt der Körper ohne Ende in dieser Umdrehung begriffen, ohne daß es nöthig ist, die Umdrehungsaxe festzuhalten. Man nennt deshalb diese Umdrehungsaxe eine freie Axe (franz. axe libre; engl. free axis). Aus dem Vorhergehenden folgen sogleich die Bedingungen, unter welchen eine Drehaxe eine freie Axe ist. Es ist nöthig, daß nicht nur die Mittelkräfte Q und R aus den parallel den Axenebenen XZ und YZ wirkenden Componenten der Centrifugalkräfte, sondern auch die Summe der Momente von jedem der beiden Kräftesysteme = Null ist, also hiernach:

1) $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = 0$,
2) $M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0$, ferner
3) $M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0$, und
4) $M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0$.

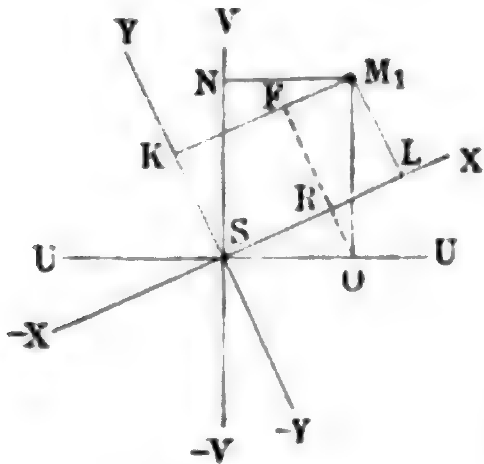
Die beiden ersten Gleichungen bedingen, daß die freie Axe durch den Schwerpunkt des Körpers oder Massensystemes geht. Die beiden letzteren aber liefern die Elemente zur Bestimmung der Lage dieser Axe. Es läßt sich übrigens nachweisen, daß jeder Körper oder jedes Massensystem mindestens drei freie Axen hat, und daß diese Axen im Schwerpunkte des Systemes unter rechten Winkeln zusammenstoßen.

Die höhere Mechanik unterscheidet von den freien Axen noch andere Axen, welche sich in irgend einem Punkte des Systemes durchkreuzen, und nennt diese Axen Hauptaxen (franz. axes principaux; engl. principal axes). Man beweist auch, daß das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine der Hauptaxen ein Maximum, und in Beziehung auf die zweite ein Minimum ist und daß es in Hinsicht auf die dritte Axe einen Mittelwerth hat, sowie daß für einen Punkt, welcher in einer der freien Axen liegt, die Hauptaxen mit den freien Axen, oder den durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen parallel laufen.

§. 310 **Freie Axen eines ebenen Massensystemes.** Befinden sich die Theile einer Masse in einer Ebene, bildet z. B. die Masse eine dünne

Platte oder ebene Figur, so ist die gerade Linie durch den Schwerpunkt der ganzen Masse, und normal zur Ebene derselben eine freie Axe der Masse, denn es ist in diesem Falle die Masse ohne Drehungshalbmesser, und daher die einzig mögliche Centrifugalkraft = Null. Um noch die beiden anderen freien Axen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Sei S, Fig. 513, der Schwerpunkt einer Masse, und seien $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ zwei in der Massenebene befindliche Coordinatenaxen, bestimmen wir die Massentheile durch Coordinaten parallel zu diesen Axen, z. B. das Massentheilchen M_1 durch die Coordinaten $M_1 N = u_1$ und $M_1 O = v_1$. Sei dagegen $X\overline{X}$ eine freie Axe, $Y\overline{Y}$ eine Axe winkelrecht gegen dieselbe, ferner der zu bestimmende Winkel USX, um welchen die freie Axe von der Coordinatenaxe SU abweicht, $= \varphi$, und setzen wir die Coordinaten der Massentheile in Hinsicht auf die Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$: $x_1, x_2 \ldots$ und $y_1, y_2 \ldots$, also für den Massentheil M_1:

Fig 513.



$$M_1 K = x_1 \text{ und } M_1 L = y_1.$$

Hiernach ergiebt sich sehr leicht:

$$x_1 = M_1 K = SR + RL = SO \cos.\varphi + OM_1 \sin.\varphi = u_1 \cos.\varphi + v_1 \sin.\varphi,$$

$$y_1 = M_1 L = - OR + OF = - SO \sin.\varphi + OM_1 \cos.\varphi$$
$$= - u_1 \sin.\varphi + v_1 \cos.\varphi;$$

und daher das Product:

$$x_1 y_1 = (u_1 \cos.\varphi + v_1 \sin.\varphi).(- u_1 \sin.\varphi + v_1 \cos.\varphi)$$
$$= - (u_1^2 - v_1^2) \sin.\varphi \cos.\varphi + u_1 v_1 (\cos \varphi^2 - \sin.\varphi^2)$$

oder, da $\sin.\varphi \cos.\varphi = \frac{1}{2} \sin. 2\varphi$ und $\cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^2 = \cos. 2\varphi$ ist,

$$x_1 y_1 = - \tfrac{1}{2} (u_1^2 - v_1^2) \sin. 2\varphi + u_1 v_1 \cos 2\varphi,$$

und daher das Moment des Massentheiles M_1:

$$M_1 x_1 y_1 = - \frac{M_1}{2} (u_1^2 - v_1^2) \sin. 2\varphi + M_1 u_1 v_1 \cos. 2\varphi,$$

ebenso das Moment des Massentheiles M_2:

$$M_2 x_2 y_2 = - \frac{M_2}{2} (u_2^2 - v_2^2) \sin. 2\varphi + M_2 u_2 v_2 \cos. 2\varphi$$

u. s. w., und die Summe der Momente aller Massentheile, oder das Moment der ganzen Masse:

$$M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + \cdots = - \tfrac{1}{2} \sin. 2\varphi [(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots)$$
$$- (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)] + \cos. 2\varphi (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots).$$

Damit $X\overline{X}$ eine freie Axe werde, muß aber nach dem vorigen Paragraphen dieses Moment = Null sein; wir müssen daher setzen

$$\frac{1}{2} sin. 2\varphi [(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)] - cos. 2\varphi (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots) = 0,$$

und erhalten hiernach als Bedingungsgleichung:

$$tang. 2\varphi = \frac{sin. 2\varphi}{cos. 2\varphi} = \frac{2 (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)}$$

$$= \frac{\text{Doppeltes Moment der Centrifugalkraft}}{\text{Differenz der Trägheitsmomente}}.$$

Durch diese Formel ergeben sich zwei Werthe für 2φ, welche von einander um 180^0, und also auch zwei Werthe von φ, welche von einander um 90^0 abweichen; es ist deshalb nicht allein die durch diesen Winkel φ bestimmte Axe $X\overline{X}$ eine freie Axe, sondern auch die gegen sie winkelrecht gerichtete Axe $Y\overline{Y}$.

311 Von vielen Flächen und Körpern lassen sich die freien Axen ohne alle Rechnung angeben. Bei einer symmetrischen Figur ist z. B. die Symmetrieaxe eine freie Axe, das Perpendikel im Schwerpunkte die zweite, und die Axe winkelrecht gegen die Ebene der Figur die dritte freie Axe. Bei einem Rotationskörper AB, Fig. 514, ist die Rotationsaxe $Z\overline{Z}$ eine freie Axe, ebenso auch jede Normale $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ . . . zu dieser Linie durch den Schwerpunkt S. Bei einer Kugel ist jeder Durchmesser eine freie Axe, bei einem geraden, von sechs Rechtecken begrenzten Parallelepipede ABD, Fig. 515, aber sind es die drei durch den Schwerpunkt S gehenden und auf

Fig. 514.

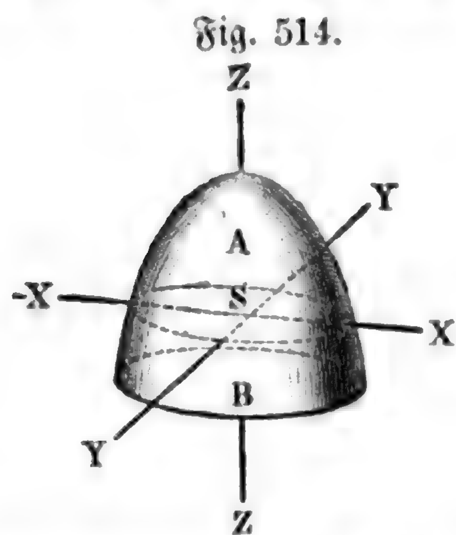
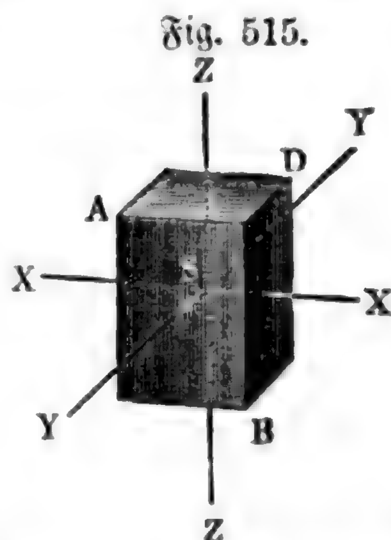


Fig. 515.

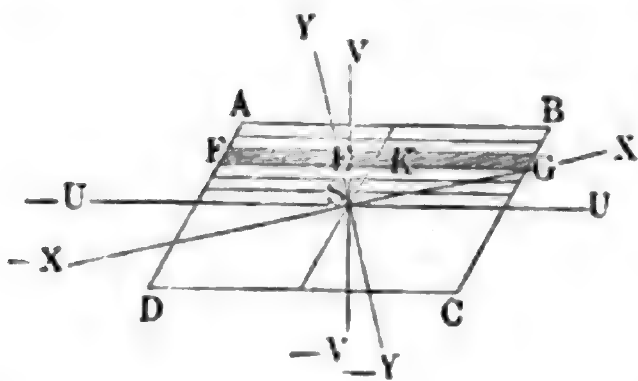


den Seitenflächen BD, AB und AD normal stehenden oder mit den Kanten parallel laufenden Axen $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ und $Z\overline{Z}$.

Bestimmen wir noch die freien Axen von einem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 516. Legen wir durch den Schwerpunkt S desselben die unter sich rechtwinkelig stehenden Coordinatenaxen $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ so, daß die eine der Seite AB des Parallelogrammes parallel läuft, und zerlegen wir das Parallelogramm durch Parallellinien in $2n$ gleiche

Streifen, wie z. B. FG. Ist nun die eine Seite $AB = 2a$, die andere Seite $AD = 2b$, und der spitze Winkel ADC zwischen je zwei Seiten, $= \alpha$, so erhalten wir für den um $SE = x$ von $U\overline{U}$ abstehenden Streifen FG die Länge des einen Theiles EG,

Fig. 516.



$= KG + EK = a + x\, cotg.\, \alpha$,

sowie die des anderen Theiles EF

$= a - x\, cotg.\, \alpha$,

und, da $\frac{b}{n} sin.\, \alpha$ die Breite beider ist, die Inhalte dieser Streifen

$$= \frac{b sin.\alpha}{n} (a + x\, cotg.\, \alpha) \text{ und } \frac{b sin.\alpha}{n} (a - x\, cotg.\, \alpha);$$

auch folgen die Maße der Centrifugalkräfte von diesen Theilen in Hinsicht auf die Axe $V\overline{V}$:

$$= \frac{b sin.\alpha}{n} (a + x\, cotg.\, \alpha) \,.\, {}^1/_2 (a + x\, cotg.\, \alpha) = \frac{b sin.\alpha}{2n} (a + x\, cotg.\, \alpha)^2$$

und

$$\frac{b sin.\alpha}{2n} (a - x\, cotg.\, \alpha)^2,$$

sowie ihre Momente in Hinsicht auf die Axe $U\overline{U}$:

$$\frac{b sin.\alpha}{2n} (a + x\, cotg.\, \alpha)^2 x \text{ und } \frac{b sin.\alpha}{2n} (a - x\, cotg.\, \alpha)^2 x.$$

Da beide Kräfte in Hinsicht auf $V\overline{V}$ einander entgegengesetzt wirken, so giebt die Vereinigung ihrer Momente die Differenz:

$$\frac{b\, x\, sin.\, \alpha}{2n} [(a + x\, cotg.\, \alpha)^2 - (a - x\, cotg.\, \alpha)^2] = \frac{2}{n} a\, b\, x^2 \cos.\, \alpha.$$

Setzen wir in der Formel für x nach und nach $\frac{b sin.\alpha}{n}$, $\frac{2\, b\, sin.\, \alpha}{n}$, $\frac{3\, b\, sin.\, \alpha}{n}$ u. s. w. ein, und addiren wir die dadurch erhaltenen Ergebnisse, so bekommen wir das Maß für das Moment der Centrifugalkraft des halben Parallelogrammes:

$$\frac{2ab}{n} \cos.\alpha \cdot \frac{b^2 sin.\, \alpha^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = 2\, a b^3 sin.\alpha^2 \cos.\alpha \cdot \frac{n^3}{3\, n^3}$$

$$= {}^2/_3\, a\, b^3\, sin.\, \alpha^2 \cos.\, \alpha,$$

und also für das ganze Parallelogramm, oder:

$$M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots = \frac{4}{3} a b^3 sin.\, \alpha^2 cos.\, \alpha.$$

Das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe $V\overline{V}$ ist für einen Streifen FG

$$= \frac{b sin.\alpha}{n}\left(\frac{(a + x\, cotg.\, \alpha)^3}{3} + \frac{(a - x\, cotg.\, \alpha)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{2\, b\, sin.\, \alpha}{3\, n}(a^3 + 3\, a\, x^2\, cotg.\, \alpha^2) = \frac{2}{3}\frac{a\, b}{n} sin.\, \alpha\, (a^2 + 3\, x^2\, cotg.\, \alpha^2).$$

Setzt man nun für x successiv $\frac{b sin.\alpha}{n}, \frac{2\, b\, sin.\, \alpha}{n}, \frac{3\, b\, sin.\, \alpha}{n}$ u. s. w., und summirt man die sich ergebenden Werthe, so folgt das Trägheitsmoment der einen Hälfte

$$= \frac{2}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\; (a^2 + b^2 cos.\, \alpha^2),$$

und daher das des Ganzen

$$= \frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\; (a^2 + b^2 cos.\, \alpha^2).$$

In Hinsicht auf die Umdrehungsaxe $U\overline{U}$ ist hingegen das Trägheitsmoment des Parallelogrammes

$$= 4\, a\, b\, sin.\, \alpha \cdot \frac{b^2\, sin.\, \alpha^2}{3} = \frac{4}{3}\, a\, b^3\, sin.\, \alpha^3 \text{ (§. 287)};$$

es ergiebt sich daher die gesuchte Differenz der Trägheitsmomente, d. i.:

$$(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots),$$
$$= \frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\; (a^2 + b^2 cos.\, \alpha^2) - \frac{4}{3}\, a\, b^3\, sin.\, \alpha^3$$
$$= \frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\; [a^2 + b^2\, (cos.\, \alpha^2 - sin.\, \alpha^2)]$$
$$= \frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\; (a^2 + b^2 cos.\, 2\, \alpha).$$

Endlich folgt für den Winkel $USX = \varphi$, welchen die freie Axe $X\overline{X}$ mit der Coordinatenaxe $U\overline{U}$ oder der Seite AB einschließt, nach §. 310:

$$tang.\, 2\, \varphi = \frac{2\, (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)}$$
$$= \frac{2\, .\, \frac{4}{3}\, a\, b^3\, sin.\, \alpha^2\, cos.\, \alpha}{\frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\; (a^2 + b^2 cos.\, 2\, \alpha)} = \frac{b^2\, sin.\, 2\, \alpha}{a^2 + b^2\, cos.\, 2\, \alpha}.$$

Beim Rhombus ist $a = b$, daher:

$$tang.\, 2\, \varphi = \frac{sin.\, 2\, \alpha}{1 + cos.\, 2\, \alpha} = \frac{2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{1 + cos.\, \alpha^2 - sin.\, \alpha^2} = \frac{2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{2\, cos.\, \alpha^2} = tg.\, \alpha,$$

also:

$$2\, \varphi = \alpha, \text{ und } \varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

Da dieser Winkel die Richtung der Diagonale angiebt, so folgt, daß die Diagonalen freie Axen des Rhombus sind.

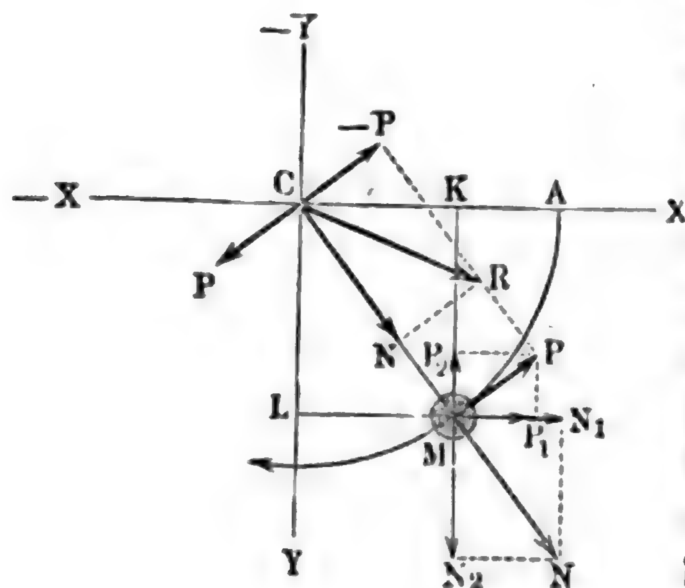
Beispiel. Bei dem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 516, messen die Seiten $AB = 2a = 16$ Zoll und $BC = 2b = 10$ Zoll, und ist der Umfangswinkel $ABC = \alpha = 60^0$, welche Richtungen haben dessen freie Axen? Es ist

$$tang.\, 2\varphi = \frac{5^2 . sin. 120^0}{8^2 + 5^2 . cos. 120^0} = \frac{25 . sin. 60^0}{64 - 25\, cos. 60^0} = \frac{25 . 0{,}86603}{64 - 25 . 0{,}5}$$
$$= 0{,}42040 = tang. 22^0{,}48', \text{ oder } tang. 202^0{,}48'.$$

Hiernach folgen $\varphi = 11^0{,}24'$ und $101^0{,}24'$ als Neigungswinkel der zwei ersten freien Axen gegen die Seite AB. Die dritte freie Axe steht auf der Ebene des Parallelogrammes rechtwinkelig. Diese Winkel bestimmen auch die freien Axen eines geraden Parallelepipedes mit rhomboidalen Grundflächen.

Wirkung auf die Umdrehungsaxe. Wenn sich ein materieller Punkt M, Fig. 517, ungleichförmig um eine feste Axe C dreht, so hat dieselbe nicht bloß die Centrifugalkraft, sondern auch die Kraft der Trägheit dieses Punktes auszuhalten. §. 31

Fig. 517.



Während die Centrifugalkraft radial auswärts wirkt, hat natürlich die Kraft der Trägheit eine tangentiale Richtung, und zwar entweder der der Umdrehungsbewegung entgegengesetzt, oder mit derselben zusammenfallend, je nachdem die Acceleration dieser Bewegung eine positive oder eine negative (Retardation) ist. Man kann daher auch annehmen, daß die Centrifugalkraft $\overline{MN} = \overline{CN} = N$ unmittelbar in der Axe C angreife und daß die Kraft der Trägheit $\overline{MP} = -P$ aus einem Kräftepaare $(P, -P)$ und einer Axenkraft $\overline{CP} = -P$ bestehe, und folglich die ganze Axenkraft $\overline{CR} = R$ durch die Diagonale eines aus N und $-P$ construirten rechtwinkeligen Parallelogrammes bestimmen.

Ist r die Entfernung CM der Masse M von der Umdrehungsaxe C, sowie ω die Winkelgeschwindigkeit und $\varkappa$ die Winkelacceleration, so hat man nach §§. 302 und 282:

$$N = \omega^2 M r$$

und

$$P = \varkappa M r,$$

daher die gesuchte Mittelkraft:

$$R = \sqrt{N^2 + P^2} = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} . M r,$$

und für den Winkel $RCN = \varphi$, um welchen die Richtung dieser Kraft von der Richtung CM der Centrifugalkraft abweicht,

$$tang.\, \varphi = \frac{-P}{N} = -\frac{P}{N} = -\frac{\varkappa}{\omega^2}.$$

Da in Folge der Acceleration $\varkappa$, ω veränderlich ist, so fällt natürlich auch die Centrifugalkraft N und die Mittelkraft R variabel aus.

Um die Centrifugal- und Trägheitskräfte eines Systems von Massen M_1, M_2 u. s. w. zu vereinigen, zerlegt man diese Kräfte nach zwei Axenrichtungen $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$ in Seitenkräfte, vereinigt hierauf die in einer Axenrichtung wirkenden Kräfte durch algebraische Addition, und setzt endlich die hieraus resultirenden zwei Kräfte wie oben zu einer Mittelkraft zusammen. Sind x und y die Coordinaten CK und CL des materiellen Punktes M_1 in Hinsicht auf das Axensystem $\overline{X}X$, $\overline{Y}Y$, so hat man die beiden Componenten der Centrifugalkraft N:

$$N_1 = \frac{x}{r} N = \omega^2 M x \text{ und}$$

$$N_2 = \frac{y}{r} N = \omega^2 M y,$$

dagegen die der Trägheit:

$$P_1 = \frac{y}{r} P = \varkappa M y \text{ und}$$

$$P_2 = \frac{x}{r} P = \varkappa M x;$$

es folgt daher die Gesammtkraft in der Axe $\overline{X}X$:

$$Q = N_1 + P_1 = \omega^2 M x + \varkappa M y,$$

und die in der Axe $\overline{Y}Y$:

$$R = N_2 - P_2 = \omega^2 M y - \varkappa M x.$$

Hat man es nun mit einem sich um eine feste Axe C, Fig. 518, drehenden Systeme von materiellen Punkten oder Massen M_1, M_2 u. s. w. zu thun, deren Coordinaten in Hinsicht auf eine Coordinataxe $\overline{X}X$:

$$CK_1 = x_1,\ CK_2 = x_2 \text{ u. s. w.},$$

und in Hinsicht auf die andere Coordinataxe $\overline{Y}Y$:

$$CL_1 = y_1,\ CL_2 = y_2 \text{ u. s. w.}$$

sind, so fällt folglich die Gesammtkraft in der ersten Axe:

$$Q = \omega^2 M_1 x_1 + \varkappa M_1 y_1 + \omega^2 M_2 x_2 + \varkappa M_2 y_2 + \cdots, \text{ d. i.:}$$

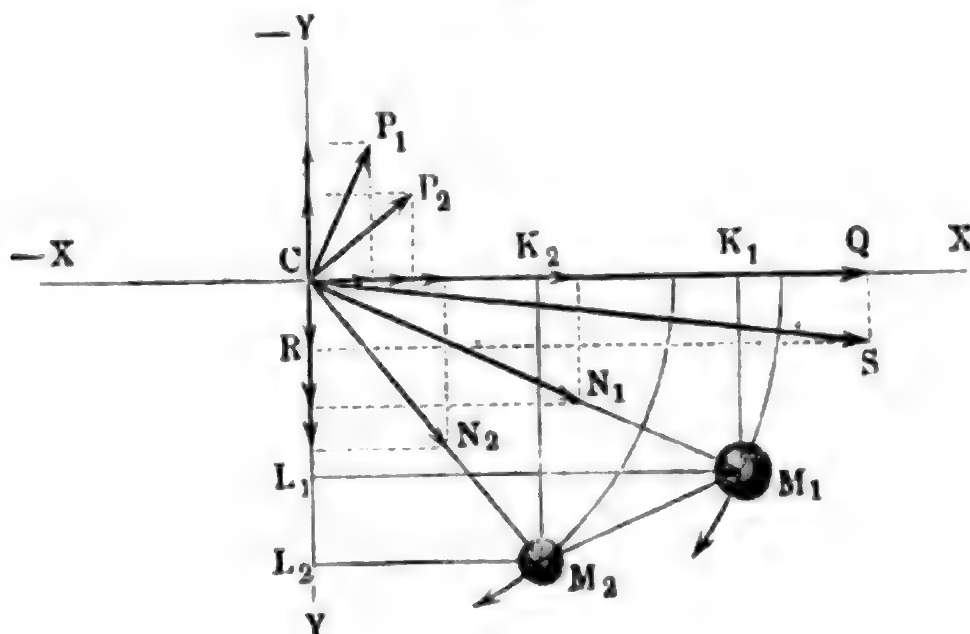
$$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots),$$

und dagegen die in der anderen Axe:

$$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) \text{ aus.}$$

Bezeichnet man endlich die ganze Masse $M_1 + M_2 + \cdots$ durch M und die Coordinaten ihres Schwerpunktes in Hinsicht auf die Axen $\overline{X}\,X$ und $\overline{Y}\,Y$ durch x und y, so hat man (siehe §. 305)

Fig. 518.



$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = M x \text{ und}$$
$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = M y;$$

daher einfacher:

$$Q = \omega^2 M x + \varkappa M y \text{ und}$$
$$R = \omega^2 M y - \varkappa M x.$$

Aus Q und R folgt nun die Mittelkraft:

$$S = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

sowie für den Richtungswinkel $X C S = \varphi$ derselben:

$$tang.\, \varphi = \frac{R}{Q}.$$

Da $M x$ und $M y$ die statischen Momente des Schwerpunktes sind, so folgt, daß man bei Bestimmung des Axendruckes (S) eines in einer und derselben Umdrehungsebene befindlichen Massensystemes die ganze Masse in dem Schwerpunkte des Systemes vereinigt annehmen könne, und da die Entfernung des Schwerpunktes des Massensystemes von der Umdrehungsaxe,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

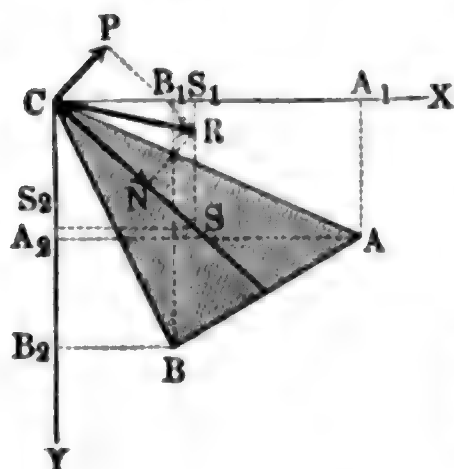
ist, so hat man auch

$$S = \sqrt{[(\omega^2 M x + \varkappa M y)^2 + (\omega^2 M y - \varkappa M x)^2]}$$
$$= M \sqrt{[\omega^4 (x^2 + y^2) + \varkappa^2 (x^2 + y^2)]}$$
$$= M \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} \,.\, M r.$$

Anmerkung. Für ein Dreieck $A B C$, Fig. 519 (a. f. S.), welches sich um seinen Eckpunkt C dreht, und dessen Eckpunkte A und B durch die Coordinaten

(x_1, y_1) und (x_2, y_2) bestimmt sind, hat man nach §. 112 die Coordinaten seines Schwerpunktes S:

Fig. 519.



$$CS_1 = x = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

und

$$CS_2 = y = \frac{y_1 + y_2}{3},$$

und die Masse, wenn man dieselbe durch den Flächeninhalt mißt,

$$M = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Auch läßt sich das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Umdrehungsaxe C durch den Ausdruck

$$W = \frac{M}{6}\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2} + \frac{y_1^3 - y_2^3}{y_1 - y_2}\right)$$

$$= \frac{M}{6}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

bestimmen.

Diese Formeln finden auch ihre Anwendung auf ein gerades Prisma, dessen Grundfläche das Dreieck ABC ist.

Beispiel. Ein gerades Prisma mit der dreiseitigen Grundfläche ABC soll durch ein constant wirkendes Kräftepaar so schnell um die Seitenkante C gedreht werden, daß es im Verlaufe von $t = 1$ Secunde, $u = 5/2$ Umdrehungen macht, und man soll nicht allein das Moment dieses Kräftepaares, sondern auch noch die Wirkung dieser Bewegung auf die Axe C bestimmen. Es sei die Basis ABC dieses Körpers durch die Coordinaten

$$x_1 = 1{,}5,\ y_1 = 0{,}5;\ x_2 = 0{,}4,\ y_2 = 1{,}0 \text{ Fuß}$$

bestimmt, ferner die Höhe oder Länge desselben $l = 2$ Fuß, und seine Dichtigkeit $\gamma = 30$ Pfund. Hieraus berechnet sich zunächst der Inhalt der Basis:

$$F = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} = \frac{1{,}5 . 1{,}0 - 0{,}4 . 0{,}5}{2} = \frac{1{,}3}{2} = 0{,}65 \text{ Quadratfuß},$$

und daher die Masse des ganzen Körpers:

$$M = \frac{Fl\gamma}{g} = 0{,}032 . 0{,}65 . 2 . 30 = 1{,}248 \text{ Pfund}.$$

Nun ist ferner

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 2{,}25 + 0{,}60 + 0{,}16 = 3{,}01,$$
$$y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 = 0{,}25 + 0{,}50 + 1{,}00 = 1{,}75;$$

daher folgt das Trägheitsmoment des Körpers:

$$W = (3{,}01 + 1{,}75)\frac{M}{6} = 4{,}76 . \frac{1{,}248}{6} = 0{,}99008 \text{ Fußpfund}.$$

Da in Folge der Beständigkeit des Umdrehungskräftepaares die Umdrehungsbewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so folgt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit t von 1 Secunde (s. §. 10):

$$\omega = \frac{2s}{t} = \frac{2 . 2\pi u}{t} = \frac{2 . 2 . 5\pi}{2} = 31{,}416 \text{ Fuß},$$

und es ist daher die erforderliche mechanische Arbeit:

$$A = \frac{1}{2}\omega^2 T = \frac{1}{2}(31,416)^2 . 0,99008 = 488,6 \text{ Fußpfund}.$$

Die **Winkelacceleration** ist

$$\varkappa = \frac{\omega}{t} = \frac{31,416}{1} = 31,416 \text{ Fuß},$$

daher das **Moment des Kräftepaares**:

$$Pa = \varkappa W = 31,416 . 0,99008 = 31,10 \text{ Fußpfund}.$$

Die Abstände des Schwerpunktes S der Basis von den Coordinataren $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$ sind

$$x = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{1,5 + 0,4}{3} = 0,6333 \text{ und}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{3} = \frac{0,5 + 1,0}{3} = 0,5000,$$

folglich ergiebt sich der Abstand des Schwerpunktes von der Are:

$$CS = r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0,6511.$$

Ferner ist

$$\omega^4 = 31,416^4 = 974090 \text{ und}$$
$$\varkappa^2 = 31,416^2 = 987;$$

daher folgt:

$$\sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} = \sqrt{975077} = 987,36,$$

und es wächst demnach der **Arendruck** während der beschleunigten Umdrehung des Körpers, von

$$P = \varkappa M r = 31,416 . 1,248 . 0,6511 = 25,53 \text{ Pfund}$$

bis

$$R = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} . M r = 987,46 . 0,8126 = 802,41 \text{ Pfund}.$$

Wenn nach Verlauf von einer Secunde Zeit das Kräftepaar zu wirken aufhört, so nimmt der Körper eine gleichförmige Umdrehungsbewegung an, und es besteht von nun an der von der Are auszuhaltende Druck nur in der Centrifugalkraft:

$$N = \omega^2 M r = 986,96 . 0,8126 = 802,00 \text{ Pfund}.$$

Der von 25,53 bis 802,41 allmälig anwachsende Arendruck ist anfangs rechtwinkelig gegen die centrale Schwerlinie CS gerichtet, nähert sich aber während des Wachsens der Geschwindigkeit dieser Linie immer mehr und mehr, so daß er am Ende der Zeit $t = 1$ Secunde, nur noch um einen Winkel φ von dieser Linie abweicht, welcher durch

$$tang. \varphi = \frac{P}{N} = \frac{25,53}{802,00} = 0,03183$$

bestimmt ist und hiernach den Werth $\varphi = 1^0,49'$ hat. Wenn das Kräftepaar zu wirken aufhört, so fällt natürlich die Richtung der Arenkraft $N = 802,00$ Pfund ganz in die centrale Schwerlinie CS, und dreht sich folglich auch mit dieser Linie im Kreise herum.

Wenn man statt des Kräftepaares nur eine Kraft P am Hebelarme a auf den Körper wirken läßt, so gesellt sich zu dem obigen Arendrucke noch ein dieser Kraft gleicher Druck P.

§. 313 **Mittelpunkt des Stosses.** Befinden sich die einzelnen Theile M_1, $M_2 \cdots$, Fig. 520, eines rotirenden Massensystemes nicht in einer und derselben Umdrehungsebene, so fallen die Richtungen der Kräfte

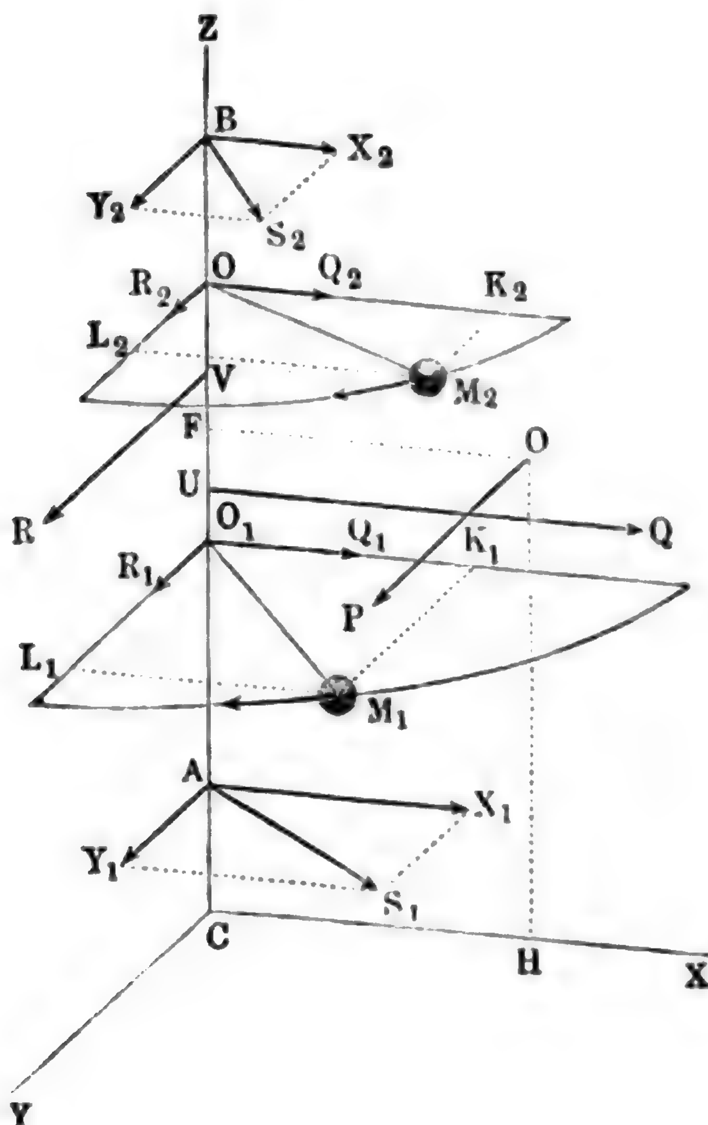


Fig. 520.

$Q_1 = \omega^2 M_1 x_1 + \varkappa M_1 y_1$,
$Q_2 = \omega^2 M_2 x_2 + \varkappa M_2 y_2$ ꝛc.

nicht mehr in die Coordinatenaxe $\overline{X}X$, sondern in die Coordinatenebene XZ und ebenso die der Kräfte:

$R_1 = \omega^2 M_1 y_1 - \varkappa M_1 x_1$,
$R_2 = \omega^2 M_2 y_2 - \varkappa M_2 x_2$ ꝛc.

nicht mehr in die Coordinatenaxe $\overline{Y}Y$, sondern in die Coordinatenebene YZ. Es lassen sich nun zwar die Kräftesysteme Q_1, Q_2 u. s. w. und R_1, R_2 u. s. w. auf die bekannte Weise (§. 305) zu den Mittelkräften:

$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$ und
$R = R_1 + R_2 + \cdots$

vereinigen, da aber ihre Angriffslinien UQ und VR im Allgemeinen nicht in eine Ebene fallen, sondern die Drehungsaxe CZ in zwei verschiedenen Punkten U und V schneiden, so ist eine weitere Vereinigung dieser Kräfte zu einer Mittelkraft nicht, sondern nur eine Zurückführung derselben auf eine Kraft und ein Kräftepaar möglich. Die Seitenkräfte Q und R sind natürlich wie oben:

$$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 Mx + \varkappa My, \text{ und}$$
$$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$$
$$= \omega^2 My - \varkappa Mx,$$

wenn wieder M die ganze Masse $M_1 + M_2 + \cdots$ und x und y die Abstände ihres Schwerpunktes S von den Coordinatebenen YZ und XZ bezeichnen.

Setzen wir ferner die Abstände der Massen M_1, M_2 u. s. w. von der auf der Umdrehungsaxe CZ rechtwinkelig stehenden Umdrehungsebene XY, z_1,

z_2 u. s. w., so erhalten wir (wie in §. 305) für die Abstände der Angriffspunkte U und V der Kräfte Q und R von dem Anfangspunkte C:

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots}{Q_1 + Q_2 + \cdots}$$
$$= \frac{\omega^2 (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)}$$

und

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots}{R_1 + R_2 + \cdots}$$
$$= \frac{\omega^2 (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)}.$$

Wird die Axe CZ in zwei Punkten A und B (Zapfenlagern) festgehalten, welche um die Coordinaten $CA = l_1$ und $CB = l_2$ vom Anfangspunkte abstehen, so zerlegt sich die Kraft Q in die Seitenkräfte:

$$X_1 = \left(\frac{l_2 - u}{l_2 - l_1}\right) Q \text{ und } X_2 = \left(\frac{u - l_1}{l_2 - l_1}\right) Q,$$

und die Kraft R in die Seitenkräfte:

$$Y_1 = \left(\frac{l_2 - v}{l_2 - l_1}\right) R \text{ und } Y_2 = \left(\frac{v - l_1}{l_2 - l_1}\right) R,$$

und es ist nun der Druck im Zapfen A:

$$S_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2},$$

und der im Zapfen B:

$$S_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}.$$

Wird die Acceleration der Umdrehungsbewegung nicht durch ein Kräftepaar, dessen Moment Pa ist, sondern durch eine excentrische Kraft P am Hebelarme a hervorgebracht, so tritt noch ein dieser Kraft P gleicher Druck zu den Axenkräften Q und R hinzu. Lassen wir diese Kraft P parallel zur Axe CY, und im Abstande $FO = a$ von der Umdrehungsaxe, rechtwinkelig gegen die Ebene XZ wirken, und nehmen wir noch an, daß ihre Angriffslinie um $CF = HO = b$ von der Coordinatebene XY abstehe, so wird durch dieselbe nur die Kraft R um P vergrößert, und zwar der Theil Y_1 im Stützpunkte A um

$$Y_3 = \left(\frac{l_2 - b}{l_2 - l_1}\right) P,$$

und der Theil Y_2 im Stützpunkte B um

$$Y_4 = \left(\frac{b - l_1}{l_2 - l_1}\right) P.$$

Wenn $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = 0$, sowie
$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0$, ferner:
$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0$ und
$M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0$,

und folglich die Umdrehungsaxe CZ eine freie Axe ist, so fallen nicht allein die Kräfte Q und R, sondern auch ihre Momente Qu und Rv einzeln Null aus, und es ist daher (vergl. §. 309) zu folgern, daß bei Umdrehung eines Massensystemes um eine freie Axe sich nicht allein die Centrifugalkräfte, sondern auch die Trägheitskräfte einander das Gleichgewicht halten.

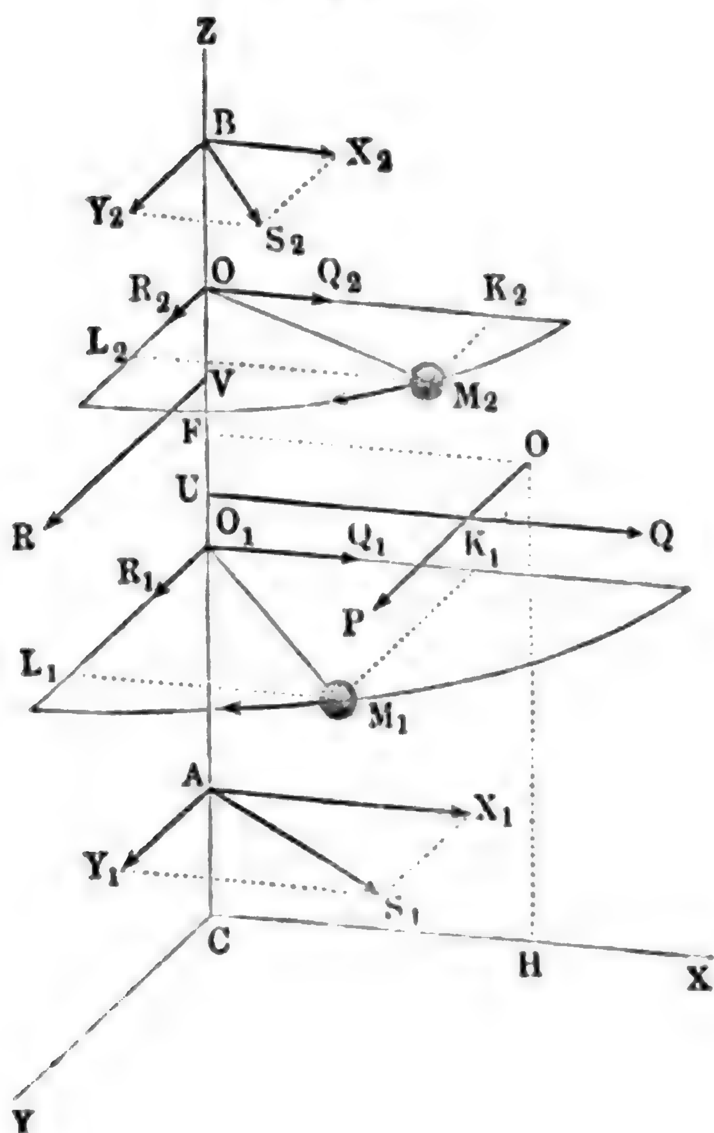
Nehmen wir an, daß sich das Massensystem in Ruhe befindet, daß also $\omega =$ Null ist, oder sehen wir von der Wirkung der Centrifugalkräfte auf die Umdrehungsaxe ab, so erhalten wir einfacher die Axendrücke:

$$Q = \varkappa M y = \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots),$$
$$R = -\varkappa M x = -\varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots), \text{ sowie}$$
$$Q u = \varkappa (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) \text{ und}$$
$$R v = -\varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots).$$

Wenn die Ebene XZ Symmetrieebene und folglich auch Schwerebene des ganzen Massensystemes ist, so fällt

$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0 \text{ und}$$
$$M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0,$$

Fig. 521.



und daher auch

$$Q = 0,$$

sowie

$$Q u = 0$$

aus.

Machen wir nun noch die Forderung, daß die Umdrehungskraft:

$$P = \frac{\varkappa W}{a}$$

durch die Trägheitskraft R aufgehoben wird, ohne eine Wirkung auf die Umdrehungsaxe zurückzulassen, so können wir folglich:

$$P + R = 0$$

und

$$Pb + Rv = 0,$$

d. i.:

$$\frac{\varkappa W}{a} - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) = 0, \text{ sowie}$$

$$\frac{\varkappa W b}{a} - \varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) = 0$$

setzen, und es folgt hiernach:

$$a = \frac{W}{M x} = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \text{ und}$$

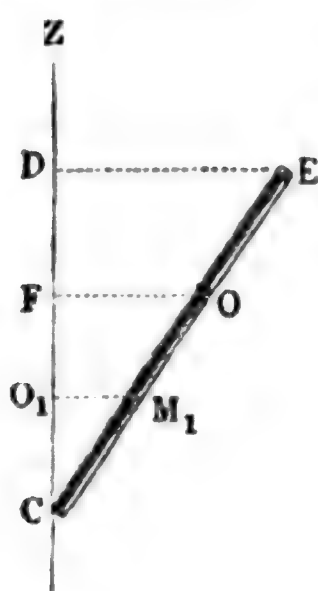
$$b = \left(\frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{W}\right) a = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

$$= \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Diese Coordinaten bestimmen einen Punkt O, welcher der **Mittelpunkt des Stoßes** (franz. centre de percussion; engl. centre of percussion) genannt wird, weil jede durch denselben gehende und gegen die durch die Umdrehungs- oder feste Axe CZ gehende Symmetrieebene XZ des Körpers rechtwinkelig gerichtete Stoßkraft P beim Zusammenstoß dieses Körpers mit einem anderen Körper von der Trägheit der Masse des ersteren aufgehoben wird, ohne eine Wirkung auf die Axe des Körpers zurück zu lassen oder einen Druck auf dieselbe auszuüben.

Beispiele. 1) Für eine **gerade Linie** oder eine überall gleich dicke Stange CE, Fig. 522, welche an einem Ende C mit der Umdrehungsaxe CZ unter einem bestimmten Winkel ZCE zusammenstößt, ist, wenn M die Masse derselben und r den Abstand DE ihres zweiten Endes E von der Umdrehungsaxe bezeichnet, das Trägheitsmoment:

Fig. 522.



$$W = M k^2 = \tfrac{1}{3} M r^2 \text{ (s. §. 286)},$$

dagegen das statische Moment:

$$M x = \tfrac{1}{2} M r,$$

und endlich das Centrifugalmoment, da, wenn h die Projection CD der Stangenlänge CE in der Umdrehungsaxe CZ bezeichnet,

$$\frac{C O_1}{O_1 M_1} = \frac{z_1}{x_1} = \frac{h}{r},$$

also:

$$M_1 x_1 z_1 = \frac{h}{r} M_1 x_1^2,\ M_2 x_2 z_2 = \frac{h}{r} M_2 x_2^2$$

u. s. w. ausfällt:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = \frac{h}{r}(M_1 x_1^2 + M_2 x_2^2 + \cdots) = \frac{h}{r} \cdot \tfrac{1}{3} M r^2 = \tfrac{1}{3} M h r.$$

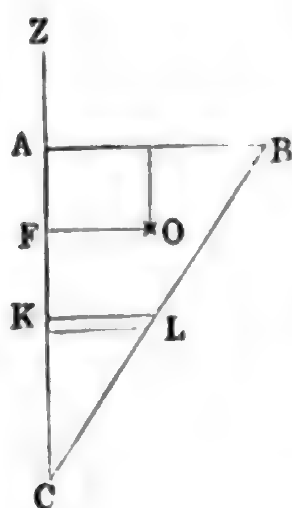
Daher sind die Coordinaten des Stoßmittelpunktes O dieser Stange durch

$$F O = a = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{\tfrac{1}{3} M r^2}{\tfrac{1}{2} M r} = \tfrac{2}{3} r \text{ und}$$

$$C F = b = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{\tfrac{1}{3} M h r}{\tfrac{1}{2} M r} = \tfrac{2}{3} h$$

bestimmt, und es ist demnach dieser Mittelpunkt um zwei Drittel der Stangenlänge CE vom Ende C und um ein Drittel derselben vom Ende E der Stange entfernt.

Fig. 523.



2) Das Trägheitsmoment einer rechtwinkeligen Dreiecksfläche ABC, Fig. 523, welche sich um eine Kathete CA dreht, ist, wenn man deren Masse durch M, und deren Katheten CA und AB durch h und r bezeichnet:

$$T = \frac{hr^3}{12} = \frac{hr}{2} \cdot \frac{r^2}{6} = \frac{1}{6} Mr^2 \text{ (s. §. 229)},$$

und das statische Moment derselben, da ihr Schwerpunkt S um $\frac{r}{3}$ von der Axe CA absteht,

$$Mx = \frac{Mr}{3},$$

folglich ist der Abstand des Stoßmittelpunktes O dieser Fläche von eben dieser Axe:

$$FO = a = \frac{\frac{1}{6} Mr^2}{\frac{1}{3} Mr} = \frac{1}{2} r.$$

Für ein streifenförmiges Element KL des Dreieckes, welches die Länge x und die Breite $\frac{h}{n}$ hat, und um $CK = z$ von der Spitze C absteht, ist das Centrifugalmoment:

$$Mxz = \frac{h}{n} x \cdot \frac{1}{2} xz,$$

oder, da $\frac{x}{z} = \frac{r}{h}$, also $x = \frac{r}{h} z$ ist,

$$Mxz = \frac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 z^3.$$

Nimmt man nun für z nach und nach $1\left(\frac{h}{n}\right)$, $2\left(\frac{h}{n}\right)$, $3\left(\frac{h}{n}\right) \cdots n\left(\frac{h}{n}\right)$, und addirt die dadurch erhaltenen Werthe für Mxz, so ergiebt sich das ganze Centrifugalmoment:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = \frac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) \left(\frac{h}{n}\right)^3$$
$$= \frac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{n^4}{4} \left(\frac{h}{n}\right)^3 = \frac{1}{8} r^2 h^2 = \frac{1}{4} \frac{rh}{2} rh$$
$$= \frac{1}{4} Mrh,$$

und daher der Abstand des Stoßmittelpunktes O vom Eckpunkt C:

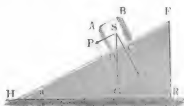
$$CF = b = \frac{\frac{1}{4} Mrh}{\frac{1}{3} Mr} = \frac{3}{4} h.$$

Drittes Capitel.

Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Wegen.

Gleiten auf der geneigten Ebene. Ein schwerer Körper kann auf mancherlei Weise verhindert werden, frei zu fallen; betrachten wir indessen im Folgenden nur zwei Fälle, nämlich den Fall, wenn der Körper von einer geneigten Ebene unterstützt wird, und den Fall, wenn er um eine horizontale Axe drehbar ist. In beiden Fällen sind die Wege des Körpers in einer Verticalebene enthalten. Befindet sich der Körper auf einer geneigten Ebene, so zerlegt sich das Gewicht desselben in zwei Seitenkräfte, von denen die eine normal gegen die Ebene gerichtet ist und von dieser aufgenommen wird, und die andere parallel zur Ebene und auf den Körper als bewegende Kraft wirkt. Ist G das Gewicht des Körpers $ABCD$, Fig. 524, und α die Neigung der schiefen Ebene FHR gegen den Horizont, so hat man nach §. 146 jenen Normaldruck: §. 314

Fig. 524.



$$N = G \cos. \alpha,$$

und diese bewegende Kraft:

$$P = G \sin. \alpha.$$

Die Bewegung des Körpers kann nun entweder gleitend oder wälzend sein; berücksichtigen wir zunächst nur die erstere. In diesem Falle nehmen alle Theile des Körpers gleichen Antheil an der Bewegung des Körpers, und haben daher auch eine gemeinschaftliche Acceleration p, die sich durch die bekannte Formel:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}, = \frac{P}{M} = \frac{G \sin. \alpha}{G} \cdot g = g \sin. \alpha$$

ausdrücken läßt. Es ist also

$$p : g = \sin. \alpha : 1,$$

d. h. die Beschleunigung eines Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich zur Beschleunigung des freien Falles wie der Sinus des Fallwinkels der schiefen Ebene zu Eins. Wegen der hinzutretenden Reibung gewährt aber diese Formel selten hinreichende Genauigkeit; es ist daher nothwendig, in vielen Fällen der Anwendung auch auf diese Rücksicht zu nehmen.

Bewegt sich ein Körper auf einer krummen Fläche, so ist die Acceleration veränderlich und an jeder Stelle gleich der Acceleration, welche der Berührungsebene an die krumme Fläche entspricht.

§. 315 Gleitet ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit Null auf einer geneigten Ebene ohne Reibung herab, so ist nach §. 11 die Endgeschwindigkeit nach t Secunden:

$$v = g\ sin.\alpha\,.\,t = 31{,}25\ sin.\alpha\,.\,t \text{ Fuß} = 9{,}81\ sin.\alpha\,.\,t \text{ Meter},$$

und der zurückgelegte Raum:

$$s = {}^1/_2\, g\ sin.\alpha\,.\,t^2 = 15{,}625\ sin.\alpha\,.\,t^2 \text{ Fuß} = 4{,}905\ sin.\alpha\,.\,t^2 \text{ Meter}.$$

Beim freien Fall ist $v_1 = g\,t$ und $s_1 = {}^1/_2\, g\,t^2$, es läßt sich daher setzen:

$$v : v_1 = s : s_1 = sin.\alpha : 1,$$

d. h. **es verhalten sich die Endgeschwindigkeit und der Raum beim Fallen auf der schiefen Ebene zur Endgeschwindigkeit und dem Raume beim freien Fallen, wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene zur Einheit.**

In dem rechtwinkeligen Dreiecke FGH, Fig. 525, mit verticaler Hypotenuse FG ist die Kathete:

Fig. 525.

$$FH = FG\,sin.FGH = FG\,.\,sin.FHR = \overline{FG}\,sin.\alpha,$$

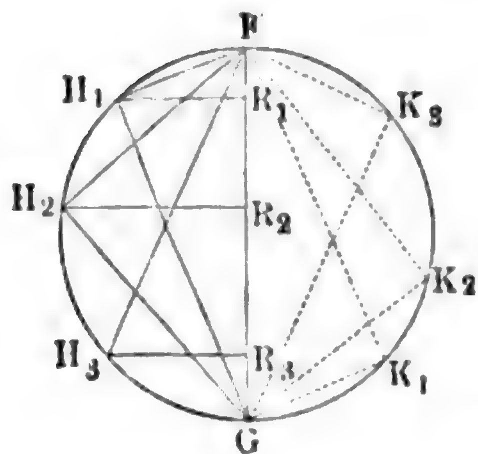
wenn α die Neigung FHR dieser Kathete gegen den Horizont bezeichnet; es ist daher:

$$FH : FG = sin.\alpha : 1,$$

es durchläuft also ein Körper die verticale Hypotenuse FG und die geneigte Kathete FH in einer und derselben Zeit. Es läßt sich hiernach zu dem Fallraum auf der schiefen Ebene der entsprechende Raum des freien Falles, und zu dem letzteren der erstere durch Construction finden.

Da die auf dem Durchmesser FG, Fig. 526, stehenden Peripheriewinkel FH_1G, FH_2G u. s. w. lauter rechte sind, so schneidet der Halbkreis über FG von allen in F anfangenden schiefen Ebenen die mit dem Durchmesser, und deshalb auch unter sich, in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume FH_1, FH_2 u. s. w. ab. Man sagt daher: **die Sehnen eines Kreises und der Durchmesser desselben werden gleichzeitig oder isochron durchfallen.** Uebrigens gilt dieser Isochronismus nicht allein für die Sehnen FH_1, FH_2 u. s. w., welche im höchsten Punkte F des Kreises anfangen, sondern auch für die Sehnen K_1G, K_2G u. s. w., welche in dem untersten Punkte

Fig. 526.



G desselben auslaufen; denn es lassen sich durch F Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. ziehen, welche mit den Sehnen GH_1, GH_2 u. s. w. gleiche Lage und gleiche Länge haben.

Aus der Gleichung §. 316

$$s = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2g \, . \, sin. \alpha}$$ für den durchlaufenen Raum folgt:

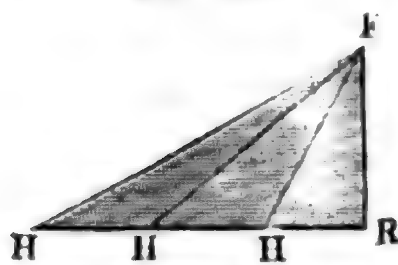
$$s \, sin. \alpha = \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt:

$$v = \sqrt{2 g s \, sin. \alpha}.$$

Nun ist aber $s \, sin. \alpha$ die Höhe FR (Fig. 527) der schiefen Ebene oder die Verticalprojection h des Weges $FH = s$ auf derselben; es sind daher die Endgeschwindigkeiten von Körpern, welche mit Null Anfangsgeschwindigkeit von verschieden geneigten, gleich hohen Ebenen FH, FH_1 u. s. w. herabfallen, unter sich gleich und auch gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er von der Höhe FR dieser Ebenen frei herabfällt. (Hiermit ist sowohl §. 43, als auch §. 85 zu vergleichen).

Fig. 527.



Aus der Gleichung

$$s = \tfrac{1}{2} g \, sin. \alpha \, . \, t^2$$

folgt die Formel für die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g sin. \alpha}} = \frac{1}{sin. \alpha} \sqrt{\frac{2 s \, sin. \alpha}{g}} = \frac{1}{sin. \alpha} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Für den freien Fall durch die Höhe $FR = h$ ist aber die Zeit:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

es ergiebt sich demnach:

$$t : t_1 = 1 : sin. \alpha = s : h = FH : FR,$$

es verhält sich also die Zeit des Fallens auf der schiefen Ebene zur Zeit des freien Falles von der Höhe dieser Ebene wie die Länge zur Höhe der schiefen Ebene.

Beispiele. 1) Von einer schiefen Ebene FH, Fig. 528 (a. f. S.), ist der Anfangspunkt F gegeben und der Endpunkt H in einer gegebenen Linie AB so zu bestimmen, daß der Fall auf dieser Ebene in der kürzesten Zeit erfolge. Zieht man durch F die Horizontale FG bis zum Durchschnitt mit AB, und macht man $GH = GF$, so erhält man in H den gesuchten Punkt, und also in FH ie Ebene der kürzesten Fallzeit; denn führt man durch F und H einen sich an

FG und FH tangential anlegenden Kreis, so sind dessen isochron durchlaufene Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. kürzer als die Längen FH_1, FH_2 u. s. w. der entsprechenden schiefen Ebenen; es ist folglich auch die Fallzeit für jene Sehnen kleiner, als für diese Längen, und die Fallzeit für die schiefe Ebene FH, welche mit einer Sehne zusammenfällt, die kürzeste.

Fig. 528.

2) Man soll die Neigung derjenigen schiefen Ebene FH, Fig. 527, angeben, von welcher ein Körper in derselben Zeit herabfällt, als wenn er erst von der Höhe FR frei herabfiele und dann mit der erlangten Geschwindigkeit horizontal bis H fortginge. Die Zeit zum Herabfallen von der senkrechten Höhe $FR = h$ ist:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

und die erlangte Geschwindigkeit in R ist:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Tritt nun beim Uebergange aus der verticalen Bewegung in die horizontale kein Geschwindigkeitsverlust ein, was erfolgt, wenn die Ecke R abgerundet ist, so wird der Weg $RH = h\, cotg.\, \alpha$ gleichförmig und in der Zeit

$$t_2 = \frac{h\, cotg.\, \alpha}{v} = \frac{h\, cotg.\, \alpha}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2}\, cotg.\, \alpha \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

durchlaufen. Die Fallzeit für die schiefe Ebene ist:

$$t = \frac{1}{sin.\, \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

setzen wir daher $t = t_1 + t_2$, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{sin.\, \alpha} = 1 + \frac{1}{2}\, cotg.\, \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{tang.\, \alpha}{sin.\, \alpha} = tang.\, \alpha + \frac{1}{2},$$

deren Auflösung auf $tang.\, \alpha = \frac{3}{4}$ führt. In der entsprechenden schiefen Ebene verhält sich hiernach die Höhe zur Basis zur Länge wie 3 zu 4 zu 5, und es ist der Neigungswinkel $\alpha = 36^0\, 52'\, 11''$.

3) Bei einer schiefen Ebene von der gegebenen Basis a ist die Zeit zum Herabgleiten:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g sin.\, \alpha}} = \sqrt{\frac{2a}{g\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}} = \sqrt{\frac{4a}{g sin.\, 2\alpha}};$$

sie fällt daher am kleinsten aus, wenn $sin.\, 2\alpha$ am größten, d. i. $= 1$, also $2\alpha^0 = 90^0$, oder $\alpha^0 = 45^0$ ist. Von Dächern mit 45^0 Neigung fließt daher das Wasser in der kürzesten Zeit herab.

317 Geht die Bewegung auf einer schiefen Ebene mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c vor sich, so hat man die in §. 13 und §. 14 gefundenen Formeln in Anwendung zu bringen. Hiernach ist für einen auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper die Endgeschwindigkeit:

$$v = c - g\, sin.\, \alpha\, .\, t,$$

und der zurückgelegte Weg:

$$s = ct - \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2,$$

dagegen für den von der schiefen Ebene herabsinkenden Körper:

$$v = c + g \sin. \alpha . t \text{ und } s = ct + \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2.$$

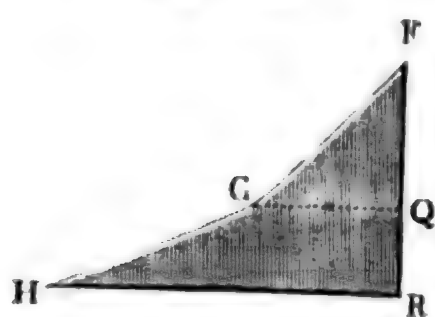
Uebrigens gilt in beiden Fällen der Bewegung die Formel:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2 g \sin. \alpha}, \text{ oder } s \sin. \alpha = h = \frac{v^2 - c^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist also stets die Verticalprojection (h) des auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weges (s) gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Stoßen zwei schiefe Ebenen FGQ und GHR, Fig. 529, in einer abgerundeten Kante an einander, so findet beim Uebergang des fallenden Körpers von der einen Ebene zur anderen kein Stoß, und deshalb auch kein Geschwindigkeitsverlust statt; es gilt deshalb auch für das Herabfallen eines Körpers von dieser Verbindung zweier Ebenen die Regel: Fallhöhe (FR) gleich Differenz der Geschwindigkeitshöhen. Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Regel auch bei dem Sinken und Steigen auf einer derartigen Verbindung von beliebig vielen Ebenen, sowie beim Fallen und Aufsteigen auf krummen Linien oder Flächen ihre Richtigkeit behält (vergl. §. 85).

Fig. 529.



Beispiele. 1) Ein Körper steigt mit 21 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene von 22° Neigung hinauf, wie groß ist seine Geschwindigkeit und sein zurückgelegter Weg nach $1\frac{1}{2}$ Secunden?

Es ist die Geschwindigkeit:

$$v = 21 - 31{,}25 . \sin. 22^0 . 1{,}5 = 21 - 31{,}25 . 0{,}3746 . 1{,}5 = 21 - 17{,}56 = 3{,}44 \text{ Fuß},$$

und der Weg:

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t = \frac{21 + 3{,}44}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24{,}44 . 3}{4} = 18{,}33 \text{ Fuß}.$$

2) Wie hoch erhebt sich ein Körper mit 36 Fuß Anfangsgeschwindigkeit auf der schiefen Ebene von 48° Ansteigen?

Es ist die senkrechte Höhe:

$$h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}016 . v^2 = 0{,}016 . 36^2 = 20{,}736 \text{ Fuß},$$

daher der ganze Weg auf der schiefen Ebene:

$$s = \frac{h}{\sin. \alpha} = \frac{20{,}736}{\sin. 48^0} = 27{,}903 \text{ Fuß}.$$

Die zur Zurücklegung desselben nöthige Zeit ist:

$$t = \frac{2 . s}{v} = \frac{2 . 27{,}903}{36} = \frac{27{,}903}{18} = 1{,}55 \text{ Secunden}.$$

Gleiten auf der geneigten Ebene mit Rücksicht auf Reibung. Die gleitende Reibung übt einen bedeutenden Einfluß auf das §. 318

Fallen und Steigen eines Körpers auf einer schiefen Ebene aus. Aus dem Gewichte G des Körpers und aus dem Neigungswinkel α der schiefen Ebene folgt der Normaldruck:

$$N = G \cos. \alpha,$$

und hieraus wieder die Reibung:

$$F = \varphi N = \varphi G \cos. \alpha.$$

Subtrahirt man diese von der Kraft $P = G \sin. \alpha$, mit welcher die Schwerkraft den Körper von der schiefen Ebene herabtreibt, so bleibt die bewegende Kraft:

$$P = G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha,$$

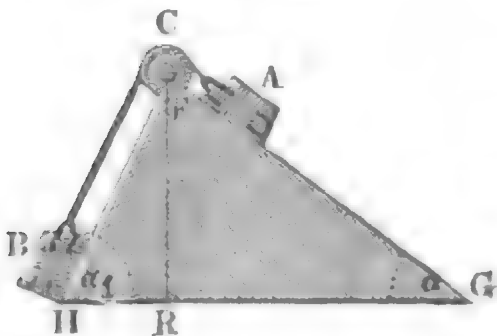
und es ergiebt sich die Beschleunigung des von der schiefen Ebene herabsinkenden Körpers:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \left(\frac{G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha}{G}\right) g = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)\, g.$$

Bei einem auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper ist die bewegende Kraft negativ und $= G \sin. \alpha + \varphi . G \cos. \alpha$, daher auch die Acceleration p negativ und $= -(\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)\, g$.

Sind zwei auf verschiedenen Ebenen FG und FH, Fig. 530, befindliche Körper durch eine über eine Leitrolle C gelegte, vollkommen biegsame Schnur mit einander verbunden, so ist es möglich, daß der eine von beiden Körpern sinkt und den anderen mit emporzieht. Bezeichnen wir die Gewichte dieser Körper durch G und G_1, und die Neigungswinkel der schiefen Ebenen, auf welchen dieselben fortgleiten, durch α und α_1, und nehmen wir an, daß G sinke und G_1 mit emporziehe, so erhalten wir als bewegende Kraft:

Fig. 530.



$$P = G \sin. \alpha - G_1 \sin. \alpha_1 - \varphi G \cos. \alpha - \varphi G_1 \cos. \alpha_1$$
$$= G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) - G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1),$$

und als bewegte Masse

$$M = \frac{G + G_1}{g},$$

daher die Acceleration, mit welcher G sinkt und G_1 steigt:

$$p = \frac{G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) - G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1)}{G + G_1} \cdot g.$$

Da die Reibung als widerstehende Kraft keine Bewegung erzeugen kann, so ist für das Sinken von G und Steigen von G_1 nöthig, daß

$$G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) > G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1),$$

also

$$\frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha}, \text{ d. i. } \frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,(\alpha_1 + \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)}$$

ist. Soll hingegen G_1 sinken und G mit emporziehen, so muß sein:

$$\frac{G_1}{G} > \frac{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}, \text{ oder:}$$

$$\frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}, \text{ d. i. } \frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,(\alpha_1 - \varrho)}{sin.\,(\alpha + \varrho)}.$$

So lange aber $\frac{G}{G_1}$ innerhalb der Grenzen

$$\frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha} \text{ und } \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\, cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}, \text{ oder}$$

$$\frac{sin.\,(\alpha_1 + \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)} \text{ und } \frac{sin.\,(\alpha_1 - \varrho)}{sin.\,(\alpha + \varrho)}$$

liegt, so lange wird die Reibung jede Bewegung verhindern.

Beispiele. 1) Ein Schlitten gleitet auf einer 150 Fuß langen und 20 Grad fallenden Schneebahn herab und geht, unten angekommen, auf einer horizontalen Schneebahn fort, bis ihn die Reibung in Ruhe versetzt. Wenn nun der Coefficient der Reibung zwischen Schnee und Schlitten, $= 0,03$ ist, welchen Weg wird der Schlitten, ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft, auf der horizontalen Ebene zurücklegen?

Es ist die Acceleration des Schlittens:

$$p = (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)\, g = (sin.\,20^0 - 0,03\,.\,cos.\,20)\,.\,31,25$$
$$= (0,3420 - 0,03\,.\,0,9397)\,.\,31,25 = 0,3138\,.\,31,25 = 9,806 \text{ Fuß},$$

daher die Endgeschwindigkeit des Herabgleitens:

$$v = \sqrt{2\,p\,s} = \sqrt{2\,.\,9,806\,.\,150} = \sqrt{2941,8} = 54,24 \text{ Fuß}.$$

Auf der horizontalen Ebene ist die Acceleration:

$$p_1 = -\,\varphi\, g = -\,0,03\,.\,31,25 = -\,0,9375 \text{ Fuß, daher der Weg:}$$

$$s_1 = \frac{v^2}{2\,\varphi\, g} = \frac{2941,8}{1,875} = 1569 \text{ Fuß}.$$

Die Zeit zum Herabgleiten ist:

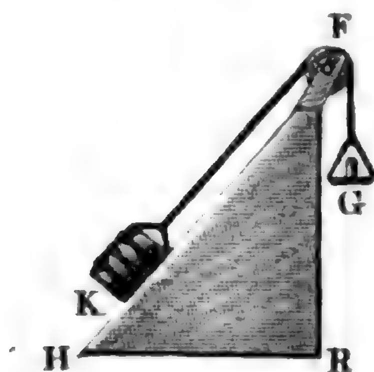
$$t = \frac{2\,s}{v} = \frac{300}{54,24} = 5,5 \text{ Secunden},$$

und zum Fortgleiten:

$$t_1 = \frac{2\,s_1}{v} = \frac{3138}{54,24} = 57,8 \text{ Secunden, daher die ganze Fahrzeit:}$$

$$t + t_1 = 63,3 \text{ Secunden} = 1 \text{ Minute } 3,3 \text{ Secunden}.$$

Fig. 531.



2) Ein gefüllter Kübel K, Fig. 531, mit 250 Pfund Bruttogewicht, soll durch ein senkrecht niederziehendes Gewicht G von 260 Pfund auf einer schiefen Ebene FH von 70 Fuß Länge und 50^0 Neigung emporgezogen werden; welche Zeit wird dazu nöthig sein, wenn der Coefficient der Reibung des Kübels auf der Leitung, 0,36 beträgt?

Es ist die bewegende Kraft:

$= G - (sin. \alpha + \varphi\, cos. \alpha) K = 260 - (sin. 50^0 + 0{,}36 . cos. 50^0) . 250$
$= 260 - 0{,}9974 . 250 = 10{,}6$ Pfund;

daher die Beschleunigung:

$$p = \frac{10{,}6}{250 + 260} = \frac{10{,}6}{510} = 0{,}0208 \text{ Fuß},$$

ferner die Zeit der Bewegung:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{p}} = \sqrt{\frac{140}{0{,}0208}} = \sqrt{6731} = 82{,}04 \text{ Sec.} = 1 \text{ Min. } 22 \text{ Sec.},$$

und die Endgeschwindigkeit:

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{140}{82} = 1{,}70 \text{ Fuß}.$$

§. 319 **Rollende Bewegung auf einer schiefen Ebene.** Bei einem von einer schiefen Ebene herabrollenden Wagen wirkt vorzüglich die Axenreibung der Beschleunigung entgegen; ist G das Gewicht des Wagens, r der Axen- und a der Radhalbmesser, so beträgt die Reibung:

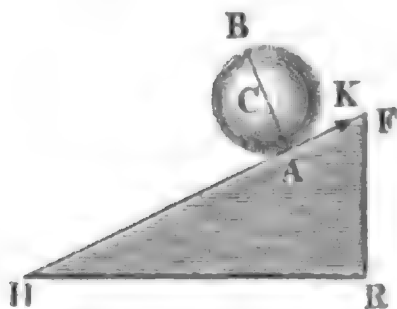
$$\frac{\varphi r}{a} N = \frac{\varphi r}{a} G\, cos. \alpha,$$

und daher die Beschleunigung:

$$p = \left(sin. \alpha - \frac{\varphi r}{a} cos. \alpha\right) g.$$

Wälzt sich ein runder Körper AB, z. B. ein Cylinder oder eine Kugel u. s. w., von einer schiefen Ebene FH, Fig. 532, herab, so hat man es mit einer progressiven und drehenden Bewegung zugleich zu thun. In der Regel ist die Acceleration p des Fortschreitens gleich der Acceleration des Drehens (§. 169); setzen wir daher das Trägheitsmoment des sich wälzenden Körpers, $= G k^2$, und den Halbmesser CA des Wälzens, $= a$, so erhalten wir für die Kraft $\overline{AK} = K$, mit welcher die Walze in Folge des Eingreifens ihrer Theile in die Theile der schiefen Ebene in Umdrehung gesetzt wird:

Fig. 532.



$$K = p \cdot \frac{G k^2}{g a^2}.$$

Nun wirkt aber die Kraft K der Kraft $G\, sin. \alpha$ zum Herablaufen entgegen; es folgt daher die bewegende Kraft für die progressive Bewegung

$$P = G\, sin. \alpha - K,$$

und die Beschleunigung derselben:

$$p = \frac{G\, sin. \alpha - K}{G} \cdot g.$$

Eliminirt man K aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$G p = G g \sin. \alpha - \frac{G k^2}{a^2} \cdot p,$$

folglich die gesuchte Acceleration:

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{k^2}{a^2}}.$$

Bei einem sich wälzenden homogenen Cylinder ist $k^2 = \frac{1}{2} a^2$ (§. 288), daher

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g \sin. \alpha;$$

bei einer Kugel aber $k^2 = \frac{2}{5} a^2$ (§. 290), daher

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin. \alpha;$$

es ist also bei dem rollenden Cylinder die Beschleunigung nur $\frac{2}{3}$, und bei der rollenden Kugel nur $\frac{5}{7}$ mal so groß als bei einem ohne Reibung gleitenden Körper.

Die Kraft des Drehens ist:

$$K = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{k^2}{a^2}} \cdot \frac{G k^2}{g a^2} = \frac{G k^2 \sin. \alpha}{a^2 + k^2}.$$

So lange dieselbe kleiner ist als die gleitende Reibung $\varphi G \cos. \alpha$, so lange läuft auch der Körper vollkommen wälzend von der Ebene herab. Ist aber

$$K > \varphi G \cos. \alpha, \text{ d. i. } \tang. \alpha > \varphi \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right),$$

so reicht die Reibung nicht mehr aus, dem Körper eine der fortschreitenden Geschwindigkeit gleiche Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen; es ist daher dann die Acceleration des Fortschreitens wie bei der gleitenden Reibung:

$$p = \frac{G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha}{G} \cdot g = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)\, g,$$

und die der Umdrehung:

$$p_1 = \frac{\varphi G \cos. \alpha}{G k^2 : a^2} \cdot g = \varphi \frac{a^2}{k^2} g \cos. \alpha.$$

Bei einem Wagen vom Gewichte G mit Rädern vom Halbmesser a und dem Trägheitsmomente $W_1 = G_1 k_1^2$ hat man:

$$K = p \frac{G_1 k_1^2}{g a^2} \text{ und } p = \frac{G \sin. \alpha - \varphi \frac{r}{a} G \cos. \alpha - K}{G} \cdot g,$$

d. i.:

$$p = \frac{g\left(sin.\,\alpha - \varphi\,\frac{r}{a}\,cos.\,\alpha\right)}{1 + \frac{G_1\,k_1^2}{G\,a^2}}.$$

Beispiele. 1) Ein belasteter Wagen von 3600 Pfund Gewicht mit Rädern von 4 Fuß Höhe und 2000 Fußpfund Trägheitsmoment rollt von einer schiefen Ebene mit 12⁰ Neigung herab; welches ist seine Acceleration, wenn der Coefficient der Axenreibung, $\varphi = 0,15$, und die Stärke der Radaxen, $2\,r = 3$ Zoll beträgt?

Es ist:

$$\frac{G_1\,k_1^2}{G\,a^2} = \frac{2000}{3600\,.\,2^2} = \frac{5}{36} = 0,139 \text{ und } \varphi\,\frac{r}{a} = 0,15 \cdot \frac{1}{4\,.\,4} = 0,0094,$$

daher die gesuchte Beschleunigung:

$$p = \frac{31,25\,.\,(sin.\,12^0 - 0,0094\,.\,cos.\,12^0)}{1 + 0,139} = \frac{31,25\,.\,(0,2079 - 0,0094\,.\,0,978)}{1,139}$$

$$= \frac{31,25\,.\,0,1987}{1,139} = 5,452 \text{ Fuß}.$$

2) Mit welchen Accelerationen rollt eine massive Walze von einer schiefen Ebene herab, deren Fallwinkel $\alpha = 40^0$ beträgt?

Ist der Coefficient für die gleitende Reibung der Walze auf der Ebene, $\varphi = 0,24$ so hat man:

$$\varphi\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) = 0,24\,(1 + 2) = 0,72;$$

nun ist aber $tang.\,40^0 = 0,839$; es fällt daher $tang.\,\alpha$ größer als $\varphi\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)$, und die Acceleration der rollenden Bewegung kleiner als die der progressiven Bewegung aus. Die letztere ist

$$p = (sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha)\,g = (0,6428 - 0,24\,.\,0,7660)\,.\,31,25 = 0,459\,.\,31,25$$
$$= 14,34 \text{ Fuß},$$

die erstere aber nur

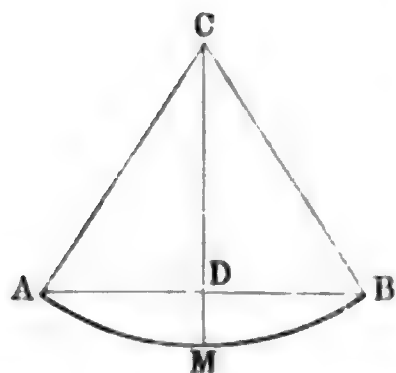
$$p_1 = 0,24\,.\,2\,.\,31,25\;cos.\,40^0 = 15\,.\,0,766 = 11,49 \text{ Fuß}.$$

. 320 **Das Kreispendel.** Ein an einer horizontalen Axe hängender Körper ist im Gleichgewichte, so lange sein Schwerpunkt senkrecht unter der Axe liegt; bringt man aber den Schwerpunkt aus der die Axe enthaltenden Verticalebene, und überläßt man den Körper sich selbst, so nimmt derselbe eine schwingende Bewegung (franz. und engl. oscillation), d. i. eine hin- und hergehende Bewegung im Kreise, an. Im Allgemeinen heißt aber ein um eine horizontale Axe schwingender Körper ein Kreispendel oder Pendel (franz. pendule; engl. pendulum) schlechtweg. Ist der schwingende Körper ein materieller Punkt, und besteht die Verbindung desselben mit der Umdrehungsaxe in einer gewichtslosen Linie, so hat man es mit einem einfachen oder mathematischen Pendel (franz. p. simple und engl. simple p.) zu thun; besteht aber das Pendel in einem ausgedehnten Körper oder aus mehreren Körpern, so heißt dasselbe ein zusammengesetztes, physisches oder materielles Pendel (franz. pendule

composé; engl. composed pendulum). Ein solches Pendel läßt sich als eine feste Verbindung von lauter einfachen, um eine gemeinschaftliche Axe schwingenden Pendeln ansehen. Das einfache Pendel ist nur ein eingebildetes, seine Annahme gewährt aber besondere Vortheile, weil es leicht ist, die Theorie der Bewegung des zusammengesetzten Pendels auf die des einfachen Pendels zurückzuführen.

Wird das in C aufgehangene Pendel, Fig. 533, aus seiner verticalen Lage CM in die Lage CA gebracht und nun sich selbst überlassen, so geht es vermöge seiner Schwere mit einer beschleunigten Bewegung nach CM zurück, und es kommt dessen Masse im tiefsten Punkte M mit einer Geschwindigkeit c an, deren Höhe $\frac{c^2}{2g}$ der Fallhöhe DM gleich ist. In Folge dieser Geschwindigkeit durchläuft es nun auf der anderen Seite den Bogen $MB = MA$, und steigt dabei wieder auf die Höhe DM. Von B aus fällt es von Neuem nach M und A zurück, und so geht es wiederholt im Kreisbogen AB hin und her. Wäre der Widerstand der Luft und die Axenreibung ganz beseitigt, so würde diese schwingende Bewegung des Pendels ohne Ende fortgehen; weil aber diese Hindernisse nie ganz wegzubringen sind, so werden die Schwingungsbögen mit der Zeit immer kleiner und kleiner, und es geht das Pendel endlich zur Ruhe über.

Fig. 533.



Die Bewegung des Pendels von A bis B nennt man einen Schwung oder Pendelschlag (franz. und engl. oscillation), den Bogen AB selbst aber den Schwingungsbogen (franz. und engl. amplitude); der den halben Schwingungsbogen messende Winkel, um welchen sich das Pendel zu beiden Seiten von der Lothlinie CM entfernt, heißt der Elongationswinkel, Ausschlagswinkel oder Ausschlag schlechtweg. Die Zeit, in welcher das Pendel eine Oscillation macht, heißt endlich Schwingungszeit oder Schwingungsdauer (franz. durée d'une oscillation; engl. time of oscillation).

Theorie des einfachen Kreispendels. Wegen der häufigen Anwendung der Pendel im praktischen Leben, namentlich bei Uhren, ist es wichtig, die Schwingungszeiten derselben zu kennen; die Bestimmung derselben ist daher eine Hauptaufgabe der Mechanik. Setzen wir in der Absicht, diese Aufgabe zu lösen, die Pendellänge $AC = MC = r$, Fig. 534 (a. f. S.), und die einem ganzen Schwunge entsprechende Fall- oder Steighöhe $MD = h$. Nehmen wir nun an, daß das Pendel von A nach G gefallen sei, und setzen §. 32

wir die dieser Bewegung entsprechende Fallhöhe $DH = x$, so können wir die in G erlangte Geschwindigkeit

Fig. 534.

$$v = \sqrt{2gx},$$

und das Zeittheilchen, innerhalb dessen der Wegtheil GK durchlaufen wird,

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

setzen. Beschreiben wir nun aus der Mitte O von $MD = h$ und mit dem Halbmesser $OM = OD = \frac{1}{2}h$ einen Halbkreis MND, so können wir von diesem einen Bogentheil NP angeben, welcher mit GK gleiche Höhe $PQ = KL = RH$ hat und in einfacher Beziehung zu diesem Wegtheile GK steht. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GKL und CGH ist

$$\frac{GK}{KL} = \frac{CG}{GH},$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH};$$

dividiren wir daher diese beiden Proportionen durch einander und berücksichtigen wir, daß $KL = PQ$ ist, so erhalten wir das Verhältniß der genannten Bogentheile:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{CG \,.\, NH}{GH \,.\, ON}.$$

Der Lehre vom Kreise, und insbesondere dem Theorem von der mittleren Proportionallinie zufolge ist aber

$$\overline{GH}^2 = MH\,(2\,CM - MH) \text{ und } \overline{NH}^2 = MH \,.\, DH,$$

es folgt daher:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{CG \,.\, \sqrt{DH}}{ON \,.\, \sqrt{2\,CM - MH}} = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h - x)}},$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines Wegelementes:

$$\tau = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h-x)}} \cdot \frac{NP}{\sqrt{2gx}} = \frac{2r}{h\sqrt{2g[2r - (h-x)]}} \cdot NP$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}}\,\frac{NP}{h\sqrt{1 - \frac{h-x}{2r}}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung gestattet man dem Pendel nur einen kleinen Ausschlag, und es ist deshalb $\frac{h}{2r}$, sowie $\frac{x}{2r}$, und also auch $\frac{h-x}{2r}$ eine so kleine Größe, daß wir sie selbst, sowie ihre höheren Potenzen, außer Acht lassen, und nun

$$\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$

setzen können. Die Dauer eines halben Schwunges, oder die Zeit, innerhalb welcher das Pendel den Bogen AM zurücklegt, ist gleich der Summe von allen, den Elementen GK oder NP entsprechenden Zeittheilchen, oder, da $\frac{1}{h} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$ ein constanter Factor ist, gleich $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Summe aller den Halbkreis DNM bildenden Elemente, d. i. $= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Halbkreis $\left(\frac{\pi h}{2}\right)$ selbst, also

$$t_1 = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi h}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Dieselbe Zeit braucht aber auch das Pendel beim Aufsteigen, weil hier die Geschwindigkeiten dieselben sind und nur in der Richtung entgegengesetzt vorkommen, und deshalb ist denn eine ganze Schwingungsdauer doppelt so groß, d. i.

$$t = t_1 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schärfere Formel für die Schwingungszeit des Kreispendels. (§. 32 Um die Schwingungsdauer mit größerer Genauigkeit zu bestimmen, welches zumal bei größeren Schwingungswinkeln nothwendig ist, verwandeln wir den Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h-x}{2r}}} = \left(1 - \frac{h-x}{2r}\right)^{-1/2}$$

in die Reihe:

$$1 + {}^1/_2 \cdot \frac{h-x}{2r} + {}^3/_8 \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \cdots,$$

so daß wir die Zeit für ein Wegelement:

$$\tau = \left[1 + {}^1/_2 \cdot \frac{h-x}{2r} + {}^3/_8 \cdot \left(\frac{h-x}{2r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$

erhalten.

Setzen wir den Centriwinkel $DON = \varphi^0$, also den Bogen

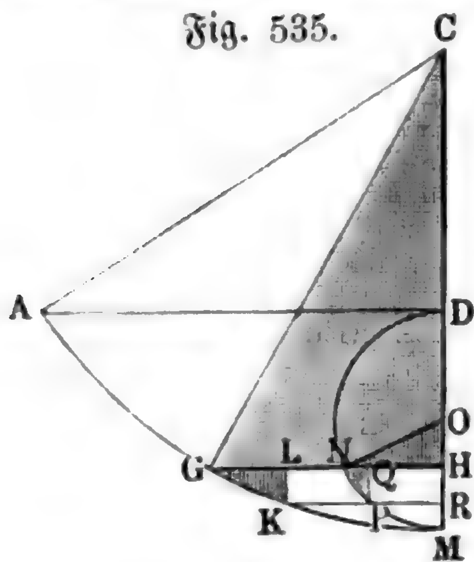


Fig. 535.

$$DN = \overline{DO}\,.\,\varphi = \frac{h\,\varphi}{2},$$

so erhalten wir die Höhe

$$MH = h - x = MO - HO = \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\cos.\varphi = (1 + \cos.\varphi)\frac{h}{2};$$

daher das Zeitelement:

$$\tau = \left[1 + {}^1\!/_2\,.\,(1 + \cos.\varphi)\frac{h}{4r} + {}^3\!/_8\,(1 + \cos.\varphi)^2\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{NP}{h}$$ oder da

$$(1 + \cos.\varphi)^2 = 1 + 2\cos.\varphi + (\cos.\varphi)^2 = 1 + 2\cos.\varphi + \frac{1 + \cos.2\varphi}{2}$$
$$= {}^3\!/_2 + 2\cos.\varphi + {}^1\!/_2\cos.2\varphi$$ ist,

$$\tau = \left[1 + {}^1\!/_2(1 + \cos.\varphi)\frac{h}{4r} + {}^3\!/_8({}^3\!/_2 + 2\cos.\varphi + {}^1\!/_2\cos.2\varphi)\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{NP}{h}$$

$$= \left[1 + {}^1\!/_2\frac{h}{4r} + {}^9\!/_{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots + \left({}^1\!/_2\frac{h}{4r} + {}^3\!/_4\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right)\cos.\varphi + ({}^3\!/_{16} + \cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2\cos.2\varphi + \cdots\right]\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\frac{NP}{h}$$

$$= \left(\left[1 + {}^1\!/_2\frac{h}{4r} + {}^9\!/_{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\frac{NP}{h} + \left[{}^1\!/_2\frac{h}{4r} + {}^3\!/_4\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\cdot\frac{\overline{NP}\cos.\varphi}{h} + ({}^3\!/_{16} + \cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2\frac{\overline{NP}\cos.2\varphi}{h}\right)\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Nun ist aber die Summe aller Elemente $NP =$ Bogen $DNP = \frac{\varphi\,h}{2}$, ferner $\overline{NP}\cos.\varphi = NQ$, und die Summe aller $NQ =$ Ordinate $NH = \frac{h}{2}\sin.\varphi$, sowie die Summe aller $\frac{2\,\overline{NP}\cos.2\varphi}{h} = \sin.2\varphi$, daher läßt sich die Fallzeit des Bogens AG:

$$t_1 = \left(\left[1 + {}^1\!/_2\cdot\frac{h}{4r} + {}^9\!/_{16}\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\varphi + \left[{}^1\!/_2\frac{h}{4r} + {}^3\!/_4\left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right]\sin.\varphi + ({}^3\!/_{16} + \cdots)\left(\frac{h}{4r}\right)^2\frac{\sin.2\varphi}{2}\right)\cdot{}^1\!/_2\sqrt{\frac{r}{g}}$$ setzen.

Die Zeit zum Durchlaufen des Bogens AM ist, da hier $\varphi = \pi$, $sin. \varphi = sin. \pi$, sowie $sin. 2\varphi = sin. 2\pi$, $= 0$ wird,

$$t_1 = \left[1 + {}^1/_2 \cdot \frac{h}{4r} + {}^3/_8 \cdot {}^3/_2 \cdot \left(\frac{h}{4r}\right)^2 + \cdots\right] \pi \cdot {}^1/_2 \sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$= \left[1 + ({}^1/_2)^2 \cdot \frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \cdots\right] \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Da die Geschwindigkeit beim Steigen auf der anderen Seite genau so abnimmt, wie sie beim Durchfallen der Bogenhälfte AM wächst, so ist die Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens, oder die sogenannte **Schwingungsdauer**:

$$t = 2t_1 = \left[1 + ({}^1/_2)^2 \frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \cdots\right] \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schwingt das Pendel im **Halbkreise**, so hat man $h = r$, und daher die Schwingungszeit:

$$t = \left(1 + {}^1/_8 + \frac{9}{256} + \frac{225}{18432} + \cdots\right) \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}180\, \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist der Schwingungsbogen viel kleiner als der Halbkreis, und die Formel

$$t = \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

hinreichend genau.

Aus dem **Elongationswinkel** α folgt $cos. \alpha = \frac{r - h}{r} = 1 - \frac{h}{r}$, also $\frac{h}{r} = 1 - cos. \alpha$, und daher:

$$\frac{h}{8r} = {}^1/_4 \cdot \frac{1 - cos. \alpha}{2} = {}^1/_4 \left(sin. \frac{\alpha}{2}\right)^2;$$

es läßt sich folglich hiernach die einem gegebenen Elongationswinkel entsprechende Correction der Schwingungszeit finden. Ist z. B. dieser Winkel $\alpha = 15^0$, so hat man:

$$\frac{h}{8r} = {}^1/_4 \left(sin. \frac{15^0}{2}\right)^2 = 0{,}00426,$$

dagegen für $\alpha = 5^0$:

$$\frac{h}{8r} = 0{,}00047;$$

bei dem letzten Elongationswinkel ist also die Schwingungsdauer:

$$t = 1{,}00047 \,.\, \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Man kann also bei einem Ausschlag unter 5° ziemlich genau die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{r} = 0{,}562 \sqrt{r}$$

setzen.

323 **Pendellängen.** Da in der Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

der Ausschlagswinkel nicht vorkommt, so folgt auch, daß die Dauer kleiner Pendelschwingungen gar nicht von diesem Winkel abhängt, daß also verschiedene, jedoch nicht weit ausschlagende gleich lange Pendel isochron schwingen oder gleiche Schwingungszeiten haben. Ein Pendel mit 4 Grad Ausschlag hat also (fast) dieselbe Schwingungsdauer, als ein Pendel mit 1 Grad Ausschlag.

Vergleichen wir die Schwingungsdauer t mit der Zeit t_1 des freien Falles, so stoßen wir auf Folgendes. Die Zeit zum freien Fallen von der Höhe r ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{r}{g}},$$

daher folgt

$$t : t_1 = \pi : \sqrt{2};$$

die Zeit eines Pendelschwunges verhält sich also zur Zeit, in welcher ein Körper von einer der Pendellänge gleichen Höhe frei herabfällt, wie die Ludolph'sche Zahl π zur Quadratwurzel aus 2. Die Zeit zum Durchfallen von $2r$ ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \,.\, 2r}{g}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}};$$

daher verhält sich auch die Schwingungsdauer zur Zeit des Fallens von einer der doppelten Pendellänge gleichen Höhe wie π zu 2.

Setzen wir die den Pendellängen r und r_1 entsprechenden Schwingungszeiten t und t_1, so erhalten wir:

$$t : t_1 = \sqrt{r} : \sqrt{r_1};$$

es verhalten sich also bei einer und derselben Beschleunigung der Schwere die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Ist dagegen n die Zahl der Schwingungen, welche das eine Pendel in einer gewissen Zeit, z. B. in der Minute, macht, und n_1 die Zahl, welche in derselben Zeit vom anderen Pendel gemacht werden, so hat man:

$$t : t_1 = \frac{1}{n} : \frac{1}{n_1},$$

daher umgekehrt:

$$n : n_1 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r},$$

d. h. die Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Das viermal so lange Pendel giebt also die halbe Schwingungszahl.

Ein Pendel heißt ein Secundenpendel (franz. pendule à seconde; engl. seconds pendulum), wenn seine Schwingungsdauer eine Secunde beträgt. Setzen wir in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, $t = 1$, so bekommen wir die Länge des Secundenpendels, $r = \frac{g}{\pi^2}$, für das preußische Fußmaß

$$r = 3{,}1662 \text{ Fuß} = 38 \text{ Zoll};$$

für das Metermaß aber

$$r = 0{,}9938 \text{ Meter}.$$

Aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ folgt durch Umkehrung, $g = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 r$; es läßt sich also hiernach aus der Länge r eines Pendels und aus der Schwingungsdauer t desselben die Beschleunigung g der Schwere finden. Diese Methode ist sogar einfacher und sicherer als die Anwendung der Atwood'schen Fallmaschine.

Anmerkung. Durch Pendelbeobachtungen hat man auch die Abnahme der Schwerkraft, von den Polen nach dem Aequator zu, nachgewiesen und deren Größe bestimmt. Diese Abnahme hat ihren Grund in dem Einflusse der Centrifugalkraft, welche aus der täglichen Umdrehung der Erde um ihre eigene Axe entspringt, sowie in der Zunahme der Erdhalbmesser von den Polen nach dem Aequator zu. Die Centrifugalkraft vermindert z. B. im Aequator die Schwere um $\frac{1}{290}$ ihres Werthes (§. 302), während sie unter den Polen selbst Null ist. Ist β die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man, Pendelbeobachtungen zufolge, an diesem Orte die Acceleration der Schwere:

$$g = 9{,}8056\ (1 - 0{,}00259\ cos.\, 2\,\beta) \text{ in Metern},$$

also unter dem Aequator, wo $\beta = 0$, also $cos.\, 2\,\beta = 1$ ist,

$$g = 9{,}8056\ (1 - 0{,}00259) = 9{,}780 \text{ Meter},$$

und unter den Polen, wo $\beta = 90^0$, also $cos.\, 2\,\beta = cos.\, 180^0 = -1$ ist,

$$g = 9{,}8056 \,.\, 1{,}00259 = 9{,}831 \text{ Meter}.$$

Uebrigens ist g auf Bergen kleiner als im Niveau des Meeres.

Cycloide. Man kann auf unendlich mannigfaltige Weise einen Körper in Schwingungen oder hin- und hergehende Bewegungen versetzen, nennt wohl auch jeden in einem dieser Bewegungszustände befindlichen Körper ein Pendel, und unterscheidet hiernach verschiedene Arten von Pendeln, wie z. B. das Kreispendel, welches wir im Vorstehenden betrachtet haben, ferner das Cycloidenpendel, wo der Körper in Folge seiner Schwere in einem Cycloidenbogen hin- und herschwingt, ferner das Torsionspen- §. 324

del, wo der Körper in Folge der Torsion eines Fadens oder Drahtes schwingt, u. s. w. Hier möge nur noch vom Cycloidenpendel die Rede sein.

Die Cycloide (franz. cycloide; engl. cycloid) AP_1D, Fig. 536, ist eine krumme Linie, welche von jedem Punkte A eines Kreises APB beschrieben wird, der sich auf einer geraden Linie BD wälzt. Hat sich dieser Erzeugungskreis um $BB_1 = CC_1$ fortgewälzt, ist er also in die Lage $A_1 B_1$ gekommen, so hat er sich auch um den Bogen $AP = A_1 P_1 = BB_1 = PP_1$ gedreht, es ist folglich die irgend einer Abscisse AM entsprechende Ordinate MP_1 = Ordinate MP des Kreises plus Drehungsbogen AP. Bei diesem Wälzen dreht sich der Erzeugungskreis um den jedesmaligen Berührungspunkt in der Grundlinie BD, steht er also in $A_1 B_1$, so dreht er sich um B_1 und beschreibt dadurch das Bogenelement $P_1 Q_1$ der Cycloide; es ist folglich die Sehne $B_1 P_1$ die Richtung der Normale, und die Sehne $A_1 P_1$ die der Tangente $P_1 T$ im Punkte P_1 der Cycloide. Die bis zur Ordinate OQ_1 reichende Verlängerung PQ der Sehne AP ist auch gleich dem Cycloidenelemente $P_1 Q_1$; da ferner der Weg PR des Drehens gleich ist dem Wege RQ des Fortschreitens, so ist PQ Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes PRQ und gleich der doppelten Linie PN, welche das Perpendikel RN abschneidet; endlich ist aber PN die Differenz von zwei benachbarten Sehnen AR und AP, und folglich das Cycloidenelement $P_1 Q_1$ = der doppelten Sehnendifferenz $(AR - AP)$. Da die stetig auf einander folgenden Bogenelemente zusammen einen ganzen Bogen AP_1, und ebenso die sämmtlichen Sehnendifferenzen die ganze Sehne AP ausmachen, so ist hiernach die Länge des Cycloidenbogens AP_1 gleich dem Doppelten der ihm zugehörigen Kreissehne AP. Der halben Cycloide AP_1D entspricht der Durchmesser als Kreissehne; es ist daher die Länge der halben Cycloide gleich dem doppelten Durchmesser $(2\,AB)$ des Erzeugungskreises.

Fig. 536.

§. 325 **Cycloidenpendel.** Aus den im Vorstehenden entdeckten Eigenschaften der Cycloide läßt sich nun die Theorie des Cycloidenpendels, oder die Formel für die Zeit der Schwingung eines Körpers in einem Cycloidenbogen leicht entwickeln. Es sei AKM, Fig. 537, die Hälfte des Cycloidenbogens, in

welchem ein Körper fällt und steigt oder oscillirt, und ME sei der Erzeugungskreis, also $CE = CM = r$ der Halbmesser desselben. Hat der

Fig. 537.

Körper den Bogen AG durchlaufen, ist er also von der Höhe $DH = x$ herabgefallen (vergl. §. 321), so hat er die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ erlangt, mit welcher er das Bogenelement GK in der Zeit

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

durchläuft. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GLK und FHM ist aber

$$\frac{GK}{KL} = \frac{FM}{MH},$$

oder, da $\overline{FM}^2 = MH.ME$,

$$\frac{GK}{KL} = \frac{\sqrt{MH.ME}}{MH} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}};$$

wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH},$$

oder, da $\overline{NH}^2 = MH.DH$,

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{\sqrt{MH.DH}}.$$

Nun ist $KL = PQ$, daher folgt durch Division:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}} \cdot \frac{\sqrt{MH.DH}}{ON} = \frac{\sqrt{ME.DH}}{ON},$$

oder, da ON die halbe Fallhöhe $= \frac{h}{2}$, $ME = 2r$ und $DH = x$ ist,

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{2rx}}{{}^1/_2 h} = \frac{2\sqrt{2rx}}{h}.$$

Setzt man nun $GK = \frac{2\sqrt{2rx}}{h} \cdot \overline{NP}$ in die Formel $\tau = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$, so erhält man:

$$\tau = \frac{2\sqrt{2rx}}{\sqrt{2gx}.h} \cdot NP = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \overline{NP}.$$

Die Zeit des Fallens von A bis M ist nun die Summe aller Werthe von τ, welche man erhält, wenn man für NP nach und nach alle Theile des Halbkreises DNM einführt, also

$$= \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \text{ mal Halbkreis } DNM\left(\frac{\pi}{2}h\right).$$

Auf diese Weise erhält man die Zeit zum Durchfallen des Bogens AM:

$$t_1 = \frac{\pi}{2}h \cdot \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

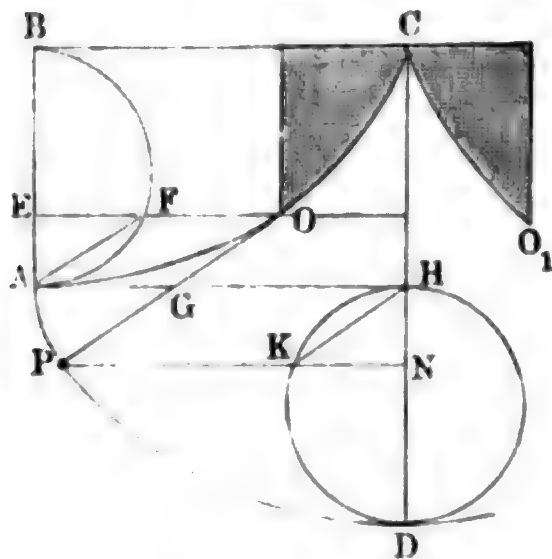
und da die Zeit des Steigens im Bogen MB ebenso groß ist, die Schwingungszeit oder Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens AMB:

$$t = 2t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}}.$$

Da diese Größe ganz unabhängig ist von der Bogenlänge, so folgt, daß mathematisch genau die Schwingungszeiten für alle Bögen einer und derselben Cycloide gleich sind, das Cycloidenpendel also vollkommen isochron schwingt. Vergleichen wir diese Formel mit der Formel für die Schwingungsdauer eines Kreispendels, so folgt, daß die Schwingungszeiten für beide Pendelarten einander gleich sind, wenn die Länge des Kreispendels gleich ist dem vierfachen Halbmesser von dem Erzeugungskreise des Cycloidenpendels.

Anmerkung. Um einen an einem biegsamen Faden hängenden Körper in einem Cycloidenbogen schwingen lassen zu können und dadurch ein Cycloidenpendel herzustellen, hängt man denselben zwischen zwei Cycloidenbögen CO und CO_1, Fig. 538, auf, so daß sich der Faden bei jedem Ausschlage von dem einen Bogen ab- und auf den anderen aufwickelt. Daß bei diesem Ab- und Aufwickeln des Fadens COP der Endpunkt P desselben eine der gegebenen Cycloide gleiche Curve beschreibt, daß also die Evolvente der Cycloide eine gleiche Cycloide in umgekehrter Lage ist, läßt sich einfach so darthun. So wie die Länge der halben Cycloide $COA = CD = 2AB$ ist, ebenso hat man den Bogen $OA =$ der abgewickelten Geraden OP; aber Bogen OA ist $=$ zweimal Sehne $AF = 2GO$, daher auch $PG = GO = AF$

Fig. 538.



und $HN = AE$. Beschreibt man nun über $DH = AB$ einen Halbkreis DKH, und zieht man die Ordinate NP, so hat man $KH = PG$, und daher auch

$$PK = GH = AH - AG = AH - FO = \text{Bog. } AFB - \text{Bog. } AF$$
$$= \text{Bog. } BF = \text{Bog. } DK,$$

und endlich die Ordinate NP = Kreisordinate NK plus entsprechender Bogen DK; es ist also NP die Ordinate einer Cycloide DPA, welche dem Erzeugungskreise DKH entspricht.

Ueber die Anwendung des Cycloidenpendels bei Uhren s. „Jahrbücher des polytechn. Institutes in Wien", Bd. 20, Art. II. Auch Prechtl's technologische Encyklopädie, Bd. 19.

Die Curve der kürzesten Fallzeit. Es läßt sich mittels des höheren Calcüls nachweisen, daß die Cycloide außer dieser Eigenschaft des Isochronismus oder Tautochronismus auch noch die des Brachystochronismus besitzt, daß sie nämlich diejenige Linie zwischen zwei gegebenen Punkten ist, in welcher ein Körper in der kürzesten Zeit von dem einen Punkte nach dem anderen herabfällt. (§. 326

Der Beweis hierzu läßt sich, nach Jacob Bernoulli, auf folgende Weise führen.

Es sei die relative Lage zweier Punkte A und B, Fig. 539, durch den verticalen Abstand $AC = a$ und den horizontalen Abstand $BC = b$ und die einer horizontalen Linie DE durch den verticalen Abstand $AD = h$ gegeben; man sucht den Punkt K, in welchem ein von A nach B fallender Körper die Linie DE durchschneiden muß, um in der kürzesten Zeit von A nach B zu gelangen. Kommt der Körper in A mit der Geschwindigkeit v an, so ist die Geschwindigkeit in K:

Fig. 539.

$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh};$$

setzen wir nun voraus, daß die Punkte A, K und B einander unendlich nahe liegen, oder daß a, b und h sehr klein sind gegen v, so können wir auch annehmen, daß AK gleichförmig mit der Geschwindigkeit v, und KB gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_1 durchlaufen werde, daß also die Zeit zum Durchfallen des Weges AKB,

$$t = \frac{AK}{v} + \frac{KB}{v_1} \text{ sei.}$$

Bezeichnen wir DK durch z, so haben wir:

$$AK = \sqrt{h^2 + z^2} \text{ und } KB = \sqrt{(a - h)^2 + (b - z)^2},$$

und daher:

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + z^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a - h)^2 + (b - z)^2}}{v_1}.$$

Diese Zeit wird nun ein Minimum, wenn wir ihr erstes Differentialverhältniß, d. i.

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{z}{v\sqrt{h^2 + z^2}} - \frac{b - z}{v_1\sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}} = \text{Null}$$

setzen.

Nun ist aber

$$\frac{z}{\sqrt{h^2 + z^2}} = \frac{KD}{KA} = cos.\, AKD = cos.\, \varphi$$

und

$$\frac{b - z}{\sqrt{(a - h)^2 + (b - z)^2}} = \frac{BL}{BK} = cos.\, KBL = cos.\, \varphi_1,$$

wofern wir die Neigungswinkel der Wege AK und KB gegen den Horizont mit φ und φ_1 bezeichnen; daher erhalten wir als Bedingungsgleichung

$$\frac{cos.\, \varphi}{v} = \frac{cos.\, \varphi_1}{v_1}.$$

Setzen wir die den Geschwindigkeiten v und v_1 entsprechenden Fallhöhen $MA = y$ und $NK = y_1$, also

$$v = \sqrt{2gy} \text{ und } v_1 = \sqrt{2gy_1},$$

so geht unsere Gleichung in folgende

$$\frac{cos.\, \varphi}{\sqrt{y}} = \frac{cos.\, \varphi_1}{\sqrt{y_1}}$$

über, und wenden wir nun unseren Fall auf das Fallen in einer krummlinigen Bahn $SAKB$ an, so folgt hiernach, daß für jede Stelle in dieser Curve der Quotient $\frac{cos.\, \varphi}{\sqrt{y}}$ eine constante Zahl, etwa $= \frac{1}{\sqrt{2r}}$ ist.

Diese Eigenschaft entspricht aber einer Cycloide SGM, Fig. 540, denn es ist für ein Wegelement GK dieser Curve:

Fig. 540.

$$cos.\,\varphi = \frac{GL}{GK} = \frac{FH}{FM} = \frac{\sqrt{MH.EH}}{\sqrt{MH.EM}} = \sqrt{\frac{EH}{EM}} = \sqrt{\frac{y}{2r}},$$

und daher:

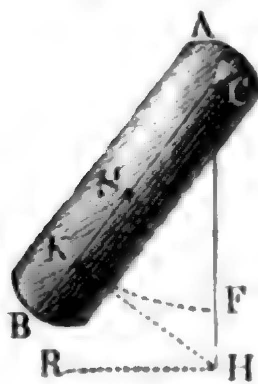
$$\frac{cos.\,\varphi}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2r}},$$

wobei r den Halbmesser $CM = CE$ des Erzeugungskreises EFM bezeichnet.

Es ist also ein Cycloidenbogen SG derjenige, in welchem ein Körper in der kürzesten Zeit von einem Punkte S nach einem anderen G herabfällt.

Das materielle Pendel. Um die Schwingungszeit eines zusammengesetzten Pendels oder irgend eines um eine horizontale Axe C schwingenden Körpers AB, Fig. 541, zu finden, suchen wir zunächst den Mittelpunkt des Schwunges oder Schwingungspunkt (franz. centre d'oscillation; engl. center of oscillation), d. i. denjenigen Punkt K des Körpers auf, welcher, wenn er für sich allein um C schwingt oder ein mathematisches Pendel ausmacht, dieselbe Schwingungsdauer hat wie der ganze Körper. Man sieht leicht ein, daß es dieser Erklärung zufolge mehrere Schwingungspunkte in einem Körper giebt; gewöhnlich meint man aber nur denjenigen von ihnen, welcher mit dem Schwerpunkte in einem und demselben Perpendikel zur Umdrehungsaxe liegt. §. 32

Fig. 541.



Aus dem veränderlichen Ausschlagswinkel $KCF = \varphi$ folgt die Beschleunigung des isolirten Punktes K:

$$= g\ sin.\,\varphi,$$

weil man sich vorstellen kann, daß derselbe von einer schiefen Ebene mit der Neigung $KHR = KCF = \varphi$ herabgleitet. Ist aber Mk^2 das Trägheitsmoment des ganzen Körpers oder der Körperverbindung AB, Ms dessen statisches Moment, d. i. das Product aus der Masse und aus dem Abstande $CS = s$ ihres Schwerpunktes S von der Umdrehungsaxe C, und r die Entfernung CK des Schwingungspunktes K von der Umdrehungsaxe oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem materiellen Pendel AB isochron schwingt, so hat man die auf K reducirte Masse:

$$= \frac{Mk^2}{r^2},$$

und die dahin reducirte Umdrehungskraft:

$$= \frac{s}{r}\,Mg\ sin.\,\varphi;$$

folglich die Beschleunigung:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{s}{r} Mg \sin.\varphi : \frac{Mk^2}{r^2} = \frac{Msr}{Mk^2} \cdot g \sin.\varphi.$$

Damit dieses Pendel mit dem mathematischen einerlei Schwingungsdauer habe, ist nöthig, daß beide an jeder Stelle ihrer Bewegung einerlei Beschleunigung besitzen, daß also

$$\frac{Msr}{Mk^2} \cdot g \sin.\varphi = g \sin.\varphi$$

sei. Diese Gleichung giebt nun

$$r = \frac{Mk^2}{Ms} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Man findet also die Entfernung des Schwingungspunktes vom Drehungspunkte, oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungsdauer hat, wenn man das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels durch sein statisches oder Gewichtsmoment dividirt.

Setzt man diesen Werth von r in die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, so erhält man für die Schwingungsdauer eines zusammengesetzten Pendels die Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{Mk^2}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{k^2}{gs}},$$

oder genauer:

$$t = \pi \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \sqrt{\frac{k^2}{gs}}.$$

Umgekehrt läßt sich aus der Schwingungsdauer eines aufgehängten Körpers sein Trägheitsmoment finden, indem man setzt:

$$Mk^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \cdot Mgs \quad \text{oder} \quad k^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 gs.$$

Anmerkung 1. Um das Trägheitsmoment Mk^2 eines Körpers aus der Schwingungsdauer desselben bestimmen zu können, ist nöthig, daß man das statische Moment $Mgs = Gs$ desselben kenne. Das letztere findet man dadurch, daß man den Körper AC, Fig. 542, durch ein Seil ABD aus seiner Gleichgewichtslage bringt, welches über eine Leitrolle gelegt und durch Gewichte P gespannt wird. Das Perpendikel CN von der Drehungsaxe C gegen die Richtung des Seiles AB ist der Hebelarm a des Gewichtes P, und Pa ist gleich dem Momente $G.\overline{CH}$ des im Schwerpunkte S niederziehenden Gewichtes G. Bezeichnet α den Winkel $VCS = CSH$, um welchen der Körper durch die Kraft P gehoben wird, so hat man noch:

$$\overline{CH} = \overline{CS} \sin.\alpha = s \sin.\alpha,$$

folglich:

$$Gs \sin.\alpha = Pa,$$

und das gesuchte statische Moment:

$$Gs = \frac{Pa}{\sin.\alpha}.$$

Anmerkung 2. Ein sehr einfaches und brauchbares Pendel ADF, Fig. 543, besteht in einer Bleikugel A von ungefähr 1 Zoll Durchmesser, und in einem

Fig. 543.

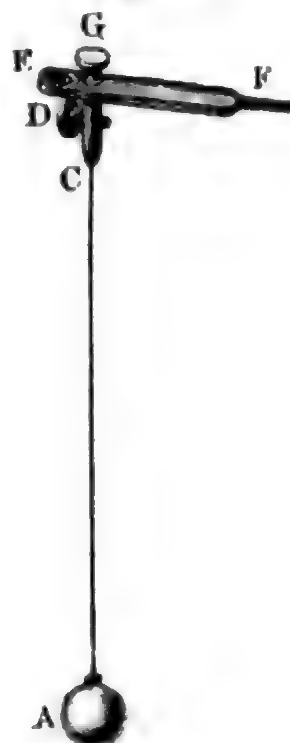
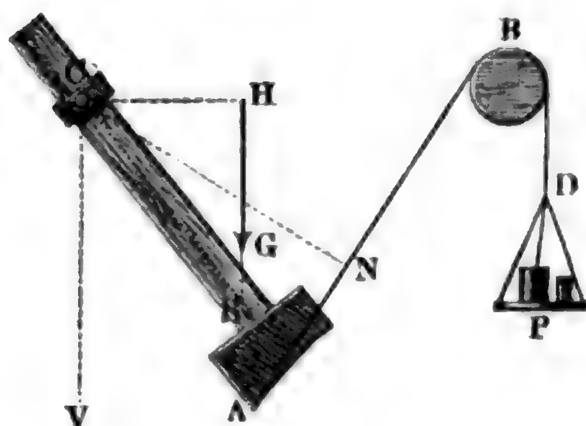


Fig. 542.



seidenen Faden, dessen oberes Ende C von einer Zwinge D mit einer Preßschraube festgehalten wird. Diese Zwinge wird durch einen Arm EF gesteckt und mit demselben durch eine Schraube G fest verbunden, nachdem man ihn mittels seines schraubenförmig zugeschnittenen Endes F in einen Thürstock oder einen anderen festen Punkt eingebohrt hat. Bei einer Länge $CA = 0,2485$, also nahe $\frac{1}{4}$ Meter, schlägt dieses Pendel halbe Secunden, und zwar fast eine Stunde lang, wiewohl in immer kleineren und kleineren Bögen.

Beispiele. 1) Für eine gleichförmig dichte prismatische Stange AB, Fig. 544, deren Drehpunkt C um $CA = l_1$ und $CB = l_2$ von den Enden A und B absteht, hat man, wenn F den Querschnitt dieser Stange bezeichnet, das Trägheitsmoment nach §. 286:

$$Mk^2 = \frac{1}{3} F\,(l_1^3 + l_2^3),$$

und das statische Moment:

$$Ms = \frac{1}{2} F\,(l_1^2 - l_2^2);$$

es ist daher die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dieser Stange isochron schwingt:

Fig. 544.

$$r = \frac{Mk^2}{Ms} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{l^2 + 3\,d^2}{6\,d},$$

wenn l die Summe $l_1 + l_2$, und d die Differenz $l_1 - l_2$ bezeichnet. Soll diese Stange halbe Secunden schlagen, so hat man:

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{g}{\pi^2} = \frac{1}{4} \cdot 38 = 9,5 \text{ Zoll},$$

beträgt aber die ganze Länge l der Stange 12 Zoll, so ist zu setzen

$$9,5 = \frac{144 + 3\,d^2}{6\,d} \text{ oder } d^2 - 19\,d = -48,$$

es folgt daher:

$$d = \frac{19 - \sqrt{169}}{2} = 3,$$

und hieraus:

$l_1 = \frac{l + d}{2} = {}^{15}/_2 = 7\frac{1}{2}$ Zoll, sowie $l_2 = \frac{l - d}{2} = {}^{9}/_2 = 4\frac{1}{2}$ Zoll.

2) Für ein Pendel mit kugelförmiger Linse AB, Fig. 545, ist, wenn G das Gewicht und l die Länge CA der Stange oder des Fadens, dagegen K das Gewicht der Kugel und r_1 ihren Halbmesser $MA = MB$ bezeichnet:

Fig. 545.

$$r = \frac{{}^1/_3\, G l^2 + K[(l + r_1)^2 + {}^2/_5\, r_1^2]}{{}^1/_2\, G l + K(l + r_1)}.$$

Wiegt nun der Draht 0,05 Pfund und die Kugel 1,5 Pfund, ist ferner die Länge des Drahtes 1 Fuß, und der Halbmesser der Kugel 1,15 Zoll, so hat man die Entfernung des Schwingungspunktes dieses Pendels von der Drehungsaxe:

$$r = \frac{{}^1/_3 \,.\, 0{,}05 \,.\, 12^2 + 1{,}5 \,.\, (13{,}15^2 + {}^2/_5 \,.\, 1{,}15^2)}{{}^1/_2 \,.\, 0{,}05 \,.\, 12 + 1{,}5 \,.\, 13{,}15} = \frac{2{,}4 + 260{,}177}{0{,}3 + 19{,}725}$$

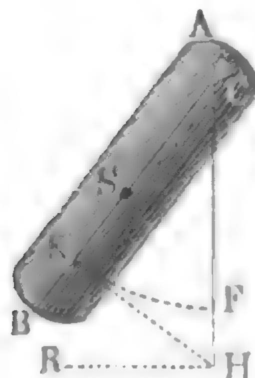
$$= \frac{262{,}577}{20{,}025} = 13{,}112 \text{ Zoll.}$$

Ohne Rücksicht auf den Draht wäre $r = \frac{260{,}177}{19{,}725} = 13{,}190$ Zoll; und die träge Masse der Kugel, in ihrem Centro angenommen, wäre $r = 13{,}15$ Zoll. Die Schwingungszeit dieser Kugel ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 0{,}562 \sqrt{\frac{13{,}112}{12}} = 0{,}562 \sqrt{1{,}0926} \ldots = 0{,}5874 \text{ Secunden.}$$

328 **Reciprocität des Aufhängepunktes und des Schwingungspunktes.** Der Aufhängepunkt und der Schwingungspunkt eines materiellen Pendels sind wechselseitig (franz. réciproque; engl. reciprocal), d. h. es kann der eine mit dem anderen vertauscht, also das Pendel im Schwingungspunkte aufgehangen werden, ohne daß die Schwingungszeit eine andere wird. Der Beweis dieses Satzes führt sich mit Hülfe des §. 284 auf folgende Weise. Ist W das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels AB, Fig. 546, in Hinsicht auf eine Umdrehung um den Schwerpunkt S, so hat man dasselbe für eine Umdrehung um die Axe C, welche um $CS = s$ vom Schwerpunkte S absteht,

Fig. 546.



$$W_1 = W + Ms^2,$$

und daher den Abstand des Schwingungspunktes K von der Drehungsaxe C:

$$r = \frac{W_1}{Ms} = \frac{W + Ms^2}{Ms} = \frac{W}{Ms} + s.$$

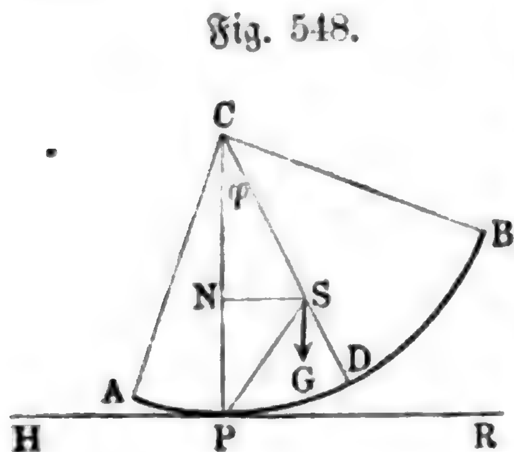
Bezeichnet man nun den Abstand $KS = r - s$ des Schwingungspunktes K vom Schwerpunkte durch s_1, so erhält man die einfache Gleichung $ss_1 = \frac{W}{M}$, in welcher s und s_1 auf gleiche Weise vorkommen, und daher auch mit einander vertauscht werden können. Diese Formel gilt also nicht allein für den Fall, wenn s den Abstand des Drehungspunktes, und s_1 den des Schwingungspunktes von dem Schwerpunkte bezeichnet,

sondern auch umgekehrt, wenn s den Abstand des Schwingungspunktes, und s_1 den des Drehungspunktes vom Schwerpunkte ausdrückt; es wird also C zum Schwingungspunkte, wenn K als Aufhängepunkt dient. Man benutzt Fig. 547. diese Eigenschaft bei dem sogenannten, zuerst von Bohnenberger vorgeschlagenen und später von Kater angewendeten Reversionspendel AB, Fig. 547, welches mit zwei schneidigen Axen C und K ausgerüstet ist, die so gegen einander gestellt sind, daß die Schwingungszeiten dieselben bleiben, das Pendel mag um die eine oder um die andere Axe schwingen. Um nicht die Axen gegen einander verstellen zu müssen, werden noch zwei Laufgewichte P und Q angebracht, wovon das kleinere durch eine feine Schraube gestellt werden kann. Hat man durch Verschieben oder Einstellen dieser Laufgewichte es dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer dieselbe ist, das Pendel mag in C oder in K aufhängen, so bekommt man in der Entfernung CK beider Schneiden von einander die Länge r des einfachen Pendels, welches mit dem Reversionspendel gleichzeitig schwingt, und es ergiebt sich nun die Schwingungsdauer durch die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Wälzendes Pendel. Mit dem Schwingen eines Pendels läßt sich auch §.
das Schaukeln oder Wiegen eines Körpers mit walzenförmigem Fuße vergleichen. Dieses Wiegen ist zwar, wie jede andere wälzende Bewegung, aus einer progressiven und einer Drehbewegung zusammengesetzt, allein es läßt sich auch annehmen, daß es aus einer einfachen Drehung mit veränderlicher Drehaxe bestehe. Diese Drehaxe ist aber der Stützpunkt P, womit der schaukelnde Körper ABC, Fig. 548, auf der horizontalen Basis HR aufruhet. Ist der Halbmesser $CD = CP$ der walzenförmigen Basis ADB, $= r$, und der Abstand CS des Schwerpunktes S des ganzen Körpers vom Mittelpunkte C dieser Basis, $= s$, so hat man für die dem Drehungswinkel $SCP = \varphi$ entsprechende Entfernung $SP = y$ des Schwerpunktes vom Drehungspunkte:

Fig. 548.



$$y^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos.\varphi$$
$$= (r-s)^2 + 4rs\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2;$$

bezeichnen wir daher noch das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Hinsicht auf den Schwerpunkt S durch Mk^2, so erhalten wir das Trägheitsmoment in Hinsicht auf den Stützpunkt P:

$$W = M(k^2 + y^2) = M\left[k^2 + (r-s)^2 + 4rs\left(sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2\right],$$

wofür bei kleinen Schwingungswinkeln, $= M[k^2 + (r-s)^2 + rs\varphi^2]$ oder gar nur $M[k^2 + (r-s)^2]$ gesetzt werden kann. Da nun das Kraftmoment $= G.\overline{SN} = Mg.\overline{CS}\, sin.\varphi = M g s\, sin.\varphi$ ist, so folgt die Winkelacceleration für die Drehung um P:

$$\varkappa = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{M g s\, sin.\varphi}{M[k^2 + (r-s)^2]} = \frac{g s\, sin.\varphi}{k^2 + (r-s)^2}.$$

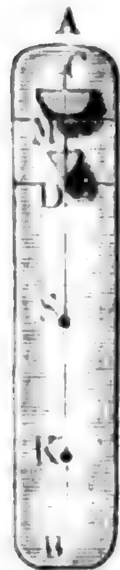
Beim einfachen Pendel ist dieselbe $= \frac{g\, sin.\varphi}{r_1}$, wenn r_1 dessen Länge bezeichnet; sollen daher beide isochron schwingen, so muß sein:

$$\frac{g s\, sin.\varphi}{k^2 + (r-s)^2} = \frac{g\, sin.\varphi}{r_1}, \text{ d. i. } r_1 = \frac{k^2 + (r-s)^2}{s}.$$

Die Schwingungszeit der Wiege ist hiernach:

Fig. 549.

$$t = \pi\sqrt{\frac{r_1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (r-s)^2}{g s}}.$$



Diese Theorie läßt sich auch auf ein Pendel AB, Fig. 549, mit abgerundeter Umdrehungsaxe CM anwenden, wenn man statt r den Krümmungshalbmesser CM dieser Axe einführt. Wäre statt der runden Axe eine schneidige Axe D angebracht, so würde die Schwingungszeit

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{k^2 + \overline{DS}^2}{g.\overline{DS}}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (s-x)^2}{g(s-x)}}$$

betragen, wofern die Entfernung CD der Schneide D vom Mittelpunkte C der runden Axe durch x bezeichnet wird. Beide Pendel haben nun gleiche Schwingungszeiten, wenn

$$\frac{k^2 + (s-x)^2}{s-x} = \frac{k^2 + (r-s)^2}{s}, \text{ oder } \frac{k^2}{s-x} - x = \frac{k^2 + r^2}{s} - 2r$$

ist. Schreiben wir $\frac{k^2}{s-x} = \frac{k^2}{s} + \frac{k^2 x}{s^2}$ annähernd, und vernachlässigen wir r^2, so erhalten wir:

$$x = \frac{2rs^2}{s^2 - k^2}.$$

Anmerkung. Von dem conischen Pendel ist unter dem Artikel „Regulator" im dritten Theile die Rede.

Im Supplementbande wird von den schwingenden Bewegungen ausführlich gehandelt.

Viertes Capitel.

Die Lehre vom Stoße.

Stoss überhaupt. Vermöge der Undurchdringlichkeit der Materie kön- §. 3
nen zwei Körper gleichzeitig nicht einen und denselben Raum einnehmen. Kommen aber zwei bewegte Körper so mit einander in Berührung, daß einer in den Raum des anderen einzudringen sucht, so findet eine Wechselwirkung zwischen beiden statt, welche eine Veränderung in den Bewegungszuständen dieser Körper zur Folge hat. Diese Wechselwirkung ist es, welche man **Stoß** (franz. choc; engl. impact, collision) nennt.

Die Verhältnisse des Stoßes hängen zunächst von **dem Gesetze der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung** (§. 65) ab; während des Stoßes drückt der eine Körper genau ebenso stark auf den anderen, wie dieser in entgegengesetzter Richtung auf jenen. Die gerade Linie, welche winkelrecht auf den Flächen steht, in welchen sich beide Körper berühren, und welche durch den Berührungspunkt selbst geht, ist die Richtung der Stoßkraft. Befinden sich die Schwerpunkte beider Körper in dieser Linie, so heißt der Stoß ein **centrischer** oder **Centralstoß**, außerdem aber ein **excentrischer Stoß**. Die Körper A und B in Fig. 550 geben einen centrischen Stoß,

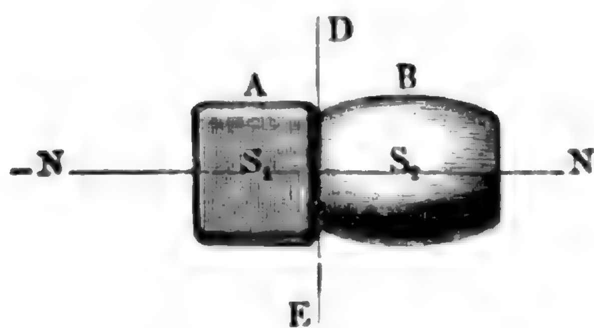


Fig. 550.

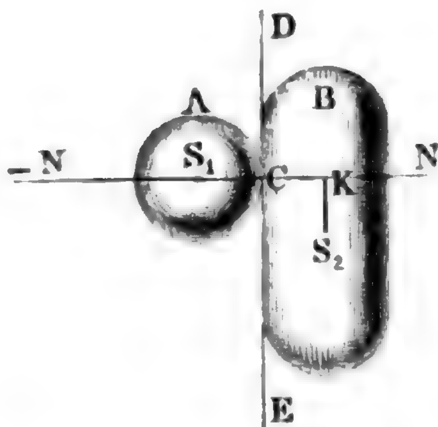


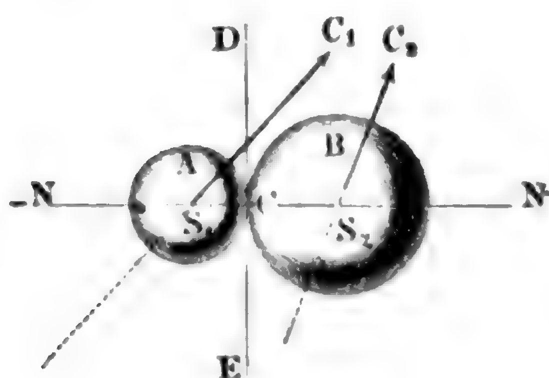
Fig. 551.

weil ihre Schwerpunkte S_1 und S_2 in der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene DE liegen; von den Körpern A und B in Fig. 551 stößt A centrisch und B excentrisch, weil S_1 in und S_2 außerhalb der Normal- oder **Stoßlinie** $N\overline{N}$ befindlich ist.

In Hinsicht auf die Bewegungsrichtung unterscheidet man den **geraden Stoß** (franz. choc direct; engl. direct impact) und den **schiefen Stoß** (franz. choc oblique; engl. oblique impact) von einander. Beim geraden

Stoße fällt die Bewegungsrichtung in die Stoßlinie, beim schiefen Stoße findet aber eine Abweichung zwischen beiden Richtungen statt. Bewegen sich z. B. die Körper *A* und *B*, Fig. 552, in Richtungen $S_1 C_1$ und $S_2 C_2$, welche von der Normalen oder Stoßlinie $N\overline{N}$ abweichen, so findet ein schiefer Stoß statt, während derselbe ein gerader wäre, wenn diese Bewegungsrichtungen mit $N\overline{N}$ zusammenfielen.

Fig. 552.



Außerdem unterscheidet man noch den Stoß **freier Körper** und den Stoß **ganz oder theilweise unterstützter Körper** von einander.

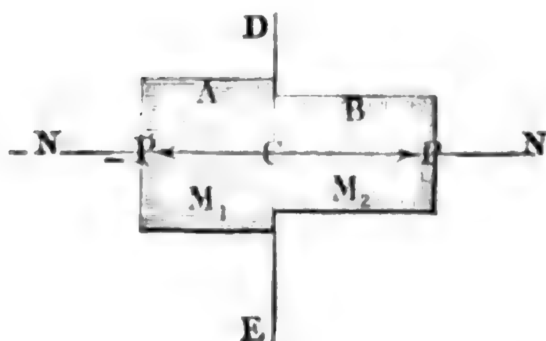
§. 331 Die Zeit während der Mittheilung oder Veränderung der Bewegung durch den Anstoß ist zwar sehr klein, aber keineswegs unendlich klein; sie hängt, sowie die Stoßkraft selbst, von Masse, Geschwindigkeit und Elasticität der zum Stoße gelangenden Körper ab. Man kann diese Zeit aus zwei Perioden bestehend annehmen. In der ersten Periode drücken die Körper einander zusammen und in der zweiten dehnen sich dieselben ganz oder zum Theil wieder aus. Durch das Zusammendrücken wird die Elasticität in Wirksamkeit gesetzt, welche sich mit der Trägheit ins Gleichgewicht setzt und eben dadurch den Bewegungszustand der zusammenstoßenden Körper verändert. Wird bei dem Zusammendrücken die Elasticitätsgrenze nicht überschritten, so geht der Körper am Ende des Stoßes in seine vorige Gestalt vollkommen zurück, und dann nennen wir den Körper einen **vollkommen elastischen**; nimmt aber der Körper am Ende des Stoßes seine vorige Form nicht vollständig wieder an, so nennen wir den Körper **unvollkommen elastisch**, und behält endlich der Körper die durch das Maximum des Zusammendrückens erhaltene Form, besitzt er also gar kein Bestreben zum Ausdehnen, so nennen wir den Körper einen **unelastischen**. Jedenfalls ist aber diese Eintheilung nur in Beziehung auf eine gewisse Stärke des Stoßes als richtig anzunehmen; denn es ist möglich, daß ein und derselbe Körper bei einem schwachen Stoße sich noch elastisch und bei einem starken Stoße unelastisch zeigt. Streng genommen giebt es aber weder einen vollkommen elastischen, noch einen vollkommen unelastischen Körper; doch nennen wir in der Folge solche Körper elastische, welche ihre Gestalt nach dem Stoße ziemlich wieder herstellen, und diejenigen unelastische, welche durch den Stoß bedeutende bleibende Formveränderungen erleiden (vergl. §. 201).

In der praktischen Mechanik werden die zum Stoße gelangenden Körper, wie z. B. Holz, Eisen u. s. w., sehr oft als unelastische angesehen, weil die-

selben entweder an und für sich eine kleine Elasticität besitzen, oder durch Wiederholung der Stöße ihre Elasticität größtentheils verlieren. Uebrigens ist es eine wichtige Regel, Stöße bei Maschinen und Bauwerken so viel wie möglich zu vermeiden oder zu mäßigen oder in elastische zu verwandeln, weil durch dieselben Erschütterungen und große Abnutzungen herbeigeführt werden und weil dieselben einen Theil der Leistung der Maschinen consumiren.

Centralstoss. Entwickeln wir zunächst die Gesetze des geraden Centralstoßes frei beweglicher Körper. Denken wir uns die Stoßzeit aus lauter gleichen Theilen τ bestehend und nehmen wir an, daß die Stoßkraft während des ersten Zeittheilchens $= P_1$, während des zweiten P_2, während des dritten P_3 sei u. s. w. Ist nun die Masse des einen Körpers A, Fig. 553, $= M_1$, so hat man die entsprechenden Accelerationen: §. 332

Fig. 553.



$$p_1 = \frac{P_1}{M_1},\ p_2 = \frac{P_2}{M_2},$$

$$p_3 = \frac{P_3}{M_1} \text{ u. s. w.}$$

Nach §. 19 ist aber die einer Acceleration p und einem Zeittheilchen τ entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$\varkappa = p\,\tau;$$

es sind daher für den vorliegenden Fall die elementaren Geschwindigkeitszu- oder -abnahmen:

$$\varkappa_1 = \frac{P_1\,\tau}{M_1},\ \varkappa_2 = \frac{P_2\,\tau}{M_1},\ \varkappa_3 = \frac{P_3\,\tau}{M_1} \text{ u. s. w.}$$

und es ist die in einer gewissen endlichen Zeit erfolgte Geschwindigkeitszu- oder -abnahme der Masse M_1:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \cdots = (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\frac{\tau}{M_1},$$

sowie die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung der Masse B von der Größe M_2:

$$= (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\frac{\tau}{M_2}.$$

Bei dem folgenden oder stoßenden Körper A wirkt die Stoßkraft der Geschwindigkeit c_1 entgegen, es findet folglich hier eine Geschwindigkeitsabnahme statt, und es ist die nach einer gewissen Zeit noch übrig bleibende Geschwindigkeit dieses Körpers:

$$v_1 = c_1 - (P_1 + P_2 + \cdots) \frac{\tau}{M_1};$$

bei dem vorangehenden oder gestoßenen Körper B hingegen wirkt die Stoßkraft in der Bewegungsrichtung, es erhält daher die Geschwindigkeit c_2 einen Zuwachs und es geht dieselbe in

$$v_2 = c_2 + (P_1 + P_2 + \cdots) \frac{\tau}{M_2}$$

über.

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen $(P_1 + P_2 + \cdots)\,\tau$, so bleibt uns die allgemeine Formel:

$$\text{I.} \quad M_1 (c_1 - v_1) = M_2 (v_2 - c_2), \text{ oder}$$
$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2.$$

Man bezeichnet wohl das Product aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers durch den Namen **Bewegungsmoment** (franz. quantité de mouvement; engl. momentum of body) und kann hiernach behaupten: **in jedem Augenblick der Stoßzeit ist die Summe der Bewegungsmomente** ($M_1 v_1 + M_2 v_2$) **beider Körper eben so groß wie vor dem Stoße.**

Im Augenblicke des größten Zusammendrückens haben beide Körper einerlei Geschwindigkeit v, setzen wir daher diesen Werth statt v_1 und v_2 in die gefundene Gleichung, so bleibt

$$M_1 v + M_2 v = M_1 c_1 + M_2 c_2,$$

und es ergiebt sich die Geschwindigkeit beider Körper im Augenblicke der **stärksten Zusammendrückung**:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Sind die Körper A und B **unelastisch**, besitzen sie also nach dem Zusammendrücken kein Bestreben zum Sichwiederausdehnen, so hört alle Mittheilung oder Veränderung der Bewegung auf, wenn beide Körper bis aufs Maximum zusammengedrückt sind, und es gehen daher auch beide nach dem Stoße mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

fort.

Beispiele. 1) Bewegt sich ein unelastischer Körper B von 30 Pfund Gewicht mit 3 Fuß Geschwindigkeit, und trifft ihn ein anderer unelastischer Körper A von 50 Pfund mit 7 Fuß Geschwindigkeit, so gehen beide nach dem Zusammentreffen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{50.7 + 30.3}{50 + 30} = \frac{350 + 90}{80} = \frac{44}{8} = \frac{11}{2} = 5\tfrac{1}{2} \text{ Fuß}$$

fort.

2) Um einen Körper von 120 Pfund Gewicht aus einer Geschwindigkeit $c_2 = 1\frac{1}{2}$ Fuß in eine Geschwindigkeit v von 2 Fuß zu versetzen, läßt man ihn von einem 50 Pfund schweren Körper stoßen; welche Geschwindigkeit muß dieser haben? Hier ist

$$c_1 = v + \frac{(v - c_2) M_2}{M_1} = 2 + \frac{(2 - 1{,}5) . 120}{50} = 2 + \frac{6}{5} = 3{,}2 \text{ Fuß}.$$

Elastischer Stoss. Sind die zum Stoße gelangenden Körper vollkommen elastisch, so dehnen sie sich, nachdem sie sich in der ersten Periode zusammengedrückt haben, in der zweiten Periode der Stoßzeit allmälig wieder aus; und wenn sie am Ende die erste Gestalt wieder angenommen haben, so setzen sie ihre Bewegungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Da aber die mechanische Arbeit, welche aufzuwenden ist, um einen elastischen Körper zusammenzudrücken, gleich ist der Arbeit, welche derselbe bei seiner Ausdehnung wieder ausgiebt, so findet beim Stoße zwischen elastischen Körpern ein Verlust an lebendiger Kraft nicht statt, und es gilt daher auch für denselben noch folgende zweite Gleichung: §. 333

$$\text{II.} \quad M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2, \text{ oder}$$
$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2).$$

Aus den Gleichungen I. und II. lassen sich nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Körper nach dem Stoße finden. Zuerst folgt durch Division

$$\frac{c_1^2 - v_1^2}{c_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - c_2^2}{v_2 - c_2},$$

d. i.:

$$c_1 + v_1 = v_2 + c_2 \text{ oder } v_2 - v_1 = c_1 - c_2;$$

setzt man nun den sich hieraus ergebenden Werth

$$v_2 = c_1 + v_1 - c_2$$

in die Gleichung I., so folgt:

$$M_1 v_1 + M_2 v_1 + M_2 (c_1 - c_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2, \text{ oder}$$
$$(M_1 + M_2) v_1 = (M_1 + M_2) c_1 - 2 M_2 (c_1 - c_2),$$

wodurch sich nun herausstellt:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und}$$

$$v_2 = c_1 - c_2 + c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Während bei unelastischen Körpern der Verlust an Geschwindigkeit des einen Körpers

$$c_1 - v = c_1 - \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

ist, fällt hiernach bei elastischen Körpern derselbe doppelt so groß, nämlich

$$c_1 - v_1 = \frac{2\,M_2\,(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

aus, und während bei den unelastischen Körpern der **Geschwindigkeitsgewinn** des anderen Körpers

$$v - c_2 = \frac{M_1\,c_1 + M_2\,c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1\,(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

beträgt, stellt sich bei elastischen Körpern derselbe,

$$v_2 - c_2 = \frac{2\,M_1\,(c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

ebenfalls **doppelt so groß** heraus.

Beispiel. Zwei vollkommen elastische Kugeln, die eine von 10 Pfund, die andere von 16 Pfund Gewicht, stoßen mit den Geschwindigkeiten 12 Fuß und 6 Fuß gegen einander, welches sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße? Es ist hier $M_1 = 10$ und $c_1 = 12$ Fuß, sowie $M_2 = 16$ und $c_2 = -6$ Fuß zu setzen, daher ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{2 \,.\, 16\,(12 + 6)}{10 + 16} = \frac{2 \,.\, 16 \,.\, 18}{26} = 22{,}154 \text{ Fuß},$$

und der Geschwindigkeitsgewinn des anderen:

$$v_2 - c_2 = \frac{2 \,.\, 10 \,.\, 18}{26} = 13{,}846 \text{ Fuß};$$

es prallt hiernach der erste Körper nach dem Stoße mit $v_1 = 12 - 22{,}154 = -10{,}154$ Fuß, und der andere Körper mit $-6 + 13{,}846 = 7{,}846$ Fuß Geschwindigkeit zurück. Uebrigens ist das Maß der lebendigen Kraft beider Körper nach dem Stoße
$= M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = 10 \,.\, 10{,}154^2 + 16 \,.\, 7{,}846^2 = 1031 + 985 = 2016$
ebenso groß wie vor dem Stoße, nämlich:

$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = 10 \,.\, 12^2 + 16 \,.\, 6^2 = 1440 + 576 = 2016.$$

Wären diese Körper unelastisch, so würde der erste nur $\frac{c_1 - v_1}{2} = 11{,}077$ Fuß an Geschwindigkeit verlieren und der andere $\frac{v_2 - c_2}{2} = 6{,}923$ Fuß gewinnen; es würde also der erste Körper nach dem Stoße noch die Geschwindigkeit $12 - 11{,}077 = 0{,}923$ Fuß behalten, und der zweite die Geschwindigkeit $-6 + 6{,}923 = 0{,}923$ annehmen, übrigens aber der Arbeitsverlust
$[2016 - (10 + 16)\, 0{,}923^2] : 2g = (2016 - 22{,}2) \,.\, 0{,}016 = 31{,}9$ Fußpfund entstehen.

§. 334 **Besondere Fälle.** Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Formeln für die Endgeschwindigkeiten des Stoßes gelten natürlich auch dann noch, wenn der eine Körper in Ruhe ist, oder wenn sich beide Körper einander entgegen bewegen, oder wenn eine Masse unendlich groß ist in Hinsicht auf die andere u. s. w. Ist die Masse M_2 **in Ruhe**, so hat man $c_2 = 0$, daher für **unelastische Körper**:

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} c_1.$$

Laufen die Körper einander entgegen, ist also c_2 negativ, so folgt für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2},$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und } v_2 = - c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Sind in diesem Falle die Bewegungsmomente einander gleich, ist also $M_1 c_1 = M_2 c_2$, so ist beim unelastischen Stoße, $v = 0$, d. h. die Körper versetzen einander in Ruhe; bei elastischen Körpern ist aber

$$v_1 = c_1 - \frac{2 (M_2 c_1 + M_1 c_1)}{M_1 + M_2} = c_1 - 2 c_1 = - c_1, \text{ und}$$

$$v_2 = - c_2 + \frac{2 (M_2 c_2 + M_1 c_2)}{M_1 + M_2} = - c_2 + 2 c_2 = + c_2;$$

dann kehren also die Körper nach dem Stoße mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten zurück. Sind hingegen die Massen einander gleich, so hat man für unelastische Körper:

$$v = \frac{c_1 - c_2}{2},$$

dagegen für elastische:

$$v_1 = - c_2 \text{ und } v_2 = c_1,$$

d. h. dann gehen die Massen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Laufen die Massen wieder in gleicher Richtung, und ist die vorausgehende Masse M_2 unendlich groß, so hat man für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_2 c_2}{M_2} = c_2,$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - 2 (c_1 - c_2) = 2 c_2 - c_1,\ v_2 = c_2 + 0 = c_2;$$

es wird also die Geschwindigkeit der unendlich großen Masse durch den Anstoß der endlichen Masse nicht abgeändert. Ist nun noch die unendlich große Masse in Ruhe, also $c_2 = 0$, so hat man für unelastische Körper:

$$v = 0,$$

und für elastische:

$$v_1 = - c_1,\ v_2 = 0;$$

dann bleibt also auch die unendlich große Masse in Ruhe, es verliert aber

im ersten Falle der anstoßende Körper seine Geschwindigkeit vollständig, und es wird dieselbe im zweiten Falle in die entgegengesetzte verwandelt.

Beispiele. 1) Mit welcher Geschwindigkeit ist ein Körper von 8 Pfund an einen ruhenden Körper von 25 Pfund anzustoßen, damit der letztere eine Geschwindigkeit von 2 Fuß annimmt? Wären die Körper unelastisch, so hätte man zu setzen:

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

d. i.:

$$2 = \frac{8 \cdot c_1}{8 + 25},$$

daher:

$$c_1 = {}^{33}/_4 = 8^1/_4 \text{ Fuß}$$

die gesuchte Geschwindigkeit; wären sie aber elastisch, so hätte man:

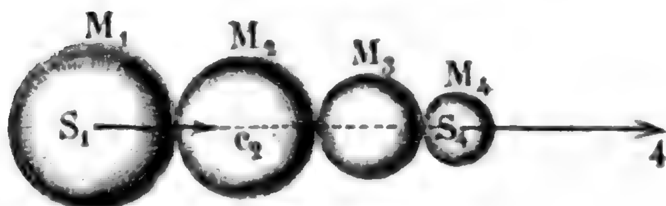
$$v_2 = \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

daher:

$$c_1 = {}^{33}/_8 = 4^1/_8 \text{ Fuß}.$$

2) Trifft eine Kugel M_1, Fig. 554, die ruhende Masse $M_2 = n M_1$ mit der Geschwindigkeit c_1, die zweite Masse eine dritte Masse $M_3 = n M_2 = n^2 M_1$ mit der durch den Stoß erlangten Geschwindigkeit, diese wieder eine Masse $M_4 = n M_3 = n^3 M_1$ u. s. w., so hat man bei vollkommener Elasticität dieser Massen die Geschwindigkeiten:

Fig. 554.



$$v_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + n M_1} c_1 = \frac{2}{1+n} \cdot c_1,\; v_3 = \frac{2 M_2}{M_2 + n M_2} v_2 = \frac{2}{1+n} \cdot v_2 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^2 c_1,$$

$$v_4 = \left(\frac{2}{1+n}\right)^3 c_1 \text{ u. s. w.}$$

Ist z. B. das Gewicht einer jeden Masse nur halb so groß, als das der nächst vorhergehenden, hat man also den Exponenten der von den Massen gebildeten geometrischen Reihe:

$$n = {}^1/_2,$$

so folgt:

$$v_2 = {}^4/_3\, c_1,\; v_3 = ({}^4/_3)^2 c_1,\; v_4 = ({}^4/_3)^3 c_1 \ldots,\; v_{10} = ({}^4/_3)^9 c_1 = 13{,}32 \cdot c_1.$$

335 **Arbeitsverlust.** Beim Zusammenstoßen unelastischer Massen findet stets ein **Verlust an lebendiger Kraft** statt, weshalb die Massen nach dem Stoße nicht so viel Arbeit zu verrichten vermögen, als vor dem Stoße. Vor dem Stoße enthalten die mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 fortgehenden Massen M_1 und M_2 die lebendige Kraft:

$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2,$$

nach dem Stoße haben aber die mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

fortgehenden Massen die lebendige Kraft:

$$M_1 v^2 + M_2 v^2;$$

es giebt daher die Subtraction dieser Kräfte den Verlust an lebendiger Kraft durch den Anstoß:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2)$$
$$= M_1 (c_1 + v) (c_1 - v) - M_2 (c_2 + v) (v - c_2), \text{ aber}$$
$$M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2) = \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2},$$

daher folgt:

$$K = (c_1 + v - c_2 - v)\frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}.$$

Sind die Gewichte der Massen G_1 und G_2, ist also

$$M_1 = \frac{G_1}{g} \text{ und } M_2 = \frac{G_2}{g},$$

so hat man hiernach den Verlust an mechanischer Arbeit oder Leistung:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Man nennt $\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ das harmonische Mittel aus G_1 und G_2, und kann hiernach behaupten: der Verlust an Leistung, welcher durch den Stoß zweier unelastischen Massen herbeigeführt und auf die Formveränderung derselben verwendet wird, ist gleich dem Producte aus dem harmonischen Mittel beider Massen und aus der Fallhöhe, welche der Differenz der Geschwindigkeiten dieser Massen entspricht.

Ist eine der Massen, z. B. M_2, in Ruhe, so hat man diesen Arbeitsverlust:

$$A = \frac{c_1^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2},$$

und ist die bewegte Masse M_1 sehr groß gegen die ruhende, so verschwindet G_2 gegen G_1, und es bleibt:

$$A = \frac{c_1^2}{2g} \cdot G_2.$$

Uebrigens läßt sich auch setzen:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2)$$
$$= M_1 (c_1^2 - 2c_1 v + v^2 + 2c_1 v - 2v^2) + M_2 (c_2^2 - 2c_2 v + v^2 + 2c_2 v - 2v_2^2)$$
$$= M_1 (c_1 - v)^2 + 2 M_1 v (c_1 - v) + M_2 (c_2 - v)^2 + 2 M_2 v (c_2 - v)$$
$$= M_1 (c_1 - v)^2 + M_2 (c_2 - v)^2,$$

weil $M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2)$ ist.

Hiernach ist also die durch die unelastischen Stöße verlorene lebendige Kraft gleich der Summe von den Producten aus den

Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeitsverluste oder Geschwindigkeitsgewinne.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Maschine in jeder Minute 16 Stöße zwischen den unelastischen Massen

$$M_1 = \frac{1000}{g} \text{ Pfd. und } M_2 = \frac{1200}{g} \text{ Pfd.}$$

mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 5$ Fuß und $c_2 = 2$ Fuß erfolgen, so ist ihr Verlust an Leistung in Folge dieser Stöße:

$$A = {}^{16}/_{60} \cdot \frac{(5-2)^2}{2g} \cdot \frac{1000 \,.\, 1200}{2200} = {}^{4}/_{15} \,.\, 9 \,.\, 0{,}016 \,.\, {}^{6000}/_{11} = 0{,}576 \,.\, {}^{400}/_{11}$$
$$= 20{,}94 \text{ Fußpfund per Secunde.}$$

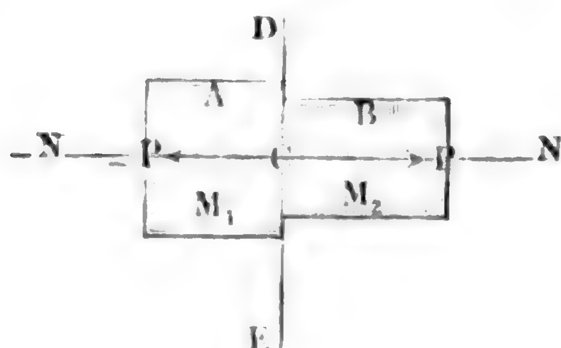
2) Wenn auf einer Eisenbahn zwei Wagenzüge von 120000 Pfund und 160000 Pfund Gewicht mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 15$ Fuß gegen einander stoßen, so entsteht ein auf die Zerstörung der Locomotive und Wagen verwendeter Arbeitsverlust, welcher bei vollständigem Mangel an Elasticität der zum Stoße gelangenden Theile

$$= \frac{(20+15)^2}{2g} \cdot \frac{120000 \,.\, 160000}{280000} = 35^2 \,.\, 0{,}016 \cdot \frac{1'920000}{28} = 1'344000 \text{ Fußpfd.}$$

beträgt.

336 **Härte.** Kennt man die Elasticitätsmodel der zum Stoße gelangenden Körper, so kann man auch die Kraft des Zusammendrückens und die Größe desselben finden. Es seien von den Körpern A und B, Fig. 555, die Querschnitte F_1 und F_2, die Längen l_1 und l_2 und die Elasticitätsmodul E_1 und E_2. Stoßen beide mit einer Kraft P gegen einander, so sind die bewirkten Zusammendrückungen, nach §. 204:

Fig. 555.



$$\lambda_1 = \frac{P l_1}{F_1 E_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{P l_2}{F_2 E_2},$$

und es ist das Verhältniß derselben:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{F_2 E_2}{F_1 E_1} \cdot \frac{l_1}{l_2}.$$

Bezeichnen wir nun der Einfachheit wegen, $\frac{F_1 E_1}{l_1}$ durch H_1, sowie $\frac{F_2 E_2}{l_2}$ durch H_2, so erhalten wir:

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{P}{H_2},$$

sowie:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{H_2}{H_1}.$$

Nennen wir nach dem Beispiele Whewell's (s. The Mechanics of

Engineering §. 207) die Größe $\frac{FE}{l}$ die **Härte** (franz. dureté, raideur; engl. hardness) eines Körpers, so folgt, daß **die Tiefen der Zusammendrückungen den Härten umgekehrt proportional sind.**

Stößt eine Masse $M = \frac{G}{g}$ mit der Geschwindigkeit c auf eine unbewegliche oder unendlich große Masse, so verwendet sie ihre ganze lebendige Kraft auf das Zusammendrücken, es ist daher (nach §. 206):

$$\frac{1}{2} P \sigma = \frac{Mc^2}{2} = \frac{c^2}{2g} G.$$

Nun ist aber der Weg σ gleich der Summe von den Zusammendrückungen λ_1 und λ_2, und $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$, sowie $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$, es folgt daher:

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = P\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right) = \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot P,$$

sowie umgekehrt:

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \sigma,$$

und die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot \sigma^2 = \frac{c^2}{2g} G,$$

also:

$$\sigma = c \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}},$$

woraus sich nun P, λ_1 und λ_2 berechnen lassen.

Beispiel. Schlägt man einen schmiedeeisernen Hammer von 4 Quadratzoll Basis und 6 Zoll Höhe mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß auf eine Bleiplatte von 2 Quadratzoll Basis und 1 Zoll Dicke, so stellen sich folgende Verhältnisse heraus. Der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens ist $E_1 = 29'000000$ und der des Bleies, $E_2 = 700000$, daher sind die Härten dieser Körper:

$$H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1} = \frac{4 \,.\, 29'000000}{6} = 19'333333 \text{ und}$$

$$H_2 = \frac{F_2 E_2}{l_2} = \frac{2 \,.\, 700000}{1} = 1'400000.$$

Setzt man diese Werthe in die Formel:

$$\sigma = c \sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}},$$

und führt man das Gewicht des Hammers $= 4 \,.\, 6 \,.\, 0{,}29 = 7$ Pfd., also:

$$\frac{G}{g} = 7 \,.\, 0{,}032 = 0{,}224$$

ein, so erhält man den Weg des Hammers beim Zusammendrücken:

$$\sigma = 50 \sqrt{\frac{20733333 \,.\, 0{,}224}{19333333 \,.\, 1400000}} = 50 \sqrt{\frac{0{,}46443}{2706666}} = 0{,}0207 \text{ Zoll} = 0{,}248 \text{ Linien}.$$

Hieraus folgt die Stoßkraft:

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \cdot \sigma = \frac{19333333 . 1400000}{20733333} \cdot 0{,}0207 = 27037 \text{ Pfund};$$

ferner die Zusammendrückung des Hammers:

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1} = \frac{27037}{19333333} = 0{,}0014 \text{ Zoll} = 0{,}016 \text{ Linien},$$

und die der Bleiplatte:

$$\lambda_2 = \frac{P}{H_2} = \frac{27037}{1400000} = 0{,}0193 \text{ Zoll} = 0{,}233 \text{ Linien}.$$

§. 337 **Elastisch-unelastischer Stoss.** Bewegen sich zwei Massen M_1 und M_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 hinter einander her, so ist im Augenblicke der größten Zusammendrückung die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider, nach §. 332:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2},$$

und die auf die Zusammendrückung verwendete Arbeit, nach §. 335:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Nun läßt sich diese Arbeit auch

$$= \tfrac{1}{2} P \sigma = \tfrac{1}{2} P (\lambda_1 + \lambda_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \sigma^2$$

setzen, es ergiebt sich folglich die Summe der Zusammendrückungen beider Massen:

$$\sigma = (c_1 - c_2) \sqrt{\frac{G_1 G_2}{g (G_1 + G_2)} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}},$$

woraus sich nun die zusammendrückende Kraft P und die Zusammendrückungen der einzelnen Massen, nämlich λ_1 und λ_2, finden lassen.

Sind die Massen unelastisch, so bleiben diese Zusammendrückungen auch nach dem Stoße; ist aber nur eine von beiden Massen unelastisch, so dehnt sich die andere Masse in einer zweiten Periode wieder aus, und es erzeugt die daraus erwachsende Arbeit eine neue Geschwindigkeitsveränderung. Ist z. B. die Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$ elastisch, so wird in dieser zweiten Periode des Stoßes die Arbeit:

$$\tfrac{1}{2} P \lambda_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{H_1} = \frac{1}{2 H_1} \left(\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\right)^2 \sigma^2$$

$$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

frei; man hat daher in diesem Falle für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße die Formeln:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 v^2 + M_2 v^2 + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

$$= M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

d. i.:

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2}.$$

Setzt man den Geschwindigkeitsverlust $c_1 - v_1 = x$, so hat man den Geschwindigkeitsgewinn:

$$v_2 - c_2 = \frac{M_1 x}{M_2},$$

und es nimmt die letzte Gleichung die Form:

$$x (2 c_1 - x) - x \left(2 c_2 + \frac{M_1 x}{M_2}\right) - (c_1 - c_2)^2 \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0,$$

oder:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} x^2 - 2 (c_1 - c_2) x + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0 \text{ an.}$$

Multiplicirt man dieselbe durch $\frac{M_2}{M_1 + M_2}$ und setzt man

$$\frac{H_1}{H_1 + H_2} = 1 - \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

so erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2 (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} x + (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2$$

$$= (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

oder:

$$\left(x - (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 = (c_1 - c_2)^2 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

deren Auflösung den Geschwindigkeitsverlust x des ersten Körpers giebt:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und den Geschwindigkeitsgewinn des anderen Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Beispiel. Wenn man annimmt, daß in dem Beispiele des vorigen Paragraphen der eiserne Hammer vollkommen elastisch und die Bleiplatte ganz unelastisch ist, so erhält man den Geschwindigkeitsverlust des mit 50 Fuß Geschwindigkeit auffallenden 7 Pfund schweren Hammers, da $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$ zu setzen ist:

$$c_1 - v_1 = c_1 \left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right) = 50 \left(1 + \sqrt{\frac{1400000}{20733333}}\right)$$
$$= 50\,(1 + 0{,}26) = 63 \text{ Fuß},$$
daher die Geschwindigkeit des Hammers nach dem Stoße:
$$v_1 = c_1 - 63 = 50 - 63 = -13 \text{ Fuß}.$$
Die Geschwindigkeit der unterstützten Bleiplatte bleibt natürlich Null.

338 **Unvollkommen elastischer Stoss.** Sind die an einander anstoßenden Körper unvollkommen elastisch, so dehnen sich dieselben in der zweiten Periode der Stoßzeit nur zum Theil wieder aus, es wird also auch die beim Comprimiren in der ersten Periode verbrauchte lebendige Kraft in der zweiten Periode nicht vollständig wieder ausgegeben. Sind wieder λ_1 und λ_2 die Tiefen der Eindrücke, und ist P die Stoßkraft, so hat man die Arbeitsverluste beim Comprimiren $= \frac{1}{2} P \lambda_1$ und $\frac{1}{2} P \lambda_2$, und wird nun beim Ausdehnen hiervon das μfache, oder allgemeiner, beim Ausdehnen des einen Körpers das μ_1= und beim Ausdehnen des zweiten das $\mu_2$fache zurückgegeben, so bleibt der gesammte Arbeitsverlust nach dem Stoße:
$$A = \frac{1}{2} P\,[(1 - \mu_1)\,\lambda_1 + (1 - \mu_2)\,\lambda_2],$$
oder $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$ und $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$ gesetzt:
$$A = \frac{1}{2} P^2 \left[\frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2}\right].$$
Nach dem vorigen Paragraphen ist aber
$$P = \frac{H_1 H_2 \sigma}{H_1 + H_2} \text{ und } \sigma = (c_1 - c_2) \sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}},$$
daher ergiebt sich dann der in Frage gestellte Arbeitsverlust:
$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \left(\frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2}\right)$$
$$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \left(1 - \frac{\mu_1 H_2 + \mu_2 H_1}{H_1 + H_2}\right).$$
Um nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße zu finden, haben wir die Gleichungen:
$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$
$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$$
$$- (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{(1 - \mu_1) H_2 + (1 - \mu_2) H_1}{H_1 + H_2}$$
mit einander zu verbinden und aufzulösen. Ganz auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:
$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right),$$

und der Geschwindigkeitsgewinn des vorangehenden Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Diese beiden allgemeinen Formeln enthalten auch die Gesetze des vollkommen elastischen und des unelastischen Stoßes. Setzt man in ihnen $\mu_1 = \mu_2 = 1$, so erhält man die schon oben gefundenen Formeln für den Stoß zwischen vollkommen elastischen Körpern, nimmt man aber $\mu_1 = \mu_2 = 0$ an, so erhält man die Formeln des unelastischen Stoßes u. s. w. Sind beide Körper von gleichem Grade der Elasticität, ist also $\mu_1 = \mu_2$, so hat man einfacher:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_2}{M_1 + M_2}\,(1 + \sqrt{\mu})$$

und

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\,\frac{M_1}{M_1 + M_2}\,(1 + \sqrt{\mu}).$$

Ist noch die Masse M_2 in Ruhe und unendlich groß, so folgt:

$$c_1 - v_1 = c_1\,(1 + \sqrt{\mu}),\text{ d. i.:}$$

$$v_1 = -\,c_1\sqrt{\mu},\text{ sowie umgekehrt:}$$

$$\mu = \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2.$$

Läßt man die Masse M_1 von einer Höhe h auf eine fest unterstützte gleichartige Masse M_2 herabfallen, und steigt dieselbe nach dem Aufschlagen auf eine Höhe h_1 zurück, so kann man aus beiden Höhen den Coefficienten der unvollkommenen Elasticität durch die Formel

$$\mu = \frac{h_1}{h}$$

finden. Schon Newton fand auf diese Weise für Elfenbein:

$$\mu = (8/9)^2 = 64/81 = 0{,}79,$$

für Glas:

$$\mu = (15/16)^2 = 0{,}9375^2 = 0{,}879,$$

für Kork, Stahl, Wolle:

$$\mu = (5/9)^2 = 0{,}555^2 = 0{,}309.$$

Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß der stoßende oder auffallende Körper die Kugel- und der gestoßene Körper oder die Unterlage eine Plattenform hat.

Der General Morin ließ Geschützkugeln von 6 bis 20 Kilogramm Gewicht auf verschiedene Massen von Thon, Holz, Gußeisen, welche an einem Federdynamometer oder einer Federwage aufgehangen waren, herabfallen, und fand, daß für Thon und für Holzstücke μ nahe $= 0$,

dagegen für Gußeisen μ nahe $= 1$ ist, daß also der Stoß mit den ersteren Körpern als unelastisch, und der mit dem letzteren als vollkommen elastisch angesehen werden kann (s. A. Morin, Notions fondamentales de Mécanique, Art. 67 — 70).

Beispiel. Welche Geschwindigkeiten nehmen zwei Stahlplatten nach dem Stoße an, wenn dieselben vor dem Stoße die Geschwindigkeiten $c_1 = 10$ und $c_2 = -6$ Fuß besitzen, die eine 30 und die andere 40 Pfund wiegt? Hier ist

$$c_1 - v_1 = (10 + 6) \cdot {}^{40}/_{70}\,(1 + {}^5/_9) = 16 \cdot {}^4/_7 \cdot {}^{14}/_9 = \frac{16 \cdot 8}{9} = 14{,}22 \text{ Fuß},$$

daher sind die gesuchten Geschwindigkeiten:

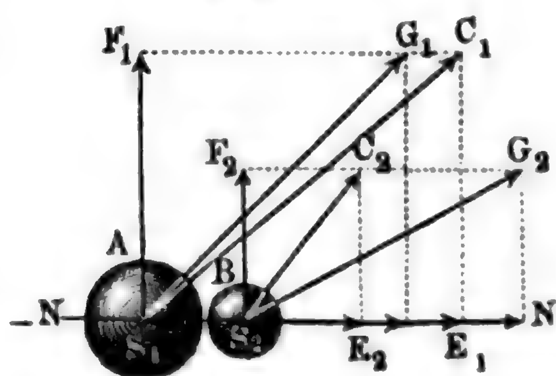
$$v_1 = c_1 - 14{,}22 = 10 - 14{,}22 = -4{,}22 \text{ Fuß}$$

und

$$v_2 = c_2 + 10{,}66 = -6 + 10{,}66 = 4{,}66 \text{ Fuß}.$$

339 **Schiefer Stoss.** Weichen die Bewegungsrichtungen $\overline{S_1 C_1}$ und $\overline{S_2 C_2}$ zweier Körper A und B, Fig. 556, von der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene ab, so ist deren Anstoß ein schiefer. Wir führen die Theorie desselben auf die des geraden Stoßes zurück, wenn wir die Geschwindigkeiten $S_1 C_1 = c_1$ und $S_2 C_2 = c_2$ nach der Normale und nach einer Tangentialrichtung zerlegen; die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Normale $N\overline{N}$ geben einen Centralstoß und werden daher auch genau so verändert, wie beim Centralstoß, die mit der Berührungsebene parallelen Geschwindigkeiten hingegen verursachen gar keinen Stoß und bleiben daher unverändert. Vereinigt man die nach den Regeln des Centralstoßes veränderte Normalgeschwindigkeit eines jeden Körpers mit der unverändert gebliebenen Tangentialgeschwindigkeit, so erhält man die resultirenden Geschwindigkeiten dieser Körper nach dem Stoße. Setzen wir die Winkel, welche die Bewegungsrichtungen mit der Normale einschließen, α_1 und α_2, also $C_1 S_1 N = \alpha_1$ und $C_2 S_2 N = \alpha_2$, so erhalten wir für die Normalgeschwindigkeiten $S_1 E_1$ und $S_2 E_2$ die Werthe $c_1 \cos. \alpha_1$ und $c_2 \cos. \alpha_2$, dagegen für die Tangentialgeschwindigkeiten $S_1 F_1$ und $S_2 F_2$, $c_1 \sin. \alpha_1$ und $c_2 \sin. \alpha_2$. Durch den Stoß erleiden aber die ersteren Geschwindigkeiten Veränderungen, und es geht die erste über in:

Fig. 556.



$$v_1 = c_1 \cos. \alpha_1 - (c_1 \cos. \alpha_1 - c_2 \cos. \alpha_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu})$$

und die zweite in:

$$v_2 = c_2 \cos.\alpha_2 + (c_1 \cos.\alpha_1 - c_2 \cos.\alpha_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern, wie seither allemal, M_1 und M_2 die Massen beider Körper bezeichnen.

Aus v_1 und $c_1 \sin.\alpha_1$ ergiebt sich die resultirende Geschwindigkeit $S_1 G_1$ des ersten Körpers:

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + c_1^2 \sin.\alpha_1^2},$$

und aus v_2 und $c_2 \sin.\alpha_2$ die Geschwindigkeit $S_2\, G_2$ des zweiten Körpers:

$$w_2 = \sqrt{v_2^2 + c_2^2 \sin.\alpha_2^2};$$

auch ergeben sich die Abweichungen der Geschwindigkeitsrichtungen von der Normale durch die Formeln:

$$tang.\,\beta_1 = \frac{c_1 \sin.\alpha_1}{v_1} \text{ und } tang.\,\beta_2 = \frac{c_2 \sin.\alpha_2}{v_1},$$

wenn β_1 den Winkel $G_1 S_1 N$ sowie β_2 den Winkel $G_2 S_2 N$ bezeichnet.

Beispiel. Zwei Kugeln von 30 und 50 Pfd. Gewicht stoßen sich mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 25$ Fuß, deren Richtungen um die Winkel $\alpha_1 = 21^0 35'$ und $\alpha_2 = 65^0 20'$ von der Normale der Berührungsebene abweichen, in welchen Richtungen und mit welchen Geschwindigkeiten gehen diese Massen nach dem Stoße fort? Es sind die unveränderlichen Seitengeschwindigkeiten:

$c_1 \sin.\alpha_1 = 20 . \sin. 21^0 35' = 7,357$ Fuß und
$c_2 \sin.\alpha_2 = 25 . \sin. 65^0 20' = 22,719$ Fuß,

dagegen die veränderlichen:

$c_1 \cos.\alpha_1 = 20 . \cos. 21^0 35' = 18,598$ Fuß und
$c_2 \cos.\alpha_2 = 25 . \cos. 65^0 20' = 10,433$ Fuß.

Sind die Körper unelastisch, so hat man $\mu = 0$, daher die veränderten Normalgeschwindigkeiten:

$v_1 = 18,598 - (18,598 - 10,433) . {}^{50}/_{80} = 18,598 - 5,103 = 13,495$ Fuß und
$v_2 = 10,433 + 8,165 . {}^{3}/_{8} = 10,433 + 3,062 = 13,495$ Fuß.

Die resultirenden Geschwindigkeiten sind nun:

$w_1 = \sqrt{13,495^2 + 7,357^2} = \sqrt{236,24} = 15,37$ Fuß und
$w_2 = \sqrt{13,495^2 + 22,719^2} = \sqrt{698,27} = 26,42$ Fuß;

für ihre Richtungen hat man:

$tang.\,\beta_1 = \frac{7,357}{13,495}$, $log.\,tang.\,\beta_1 = 0,73653 - 1$, $\beta_1 = 28^0 36'$ und

$tang.\,\beta_2 = \frac{22,719}{13,495}$, $log.\,tang.\,\beta_2 = 0,22622$, $\beta_2 = 59^0 17'$.

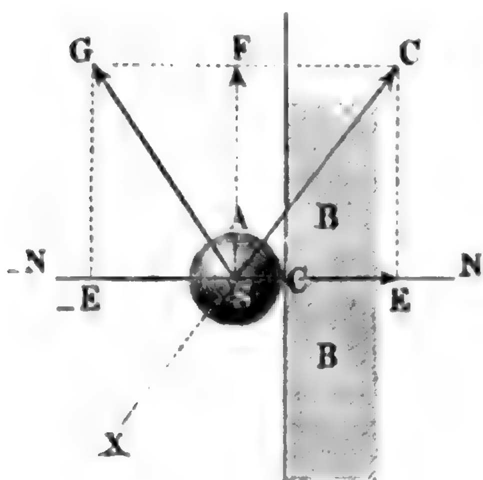
Stoss gegen eine unendlich grosse Masse. Trifft die Masse A, Fig. 557 (a. f. S.), gegen eine andere unendlich große Masse, oder gegen ein unbewegliches Hinderniß BB, hat man also $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$, so folgt: §. 340

$$v_1 = c_1 \cos.\alpha_1 - c_1 \cos.\alpha_1 (1 + \sqrt{\mu}) = - c_1 \cos.\alpha_1 \sqrt{\mu} \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + c_1 \cos.\alpha_1 \cdot \frac{M_1 (1 + \sqrt{\mu})}{\infty} = 0 + 0 = 0;$$

ist nun noch $\mu = 0$, so wird auch $v_1 = 0$, ist aber $\mu = 1$, so folgt $v_1 = -c_1 \cos.\alpha_1$, d. h. beim unelastischen Stoße geht die Normalgeschwindigkeit ganz verloren, beim elastischen hingegen wird sie in die entgegengesetzte verwandelt. Für den Winkel, um welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße von der Normale abweicht, ist

Fig. 557.



$$tang.\beta_1 = \frac{c_1 \sin.\alpha_1}{v_1} = -\frac{c_1 \sin.\alpha_1}{c_1 \cos.\alpha_1 \sqrt{\mu}} = -tang.\alpha_1 \sqrt{\frac{1}{\mu}};$$

für unelastische Körper wird also:

$$tang.\beta_1 = -\frac{tang.\alpha_1}{0} = \infty\text{; d. i. } \beta_1 = 90^0,$$

und für elastische:

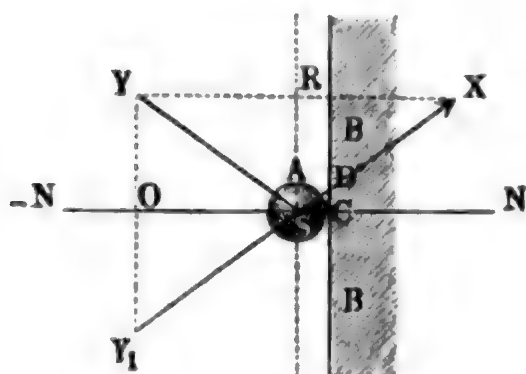
$$tang.\beta_1 = -tang.\alpha_1,\text{ d. i. } \beta_1 = -\alpha_1.$$

Nach dem Stoße eines unelastischen Körpers gegen ein unelastisches Hinderniß geht also der erstere mit der Tangentialgeschwindigkeit $c_1 \sin.\alpha_1$ in der Richtung SF der Berührungsebene fort, nach dem Stoße eines elastischen Körpers gegen ein elastisches Hinderniß aber geht der Körper mit unveränderter Geschwindigkeit in einer Richtung SG fort, die mit der Normale $N\overline{N}$ und der anfänglichen Richtung XS in eine Ebene fällt, und mit der Normale denselben Winkel $GS\overline{N}$ einschließt, wie die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit ebenderselben auf der entgegengesetzten Seite. Man nennt den Winkel $XS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit der Normale oder dem Lothe einschließt, den **Einfallswinkel** (franz. angle d'incidence; engl. angle of incidence) und den Winkel $GS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße ebendamit bildet, den **Austritts-** oder **Reflexionswinkel** (franz. angle de réflexion; engl. angle of reflexion), und kann hiernach behaupten: **beim vollkommen elastischen Stoße fallen Reflexions- und Einfallswinkel mit dem Einfallslothe in einerlei Ebene und es sind beide Winkel einander gleich.**

Beim unvollkommen elastischen Stoße ist das Verhältniß $\sqrt{\mu}$ der Tangenten dieser Winkel gleich dem Verhältnisse der durch die Ausdehnung zurückgegebenen Geschwindigkeit zu der durch die Compression verlorenen Geschwindigkeit. Mit Hülfe dieses Gesetzes läßt sich nun leicht die Richtung finden, in welcher der Körper A, Fig. 558, gegen das unbewegliche Hinder-

niß BB zu stoßen ist, damit er nach dem Stoße eine gewisse Richtung SY verfolge. Ist der Stoß ein elastischer, so fällen wir von einem Punkte Y der gegebenen Richtung das Perpendikel YO gegen das Einfallsloth $N\overline{N}$, verlängern dasselbe, bis die Verlängerung OY_1 dem Perpendikel selbst gleich wird; SY_1 ist dann die in Frage stehende Stoßrichtung, denn es ist, dieser Construction zufolge, Winkel $\overline{N}SY_1 = \overline{N}SY$. Ist der Stoß unvollkommen elastisch, so mache man $OY_1 = \sqrt{\mu}\,.\,OY$; dann ist Y_1S ebenfalls die gesuchte Anfangsrichtung, da

Fig. 558.



$$\frac{tang.\,\alpha_1}{tang.\,\beta_1} = \frac{OY_1}{OY} = \sqrt{\mu} \text{ ausfällt.}$$

Fällt man ein Loth YR gegen die Linie SR parallel zur Berührungsebene und macht man dessen Verlängerung $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\,\overline{RY}$, so bekommt man aus leicht einzusehenden Gründen ebenfalls in SX die gesuchte Einfallsrichtung.

Anmerkung. Die Theorie des schiefen Stoßes findet ihre vorzüglichste Anwendung beim Billardspiel. S. Théorie mathématique des effets du jeu de billard, par Coriolis. Nach Coriolis ist beim Anstoße eines Billardballes gegen die Bande das Verhältniß der zurückgegebenen Geschwindigkeit zur Einfallsgeschwindigkeit, $= 0{,}5$ bis $0{,}6$, also $\mu = 0{,}5^2 = 0{,}25$ bis $0{,}6^2 = 0{,}36$. Mit Hülfe dieses Werthes läßt sich nun auch die Richtung angeben, in welcher ein Ball A gegen eine Bande BB zu stoßen ist, damit er nach einem gegebenen Punkte Y von dieser zurückgeworfen werde. Man fälle von dem gegebenen Punkte Y das Perpendikel YR gegen die mit der Bande parallel laufende Schwerlinie des Balles, verlängere dasselbe um $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}} = {}^{10}/_6$ bis ${}^{10}/_5$ seines Werthes und ziehe die Gerade Y_1X; der sich herausstellende Durchschnitt D ist die Stelle, nach welcher man den Ball A zu stoßen hat, damit er durch Bricol nach Y gelange. Durch die Drehbewegung des Balles wird dieses Verhältniß allerdings noch etwas geändert.

Stossreibung. Bei dem schiefen Stoße entsteht auch eine Reibung zwischen den sich stoßenden Körpern, welche die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Berührungsebene abändert. Die Reibung F des Stoßes bestimmt sich wie die Reibung des Druckes; bezeichnet P die Stoßkraft und φ den Reibungscoefficienten, so ist sie $F = \varphi P$. Sie unterscheidet sich nur insofern von der Reibung des Druckes, als sie, wie der Stoß selbst, nur während einer sehr kleinen Zeit wirksam ist. Die durch sie hervorgebrachten §. 341

Geschwindigkeitsveränderungen sind aber deshalb nicht unmeßbar klein, denn die Stoßkraft P, und folglich auch der Theil φP derselben, ist in der Regel sehr groß. Bezeichnet man die stoßende Masse durch M und die durch die Stoßkraft P erzeugte Normalacceleration durch p, so hat man:

$$P = Mp, \text{ und daher } F = \varphi Mp,$$

sowie die Zögerung oder negative Acceleration der Reibung während des Stoßes:

$$\frac{F}{M} = \varphi p;$$

d. i. φmal so groß, als die der Normalkraft. Nun haben aber die Wirkungen beider Kräfte gleiche Zeitdauer; es ist daher auch die durch die Reibung erzeugte Geschwindigkeitsveränderung φmal so groß, als die durch den Stoß bewirkte Veränderung in der Normalgeschwindigkeit.

Fällt eine Masse M auf einen horizontal fortlaufenden Schlitten senkrecht herab, und wird durch diesen Zusammenstoß die Geschwindigkeit c dieser Masse ganz vernichtet, so erleidet die Bewegung des Schlittens, dessen Masse $= M_1$ sein möge, die Retardation

$$\frac{F}{M + M_1} = \frac{\varphi M p}{M + M_1},$$

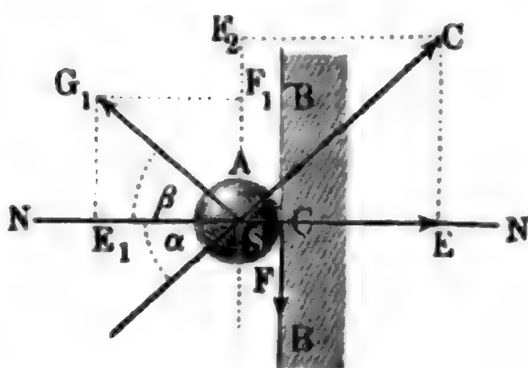
und folglich auch die Geschwindigkeit desselben den Verlust:

$$v = \frac{\varphi M}{M + M_1} c.$$

Die Richtigkeit dieser Theorie hat Morin durch Versuche dargethan (s. dessen Notions fondamentales de Mécanique).

In dem Falle, wenn ein Körper gegen eine unbewegliche Masse BB unter dem Einfallswinkel α, Fig. 559, stößt, ist nach dem vorigen Paragraphen die Veränderung in der Normalgeschwindigkeit:

Fig. 559.



$$w = c \cos.\alpha\,(1 + \sqrt{\mu});$$

daher die durch die Reibung bewirkte Veränderung in der Tangentialgeschwindigkeit:

$$= \varphi w = \varphi c\,(1 + \sqrt{\mu}) \cos.\alpha.$$

Es geht also nach dem Stoße die Seitengeschwindigkeit $c \sin.\alpha$ in

$$c \sin.\alpha - \varphi c (1 + \sqrt{\mu}) \cos.\alpha$$
$$= [\sin.\alpha - \varphi \cos.\alpha (1 + \sqrt{\mu})]\, c$$

über und sie fällt bei vollkommen elastischen Körpern

$$= (sin.\,\alpha - 2\,\varphi\, cos.\,\alpha)\, c,$$

dagegen bei unelastischen Körpern

$$= (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)\, c$$

aus.

Durch die Reibung während des Stoßes erhalten die Körper sehr oft eine Drehung um ihren Schwerpunkt, oder es wird, wenn eine Drehbewegung vor dem Stoße schon vorhanden war, dieselbe abgeändert. Ist das Trägheitsmoment des runden Körpers A, in Hinsicht auf seinen Schwerpunkt S, $= M k^2$, und der Drehungshalbmesser $SC = a$, so hat man die auf den Berührungspunkt C reducirte Masse des Körpers

$$= \frac{M k^2}{a^2},$$

daher die durch die Reibung F hervorgebrachte Drehbeschleunigung dieses Punktes:

$$p_1 = \frac{F}{M k^2 : a^2} = \frac{\varphi M p}{M k^2 : a^2} = \varphi p \cdot \frac{a^2}{k^2},$$

und die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$w_1 = \varphi\, \frac{a^2}{k^2} \cdot w = \varphi\, \frac{a^2}{k^2}\, (1 + \sqrt{\mu})\, c\, cos.\,\alpha.$$

Bei einem Cylinder ist $\frac{a^2}{k^2} = 2$, und bei einer Kugel $\frac{a^2}{k^2} = {}^5/_2$, daher folgt für diese runden Körper die durch den Stoß gegen eine Ebene hervorgebrachte Veränderung in der Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$w_1 = 2\,\varphi\, (1 + \sqrt{\mu})\, c\, cos.\,\alpha \text{ und } w_1 = {}^5/_2\, \varphi\, (1 + \sqrt{\mu})\, c\, cos.\,\alpha.$$

Beispiel. Wenn ein Billardball mit 15 Fuß Geschwindigkeit und unter dem Einfallswinkel $\alpha = 45^0$ gegen die Bande stößt, welche Bewegungen nimmt derselbe nach dem Stoße an? Setzt man für $\sqrt{\mu}$ den mittleren Werth 0,55, so hat man die normale Seitengeschwindigkeit nach dem Stoße

$= - \sqrt{\mu}\,.\,c\, cos.\,\alpha = - 0{,}55\,.\,15\,.\,cos.\,45^0 = - 8{,}25\,.\,\sqrt{{}^1/_2} = - 5{,}833$ Fuß,

und nimmt man mit Coriolis, $\varphi = 0{,}20$ an, so erhält man die Seitengeschwindigkeit parallel zur Bande,

$= c\, sin.\,\alpha - \varphi\,(1 + \sqrt{\mu})\, c\, cos.\,\alpha = (1 - 0{,}20\,.\,1{,}55)\,.\,10{,}607 = 0{,}69\,.\,10{,}607$
$= 7{,}319$ Fuß,

auch folgt für den Reflexionswinkel β:

$$tang.\,\beta = \frac{7{,}319}{5{,}833} = 1{,}2548,$$

also: $\beta = 51^0\, 27'$,

und die Geschwindigkeit nach dem Stoße bleibt

$$= \frac{5{,}833}{cos.\,51^0\, 27'} = 9{,}360 \text{ Fuß}.$$

Außerdem nimmt der Ball auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$\frac{5}{2}\varphi . 1,55 . 10,607 = 8,220 \text{ Fuß}$$

um seine verticale Schwerlinie an. Da der Ball sich nicht gleitend, sondern wälzend auf dem Billard fortbewegt, so ist anzunehmen, daß er außer der fortschreitenden Geschwindigkeit $c = 15$ Fuß auch noch eine gleichgroße Umdrehungsgeschwindigkeit besitze und daß sich diese ebenfalls in die Componenten

$$c \cos. \alpha = 10,607 \quad \text{und} \quad c \sin. \alpha = 10,607$$

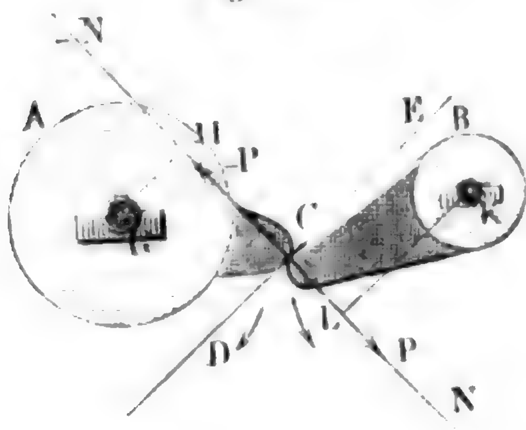
zerlegen lasse. Der erste Component entspricht einer Drehung um eine Axe parallel zur Bandenaxe und geht in

$$c \cos. \alpha - \frac{5}{2} \varphi (1 + \sqrt{\mu})\, c \cos. \alpha = 10,607 - 8,220 = 2,387 \text{ Fuß}$$

über, der andere Component $c \sin. \alpha = 10,607$ Fuß entspricht einer Drehung um eine Axe normal zur Bande und bleibt unverändert.

342 **Stoss drehbarer Körper.** Stoßen zwei um feste Axen G und K drehbare Körper A und B, Fig. 560, gegen einander, so stellen sich Geschwindigkeitsveränderungen heraus, welche sich aus den Trägheitsmomenten $M_1 k_1^2$ und $M_2 k_2^2$ der Massen dieser Körper hinsichtlich der festen Axen und mit Hülfe der im Vorstehenden gefundenen Formeln bestimmen lassen. Sind die Perpendikel GH und KL, welche sich von den Drehungsaxen gegen die Stoßlinie fällen lassen, a_1 und a_2, so hat man die auf die Lothpunkte H und L in der Stoßlinie reducirten trägen Massen $= \frac{M_1 k_1^2}{a_1^2}$ und $\frac{M_2 k_2^2}{a_2^2}$, und führt man diese Werthe statt M_1 und M_2 in die Formeln für den freien Centralstoß ein, so bekommt man die Geschwindigkeitsveränderungen der Punkte H und L (§. 338)

Fig. 560.



$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2 k_2^2 : a_2^2}{M_1 k_1^2 : a_1^2 + M_2 k_2^2 : a_2^2} (1 + \sqrt{\mu})$$

$$= (c_1 - c_2) \frac{M_2 k_2^2 a_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}), \text{ sowie}$$

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1 k_1^2 : a_1^2}{M_1 k_1^2 : a_1^2 + M_2 k_2^2 : a_2^2} (1 + \sqrt{\mu})$$

$$= (c_1 - c_2) \frac{M_1 k_1^2 a_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern c_1 und c_2 die Geschwindigkeiten dieser Punkte vor dem Stoße waren.

Führen wir aber die Winkelgeschwindigkeiten ein, bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoße durch ε_1 und ε_2 und die nach dem

Stoße durch ω_1 und ω_2, so haben wir $c_1 = a_1 \varepsilon_1$, $c_2 = a_2 \varepsilon_2$, sowie $v_1 = a_1 \omega_1$ und $v_2 = a_2 \omega_2$ zu setzen, und erhalten für den stoßenden Körper den Verlust an Winkelgeschwindigkeit

$$\varepsilon_1 - \omega_1 = a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

und für den gestoßenen Körper, den Gewinn an Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 - \varepsilon_2 = a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_1 k_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

folglich die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoße selbst:

$$\omega_1 = \varepsilon_1 - a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)(1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}$$

und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)(1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 k_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}.$$

Sind beide Körper vollkommen elastisch, so hat man $\mu = 1$, also:

$$1 + \sqrt{\mu} = 2,$$

und sind sie unelastisch, so hat man $\mu = 0$, also:

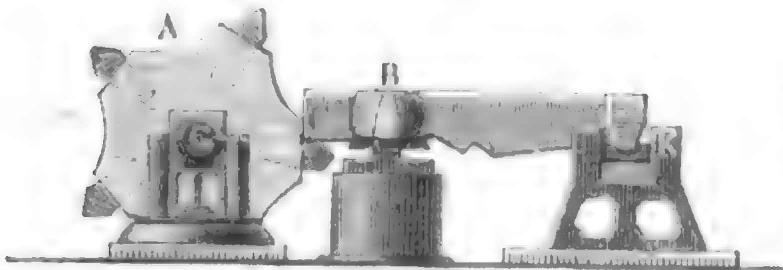
$$1 + \sqrt{\mu} = 1.$$

Im letzteren Falle ist der durch den Stoß hervorgebrachte Verlust an lebendiger Kraft

$$= (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)^2 \cdot \frac{M_1 k_1^2 . M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}.$$

Beispiel. Die armirte Welle AG, Fig. 561, hat das Trägheitsmoment in Hinsicht auf ihre Umdrehungsaxe G,

Fig. 561.



$= M_1 k_1^2 = 40000 : g$, und der Stirnhammer BK dasselbe in Hinsicht auf seine Axe K, $= 150000 : g$, der Hebelarm GC der Welle ist 2 Fuß sowie der Hebelarm KC des Hammers 6 Fuß, und die Winkelgeschwindigkeit der Welle im Augenblicke des Stoßes an den Hammer $= 1,05$ Fuß. Wie groß ist diese Geschwindigkeit nach dem Stoße und welche Leistung geht durch jeden Stoß verloren, wenn gänzlicher Mangel an Elasticität vorhanden vorausgesetzt wird? Es ist die gesuchte Winkelgeschwindigkeit der Welle:

$$\omega_1 = 1,05 - \frac{4 . 1,05 . 150000}{40000 . 36 + 150000 . 4} = 1,05 \left(1 - \frac{60}{204}\right) = 1,05 . 0,706$$
$$= 0,741 \text{ Fuß},$$

und die des Hammers,

$$= \frac{2 . 6 . 1,05 . 4}{204} \text{ auch } = \omega_1 \cdot \frac{GC}{KC} = 0,741 . \tfrac{2}{6} = 0,247 \text{ Fuß},$$

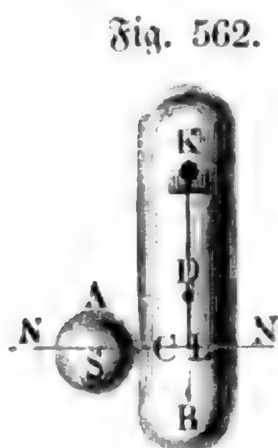
d. i. dreimal so klein, als die der Welle. Der Arbeitsverlust bei jedem Anstoße ist

$$A = \frac{(2\,.\,1{,}05^2)}{2\,g} \cdot \frac{40000\,.\,150000}{40000\,.\,36 + 150000\,.\,4} = 0{,}016\,.\,(2{,}1)^2 \cdot \frac{600000}{144 + 60}$$

$$= 0{,}016\,.\,4{,}41 \cdot \frac{150000}{51} = \frac{10584}{51} = 207{,}5 \text{ Fußpfund.}$$

§. 343 **Stoss eines schwingenden Körpers.** Kommt ein freier und in fortschreitender Bewegung befindlicher Körper A, Fig. 562, mit einem um eine feste Axe K drehbaren Körper BCK zum Stoße, so findet man die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, indem man in den Formeln des vorigen Paragraphen statt $a_1\,\varepsilon_1$ und $a_1\,\omega_1$ die progressiven Geschwindigkeiten c_1 und v_1, und statt $\frac{M_1 k_1^2}{a_1^2}$ die träge Masse M_1 des ersten Körpers einsetzt, die übrigen Bezeichnungen aber unverändert läßt. Es ist hiernach die Geschwindigkeit der ersten Masse nach dem Stoße:

Fig. 562.



$$v_1 = c_1 - (c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2},$$

und die Winkelgeschwindigkeit der zweiten:

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2\,(c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}.$$

Ist die Masse M_2 in Ruhe, also $\varepsilon_2 = 0$, so hat man:

$$v_1 = c_1 - c_1\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}$$

und

$$\omega_2 = c_1\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1\,a_2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}.$$

Ist hingegen M_1 in Ruhe, stößt also die oscillirende Masse, so hat man $c_1 = 0$, daher:

$$v_1 = a_2\,\varepsilon_2\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}$$

und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 \left(1 - (1 + \sqrt{\mu})\,\frac{M_1\,a_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}\right).$$

Die Geschwindigkeit, welche einer ruhenden Masse von einer anderen durch den Anstoß ertheilt wird, hängt nicht allein von der Geschwindigkeit des Anstoßes und von den Massen der Körper, sondern auch von dem Abstande $KL = a_2$ ab, um welchen die Stoßrichtung $N\overline{N}$ von der Axe K des drehbaren Körpers absteht. Stößt die freie Masse, so nimmt die drehbare Masse die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = c_1 (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}$$

an, und trifft die schwingende Masse gegen die freie, so erhält diese die Geschwindigkeit

$$v_1 = \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 k_2^2 . a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2};$$

es werden also beide Geschwindigkeiten um so größer, je größer

$$\frac{a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2} \text{ oder } \frac{1}{M_1 a_2 + \frac{M_2 k_2^2}{a_2}},$$

also je kleiner $M_1 a_2 + M_2 \frac{k_2^2}{a_2}$ ist.

Setzen wir statt a_2, $a \pm x$, wo x sehr klein ist, so bekommen wir den Werth des letzteren Ausdruckes:

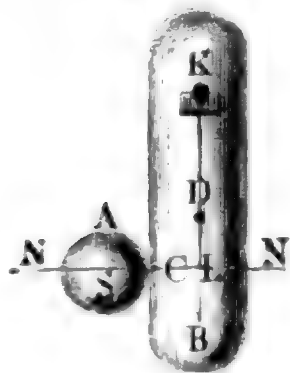
$$M_1 (a \pm x) + \frac{M_2 k_2^2}{a \pm x} = M_1 a \pm M_1 x + \frac{M_2 k_2^2}{a} \left(1 \mp \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \mp \cdots\right),$$

oder, wegen der Kleinheit der Potenzen von x,

$$= M_1 a + \frac{M_2 k_2^2}{a} \pm \left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x + \cdots$$

Soll nun a dem kleinsten aller Werthe von $M_1 a_2 + \frac{M_2 k_2^2}{a_2^2}$ entsprechen, so muß das Glied $\pm \left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x$ wegfallen, weil dasselbe bei einem Zusatze (x) ein anderes Zeichen erhält, als bei einer Abnahme ($-x$).

Fig. 563.



Es muß also:

$$\left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x = \text{Null, d. i.:}$$

$$\frac{M_2 k_2^2}{a^2} = M_1, \text{ folglich}$$

$$a = \sqrt{\frac{M_2 k_2^2}{M_1}} = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$$

sein.

Wenn man also in diesem Abstande (a) den einen Körper gegen den anderen stößt, so nimmt dieser die größte Geschwindigkeit an, und zwar:

$$1)\ \omega_2 = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{c_1}{2 k_2} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{c_1}{2 a},$$

in dem Falle, wenn der drehbare Körper gestoßen wird; und

$$2)\ v_1 = \tfrac{1}{2} k_2 \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{\varepsilon_2 a}{2},$$

wenn der freie Körper einen Stoß erhält.

Man nennt den in der Stoßlinie befindlichen Endpunkt L des der größten Geschwindigkeit entsprechenden Abstandes oder Hebelarmes $a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$ zuweilen, jedoch unpassend, Mittelpunkt des Stoßes, angemessener vielleicht **Stoßpunkt**.

Es ist derselbe nicht mit dem oben (§. 313) gefundenen **Mittelpunkte des Stoßes** zu verwechseln, dessen Entfernung von der Umdrehungsaxe durch den Ausdruck

$$a = \frac{M_2 k_2^2}{M_2 s} = \frac{k_2^2}{s},$$

worin s den Abstand des Schwerpunktes der Masse M_2 von der Umdrehungsaxe bezeichnet, bestimmt ist. Wenn die Richtung $\overline{NN}$ des Zusammenstoßes der Massen M_1 und M_2 durch den Mittelpunkt des Stoßes geht, so fällt die Reaction auf die Umdrehungsaxe der letzteren Null aus.

Damit z. B. ein Hammer beim Aufschlagen **nicht pralle**, d. i. auf die Hand, welche ihn hält, oder auf die Hülse, um welche er sich dreht, nicht reagire, ist es nöthig, daß der Schlag durch den Mittelpunkt des Stoßes gehe.

Wird der aufgehangene Körper KB im Stoßpunkte, also im Abstande $a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$ von der Axe K, durch eine Masse M_1 mit der Kraft P gestoßen, so ist die Reaction auf die Axe:

$$P_1 = P + R = P - \varkappa M_2 s \text{ (s. §. 313).}$$

Da $P = \frac{\varkappa M_2 k_2^2}{a}$ ist, so folgt die Winkelacceleration $\varkappa = \frac{Pa}{M_2 k_2^2}$ und $\varkappa M_2 s = \frac{M_2 s a}{M_2 k^2} P$, so daß nun die gesuchte Reaction:

$$P_1 = P\left(1 - \frac{M_2 s a}{M_2 k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s a}{k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s}{k_2}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right) \text{ folgt.}$$

Beispiele. 1) Bei einer prismatischen Stange CA, Fig. 564, die sich um einen ihrer Endpunkte dreht, steht der Mittelpunkt des Stoßes um

Fig. 564.

$$CO = a = \frac{\frac{1}{3} r^2}{\frac{1}{2} r} = \frac{2}{3} r = \frac{2}{3} CA$$

von der Axe ab. Wenn man also die Stange an einem Ende festhält, und mit dem in der Entfernung $CO = \frac{2}{3} CA$ befindlichen Punkte auf ein Hinderniß O aufschlägt, so wird man kein Prallen fühlen. Der Stoßpunkt dieser Stange steht dagegen um $r\sqrt{\frac{M_2}{3 M_1}}$ von C ab; ist z. B. die Masse des gestoßenen Körpers, $M_1 = M_2$, so hat man diesen Abstand $= \frac{r}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\, r$. In diesem Abstande muß also die Stange CA an die ruhende Masse M_1 anschlagen, damit diese mit der größten Geschwindigkeit fortgeht.

2) Bei einem Parallelepipede BDE, Fig. 565, welches sich um eine zu vier Seiten desselben parallel gehende und um $SA = s$ vom Schwerpunkt abstehende Are $X\bar{X}$ dreht, ist der Abstand AO des **Stoßmittelpunktes** O von der Are:

Fig. 565.

$$a = \frac{s^2 + \frac{1}{3} d^2}{s},$$

wo d die halbe Diagonale CD der Seitenflächen bezeichnet, durch welche die Are $X\bar{X}$ hindurchgeht (§. 287). Ginge die Stoßkraft P durch den Stoßpunkt, so hätte man:

$$a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{(s^2 + \frac{1}{3} d^2) \frac{M_2}{M_1}},$$

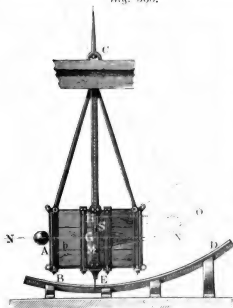
und daher die Reaction auf die Are:

$$P_1 = P\left(1 - \frac{s a}{k_2^2}\right)$$

$$= P\left(1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{1}{3} d^2}} \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right).$$

Ballistisches Pendel. Eine Anwendung der im Vorstehenden entwickelten Lehren findet man in der Theorie des **ballistischen Pendels** oder des **Pendels von Robins** (franz. pendule ballistique; engl. ballistic pendulum). Dasselbe besteht in einer großen, um eine horizontale Are C drehbaren Masse M, Fig. 566, welche durch gegen sie abgeschossene Geschützkugeln A in Schwingungen versetzt wird und dazu dient, die Geschwindigkeiten derselben zu ermitteln. Damit ein möglichst unelastischer Stoß eintrete, ist in der vorderen Seite, wo die Kugel anschlägt, eine Oeffnung angebracht, die man von Zeit zu Zeit mit frischem Holze oder Thon u. s. w. ausfüllt. Es bleibt dann auch die Kugel nach dem jedesmaligen Schusse in diesen Massen stecken und schwingt mit dem ganzen Körper gemeinschaftlich. Zur Ermittelung der Geschwindigkeit der Kugel ist es nöthig, den Elongationswinkel dieses Pendels zu kennen; deshalb wird noch ein Gradbogen BD angebracht und ein Stift E unter dem Schwerpunkte des Pendels befestigt, der an dem ersteren hingleitet. §. 344

Fig. 566.



Nach dem vorstehenden Paragraphen ist die Winkelgeschwindigkeit des ballistischen Pendels nach dem Anstoße der Kugel:

$$\omega = \frac{M_1 a_2 c_1}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2},$$

wenn M_1 die Masse der Kugel, $M_2 k_2^2$ das Trägheitsmoment des Pendels, c_1 die Geschwindigkeit der Kugel und a_2 den Hebelarm CG des Stoßes oder den Abstand der Stoßlinie $N\overline{N}$ von der Drehungsaxe des Pendels bezeichnet. Ist die Entfernung CM des Schwingungspunktes M der ganzen Masse sammt Kugel vom Drehpunkte C, d. i. die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem ballistischen gleiche Schwingungsdauer hat, $= r$, und der Elongationswinkel $ECD = \alpha$, so hat man die Steighöhe MH des isochron schwingenden Pendels:

$$h = CM - CH = r - r\cos.\alpha = r\,(1 - \cos.\alpha) = 2\,r\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

und daher die Geschwindigkeit im untersten Punkte seiner Bahn:

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = 2\,\sqrt{g\,r}\,\sin.\frac{\alpha}{2},$$

oder die entsprechende Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{v}{r} = 2\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Werthe für die Winkelgeschwindigkeit folgt:

$$c_1 = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}{M_1 a_2}\cdot 2\sqrt{\frac{g}{r}}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Nun ist aber der Theorie des einfachen Pendels zufolge:

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}{(M_1 + M_2)\,s},$$

wenn s den Abstand CS des Schwerpunktes S von der Drehaxe bezeichnet; es folgt daher:

$$M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2 = (M_1 + M_2)\,s\,r \text{ und}$$

$$c_1 = 2\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1}\right)\cdot\frac{s}{a_2}\sqrt{g\,r}\,.\,\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Macht das Pendel in der Minute n Schwingungen, so ist die Schwingungsdauer:

$$\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{60''}{n}, \text{ daher } \sqrt{g\,r} = \frac{60''.\,g}{n\,\pi},$$

und die gesuchte Kugelgeschwindigkeit:

$$c_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1}\cdot\frac{120\,g\,s}{n\,\pi\,a_2}\cdot\sin.\frac{\alpha}{2}.$$

Beispiel. Wenn ein ballistisches Pendel von 3000 Pfund Gewicht durch eine angeschossene Kugel von 6 Pfund in Schwingungen versetzt wird, deren Elongation 15° mißt, wenn ferner der Abstand s des Schwerpunktes von der Axe, = 5 Fuß und der Abstand der Schußlinie von eben dieser Axe, = 5½ Fuß beträgt, und

endlich die Zahl der Schwingungen in einer Minute $n = 40$ ausfällt, so ist nach obiger Formel die Geschwindigkeit der Kugel im Augenblicke des Anstoßes:

$$c = \frac{3006}{6} \cdot \frac{120 \,.\, 31{,}25 \,.\, 5}{40 \,.\, 3{,}1416 \,.\, 5{,}5} \, sin. \, 7^1/_2{}^0 = \frac{501 \,.\, 3750 \,.\, sin. \, 7^0\, 30'}{44 \,.\, 3{,}1416} = 1774 \text{ Fuß}.$$

Excentrischer Stoss. Untersuchen wir endlich noch einen einfachen Fall des excentrischen Stoßes, wenn beide Massen vollkommen frei sind. Wenn zwei Körper A und BE, Fig. 567, so zusammenstoßen, §. 345

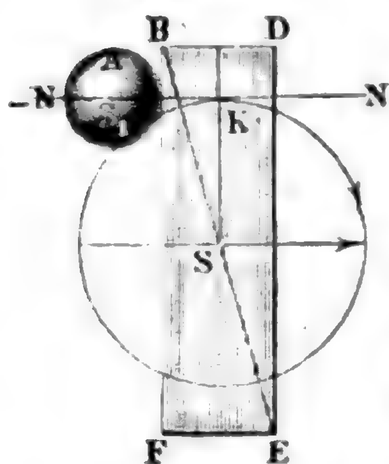


Fig. 567.

daß die Richtung $N\overline{N}$ des Stoßes durch den Schwerpunkt S_1 des einen Körpers hindurch und vor dem Schwerpunkt S des anderen Körpers vorbeigeht, so ist der Stoß in Hinsicht auf den ersten Körper centrisch und in Hinsicht auf den anderen excentrisch. Die Wirkungen dieses excentrischen Stoßes lassen sich aber nach dem Lehrsatze in §. 281 finden, wenn man annimmt: erstens, der zweite Körper sei frei und die Stoßrichtung gehe durch den Schwerpunkt S selbst, und zweitens, dieser Körper werde im Schwerpunkte festgehalten und die Stoßkraft wirke als eine Umdrehungskraft. Ist nun c_1 die anfängliche Geschwindigkeit von A, c die des Schwerpunktes von BE, und gehen beide Geschwindigkeiten durch den Stoß in v_1 und v über, so bleibt, wie in §. 332, $M_1 v_1 + Mv = M_1 c_1 + Mc$. Ist ferner ε die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers BE bei seiner Umdrehung um die Axe durch den Schwerpunkt und senkrecht gegen die Ebene $N\overline{N}S$, geht diese Geschwindigkeit durch den Stoß in ω über, und bezeichnet man das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf S durch Mk^2, und die Excentricität oder den Abstand SK des Schwerpunktes S von der Stoßrichtung durch s, so hat man auch

$$M_1 v_1 + \frac{Mk^2}{s^2} \cdot s\,\omega = M_1 c_1 + \frac{Mk^2}{s^2}\, s\,\varepsilon.$$

Sind beide Körper unelastisch, so haben die Berührungspunkte beider am Ende des Stoßes gleiche Geschwindigkeit, es ist also noch $v_1 = v + s\omega$. Bestimmt man aus den vorigen Gleichungen v und ω durch v_1 und setzt man die erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man:

$$v_1 = \frac{M_1\,(c_1 - v_1)}{M} + c + \frac{M_1\, s^2\,(c_1 - v_1)}{Mk^2} + s\,\varepsilon,$$

und hieraus bestimmt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{Mk^2\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1\, s^2},$$

der Gewinn an progressiver Geschwindigkeit des zweiten:

$$v - c = \frac{M_1\, k^2\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1\, s^2},$$

und der Gewinn an Winkelgeschwindigkeit desselben:

$$\omega - \varepsilon = \frac{M_1 s (c_1 - c - s \varepsilon)}{(M_1 + M) k^2 + M_1 s^2}.$$

Beim vollkommen elastischen Stoße sind diese Werthe doppelt und beim unvollkommen elastischen Stoße $(1 + \sqrt{\mu})$ mal so groß.

Beispiel. Trifft eine eiserne Kugel A von 65 Pfund Gewicht das anfänglich in Ruhe befindliche Parallelepiped BE, Fig. 567, aus Tannenholz mit 36 Fuß Geschwindigkeit, ist die Länge dieses Körpers 5 Fuß, die Breite 3 Fuß und die Dicke 2 Fuß, und weicht die Stoßrichtung $N\overline{N}$ um $SK = s = 1^3/_4$ Fuß von dem Schwerpunkte S ab, so ergeben sich folgende Geschwindigkeitswerthe nach dem Stoße. Das specifische Gewicht des Tannenholzes, $= 0,45$ angenommen, folgt das Gewicht des parallelepipedischen Körpers, $= 5 . 3 . 2 . 61,75 . 0,45 = 833,6$ Pfund. Das Quadrat der halben Diagonale BS der Seitenfläche BDF parallel zur Stoßrichtung ist:

$$(^5/_2)^2 + (^2/_2)^2 = 7,25,$$

daher folgt (nach §. 287):

$$k^2 = {}^1/_3 . 7,25 = 2,416 \ldots,$$

ferner

$$g\, M k^2 = 833,6 . 2,416 \ldots = 2014,0$$

und

$$g (M_1 + M) k^2 = 898,6 . 2,416 \ldots = 2171,1,$$

und es ist nun die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoße:

$$v_1 = c_1 - \frac{M k^2 c_1}{(M_1 + M) k^2 + M_1 s^2} = 36 \left(1 - \frac{2014,0}{2171,1 + 65 . 1,75^2}\right)$$

$$= 36 \left(1 - \frac{2014,0}{2370,2}\right) = 36 . 0,1503 = 5,410 \text{ Fuß},$$

ferner die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des gestoßenen Körpers:

$$v = \frac{M_1 k^2 c_1}{(M_1 + M) k^2 + M_1 s^2} = \frac{157,08 . 36}{2370,2} = 2,386 \text{ Fuß},$$

und endlich die Winkelgeschwindigkeit desselben:

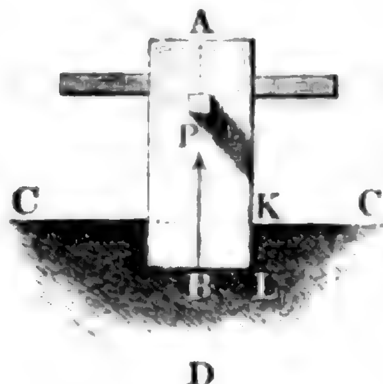
$$\omega = \frac{M_1 s c_1}{(M_1 + M) k^2 + M_1 s^2} = \frac{113,75 . 36}{2370,2} = 1,728 \text{ Fuß}.$$

346 **Benutzung der Stosskraft.** Während das Gewicht eines Körpers eine nur von der Masse desselben abhängige und mit derselben gleichmäßig wachsende Kraft ist, hat man es dagegen bei dem Stoße mit einer Kraft zu thun, welche nicht allein mit der Masse, sondern auch mit der Geschwindigkeit und mit der Härte der zusammenstoßenden Körper wächst (s. §. 336 und §. 338) und daher auch beliebig gesteigert werden kann. Deshalb ist auch der Stoß ein vorzügliches Mittel zur Erzeugung größerer Kräfte mit Hülfe kleinerer Massen oder Gewichte, von welchen z. B. beim Zerschlagen oder Zerpochen der Steine, beim Schneiden und Zusammendrücken der Metalle, beim Einschlagen der Nägel, Einrammen der Pfähle u. s. w. vielfacher Gebrauch gemacht wird. Auf der anderen Seite ist aber auch der Stoß ein Mittel, wodurch nicht allein mechanisches Arbeitsvermögen aufgezehrt, sondern auch ein stärkeres Abführen oder Abnutzen der Maschinentheile herbeigeführt und überhaupt die Haltbarkeit

und Dauerhaftigkeit der Maschinen und Bauwerke beeinträchtigt wird, so daß es daher nöthig wird, denselben stärkere Dimensionen zu geben, als wenn sie Züge und Drücke, Gewichte u. s. w. ohne Stöße aufzunehmen hätten.

Schlägt ein fester Körper AB, Fig. 568, auf eine unbegrenzte weiche Masse CDC auf, so drückt er dieselbe mit einer gewissen Kraft zusammen, deren mittlerer Werth P sich mittels der Tiefe $KL = s$ der Eindringung bestimmen läßt, wenn man die Arbeit Ps des Eindringens gleich dem Arbeitsvermögen der trägen Masse des Körpers setzt. Ist M die Masse oder $G = gM$ das Gewicht dieses Körpers (AB) und v die Geschwindigkeit, mit welcher er auf CDC aufschlägt, so beträgt das Arbeitsvermögen seiner trägen Masse

Fig. 568.



$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{v^2}{2g} G,$$

und es ist daher die gesuchte Kraft, mit welcher die weiche Masse zusammengedrückt wird:

$$P = \frac{1}{2} \frac{M v^2}{s} = \frac{v^2}{2gs} G.$$

Wenn man diese Kraft durch den Querschnitt F des Körpers dividirt, so erhält man die Kraft, mit welcher jede Flächeneinheit der lockeren Masse zusammengedrückt ist, und welche folglich auch eine solche Einheit, ohne nachzugeben, tragen kann:

$$p = \frac{P}{F} = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{G}{Fs}.$$

Der Sicherheit wegen belastet man jedoch eine solche Masse nur mit einem kleinen Theil von p, z. B. mit dem zehnten Theile $\left(\frac{p}{10}\right)$.

Die Geschwindigkeit v erhält der Körper M dadurch, daß man ihn von einer Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ frei herabfallen läßt. Führt man diese Höhe statt $\frac{v^2}{2g}$ in die vorige Formel ein, so erhält man einfach den Widerstand der weichen Masse:

$$P = \frac{Gh}{s}, \text{ also für die Flächeneinheit: } p = \frac{Gh}{Fs}.$$

Die Kraft oder der Widerstand P, welchen die lockere oder weiche Masse dem Eindringen eines starren Körpers AB entgegensetzt, ist in der Regel nicht constant, sondern wächst mit der Tiefe s des Eindringens. In vielen Fällen kann man annehmen, daß sie mit s gleichmäßig wächst, und zwar anfangs Null und am Ende des Eindringens doppelt so groß ist als im

Mittel. Da nun in den gefundenen Formeln P den mittleren Kraftwerth angiebt, so hat man folglich dann den Widerstand der weichen Masse oder die Tragkraft P_1 derselben doppelt so groß, als diese Formeln angeben, d. i.

$$P_1 = 2\,P = \frac{2\,G\,h}{s}$$

zu setzen.

Beispiel. Wenn eine Handramme AB, Fig. 568, deren Gewicht $G = 120$ Pfund ist, von einer Höhe $h = 4$ Fuß auf eine Erdmasse herabfällt, und diese beim letzten Schlage noch $^1/_4$ Zoll zusammendrückt, so ist die Tragkraft dieser Masse auf eine dem Querschnitt der Ramme gleiche Fläche:

$$P = \frac{G\,h}{s} = \frac{120.4}{^1/_{48}} = 23040 \text{ Pfund.}$$

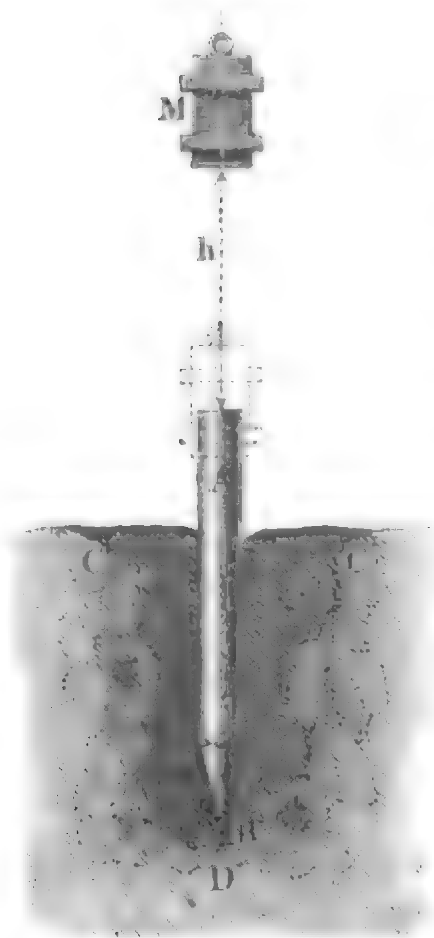
Wäre nun noch der Querschnitt F der Ramme, $^5/_4$ Quadratfuß, so würde folglich das Tragvermögen der Erdmasse pr. Quadratfuß

$$p = \frac{P}{F} = \frac{23040}{1,15} = 18432 \text{ Pfund}$$

betragen, wofür jedoch der Sicherheit wegen, vielleicht nur $^1/_{10}\,P_1 = 1843,2$ Pfund anzunehmen ist.

347 **Einrammen der Pfähle.** Durch Einrammen von Pfählen wie AB, Fig. 569, erhält der Erdboden CDC oder eine andere lockere Masse noch eine größere Tragfähigkeit als durch bloßes Zusammenstampfen. Solche Pfähle (franz. pieux; engl. piles) sind 10 bis 30 Fuß lang, 8 bis 20 Zoll dick, und erhalten einen zugespitzten eisernen Schuh B. Der Körper M, der sogenannte Rammklotz, Rammbär oder Hoyer (franz. mouton; engl. battering ram), welchen man 3 bis 30 Fuß hoch herabfallen und auf den Kopf des Pfahles aufschlagen läßt, besteht in der Regel aus Gußeisen, seltener aus Eichenholz, und wiegt 5 bis 20 Ctr.

Fig. 569.



Fällt der Rammbär von der senkrechten Höhe h herab, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher er auf den Pfahl aufschlägt,

$$c = \sqrt{2\,g\,h},$$

und ist das Gewicht desselben, $= G$, das des Pfahles aber, $= G_1$, so hat man unter der Voraussetzung, daß beide Körper unelastisch sind, die Geschwindigkeit derselben am Ende des Stoßes (s. §. 332):

$$v = \frac{G\,c}{G + G_1},$$

daher die entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{G}{G + G_1}\right)^2 \cdot \frac{c^2}{2g} = \left(\frac{G}{G + G_1}\right)^2 h.$$

Sinkt nun der Pfahl beim letzten Schlage um die Tiefe s ein, so ist der Widerstand des Erdreichs, und also auch die Tragfähigkeit des Pfahles:

$$P = \frac{v^2}{2gs}(G + G_1) = \frac{h}{s} \cdot \frac{G^2}{G + G_1},$$

oder vielmehr, da auch das Gewicht $G + G_1$ des Pfahles sammt Rammbär dem Widerstande des Erdreiches entgegenwirkt:

$$P = \frac{h}{s} \cdot \frac{G^2}{G + G_1} + (G + G_1).$$

In den meisten Fällen ist $G + G_1$ so klein gegen P, daß der letzte Theil der Formel unbeachtet bleiben kann.

Ist das Gewicht G_1 des Pfahles viel kleiner als das Gewicht G des Rammbäres, so kann man

$$v = \frac{Gc}{G + G_1} = c$$

und einfach,

$$P = \frac{h}{s} G \text{ setzen.}$$

Die vorstehende Theorie reicht in der praktischen Anwendung nur dann aus, wenn der Widerstand P ein mäßiger und folglich die Tiefe s des Eindringens nicht sehr klein ist, so daß die Zusammendrückung des Pfahles u. s. w. außer Acht gelassen werden kann. Ist hingegen der Widerstand P sehr groß, und folglich die Tiefe s des Eindringens bei einem Schlage sehr klein, so läßt sich die Zusammendrückung σ des Pfahles nicht mehr als Null ansehen und muß daher mit in Betracht gezogen werden.

Der Pfahl fängt natürlich nicht eher an zu sinken, als bis die Kraft des Stoßes dem Widerstande P des Erdreichs gleich geworden ist. Sind nun $H = \frac{FE}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ die Härten des Rammbäres und des Pfahles (im Sinne des §. 336), so beträgt bei der Stoßkraft P die Summe der Zusammendrückungen beider Körper zusammen:

$$\sigma = \frac{P}{H} + \frac{P}{H_1} = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) P,$$

und es ist daher die auf diese Zusammendrückungen verwendete mechanische Arbeit:

$$L = P\sigma = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}.$$

Wird nun durch diesen ersten Zusammenstoß die Geschwindigkeit c des

Rammbäres in die Geschwindigkeit v umgeändert, so verrichtet Masse $M = \frac{G}{g}$ desselben die mechanische Arbeit

$$L = \frac{1}{2} M c^2 - \frac{1}{2} M v^2 = (c^2 - v^2) \frac{M}{2} = \left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) G;$$

wir können folglich

$$\left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) G = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

setzen, und erhalten

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} - \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2G},$$

folglich die Geschwindigkeit des Rammbäres im Augenblicke, wenn der Pfahl einzudringen anfängt:

$$v = \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2G}}.$$

Es ist hiernach zu ermessen, daß dieses Eindringen des Pfahles (und ebenso auch eines Bolzens oder Nagels in eine Wand) nur dann vor sich gehen kann, wenn

$$\frac{c^2}{2g} G > \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

ist, wenn also das Gewicht des Rammbäres und die Geschwindigkeit desselben eine dem Widerstande des Erdreiches angemessene Größe haben.

Während der Pfahl eindringt, nimmt die Stoßkraft und folglich auch die Zusammendrückung des Pfahles u. s. w. so lange zu, als die Geschwindigkeit des Rammbäres noch größer ist als die des Pfahles; nachdem aber beide Körper eine gleiche Geschwindigkeit v_1 erlangt haben und die Stoßkraft ihr Maximum erreicht hat, fangen die Körper an, sich allmälig wieder auszudehnen. Bei diesem Ausdehnen geht nicht allein die Geschwindigkeit des Pfahles, sondern auch die des Rammbäres allmälig in Null, sowie auch der Druck zwischen beiden Körpern wieder in P über, und es ist folglich in dem Augenblicke, wenn das weitere Eindringen des Pfahles aufhört, das ganze mechanische Arbeitsvermögen $\frac{c^2}{2g} G$ des Rammbäres durch die Arbeit

$$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

zum Zusammendrücken, und durch die Arbeit

$$Ps$$

zum Eintreiben des Pfahles um die Tiefe s, verbraucht.

Es ist also hiernach:

$$\frac{c^2}{2g} G = Gh = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2} + Ps,$$

und daher die der Eindringungstiefe s entsprechende Tragkraft:

$$P = \left(\frac{H H_1}{H + H_1}\right)\left(\sqrt{2\left(\frac{H + H_1}{H H_1}\right)\frac{c^2}{2g}\, G + s^2} - s\right).$$

Wäre die Zusammendrückung $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2}$ bedeutend kleiner als der Weg s des Pfahles, so könnte man einfach

$$P = \frac{c^2}{2g}\,\frac{G}{s} = \frac{G h}{s} \text{ oder schärfer,}$$

$$P = \frac{G h}{s + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{G h}{2 s}} \text{ setzen.}$$

Vergleicht man die Arbeit

$$P s = \frac{G h}{1 + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2 s}}$$

des eindringenden Pfahles mit der Arbeit $G h$, welche das Aufheben des Rammbäres erfordert, so sieht man, daß sich dieselbe der letzteren um so mehr nähert, je kleiner $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2 s}$ ausfällt, je größer also die Härten $H = \frac{F E}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ des Rammbäres und des Pfahles, d. i. je größer die Querschnitte F und F_1 sowie die Elasticitätsmodel E und E_1, und je kleiner die Längen l und l_1 dieser Körper sind.

Die Wirkungen dieser beiden Körper durch ihre Gewichte kann man ganz außer Acht lassen, da die letzteren in der Regel nur einen kleinen Theil von dem Widerstande P ausmachen. Ebenso läßt sich das Arbeitsvermögen beider Körper, welches dieselben in Folge ihrer, wenn auch nur unvollkommenen Elasticität besitzen, nachdem der Pfahl wieder zur Ruhe übergegangen ist, vernachlässigen, da der durch die weitere Ausdehnung der Körper zurückgeworfene Körper beim Zurückfallen und Wiederaufschlagen auf den Pfahl in der Regel nicht im Stande ist, P zu überwinden und den Pfahl in Bewegung zu setzen. Der Sicherheit wegen belastet man die eingerammten Pfähle nur mit $^1/_{10}$ des gefundenen Widerstandes P, oder nach Befinden noch schwächer. Nach neuerlich angestellten Versuchen vom Herrn Major John Sanders im Fort Delaware (briefliche Mittheilung) läßt sich der Widerstand annähernd einfach

$$P = \frac{G h}{3 s} \text{ setzen.}$$

Beispiel. Ein Pfahl von 1 Quadratfuß = 144 Quadratzoll Querschnitt, 25 Fuß = 25 . 12 = 300 Zoll Länge und 1200 Pfund Gewicht, ist durch einen 6 Fuß = 72 Zoll hoch herabfallenden Rammbär von 2000 Pfund Gewicht bei der

letzten Hitze von 10 Schlägen noch 2 Zoll tiefer eingetrieben worden, welche Größe hat der Widerstand des Erdreiches? Sieht man von der unbedeutenden Zusammendrückung des gußeisernen Rammbärs ganz ab, und setzt man (nach §. 212) den Elasticitätsmodul des Holzes $E_1 = 1'500000$ Pfund, so erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) = 0 + \frac{l_1}{2\,F_1 E_1} = \frac{300}{2\,.\,144\,.\,1'500000} = \frac{1}{1440000};$$

da nun noch $Gh = 2000\,.\,72 = 144000$ Zollpfund und die Tiefe des Eindringens nach einem Schlage, $s = \frac{2}{10} = 0{,}2$ Zoll ist, so erhält man zur Bestimmung des Widerstandes P folgende Gleichung:

$$\frac{P^2}{1440000} + 0{,}2\,P = 144000, \text{ oder } P^2 + 288000\,P = 207\,360\,000\,000.$$

Die Auflösung derselben giebt:

$$P = -\,144000 + \sqrt{228096\,000000} = 333590 \text{ Pfund}.$$

Nach der Sanders'schen Formel ist:

$$P = \frac{Gh}{3s} = \frac{144000}{0{,}6} = 290000 \text{ Pfund},$$

wogegen der alten Formel zufolge,

$$P = \frac{G^2 h}{(G + G_1)s} = \frac{G}{G + G_1} \cdot \frac{Gh}{s} = \frac{2000}{3200} \cdot \frac{144000}{0{,}2} = \frac{5}{8}\,.\,720000$$
$$= 450000 \text{ Pfund}$$

sein müßte.

Aus $P = 333590$ Pfund ergiebt sich

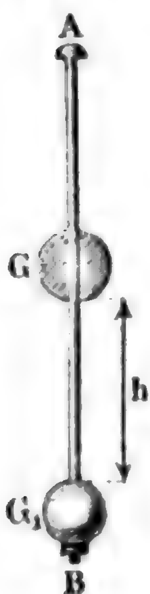
$$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2} = 77269 \text{ Zollpfund},$$

und daher die Höhe, von welcher der 2000 Pfund schwere Rammbär herabfallen muß, um den Pfahl bewegen zu können:

$$h = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2\,G} = \frac{77269}{2000} = 38{,}6 \text{ Zoll}.$$

348 **Absolute Stossfestigkeit.** Mit Hülfe der Arbeitsmodel der Elasticität und Festigkeit (s. §. 206) kann man nun auch leicht berechnen, unter welchen Bedingungen ein prismatischer Körper AB, Fig. 570, durch einen in der Axenrichtung geführten Stoß bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt oder, nach Befinden, zerrissen werden kann. Ist G das Gewicht und c die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers, so hat man die Arbeit, welche derselbe beim Aufschlagen auf den prismatischen Körper, dessen Gewicht wir mit G_1 bezeichnen wollen, entwickelt:

Fig. 570.



$$L = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{G^2}{G + G_1},$$

oder einfacher, wenn man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ durch h bezeichnet,

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1}.$$

Diese Arbeit wird vorzüglich auf die Ausdehnung der Stange AB, woran der zweite Körper hängt, aufgewendet; ist daher H die Härte, l die Länge, F der Querschnitt und E der Elasticitätsmodul, sowie P die Stoßkraft und λ die durch dieselbe hervorgebrachte Ausdehnung dieser Stange, so hat man:

$$L = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2}{2H} = \frac{1}{2} H \lambda^2 = \frac{FE}{2l} \lambda^2;$$

folglich:

$$\frac{FE}{2l} \lambda^2 = \frac{G^2 h}{G + G_1},$$

und es ist hiernach die durch dieses Zusammenstoßen bewirkte Ausdehnung λ der Stange leicht zu berechnen.

Soll die Stange hierbei nur bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden, so hat man, wenn A den Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze bezeichnet (s. §. 206),

$$L = AV = AFl,$$

und daher

$$AFl = \frac{G^2 h}{G + G_1}$$

zu setzen, und es ist daher die Stoßgeschwindigkeit $c = \sqrt{2gh}$, bei welcher die Grenze der Elasticität eintritt, durch ihre Höhe

$$h = \frac{G + G_1}{G^2} \cdot AFl$$

bestimmt.

Kommt es darauf an, die Bedingung des Zerreißens der Stange zu finden, so hat man den Arbeitsmodul A der Elasticitätsgrenze durch den Arbeitsmodul B des Zerreißens zu ersetzen.

Man ersieht aus diesen Formeln, daß die Stange um so größere Stöße aushalten kann, je größer ihre Masse ist. Hieraus folgt die wichtige Regel, daß man den Stößen ausgesetzten Körpern möglichst große Massen geben soll.

Da G und G_1 während des Stoßes noch um λ sinken, so ist richtiger

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1} + (G + G_1)\lambda,$$

also für den Fall, daß durch den Stoß die Elasticitätsgrenze erreicht wird,

$$AF = \frac{G^2}{G + G_1} \cdot \frac{h}{l} + (G + G_1) \frac{\lambda}{l},$$

wobei $\frac{\lambda}{l} = \sigma$ die dieser Grenze entsprechende Ausdehnung bedeutet.

Will man endlich noch die Masse und das Gewicht G_2 der Stange mit in Betracht ziehen, so hat man, da der Schwerpunkt derselben nur um $\frac{1}{2}\lambda$ sinkt,

$$AF = \frac{G^2}{G + G_1 + G_2} \cdot \frac{h}{l} + (G + G_1 + \frac{1}{2} G_2)\,\sigma$$

zu setzen.

Ein ähnlicher Fall der Stoßwirkung kommt dann vor, wenn eine bewegte Masse $M = \frac{G}{g}$, Fig. 571, mittels einer Kette oder eines Seiles AB eine andere Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$ in Bewegung setzt. Ist c die Geschwindigkeit von

Fig. 571.

M, in dem Augenblicke, wenn das Seil gespannt wird, und v die Geschwindigkeit, mit welcher beide Massen nach dem Stoße zusammen fortgehen, so hat man wieder:

$$v = \frac{Mc}{M + M_1} = \frac{Gc}{G + G_1},$$

dagegen aber die Arbeit, welche auf die Ausdehnung der Kette verwendet wird:

$$L = \frac{1}{2} Mc^2 - \frac{1}{2}(M + M_1)v^2 = \left(M - \frac{M^2}{M + M_1}\right)\frac{c^2}{2}$$

$$= \frac{MM_1}{M + M_1} \cdot \frac{c^2}{2} = \frac{GG_1}{G + G_1} \cdot h.$$

Wenn daher die Kette u. s. w. bei diesem Zusammenstoßen nur bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden soll, so läßt sich

$$AFl = \frac{GG_1}{G + G_1} h$$

setzen, wobei F den Querschnitt und l die Länge der Kette bezeichnen.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Kettenbrücke zwei gegenüber befindliche Hängestangen zusammen ein constantes Gewicht von 5000 Pfund tragen und durch einen darüber wegfahrenden Wagen noch mit 6000 Pfund belastet werden, wenn ferner der Arbeitsmodul A der Elasticitätsgrenze des Schmiedeeisens, 7 Zollpfund, die Länge einer Hängestange, 200 Zoll, und der Querschnitt derselben, 1,5 Quadratzoll beträgt, so hat man die gefährliche Fallhöhe:

$$h = \frac{AFl(G + G_1)}{G^2} = \frac{7 \,.\, 2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 200 \,.\, 11000}{36000000} = \frac{7 \,.\, 11}{60} = {}^{77}/_{60} = 1{,}28 \text{ Zoll}.$$

Rollt hiernach der Wagen über ein Hinderniß von 1,3 Zoll Höhe weg, so werden die Hängestangen schon Gefahr laufen, über die Elasticitätsgrenze hinaus ausgedehnt zu werden.

2) Wenn das gefüllte Fördergefäß oder die sogenannte Treibetonne in einem Schachte nicht allmälig aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wird, sondern mittels des vorher schlaff herabhängenden Seiles plötzlich von dem umlaufenden Korbe in eine gewisse Geschwindigkeit versetzt wird, so dehnt sich dadurch das Seil oft bis

über die Elasticitätsgrenze aus und es wird dasselbe zuweilen auch ganz zerrissen. Ist z. B. die träge Masse der armirten Korbwelle, reducirt auf den Umfang derselben: $M = \frac{G}{g} = \frac{100000}{g}$, das Gewicht der gefüllten Tonne, $G_1 = 2000$ Pfund, das Gewicht des Treibeseiles, $= 400$ Pfund, das Gewicht eines Cubikzolles Seil, $= 0,3$ Pfund, folglich das Volumen dieses Seiles:

$$Fl = \frac{G_1}{\gamma} = \frac{400}{0,3} = \frac{4000}{3} \text{ Pfund},$$

und endlich der Arbeitsmodul für das Zerreißen desselben: $B = 350$ Pfund, so hat man die dem Zerreißen des Seiles entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$h = BFl \cdot \frac{G + G_1}{G G_1} = 350 \cdot \frac{4000}{3} \cdot \frac{100000 + 2000}{100000 \, . \, 2000} = \frac{1'400000}{3} \cdot \frac{102}{200000}$$
$$= 238 \text{ Zoll} = 19,83 \text{ Fuß},$$

und daher die Geschwindigkeit des Seiles bei Beginn des Anspannens:

$$c = \sqrt{2gh} = \sqrt{62,5 \, . \, 19,83} = 35,2 \text{ Fuß}.$$

Relative Stossfestigkeit. Die vorstehende Theorie findet auch ihre Anwendung, wenn ein an beiden Enden unterstützter prismatischer Körper BB, Fig. 572, in seiner Mitte C den Schlag eines von einer Höhe $AC = h$ niederfallenden Körpers A aufnehmen muß. Ist $\frac{G}{g} = M$ die träge Masse des fallenden Körpers und M_1 die nach der Mitte C reducirte träge Masse des Körpers BB, so hat man wieder das Arbeitsvermögen, welches beide Körper nach dem Aufschlagen besitzen: §. 349

$$L = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{M^2}{M + M_1} = \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{M}{M + M_1} \cdot Mg = \frac{M}{M + M_1} Gh.$$

Fig. 572.

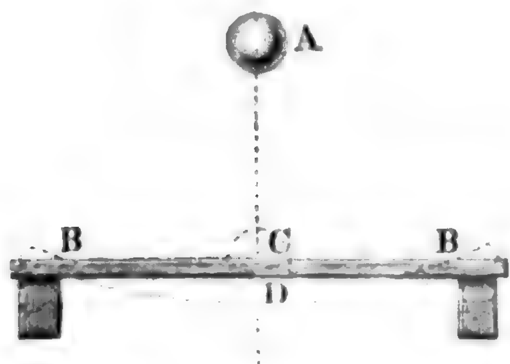
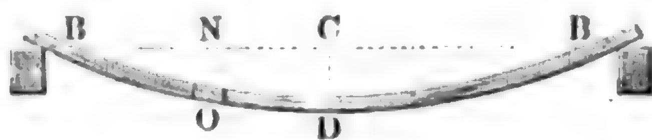


Fig. 573.



Die träge Masse M_1 des Balkens BB_1 ist auf folgende Weise zu ermitteln. Es sei G_1 das Gewicht dieses Balkens, l die halbe Länge BD, Fig. 573, derselben, x eine Abscisse BN und y die entsprechende Ordinate NO der von BB im Augenblicke der größten Biegung gebildeten Curve; endlich bezeichne noch a die größte Bogenhöhe CD dieser Curve. Denken wir uns BC in n (unendlich viele) Theile zerlegt, so erhalten wir ein Element O des Stangengewichtes, $= \frac{G_1}{n}$, und daher ein Element der trägen Stangenmasse von N nach D reducirt:

$$= \frac{G_1}{n g} \cdot \left(\frac{N O}{C D}\right)^2 = \frac{G_1 y^2}{n g a^2}.$$

Nun ist aber nach §. 217:

$$y = \frac{P x}{2 W E}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right), \text{ also}$$

$$y^2 = \frac{P^2 x^2}{4 W^2 E^2}\left(l^4 - {}^2/_3\, l^2 x^2 + \frac{x^4}{9}\right), \text{ und } a^2 = \frac{P^2 l^6}{9 W^2 E^2},$$

daher folgt das gesuchte Element der trägen Stange:

$$= \frac{9 G_1 x^2 \left(l^4 - {}^2/_3\, l^2 x^2 + \frac{x^4}{9}\right)}{4 n g l^6}.$$

Wenn man nun statt x nach und nach $\frac{l}{n}$, $2\frac{l}{n}$, $3\frac{l}{n} \cdots \frac{n l}{n}$ einführt, und die dadurch erhaltenen Werthe addirt, u. s. w., so erhält man die nach der Mitte C reducirte träge Masse der Stange $B B$:

$$M_1 = \frac{9 G_1}{4 g l^6}\left(l^4 \cdot \frac{l^3}{3} - {}^2/_3\, l^2 \cdot \frac{l^5}{5} + {}^1/_9\, \frac{l^7}{7}\right) = {}^{17}/_{35} \cdot \frac{G_1}{g}.$$

Dies vorausgesetzt, können wir nun die Arbeit des Stoßes

$$L = \frac{M}{M + M_1} \cdot G h = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35}\, G_1}$$

setzen, und erhalten so die Bedingung des Ausbiegens bis zur Elasticitätsgrenze (s. §. 235):

$$A \cdot \frac{W l}{3 e^2} = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35}\, G_1},$$

also, wenn der Balken eine parallelepipedische Form hat,

$${}^1/_9\, A V_1 = \frac{G^2 h}{G + {}^{17}/_{35}\, G_1},$$

und daher

$$h = \frac{A V_1 (G + {}^{17}/_{35}\, G_1)}{9 G^2}, \text{ oder } V_1 = \frac{G_1}{\gamma} \text{ gesetzt,}$$

$$h = \frac{A G_1 (G + {}^{17}/_{35}\, G)}{9 \gamma G^2}.$$

Führt man B statt A ein, so giebt der Ausdruck

$$h = \frac{B G_1 (G + {}^{17}/_{35}\, G_1)}{9 \gamma G^2}$$

die Höhe an, von welcher das Gewicht G herabfallen muß, um den parallelepipedischen Stab zu zerbrechen.

Beispiel. Wie hoch muß ein eisernes Gewicht G von 200 Pfund herabfallen, um eine an beiden Enden aufliegende Gußeisenplatte von 36 Zoll Länge, 12 Zoll Breite und 3 Zoll Dicke in ihrer Mitte zu zerschlagen?

Es ist hier der Arbeitsmodul der Festigkeit des Zerreißens

$$B = 14{,}2 \text{ Zollpfund}$$

zu setzen (s. §. 211), ferner das Volumen der Platte:

$$V_1 = b\,h\,l = 12 \,.\, 3 \,.\, 36 = 1296 \text{ Cubikzoll},$$

und da ein Cubikzoll Gußeisen, $\gamma = 0{,}259$ Pfund wiegt, ihr Gewicht:

$$G_1 = 1296 \,.\, 0{,}259 = 335{,}7 \text{ Pfund};$$

daher folgt die fragliche Höhe:

$$h = \frac{14{,}2 \,.\, 335{,}7\,(200 + {}^{17}/_{35} \,.\, 356{,}4)}{9 \,.\, 0{,}275 \,.\, 40000} = 18 \text{ Zoll}.$$

Arbeit der Torsionsfestigkeit. Es lassen sich auch noch die Wirkungen des Stoßes auf die Torsion der Wellen untersuchen. Nach §. 262 ist die mechanische Leistung, welche die Torsion α einer Welle von der Länge l und dem Drehungsmomente W erfordert: §. 351

$$L = \frac{P\,\alpha\,a}{2} = \frac{\alpha^2 \,.\, W\,C}{2\,l} = \frac{P^2\,a^2\,l}{2\,W\,C},$$

auch läßt sich setzen

$$L = \frac{S^2}{2\,C}\,\frac{W\,l}{e^2} \text{ (s. §. 264)},$$

wenn e den Abstand der entferntesten Faser von der neutralen Axe und S die Spannung dieser Faser bezeichnet.

Führt man statt S den Tragmodul T, und statt $\frac{T^2}{2\,C} = \frac{\sigma\,T}{2}$ den Arbeitsmodul A der Elasticität ein, so erhält man die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um die äußersten Fasern bis zur Elasticitätsgrenze zu spannen:

$$L = A \cdot \frac{W\,l}{e^2},$$

und die mechanische Arbeit zum Abwürgen der Welle, wenn man den Arbeitsmodul A durch den Arbeitsmodul B des Abdrehens ersetzt:

$$L_1 = B \cdot \frac{W\,l}{e^2}.$$

Für eine cylindrische Welle ist $W = \frac{\pi\,r^4}{2}$ und $e = r$, daher

$$L = \frac{A}{2} \cdot \pi\,r^2\,l = \frac{A}{2}\,V \text{ und } L_1 = \frac{B}{2} \cdot \pi\,r^2\,l = \frac{B}{2}\,V,$$

wobei $V = \pi\,r^2\,l$, das Volumen dieser Welle bezeichnet.

Für eine Welle mit quadratischem Querschnitte ist dagegen bei der Seitenlänge b dieses Querschnittes:

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e = b\sqrt{1/_2},$$

folglich:

$$L = \frac{A}{3}\, b^2 l = \frac{A}{3}\, V, \text{ und } L_1 = \frac{B}{3}\, V.$$

Stößt eine umlaufende Radwelle, deren auf den Angriffspunkt des Stoßes reducirte Masse $M = \frac{G}{g}$ ist, an eine ruhende Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$, mit der Geschwindigkeit c, so daß sich beide nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{Mc}{M + M_1} = \frac{Gc}{G + G_1}$$

fortbewegen (s. §. 334), so geht hierbei die Arbeit

$$L = \frac{G\,G_1}{G + G_1} \cdot \frac{c^2}{2g}$$

verloren (s. §. 335), welche auf die Torsion der Welle und Biegung der Radarme u. s. w. verwendet wird.

Nun ist aber auch L die Summe der Arbeiten, welche auf die Torsion der Welle und Biegung der Radarme verwendet wird, d. i.:

$$L = A \cdot \frac{Wl}{e^2} + A_1\, \frac{W_1\, l}{e_1^2},$$

wobei A_1 den Arbeitsmodul, W_1 das Maß des Biegungsmomentes und e_1 den Abstand der äußersten Fasern von der neutralen Axe bezeichnet (s. §. 235), daher läßt sich setzen:

$$\frac{A\,Wl}{e^2} + \frac{A_1\, W_1\, l_1}{3\, e_1^2} = \frac{G\,G_1}{G + G_1}\, \frac{c^2}{2g}.$$

Ist die Welle cylindrisch, so hat man $\frac{Wl}{e^2} = \frac{V}{2}$, ist dagegen sie vierkantig, so hat man $\frac{Wl}{e^2} = \frac{V}{3}$, wenn V das Volumen derselben bezeichnet; für die vierkantigen Arme ist $\frac{W_1\, l_1}{3\, e_1^2} = \frac{V_1}{9}$, wenn V_1 das Volumen der Arme bezeichnet.

Hiernach folgt für eine cylindrische Welle:

$$\frac{A}{2}\, V + \frac{A_1}{9}\, V_1 = \frac{G\,G_1}{G + G_1}\, \frac{c^2}{2g},$$

und dagegen für eine **vierkantige Welle**:

$$\frac{A}{3}\,V + \frac{A_1}{9}\,V_1 = \frac{G\,G_1}{G + G_1}\,\frac{c^2}{2\,g}.$$

Die Volumina V und V_1 stehen wieder in einem gewissen Zusammenhange mit einander, welcher dadurch ausgedrückt wird, daß das Biegungsmoment der Arme gleich dem Torsionsmomente der Welle ist.

Hiernach hat man also:

$$\frac{W\,T}{e} = \frac{W_1\,T_1}{e_1}, \text{ also:}$$

$$1)\quad \frac{\pi\,d^3}{16}\,T = \frac{b^3\,T}{3\,\sqrt{2}} = \frac{b_1\,h_1^2\,T_1}{6},$$

wenn T und T_1 die Tragmodul für Torsion und Biegung, sowie d den Durchmesser einer runden, und b die Seitenlänge einer vierkantigen Welle, dagegen h_1 die Dicke und b_1 die Summe aller Breiten der Radarme bezeichnen.

Nun ist aber noch $V = \frac{\pi\,d^2}{4}\cdot l = b^2\,l$ und $V_1 = b_1\,h_1\,l_1$, daher hat man auch:

$$2)\begin{cases} \dfrac{\pi\,d^2\,l\,A}{8} + \dfrac{b_1\,h_1\,l_1\,A_1}{9} = \dfrac{G\,G_1}{G_1 + G_1}\,\dfrac{c^2}{2\,g} \text{ oder, nach Befinden} \\ {}^1/_3\,b^2\,l\,A + \dfrac{b_1\,h_1\,l_1\,A_1}{9} = \dfrac{G\,G_1}{G + G_1}\cdot\dfrac{c^2}{2\,g}. \end{cases}$$

Giebt man nun noch das Dimensionsverhältniß $v = \frac{b_1}{h_1}$, so kann man mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) die Stärke d oder h der Welle, sowie auch die Stärke h_1 und Breite b_1 der Arme berechnen.

Hierbei ist in Rechnung zu bringen:

1) für Gußeisen:

$$A_1 = 3{,}04 \text{ und } A = \frac{T^2}{2\,C} = \frac{1833^2}{2\,.\,2'700000} = 0{,}622 \text{ Zollpfund},$$

2) für Schmiedeeisen:

$$A_1 = 6{,}08 \text{ und } A = \frac{T^2}{2\,C} = \frac{5746^2}{2\,.\,8'60000} = 1{,}92 \text{ Zollpfund, und}$$

3) für Holz, im Mittel:

$$A_1 = 2{,}08 \text{ und } A = \frac{T^2}{2\,C} = \frac{380^2}{2\,.\,570000} = 0{,}127 \text{ Zollpfund}.$$

Beispiel. Die auf den Angriffspunkt des Daumens reducirte Masse eines Hammerrades ist $M = \frac{200000}{g}$ Pfund, und die auf denselben Angriffspunkt reducirte Masse des Hammers, $M_1 = \frac{25000}{g}$ Pfund, ferner das Stück per Wellenlänge zwischen dem Rade und dem Daumenkranze, $l = 15$ Fuß $= 225$ Zoll, und die Länge der Radarme, $l_1 = 10$ Fuß $= 120$ Zoll. Wenn nun der Hammer bei jedem Anhube von den Welldaumen mit 2 Fuß Geschwindigkeit ergriffen wird, welche Stärken sind der Welle und den Radarmen zu geben, damit diese die Stöße bei dem Ergreifen des Hammers ohne Nachtheile aushalten. Sind die Well- und Radarme aus Holz, so hat man zunächst

$$380 \frac{\pi d^3}{16} = 1000 \frac{b_1 h_1^2}{6}$$

zu setzen, oder wenn die Anzahl der Radarme, $n = 16$ ist, und deshalb

$$b_1 = \nu . n h_1 = 0{,}707 . 16 h_1 = 11{,}3 h_1$$

angenommen wird,

$$d = h_1 \sqrt[3]{\frac{1600 . 11{,}3}{6 . 38}} = h_1 \sqrt[3]{79{,}3} = 4{,}3 h_1.$$

Nun ist noch

$$\frac{\pi}{8} A l = 0{,}127 . 225 \cdot \frac{\pi}{8} = 11{,}22,$$

ferner

$$\tfrac{1}{9} A_1 l_1 = \tfrac{1}{9} . 2{,}08 . 120 = 27{,}73$$

und

$$\frac{G G_1}{G + G_1} \cdot \frac{c^2}{2g} = 12 . 0{,}016 . 4 \cdot \frac{200000 . 25000}{200000 + 25000} = 0{,}768 \cdot \frac{5000000}{225}$$
$$= 17067 \text{ Zollpfund},$$

daher folgt die Bestimmungsgleichung:

$$(4{,}3)^2 . 11{,}22 h_1^2 + 11{,}3 . 27{,}73 h_1^2 = 17067, \text{ d. i.:}$$
$$207{,}5 h_1^2 + 313{,}3 h_1^2 = 17067,$$

wonach die gesuchte Armdicke

$$h_1 = \sqrt{\frac{17067}{520{,}8}} = 5{,}72 \text{ Zoll},$$

die Armbreite

$$b_1 = 0{,}707 . h_1 = 4{,}04 \text{ Zoll},$$

und die Wellendicke

$$d = 4{,}3 \; h_1 = 24{,}6 \text{ Zoll folgt.}$$

Der Sicherheit wegen sind diese Dimensionen noch ansehnlich größer zu machen.

Anmerkung. Der Stoßfestigkeit ist erst in neuerer Zeit mehr Aufmerksamkeit geschenkt worden. Wir finden über sie nur Einiges mitgetheilt in Tredgold's Werk über die Stärke des Gußeisens u. s. w. (Strength of cast iron), in Poncelet's Introduction à la mécanique industrielle und in Rühlmann's Grundzüge der Mechanik und Geostatik. Letzteres Werk bezieht sich vorzüglich auf die Versuche Hodgkinson's über die Festigkeit prismatischer Körper gegen den

Stoß, worüber ein besonderer Artikel in dem ersten Bande der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem „Ingenieur") von Bornemann u. s. w. handelt.

Die Versuche Hodgkinson's stimmen im Wesentlichen mit der vorstehenden Theorie über die Stoßfestigkeit überein; sie erstrecken sich vorzüglich auf die relative Festigkeit, und sind in der Art ausgeführt worden, daß pendelartig aufgehangene Gewichte horizontal gegen verticale, an den Enden unterstützte Stäbe schlugen. Es bestätigte sich hierbei die Richtigkeit der Formel $L = \frac{G^2 h}{G + \frac{1}{2} G_1}$, welche unter der Voraussetzung gefunden wird, daß der Stoß ein unelastischer ist, vollständig; es hing die Leistung L gar nicht von der materiellen Beschaffenheit des stoßenden Körpers ab. Gleich schwere Körper aus verschiedenen Stoffen (Gußeisen, Gußstahl, Glockenmetall, Blei) brachten bei gleicher Fallhöhe an einem und demselben Stabe (aus Gußeisen oder Gußstahl) gleiche Durchbiegungen hervor; auch waren diese fast genau dieselben, welche die Theorie unter der Voraussetzung findet, daß der Stab vollständig elastisch ist.

Schlußanmerkung. Zum Studium der Mechanik starrer Körper ist außer den älteren Werken von Euler, Poisson, Poinsot, Poncelet, Navier und Coriolis, sowie von Whewell, Mosely, Eytelwein und Gerstner zu empfehlen:

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, in deutscher Uebersetzung von Wagner, Braunschweig 1853; sowie von Eggers und Schlömilch, Leipzig 1853. Sohnke, analytische Theorie der Statik und Dynamik, Halle 1854; Broch's Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1854; Morin, Leçons de Mécanique pratique, Paris 1855 etc. Delaunay, Traité de Mécanique rationelle, Paris 1856; Rankine, a Manual of applied Mechanics, second edition, London 1861. Ein werthvolles, in England viel zu wenig geschätztes Werk. Eine neue Monographie über den Stoß von Poinsot ist im 3. Jahrgang von Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik übersetzt.

Sechster Abschnitt.

Statik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen.

351 **Flüssigkeit.** Wir betrachten die flüssigen Körper als Verbindungen materieller Punkte, deren Zusammenhang unter einander so schwach ist, daß die kleinsten Kräfte hinreichen, sie durch Verschieben von einander zu trennen (§. 62). Manche der in der Natur vorkommenden Körper, wie z. B. die Luft, das Wasser u. s. w., besitzen diese Eigenschaft der Flüssigkeit in hohem Grade, andere Körper hingegen, wie z. B. Oel, Schmiere, aufgeweichte Erde u. s. w., sind in minderem Grade flüssig. Man nennt jene vollkommen, diese aber unvollkommen flüssige Körper. Gewisse Körper, wie z. B. die Teige, stehen den festen Massen ebenso nahe als den flüssigen.

Vollkommen flüssige Körper, von welchen in der Folge nur die Rede sein wird, sind auch zugleich vollkommen elastisch, d. h. sie lassen sich durch äußere Kräfte zusammendrücken und nehmen nach Wegnahme dieser Kräfte das erste Volumen vollkommen wieder an. Nur ist die Größe der einem gewissen Drucke entsprechenden Volumenveränderung bei verschiedenen Flüssigkeiten sehr verschieden; während sich dieselbe bei den tropfbar-flüssigen Körpern höchst unbedeutend zeigt, fällt sie bei den luftförmigen Körpern, die man deshalb auch elastische Flüssigkeiten nennt, sehr groß aus. Dieser geringe Grad von Zusammendrückbarkeit der tropfbar-flüssigen Körper ist der Grund, weswegen man bei den meisten Untersuchungen der Hydrostatik (§. 66) dieselben als incompressibele oder unelastische Flüssigkeiten ansieht und behandelt. Da das Wasser unter allen tropfbar-flüssigen Körpern am meisten verbreitet ist und im Leben am häufigsten angewendet

wird, so sieht man es als den Repräsentanten aller dieser Flüssigkeiten an und spricht bei den Untersuchungen in der Mechanik des Flüssigen immer nur vom Wasser, indem man stillschweigend voraussetzt, daß die mechanischen Verhältnisse anderer tropfbaren Flüssigkeiten dieselben sind wie die des Wassers.

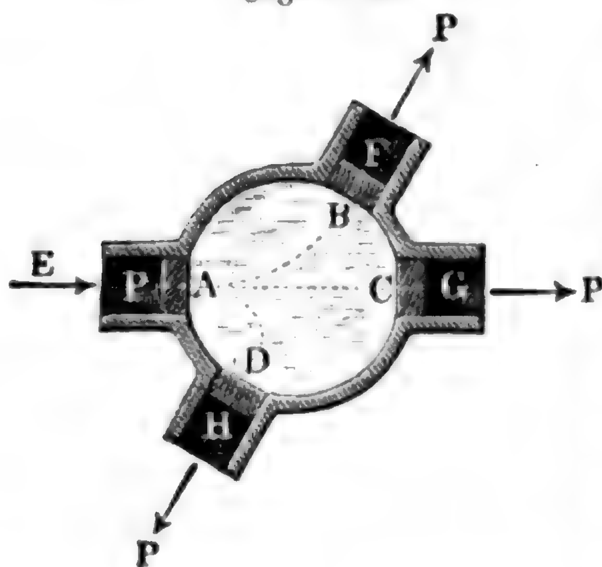
Aus denselben Gründen ist in der Mechanik der elastisch-flüssigen Körper meist nur von der gemeinen atmosphärischen Luft die Rede.

Anmerkung. Eine Wassersäule von 1 Quadratzoll Querschnitt wird durch ein Gewicht von 14 Pfund, welches dem Drucke der Atmosphäre entspricht, um ungefähr 0,00005 oder 50 Milliontel ihres Volumens zusammengedrückt, wogegen eine Luftsäule unter dem Drucke dieser Kraft nur die Hälfte ihres anfänglichen Volumens einnimmt. Siehe Aimé: „Ueber die Zusammendrückung der Flüssigkeiten", in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband (zu Band 72), 1848. Nach der Formel $P = \frac{\lambda}{l} FE$ (§. 204) folgt, wenn man $P = 14$ Pfund, $F = 1$ Quadratzoll und $\frac{\lambda}{l} = \frac{5}{100000} = \frac{1}{20000}$ setzt, der Elasticitätsmodul des Wassers

$$E = \frac{Pl}{F\lambda} = 14.20000 = 280000 \text{ Pfund.}$$

Princip des gleichen Druckes. Die charakteristische Eigenschaft der Flüssigkeiten, wodurch sich dieselben wesentlich von den festen Körpern unterscheiden, und welche der Lehre vom Gleichgewichte flüssiger Körper zur Basis dient, ist die Fähigkeit, den Druck, welcher auf einen Theil der Oberfläche der Flüssigkeit ausgeübt wird, nach allen Richtungen hin unverändert fortzupflanzen. Bei den festen Körpern pflanzt sich der Druck nur in seiner eigenen Richtung fort (§. 86); wird dagegen das Wasser von einer Seite her gedrückt, so entsteht in der ganzen Masse derselben eine Spannung, die sich nach allen Seiten hin äußert und daher an allen Stellen der Oberfläche desselben wahrzunehmen ist. Um sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes zu überzeugen, kann man einen mit Wasser gefüllten Apparat anwenden, wie ihn Fig. 574 im horizontalen Durchschnitt repräsentirt. Die gleich weiten und in gleicher Höhe über dem horizontalen Fußboden befindlichen Röhren AE, BF u. s. w. sind durch vollkommen bewegliche und genau abschließende Kolben verschlossen; das Wasser drückt deshalb auch durch sein Gewicht auf den einen Kolben genau so stark wie auf den anderen. Sehen wir aber von diesem Drucke ab, oder nehmen wir das Wasser gewichtslos an. Drücken wir dagegen den einen Kolben A mit einer gewissen Kraft P

Fig. 574.



gegen das Wasser, so pflanzt sich diese durch das Wasser hindurch bis zu den übrigen Kolben *B*, *C*, *D* fort und es ist zur Herstellung des Gleichgewichtes, oder um das Zurückgehen dieser Kolben zu verhindern, nöthig, auf jeden dieser Kolben eine gleich große Gegenkraft *P* (Fig. 575) wirken zu lassen. Wir sind daher berechtigt, anzunehmen, daß die auf einen Theil *A* der Oberfläche der Wassermasse wirkende Kraft *P* eine Spannung in dieser erzeugt, und sich dadurch nicht nur in der geraden Linie *A C*, sondern auch in jeder anderen Richtung *B F*, *D H* u. s. w. auf andere gleich große Oberflächentheile *C*, *B*, *D* fortpflanzt.

Fig. 575.

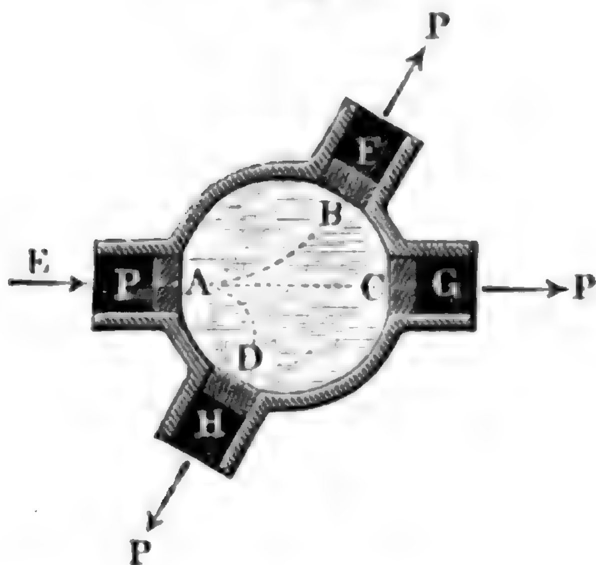
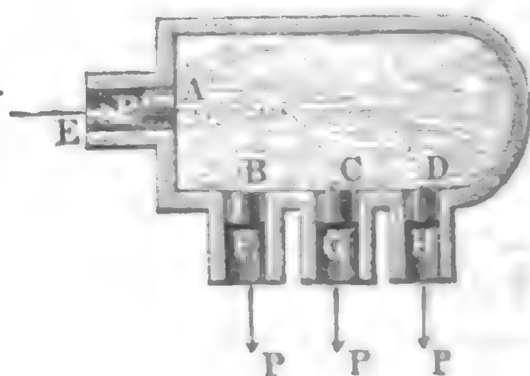


Fig. 576.



Sind die Axen der Röhren *B F*, *C G* u. s. w., Fig. 576, unter sich parallel, so lassen sich die Kräfte, welche auf ihre Kolben wirken, durch Addition zu einer einzigen Kraft vereinigen; ist *n* die Anzahl dieser gleich großen Kolben, so beträgt daher der Gesammtdruck auf dieselben:

$$P_1 = n P,$$

und in dem von der Figur repräsentirten Falle:

$$P_1 = 3 P.$$

Nun ist aber der Inbegriff F_1 der gedrückten Flächen *B*, *C*, *D* ebenfalls $= n$ mal gedrückte Fläche *F* des einen Kolbens, es läßt sich daher *n* nicht nur $= \frac{P_1}{P}$, sondern auch $= \frac{F_1}{F}$, also überhaupt

$$\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F} \text{ und } P_1 = \frac{F_1}{F} P \text{ setzen.}$$

Rücken wir nun noch die Röhren *B*, *C*, *D* u. s. w. so zusammen, daß sie, wie in Fig. 577, eine einzige ausmachen, und verschließen wir sie durch einen einzigen Kolben, so geht F_1 in eine einzige Fläche über und es ist P_1 die auf sie wirkende Kraft; es folgt daher das allgemeinere Gesetz: die Drücke, welche ein flüssiger Körper auf verschiedene Theile der Gefäßwand ausübt, sind den Inhalten dieser Theile proportional.

Dieses Gesetz entspricht auch dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten. Bewegt sich der Kolben $AD = F$, Fig. 578, um den Weg $AA_1 = s$ einwärts, so drückt er das Wasserprisma Fs aus seiner Röhre, und geht der Kolben $BE = F_1$ um den Weg $BB_1 = s_1$ auswärts, so läßt er den prismatischen Raum $F_1 s_1$ zurück. Da wir aber vorausgesetzt haben, daß sich die Wassermasse weder ausdehnen noch zusammendrücken läßt, so muß das Volumen derselben bei diesen Kolbenbewegungen unverändert bleiben, also der Zusatz Fs dem Abgange $F_1 s_1$ gleich sein. Die Gleichung $F_1 s_1 = Fs$ giebt aber:

Fig. 577.

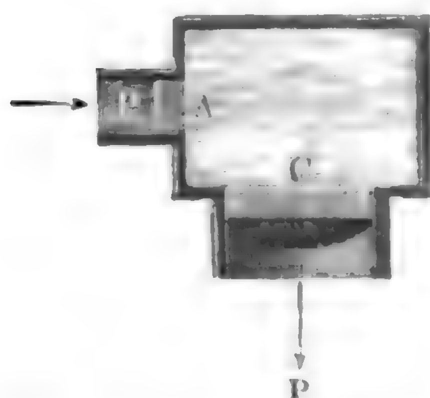
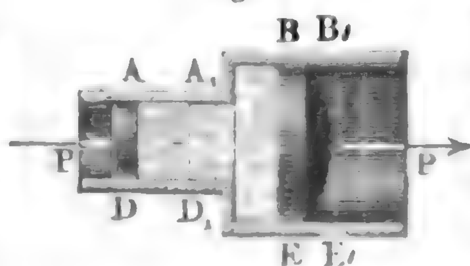


Fig. 578.



$$\frac{F_1}{F} = \frac{s}{s_1},$$

und aus der Verbindung dieser Proportion mit der Proportion $\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$ folgt:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{s}{s_1};$$

es ist daher auch Arbeit $P_1 s_1$ = Arbeit Ps (s. §. 83).

Beispiel. Wenn der Kolben AD einen Durchmesser von $1\frac{1}{2}$ Zoll dagegen der Kolben BE einen solchen von 10 Zoll hat, und jener mit einer Kraft P von 36 Pfund auf das Wasser gedrückt wird, so übt dieser Kolben eine Kraft

$$P_1 = \frac{F_1}{F} P = \frac{10^2}{1{,}5^2} \cdot 36 = \frac{400}{9} \cdot 36 = 1600 \text{ Pfund}$$

aus. Wird der erste Kolben um 6 Zoll fortgeschoben, so geht der zweite nur um

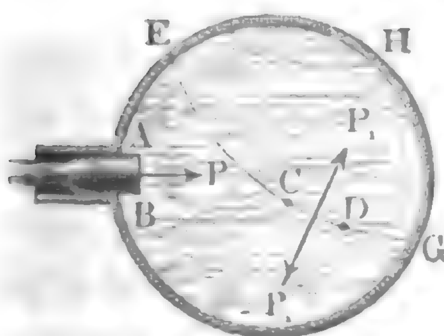
$$s_1 = \frac{F}{F_1} s = \frac{9 \,.\, 6}{400} = {}^{27}/_{200} = 0{,}135 \text{ Zoll}$$

fort.

Anmerkung. Vielfache Anwendungen dieses Gesetzes kommen in der Folge vor: bei der hydraulischen Presse, der Wassersäulenmaschine, bei den Pumpen u. s. w.

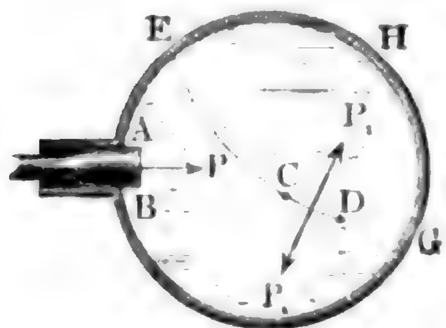
Druck im Wasser. Der Druck, welchen die Wassertheile gegen einander ausüben, ist genau so zu beurtheilen wie der Druck des Wassers gegen die Gefäßwände. Eine beliebige Fläche ECG, welche das Wasser in einem Gefäße BGH, Fig. 579, in zwei Theile theilt, wird im Gleichgewichtszustande von der einen Seite her eben so stark gedrückt als von der anderen. Da nun ein starrer Körper alle gegen seine Oberfläche rechtwinkelig gerichteten Kräfte §. 353

Fig. 579.



aufnimmt, so wird auch das Gleichgewicht des Wassers im Gefäße nicht gestört, wenn die eine Flüssigkeitshälfte EGH erstarrt, und daher ihre Begrenzungsfläche ECG gleichsam zu einer Gefäßwand wird. Drückt die flüssige Hälfte EBG in einem Theile $CD = F_1$ der imaginären Trennungsfläche ECG mit einer Kraft P_1 auf die erstarrte Hälfte EGH, so nimmt daher letztere diese Kraft vollständig auf und übt dabei eine gleiche Gegenkraft $(-P_1)$ auf $CD = F_1$ aus. Da nun aber das Gleichgewichtsverhältniß durch das Flüssigwerden von dieser Wassermasse EGH nicht gestört wird, so drückt dieselbe mit einer gleichen Kraft $(-P_1)$ auf die Wassermasse EBG zurück, und es ist folglich der Druck des Wassers auf beiden Seiten einer Fläche $\overline{CD} = F_1$, ebenfalls durch die Proportion

Fig. 580.



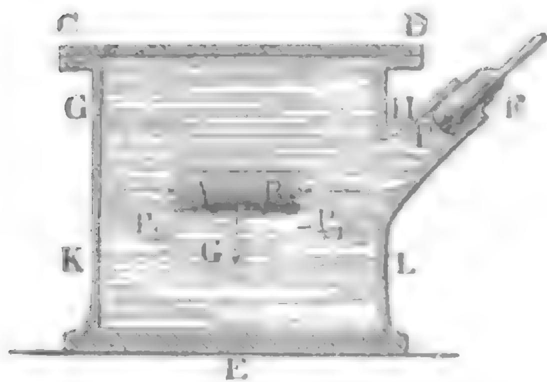
$$\frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F}$$

bestimmt, wofern das ganze Wasser wieder in einer Fläche $\overline{AB} = F$ von einer Kraft P gedrückt wird. Hiernach ist der Druck auf die Fläche F_1 bei jeder beliebigen Lage:

$$P_1 = \frac{F_1}{F} P.$$

Das durch die letzte Proportion ausgesprochene Gesetz von der Fortpflanzung des Druckes im Wasser kommt dem letzteren nur als Flüssigkeit ohne Schwere zu, und erfordert daher noch eine Ergänzung, wenn es sich darum handelt, auch den aus dem Gewichte des Wassers hervorgehenden Druck zu ermitteln. Denkt man sich von dem Wasser in einem Gefäße CDE, Fig. 581, einen Theil erstarrt, welcher die Form eines unendlich dünnen horizontalen Prismas AB hat, so sieht man leicht ein, daß sich die Kräfte, welche das flüssig bleibende Wasser rund herum auf die Seitenflächen des erstarrten Theiles ausübt, mit dem Gewichte G dieses Theiles ins Gleichgewicht setzen, und daß sich die Horizontaldrücke, mit welchen es gegen die verticalen Grundflächen A und B dieses Theiles wirkt, gegenseitig aufheben. Es müssen also

Fig. 581.

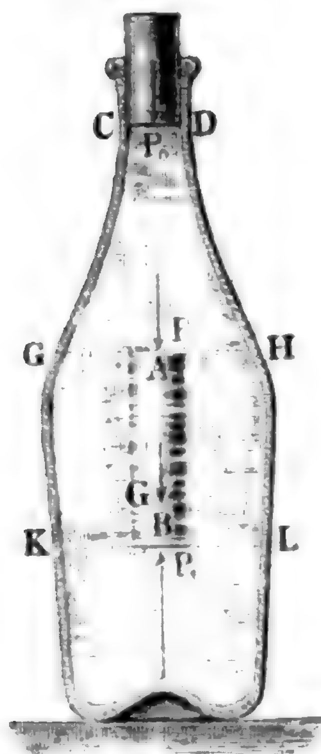


auch diese Drücke (P_1 und $-P_1$) einander gleich und entgegengesetzt sein. Da nun das Gleichgewicht sich nicht ändert, wenn AB wieder in den Flüssigkeitszustand zurückkehrt, so folgt, daß die Pressungen des Wassers gegen gleiche verticale Flächenelemente A und B in einer und derselben Horizon-

talebene einander gleich sein müssen, und da sich ferner der Druck auf ein Flächenelement nicht ändert, wenn dasselbe eine andere Neigung oder Richtung annimmt, so folgt, daß überhaupt das Wasser in einer horizontalen Schicht, wie z. B. GH, KL u. s. w. an allen Stellen und nach allen Richtungen hin einen und denselben Druck ausübt.

Denken wir uns hingegen in der Wassermasse CHK, Fig. 582, ein verticales Prisma AB von unendlich kleinem Querschnitt erstarrt, so können wir aus dem Gleichtgewichtszustande desselben mit der übrigen Flüssigkeit folgern, daß sich die Drücke, mit welchen die letzteren auf die verticalen Seitenflächen dieses Prismas wirken, gegenseitig aufheben, und daß sich das Gewicht G des letzteren Körpers mit dem Ueberschusse $P_1 - P$ des Druckes P_1 auf die untere Grundfläche B über den Druck P auf die obere Grundfläche A im Gleichgewichte befindet. Es ist also hiernach $P_1 - P = G$, d. i. der Druck P_1 des Wassers auf irgend ein Flächenelement B gleich dem Drucke P desselben auf ein höher liegendes Flächenstück A von gleicher Größe plus dem Gewichte G einer Wassersäule AB, welche das eine oder andere Flächenelement zur Basis, und den Verticalabstand zwischen beiden Elementen zur Höhe hat. Dieser Satz gilt, dem Obigen zufolge, nicht nur für zwei senkrecht über einander befindliche Elemente, sondern auch für zwei gleiche Flächenelemente überhaupt, und findet auch seine Anwendung bei der Bestimmung des Druckes auf die Gefäßwand, da sich die Drücke P und P_1 in den Horizontalebenen GH und KL unverändert fortpflanzen. Der Druck P_1 auf ein Flächenelement B, K oder L der Horizontalebene KL ist hiernach gleich dem Drucke P auf ein gleich großes Element A, G oder H in einer höheren Horizontalebene plus dem Gewichte der Wassersäule, welche dieses Element F zur Basis und den Abstand $AB = h$ der beiden Horizontalschichten GH und KL von einander zur Höhe hat. Ist γ die Dichtigkeit des Wassers, so beträgt dieses Gewicht:

Fig. 582.



$$G = Fh\gamma, \text{ und daher } P_1 = P + G = P + Fh\gamma.$$

Sind die Inhalte der Flächenelemente nicht gleich, hat z. B. das obere (in GH) den Inhalt F und das untere (in KL) den Inhalt F_1, so ist der Druck auf letzteres

$$P_1 = \frac{F_1}{F}(P + Fh\gamma) = \frac{F_1}{F}P + F_1 h\gamma.$$

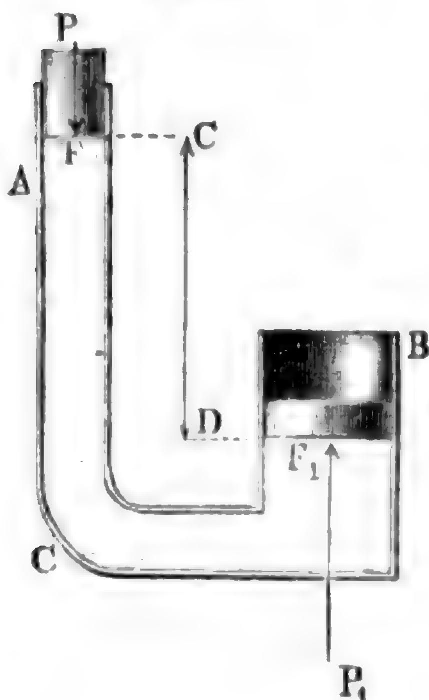
Durch dieselbe Formel läßt sich auch der Druck P auf ein Flächenelement

F in einer Horizontalschicht GH bestimmen, wenn der äußere Druck P_0 eines Flächenelementes $CD = F_0$ bekannt ist, welches sich um die Höhe h über oder unter GH befindet. Es ist

$$P = \frac{F}{F_0} P_0 \pm F h \gamma.$$

Da die Druckkräfte gegen gleiche Flächentheile in einer Horizontalebene einander gleich sind, so folgt, daß vorstehende Formel auch auf horizontale Flächen (F, F_0 und F_1) von endlicher Ausdehnung, z. B. auf den Fall anwendbar ist, wo das Wasser dazu dient, die Kraft P einer horizontalen Kolbenfläche F, Fig. 583, auf eine andere horizontale Kolbenfläche F_1 überzutragen. Die Formel

Fig. 583.



$$P_1 = \frac{F_1}{F} P + F_1 h \gamma$$
$$= F_1 \left(\frac{P}{F} + h \gamma\right)$$

giebt den Druck P_1 auf diese Fläche unmittelbar an, wenn h den senkrechten Abstand CD zwischen beiden Kolbenflächen bedeutet.

Bezeichnet man die Drücke $\frac{P}{F}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ auf die Flächeneinheiten durch p und p_1, so hat man noch einfacher

$$p_1 = p + h \gamma.$$

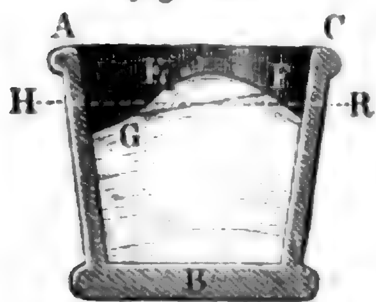
Beispiel. Wenn die beiden Kolbenflächen F und F_1 einer hydrostatischen Presse ACB, Fig. 583, die Durchmesser $d = 2\frac{1}{2}$ und $d_1 = 9$ Zoll haben und um die senkrechte Höhe $CD = h = 60$ Zoll von einander abstehen, und es soll durch den großen Kolben derselben eine Kraft $P_1 = 1600$ Pfund ausgeübt werden, so ist die erforderliche Kraft des kleinen Kolbens:

$$P = \frac{F}{F_1} P_1 - F h \gamma = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 P - \frac{\pi d^2}{4} h \gamma$$
$$= \left(\frac{5}{18}\right)^2 . 1600 - \frac{\pi}{4} \cdot {}^{25}\!/\!_4 \cdot \frac{60 . 61,75}{1728} = 123,46 - 10,53 = 112,93 \text{ Pfd.}$$

§. 354 **Wasserspiegel.** Die dem Wasser innewohnende Schwerkraft macht, daß sich alle Elemente desselben abwärts zu bewegen suchen und sich auch wirklich so bewegen, wenn sie nicht daran verhindert werden. Um eine zusammenhängende Wassermasse zu erhalten, ist es deshalb nöthig, das Wasser in Gefäßen einzuschließen. Das in einem Gefäße ABC, Fig. 584, befindliche Wasser ist aber nur dann im Gleichgewichte, wenn die noch freie Ober-

fläche HR desselben rechtwinkelig auf der Richtung der Schwerkraft, also horizontal ist; denn so lange diese Oberfläche noch krumm oder gegen den Horizont geneigt ist, so lange giebt es auch noch höher liegende Wasserelemente, wie z. B. E, welche wegen ihrer großen Beweglichkeit und in Folge ihrer Schwere über den darunter befindlichen, wie auf einer schiefen Ebene FG, herabgleiten.

Fig. 584.

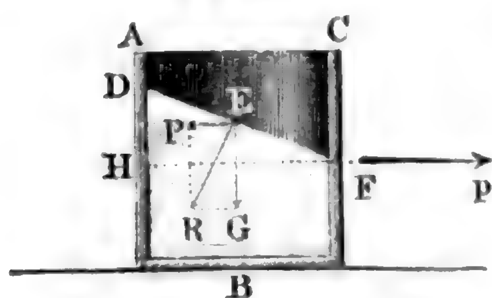


Da bei größeren Entfernungen die Schwerrichtungen nicht mehr als parallele Linien angesehen werden können, so hat man die freie Oberfläche oder den Spiegel des Wassers in einem großen Gefäße, wie z. B. in einem größeren See, nicht mehr als eine Ebene, sondern als einen Kugeloberflächentheil zu betrachten.

Wirkt außer der Schwere noch eine andere Kraft auf die Wasserelemente, so steht im Gleichgewichtszustande die Oberfläche des Wassers winkelrecht auf der Richtung der aus der Schwere und der hinzutretenden Kraft entspringenden Mittelkraft.

Wird ein Gefäß ABC, Fig. 585, mit der unveränderlichen Acceleration p horizontal fortbewegt, so bildet die freie Oberfläche des Wassers in demselben eine schiefe Ebene DF; denn da in diesem Falle jedes Element E dieser Oberfläche von seinem Gewichte G abwärts und von seiner Trägheit $P = \frac{p}{g} G$ horizontal getrieben wird, so entspringt in jedem eine Mittelkraft R, welche von der Richtung der Schwere um einen unveränderlichen Winkel $REG = \alpha$ abweicht. Dieser Winkel ist auch zugleich der Winkel DFH, um welchen der auf B normal stehende Wasserspiegel von dem Horizonte abweicht. Er ist bestimmt durch

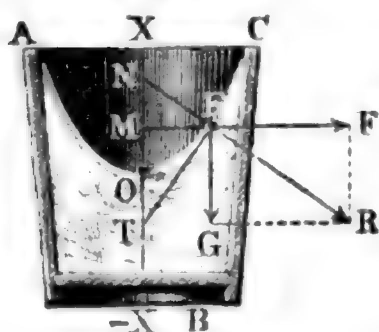
Fig. 585.



$$tang. \alpha = \frac{P}{G} = \frac{p}{g}.$$

Wird dagegen ein Gefäß ABC, Fig. 586, gleichförmig um seine verticale Axe $X\overline{X}$ gedreht, so bildet der Spiegel des mit umlaufenden Wassers in demselben eine hohle Fläche AOC mit parabolischen Axendurchschnitten. Ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Gefäßes und des darin befindlichen Wassers, G das Gewicht eines Wasserelementes E und y der Abstand ME desselben von der verticalen Axe, so hat man für die Centrifugalkraft dieses Elementes:

Fig. 586.



$$F = \omega^2 \frac{G y}{g} \text{ (§. 302)},$$

und daher für den Winkel $R E G = T E M = \varphi$, welchen die Mittelkraft R mit der Verticalen, oder die Tangente $E T$ des Wasserprofiles mit der Horizontalen $M E$ einschließt:

$$tang.\, \varphi = \frac{F}{G} = \frac{\omega^2 y}{g}.$$

Hiernach ist also die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der Ordinate einschließt, der Ordinate proportional. Da diese Eigenschaft der gemeinen Parabel zukommt (s. §. 157), so ist auch der verticale Durchschnitt $A O C$ des Wasserspiegels eine Parabel, deren Axe mit der Drehungsaxe $X \overline{X}$ zusammenfällt.

Wäre die Umdrehungsgeschwindigkeit des Wassers im Gefäße ABD, Fig. 588, constant und $= c$, so würde $F = \frac{c^2 G}{g y}$, daher $tang.\, \varphi = \frac{c^2}{g y}$

Fig. 587.

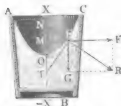


Fig. 588.

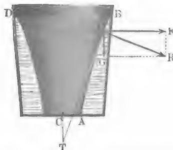
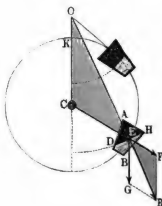


Fig. 589.



und die Subtangente der Durchschnittscurve $A E B$ der Oberfläche des Wassers, $M T = m = \frac{c^2}{g}$, also constant ausfallen. Nach Artikel 20 der analytischen Hülfslehren ist die Gleichung einer solchen Curve:

$$y = r e^{\frac{x}{m}} = r e^{g x c^{-2}},$$

wobei r die Ordinate $C A$ des Anfangspunktes A bezeichnet.

Bewegt man ein Gefäß ABH, Fig. 589, in einem Verticalkreise um eine Horizontalaxe C gleichförmig herum, so bildet die Oberfläche des Wassers in demselben eine cylindrische Fläche mit kreisförmigem Querschnitte DEH. Verlängern wir die Richtung der aus dem Gewichte G und der Centrifugalkraft F eines Elementes E entstehenden Mittelkraft R bis zum Durchschnitte O mit der Verticalen CK durch den Drehpunkt, so erhalten wir die ähnlichen Dreiecke ECO und EFR, für welche gilt:

$$\frac{CO}{EC} = \frac{FR}{EF} = \frac{G}{F};$$

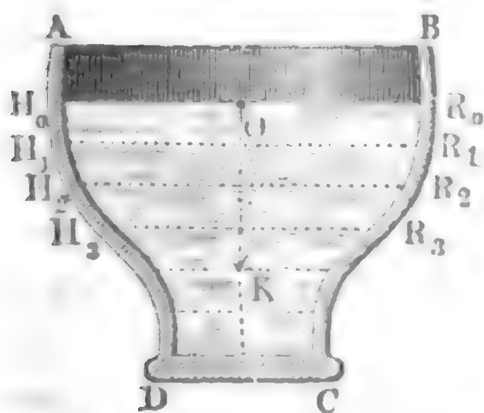
nun ist aber, wenn man den Drehungshalbmesser $EC = y$ setzt, und die letzte Bezeichnung beibehält, $F = \frac{\omega^2 G y}{g}$, es folgt daher die Linie:

$$CO = \frac{g}{\omega^2} = g\left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 = \frac{2850}{u^2} \text{ Fuß} = \frac{894{,}6}{u^2} \text{ Meter},$$

wobei u die Zahl der Umdrehungen pr. Minute bezeichnet. Da dieser Werth von CO für alle Wasserelemente einer und derselbe ist, so folgt, daß die Mittelkräfte aller den Durchschnitt DEH bildenden Wasserelemente nach O gerichtet sind, und daß daher der auf den Richtungen dieser Kräfte rechtwinkelig stehende Durchschnitt ein aus O beschriebener Kreis ist. Diesem zufolge bilden die Wasserspiegel in den Zellen eines oberschlägigen Wasserrades lauter einer und derselben Horizontalaxe entsprechende cylindrische Flächen.

Bodendruck. Der Druck des Wassers in einem Gefäße $ABCD$, Fig. 590, ist unmittelbar unter dem Wasserspiegel am kleinsten, wird mit der Tiefe immer größer und größer und ist unmittelbar über dem Boden am größten. Dies ist zwar schon aus §. 353 zu folgern, läßt sich aber auch auf folgendem Wege beweisen. Nehmen wir an, daß der Wasserspiegel $H_0 R_0$, dessen Inhalt F_0 sein möge, von einer Kraft P_0, z. B. durch die darüber stehende Atmosphäre oder durch einen Kolben gleichförmig gedrückt werde, und denken uns die ganze Wassermasse durch viele Horizontalebenen wie $H_1 R_1$, $H_2 R_2$ u. s. w. in lauter gleich dicke Wasserschichten zerlegt. Ist F_1 der Inhalt des ersten Querschnittes $H_1 R_1$, λ die Dicke einer Wasserschicht und γ die Dichtigkeit des Wassers, so hat man das Gewicht der ersten Wasserschicht, $G_1 = F_1 \lambda \gamma$, und denjenigen Theil des §. 355

Fig. 590.



Druckes in $H_1 R_1$, welcher aus dem Drucke P_0 des Wasserspiegels $H_0 R_0$ entspringt, nach dem Principe in §. 352:

$$= \frac{P_0 F_1}{F_0}.$$

Addirt man nun beide Kräfte, so erhält man den Druck im Horizontalschnitte $H_1 R_1$:

$$P_1 = \frac{P_0 F_1}{F_0} + F_1 \lambda \gamma.$$

Dividirt man durch F_1, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{P_1}{F_1} = \frac{P_0}{F_0} + \lambda \gamma,$$

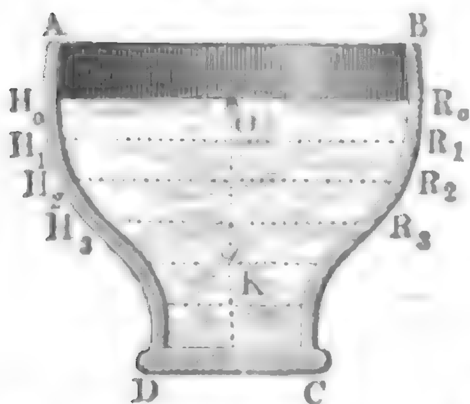
oder, da $\frac{P_0}{F_0}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ die auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke p_0 und p_1 in $H_0 R_0$ und $H_1 R_1$ bezeichnen:

$$p_1 = p_0 + \lambda \gamma.$$

Der Druck in dem folgenden Horizontalschnitte $H_2 R_2$ bestimmt sich genau so wie der Druck in der Schicht $H_1 R_1$, wenn man berücksichtigt, daß hier der anfängliche Druck auf die Einheit schon $p_1 = p_0 + \lambda \gamma$ ist, während er dort nur p_0 war. Es folgt der Druck in der Horizontalschicht $H_2 R_2$:

$$p_2 = p_1 + \lambda \gamma = p_0 + \lambda \gamma + \lambda \gamma = p_0 + 2 \lambda \gamma;$$

Fig. 591.



ebenso der Druck in der dritten Schicht $H_3 R_3$:

$$= p + 3 \lambda \gamma,$$

in der vierten:

$$= p_0 + 4 \lambda \gamma$$

und in der $n$ten:

$$= p_0 + n \lambda \gamma.$$

Nun ist aber $n \lambda$ die Tiefe $\overline{OK} = h$ dieser $n$ten Schicht unter dem Wasserspiegel, es läßt sich daher der Druck auf jede Flächeneinheit in der $n$ten Horizontalschicht setzen:

$$p = p_0 + h \gamma \text{ (vergl. §. 353).}$$

Man nennt die Tiefe h eines Flächenelementes unter dem Wasserspiegel die **Druckhöhe** (franz. charge d'eau; engl. height of water) desselben und findet hernach den Druck des Wassers auf irgend eine Flächeneinheit, wenn man den von außen wirkenden Druck um das Gewicht einer Wassersäule vermehrt, deren Basis diese Einheit und deren Höhe die Druckhöhe ist.

Bei einer horizontalen Fläche, wie z. B. am Boden CD (Fig. 591), ist die Druckhöhe h an allen Stellen eine und dieselbe, ist daher der Inhalt derselben $= F$, so folgt der Druck des Wassers gegen dieselbe:

$$P = (p_0 + h \gamma) F = F p_0 + F h \gamma = P_0 + F h \gamma,$$

oder, wenn man vom äußeren Drucke abstrahirt: $P = F h \gamma$.

Der Druck des Wassers gegen eine horizontale Fläche ist also gleich dem Gewichte der über ihr stehenden Wassersäule Fh.

Dieser Druck des Wassers gegen eine horizontale Fläche, z. B. gegen den horizontalen Boden oder gegen einen horizontalen Theil der Seitenwand ist von der Form des Gefäßes unabhängig; ob also das Gefäß $A\,C$, Fig. 592, prismatisch wie a, oder oben weiter als unten, wie b, oder unten weiter als oben, wie c, oder schief wie d, oder ob es bauchig wie e ist u. s. w., immer bleibt der Druck gegen den Boden gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis der Boden und deren Höhe die Tiefe des Bodens unter dem Wasserspiegel ist. Da sich der Druck des Wassers nach allen Seiten fortpflanzt, so findet dieses Gesetz auch dann noch seine Anwendung, wenn die Fläche, wie z. B. $B\,C$ in Fig. 593, von unten nach oben gedrückt wird. Jede Flächeneinheit in der an $B\,C$ anliegenden Wasserschicht $B\,K$ wird durch eine Wassersäule von der Höhe $H\,B = R\,K = h$ gedrückt, es ist folglich auch der Druck gegen die Fläche $C\,B$, $= F\,h\,\gamma$, wenn F den Inhalt dieser Fläche bezeichnet.

Fig. 592.

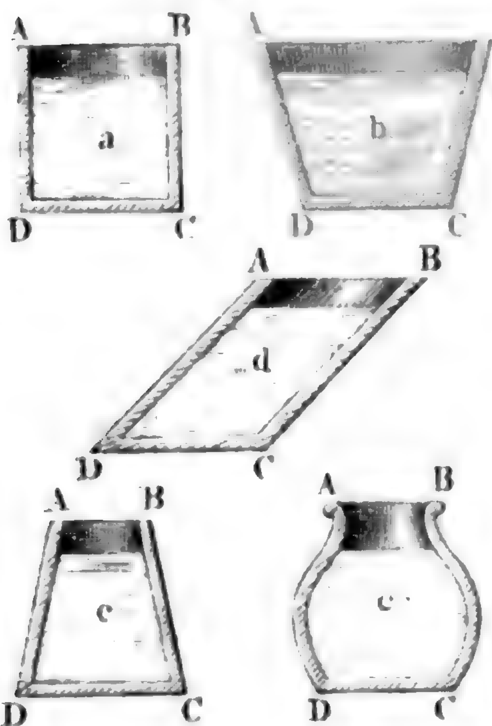


Fig. 593.

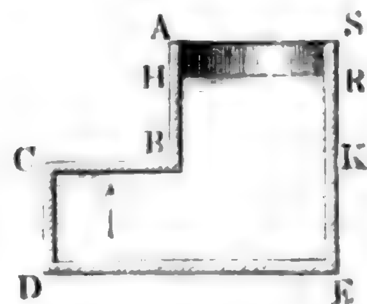
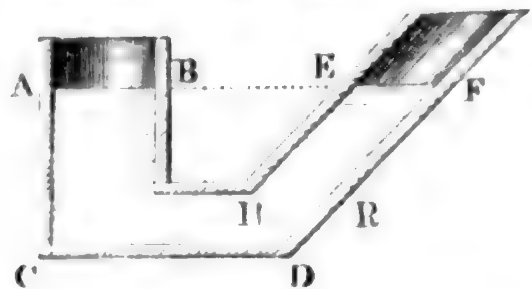


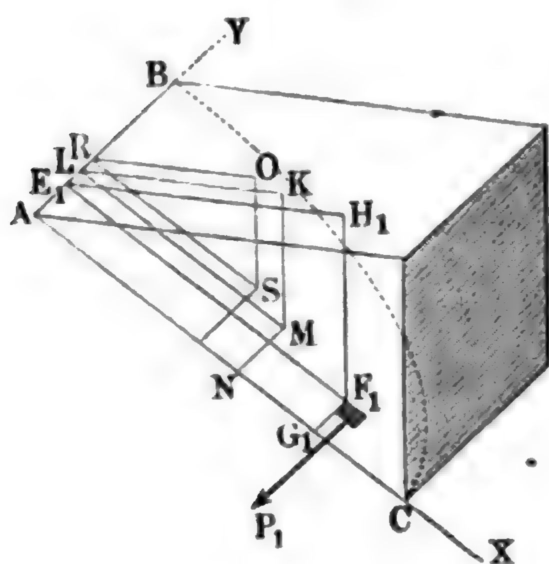
Fig. 594.



Es folgt auch hieraus noch, daß das Wasser in communicirenden Röhren $A\,B\,C$ und $D\,E\,F$, Fig. 594, im Zustande des Gleichgewichtes gleich hoch steht, oder daß die Spiegel $A\,B$ und $E\,F$ desselben in eine und dieselbe Horizontalebene fallen. Zur Erhaltung des Gleichgewichtes ist es nöthig, daß die Wasserschicht $H\,R$ durch die über ihr stehende Wassersäule $E\,R$ ebenso stark nach unten gedrückt wird, als durch die unter ihr befindliche Wassermasse von unten nach oben. Da aber in beiden Fällen die gedrückte Fläche eine und dieselbe ist, so muß daher auch die Druckhöhe in beiden Fällen eine und dieselbe sein, es muß also der Wasserspiegel $A\,B$ ebenso hoch über $H\,R$ stehen als der Wasserspiegel $E\,F$.

§. 356 **Seitendruck.** Das soeben gefundene Gesetz von dem Wasserdrucke gegen eine Horizontalfläche läßt sich nicht unmittelbar auf eine gegen den Horizont geneigte ebene Fläche anwenden, da bei dieser die Druckhöhen an verschiedenen Stellen verschieden sind. Der Druck $p = h\gamma$ auf jede Flächeneinheit innerhalb der horizontalen Wasserschicht, welche um die Tiefe h unter dem Wasserspiegel steht, wirkt nach allen Richtungen (§. 352) und folglich auch rechtwinkelig gegen die festen Seitenwände des Gefäßes, die (nach §. 138) denselben vollkommen aufnehmen. Ist nun F_1 der Inhalt eines Elementes von einer Seitenfläche ABC, Fig. 595, und h_1 dessen Druckhöhe $F_1 H_1$, so hat man den Normaldruck des Wassers gegen dasselbe:

Fig. 595.



$$P_1 = F_1 . h_1 \gamma;$$

ist ebenso F_2 ein zweites Flächenelement, und h_2 dessen Druckhöhe, so hat man den Normaldruck auf dasselbe:

$$P_2 = F_2 h_2 \gamma;$$

ebenso für ein drittes Element:

$$P_3 = F_3 h_3 \gamma \text{ u. s. w.}$$

Diese Normaldrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft P die Summe dieser Drücke, also

$$P = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots)\gamma$$

ist. Nun ist aber noch

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots$$

die Summe der statischen Momente von F_1, F_2 u. s. w. hinsichtlich der Oberfläche AOB des Wassers, und $= Fh$, wenn F der Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe SO ihres Schwerpunktes S unter dem Wasserspiegel bezeichnet; es folgt daher der gesammte Normaldruck gegen die ebene Fläche:

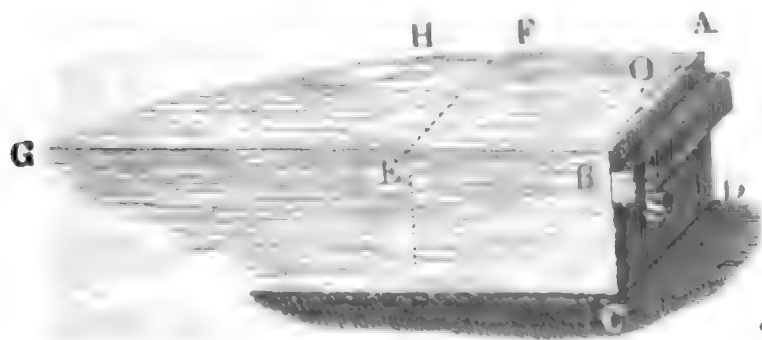
$$P = Fh\gamma.$$

Versteht man hier unter Druckhöhe einer Fläche die Tiefe SO ihres Schwerpunktes S unter dem Wasserspiegel, so gilt also allgemein die Regel: der Druck des Wassers gegen eine ebene Fläche ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis die Fläche und deren Höhe die Druckhöhe der Fläche ist.

Uebrigens ist noch hervorzuheben, daß dieser Wasserdruck nicht von der Wassermenge, welche über oder vor der gedrückten Fläche steht, abhängt, daß also z. B. unter übrigens gleichen Umständen eine Spundwand $ABCD$, Fig 596, denselben Druck auszuhalten hat, sie mag das Wasser einer schmalen Schleuse $ACEF$, oder das eines größeren Teiches $ACGH$, oder das eines großen Sees abdämmen. Aus der Breite $AB = CD = b$ und

Höhe $AD = BC = a$ einer rectangulären Spundwand folgt die Fläche derselben: $F = ab$

Fig. 596.



und die Druckhöhe: $SO = \frac{a}{2}$, daher der Wasserdruck:

$$P = ab \cdot \frac{a}{2} \gamma = \frac{1}{2} a^2 b \gamma.$$

Es wächst also dieser Druck wie die Breite und wie das Quadrat der Höhe der gedrückten Fläche.

Beispiel. Wenn vor einem 4 Fuß breiten, 5 Fuß hohen und $2\frac{1}{2}$ Zoll dicken Schutzbrete aus Eichenholz das Wasser $3\frac{1}{2}$ Fuß hoch steht, wie groß ist die Kraft zum Aufziehen desselben?

Das Volumen des Bretes ist:

$$4 \cdot 5 \cdot \frac{5}{24} = \frac{25}{6} \text{ Cubikfuß.}$$

Nimmt man nun die Dichtigkeit des mit Wasser geschwängerten Eichenholzes nach §. 61, zu $61{,}75 \cdot 1{,}11 = 73{,}26$ Pfund an, so folgt das Gewicht dieses Bretes:

$$G = \frac{25}{6} \cdot 73{,}26 = 25 \cdot 12{,}21 = 305{,}25 \text{ Pfund.}$$

Der Druck des Wassers gegen das Schutzbret und auch der Druck desselben gegen seine Führung ist:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot 4 \cdot 61{,}75 = 49 : 30{,}875 = 1513 \text{ Pfund;}$$

setzt man nun den Coefficienten der Reibung für nasses Holz nach §. 174, $\varphi = 0{,}68$, so folgt die Reibung dieses Bretes in seiner Leitung:

$$F = \varphi P = 0{,}68 \cdot 1513 = 1028{,}8 \text{ Pfund.}$$

Addirt man hierzu das Gewicht des Bretes, so erhält man die Kraft zum Aufziehen desselben:

$$= 1028{,}8 + 305{,}25 = 1334{,}05 \text{ Pfund.}$$

Mittelpunkt des Wasserdruckes. Die Mittelkraft $P = Fh\gamma$ aus sämmtlichen Elementarpressungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w. hat, wie jede andere Mittelkraft eines Systemes von Parallelkräften, einen bestimmten Angriffspunkt, den man den Mittelpunkt des Druckes nennt. Durch Unterstützung dieses Punktes wird dem ganzen Wasserdrucke einer Fläche das Gleichgewicht gehalten. Die statischen Momente der Elementarpressungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w. hinsichtlich der Ebene des Wasserspiegels ABO, Fig. 595, sind: §. 357

$$F_1 h_1 \gamma \cdot h_1 = F_1 h_1^2 \gamma,\ F_2 h_2 \gamma \cdot h_2 = F_2 h_2^2 \gamma \text{ u. s. w.;}$$

es ist also das statische Moment des ganzen Wasserdruckes in Hinsicht auf diese Ebene:

$$(F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots) \gamma.$$

Bezeichnet man nun den Abstand KM des Mittelpunktes M dieses Druckes vom Wasserspiegel durch z, so hat man das Moment des Wasserdruckes auch:

$$Pz = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) z \gamma,$$

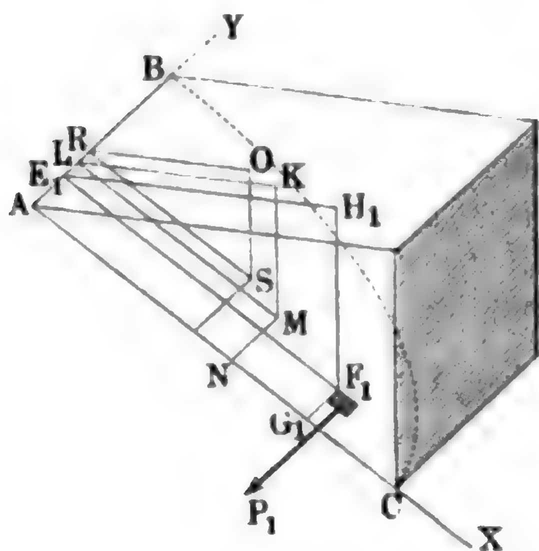
und es folgt nun durch Gleichsetzen beider Momente die in Frage stehende Tiefe des **Mittelpunktes** M unter dem Wasserspiegel:

$$1) \quad z = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots} \text{ oder } = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots}{F h},$$

wenn, wie oben, F den Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel ausdrücken.

Um diesen Druckpunkt vollständig zu bestimmen, hat man noch dessen Abstand von einer anderen Ebene oder Linie anzugeben. Setzt man die Abstände $F_1 G_1$, $F_2 G_2$ u. s. w. der Flächenelemente F_1, F_2 u. s. w. von der den Neigungswinkel der Ebene bestimmenden Falllinie AC, $= y_1$, y_2 u. s. w., so hat man die Momente der Elementardrücke in Hinsicht auf diese Falllinie:

Fig. 597.



$= F_1 h_1 y_1 \gamma$, $F_2 h_2 y_2 \gamma$ u. s. w., also das Moment der ganzen Fläche $= (F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots) \gamma$; und bezeichnet man den Abstand MN des Mittelpunktes M von eben dieser Linie durch v, so hat man dieses Moment auch $= (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) v \gamma$; setzt man endlich beide Momente einander gleich, so erhält man die zweite Ordinate:

$$2) \quad v = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots} \text{ oder } = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots}{F h}.$$

Ist α der Neigungswinkel der Ebene ABC gegen den Horizont, sind ferner x_1, x_2 u. s. w. die Entfernungen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. s. w. der Elemente F_1, F_2 u. s. w., und ist u der Abstand LM des Druckmittelpunktes M von der Durchschnittslinie AB der Ebene mit dem Wasserspiegel, so hat man $h_1 = x_1 \sin. \alpha$, $h_2 = x_2 \sin. \alpha$ u. s. w., sowie $z = u \sin. \alpha$; und führt man diese Werthe in den Ausdrücken für z und v ein, so ergiebt sich:

$$u = \frac{F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \text{ und}$$

$$v = \frac{F_1 x_1 y_1 + F_2 x_2 y_2 + \cdots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Man findet also die Abstände u und v des Druckmittelpunktes von der horizontalen Axe AY und von der durch die Falllinie gebildeten Axe AX, wenn man das statische Moment der Fläche in Hinsicht auf die erste Axe

einmal in das Trägheitsmoment derselben in Hinsicht auf dieselbe Axe und ein zweites Mal in das Centrifugalkraftmoment derselben in Hinsicht auf beide Axen dividirt. Auch ist der erste Abstand zugleich die Entfernung des **Schwingungspunktes** von der Durchschnittslinie mit dem Wasserspiegel (§. 327). Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß der **Mittelpunkt des Wasserdruckes** mit dem in §. 313 bestimmten **Mittelpunkte des Stoßes** vollkommen zusammenfällt, wenn die Durchschnittslinie AY der Fläche mit dem Wasserspiegel als Drehaxe angesehen wird.

Wasserdruck gegen Rechtecke und Dreiecke. Ist die gedrückte Fläche ein **Rechteck** AC, Fig. 598, mit horizontaler Grundlinie CD, so befindet sich der Mittelpunkt M des Druckes in der die Grundlinien halbirenden Falllinie KL und steht um $^2/_3$ dieser Linie von der Seite AB im Wasserspiegel ab. Reicht dieses Rechteck nicht bis zum Wasserspiegel, wie in Fig. 599, ist vielmehr der Abstand KL der unteren Basis CD vom §. 358

Fig. 598.

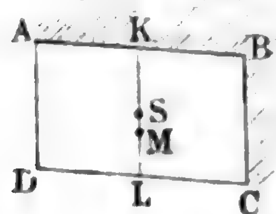


Fig. 599.

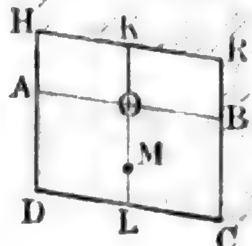
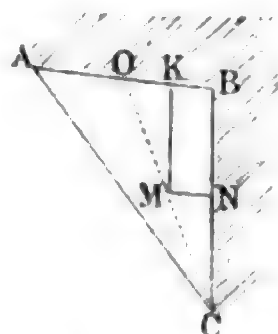


Fig. 600.



Wasserspiegel, $= l_1$ und der Abstand KO der oberen Basis AB, $= l_2$, so hat man den Abstand KM des Druckmittelpunktes vom Wasserspiegel HR:

$$u = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}.$$

Für ein **rechtwinkeliges Dreieck** ABC, Fig. 600, dessen eine Kathete AB im Wasserspiegel liegt, ist der Abstand KM des Druckmittelpunktes M von AB (Beispiel §. 313):

$$u = \frac{{}^1/_6\, F \,.\, l^2}{{}^1/_3\, F \,.\, l} = {}^1/_2\, l,$$

wenn l die Höhe BC des Dreieckes bezeichnet.

Der Abstand dieses Punktes M von der anderen Kathete BC ist, da dieser Punkt jedenfalls in der das Dreieck halbirenden Linie CO liegt, welche von der Spitze O nach dem Mittelpunkte der Grundlinie geht, $NM = v = {}^1/_4\, b$, wo b die Grundlinie AB bezeichnet.

Liegt die Spitze C im Wasserspiegel, wie Fig. 601 (a. f. S.) angiebt, befindet sich also die Kathete AB unter der Spitze, so hat man:

$$KM = u = \frac{{}^1/_2\, F l^2}{{}^2/_3\, F l} = {}^3/_4\, l \text{ und}$$

$$NM = v = {}^3/_4 \cdot \frac{b}{2} = {}^3/_8\, b.$$

Befindet sich das ganze Dreieck $A\,B\,C$, Fig. 602, unter Wasser, steht die Grundlinie $A\,B$ um $A\,H = l_2$ und die Spitze C um $C\,H = l_1$ vom Wasserspiegel $H\,R$ ab, so hat man den Abstand $M\,K$ des Druckmittelpunktes M vom Wasserspiegel HR:

Fig. 604.

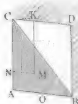
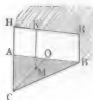


Fig. 602.



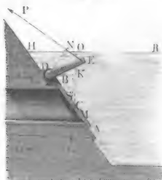
$$u = \frac{{}^1/_{18}\, F\,(l_1 - l_2)^2 + F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)^2}{F\left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)}$$

$$= \frac{{}^1/_{18}\,(l_1 - l_2)^2 + {}^1/_9\,(2\,l_2 + l_1)^2}{{}^1/_3\,(2\,l_2 + l_1)} = \frac{l_1^2 + 2\,l_1\,l_2 + 3\,l_2^2}{2\,(l_1 + 2\,l_2)}.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Druckmittelpunkte von anderen ebenen Figuren bestimmen.

Beispiel. Welche Kraft P ist aufzuwenden, um die um eine horizontale Axe D drehbare kreisrunde Klappe $A\,B$, Fig. 603, aufzuziehen? Es sei die Länge $D\,A$ dieser Klappe, $= 1^1/_2$ Fuß, ihr Durchmesser $A\,B = 1^1/_4$ Fuß, der Abstand ihres Schwerpunktes S von der Axe D, $D\,S = 0{,}75$ Fuß, und das Gewicht derselben, $G = 35$ Pfd.; ferner sei der Abstand $D\,H$ der Drehaxe D von dem Wasserspiegel $H\,R$, in der Ebene der Klappe gemessen, $= 1$ Fuß und der Neigungswinkel dieser Ebene gegen den Horizont, $\alpha = 68^0$.

Fig. 603.



Die gedrückte Fläche ist:

$$F = \pi\, r^2 = \frac{\pi\, d^2}{4} = 0{,}7854 \cdot \frac{25}{16}$$
$$= 1{,}2272 \text{ Quadratfuß},$$

und die Druckhöhe oder die Tiefe ihres Mittelpunktes C unter dem Wasserspiegel:

$$O\,C = h = H\,C\,sin.\,\alpha = (H\,D + D\,C)\;sin.\,\alpha = (H\,D + D\,B + B\,C)\;sin.\,\alpha$$
$$= (1 + 0{,}25 + 0{,}625)\;sin.\,68^0 = 1{,}875\,.\,0{,}9272 = 1{,}7385 \text{ Fuß},$$

und daher der Druck des Wassers auf die Fläche $A\,B = F$:

$$Q = F\,h\,\gamma = 1{,}2272\,.\,1{,}7385\,.\,61{,}75 = 131{,}73 \text{ Pfund}.$$

Der Hebelarm b dieser Kraft in Hinsicht auf die Drehaxe D ist der Abstand $D\,M$ des Druckmittelpunktes M von derselben, also:

$$b = H\,M - H\,D.$$

Nun ist aber

$$HM = HC + \frac{r^2}{4\,HC} = 1{,}875 + \frac{1}{4\,.\,1{,}875} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1{,}9271 \text{ Fuß},$$

daher folgt:

$$b = 1{,}9271 - 1{,}0000 = 0{,}9271 \text{ Fuß},$$

und das gesuchte statische Moment des Wasserdruckes:

$$Q\,b = 131{,}73\,.\,0{,}9271 = 122{,}13 \text{ Fußpfund}.$$

Der Hebelarm des Gewichtes der Drehklappe ist

$$DK = \overline{DS}\,cos.\,\alpha = 0{,}75\,.\,cos.\,68^0 = 0{,}75\,.\,0{,}3746 = 0{,}2810 \text{ Fuß},$$

und daher das statische Moment dieses Gewichtes

$$= 35\,.\,0{,}2810 = 9{,}84 \text{ Fußpfund}.$$

Durch Addition beider Momente erhält man das ganze Moment zum Aufziehen der Klappe

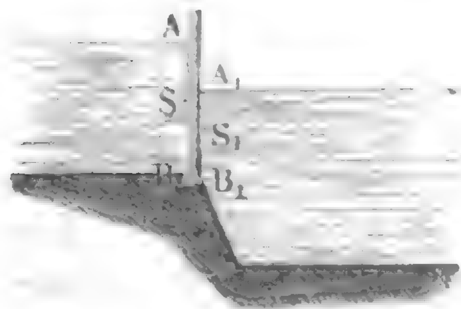
$$Pa = 122{,}13 + 9{,}84 = 131{,}97 \text{ Fußpfund},$$

und wirkt nun die Kraft zum Aufziehen an dem Hebelarme $DN = a = 0{,}75$ Fuß, so folgt die Größe derselben:

$$P = \frac{131{,}97}{0{,}75} = 175{,}96 \text{ Pfund}.$$

Druck auf beiden Seiten einer Fläche. Wird eine ebene Fläche AB, Fig. 604, zu beiden Seiten vom Wasser gedrückt, so resultirt aus den beiden Seiten entsprechenden Mittelkräften eine neue Mittelkraft, die sich durch Subtraction derselben von einander ergiebt, weil beide einander entgegen wirken. §. 359

Fig. 604.



Ist F der Inhalt des gedrückten Theiles auf der einen Seite der Fläche AB, und h die Tiefe AS seines Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel, ferner F_1 der Inhalt des Theiles $A_1\,B_1$ auf der anderen Seite der Fläche, und h_1 die Tiefe $A_1\,S_1$ seines Schwerpunktes unter dem entsprechenden Wasserspiegel, so fällt die gesuchte Mittelkraft:

$$P = Fh\gamma - F_1\,h_1\,\gamma = (Fh - F_1\,h_1)\,\gamma \text{ aus}.$$

Ist das Trägheitsmoment des ersten Flächentheiles in Hinsicht auf die Linie, in welcher die Ebene der Fläche den ersten Wasserspiegel schneidet, $= Fk^2$, so hat man das statische Moment des Wasserdruckes von der einen Seite

$$= Fk^2\,.\,\gamma;$$

und ist das Trägheitsmoment des zweiten Flächentheiles in Hinsicht auf die Durchschnittslinie mit dem zweiten Wasserspiegel, $= F_1\,k_1^2$, so hat man

ebenso das statische Moment des Wasserdruckes von der anderen Seite in Hinsicht auf die Axe im zweiten Wasserspiegel

$$= F_1 k_1^2 \gamma.$$

Setzen wir nun den Abstand $A A_1$ der Wasserspiegel von einander, $= a$, so erhalten wir die Vergrößerung des letzten Momentes beim Uebergange von der Axe A_1 auf die Axe A,

$$= F_1 h_1 a \gamma,$$

und daher das statische Moment des Wasserdruckes $F_1 h_1 \gamma$ in Hinsicht auf die Axe A im ersten Wasserspiegel

$$= F_1 k_1^2 \gamma + F_1 h_1 . a . \gamma = (F_1 k_1^2 + F_1 a h_1)\gamma.$$

Hiernach folgt dann das statische Moment der Differenz beider Mitteldrücke

$$= (F k^2 - F_1 k_1^2 - a F_1 h_1)\gamma,$$

und der Hebelarm dieser Kraftdifferenz, oder der Abstand des Druckmittelpunktes von der Axe im ersten Wasserspiegel:

$$u = \frac{F k^2 - F_1 k_1^2 - a F_1 h_1}{F h - F_1 h_1}.$$

Sind die gedrückten Flächentheile einander gleich, welcher Fall eintritt, wenn, wie Fig. 605 repräsentirt, die ganze Fläche $A B = F$ unter Wasser ist, so hat man einfacher:

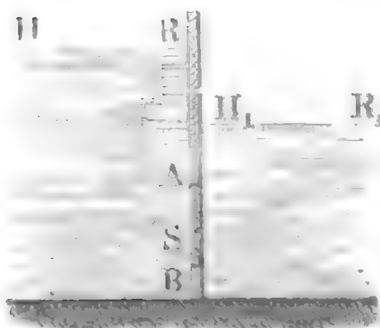


Fig. 605.

$$P = F(h - h_1)\gamma.$$

und da $k^2 = k_1^2 + 2 a h_1 + a^2$ (s. §. 224) und $h - h_1 = a$ ist,

$$u = \frac{k^2 - k_1^2 - a h_1}{h - h_1} = \frac{a h_1 + a^2}{a}$$

$$= h_1 + a = h.$$

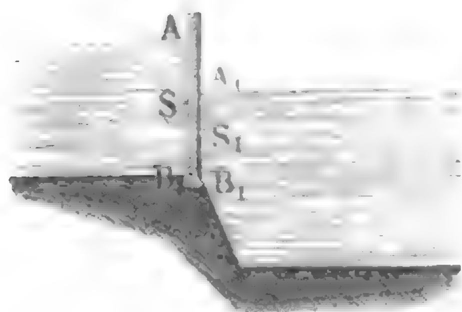
In dem letzten Falle ist also der Druck gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche die gedrückte Fläche und deren Höhe der Höhenabstand $R H_1$ zwischen beiden Wasserspiegeln ist, und es fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte S der Fläche zusammen. Dieses Gesetz ist auch noch dann richtig, wenn beide Wasserspiegel außerdem noch durch gleiche Kräfte, z. B. durch Kolben, oder durch die Atmosphäre gedrückt werden. Denn ist dieser Druck auf jede Flächeneinheit $= p$, und also die entsprechende Wassersäulenhöhe $l = \frac{p}{\gamma}$ (§. 355), so hat man statt h, $h + l$ und statt h_1, $h_1 + l$ zu setzen, und es läßt die Subtraction die Kraft

$$P = (h + l - [h_1 + l]) F\gamma = (h - h_1) F\gamma$$

übrig. Aus diesem Grunde läßt man denn auch in der Regel bei hydrostatischen Untersuchungen den Atmosphärendruck außer Acht.

Beispiel. Die Höhe AB des Oberwassers bei einer Schifffahrtsschleuse, Fig. 606, beträgt 7 Fuß, das Wasser in der Kammer steht am Schleusenthore 4 Fuß hoch, und die Breite des Canals und der Kammer mißt 7,5 Fuß, welchen Mitteldruck hat das Schleusenthor auszuhalten?

Fig. 606.



Es ist

$$F = 7 \,.\, 7{,}5 = 52{,}5 \text{ und}$$

$$F_1 = 4 \,.\, 7{,}5 = 30 \text{ Quadratfuß, ferner:}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2} \text{ und } h_1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ Fuß},$$

$$a = 7 - 4 = 3 \text{ Fuß},$$

$$k^2 = \frac{1}{3} \cdot 7^2 = \frac{49}{3} \text{ und } k_1^2 = \frac{1}{3} \cdot 4^2 = \frac{16}{3},$$

daher folgt der gesuchte Mitteldruck:

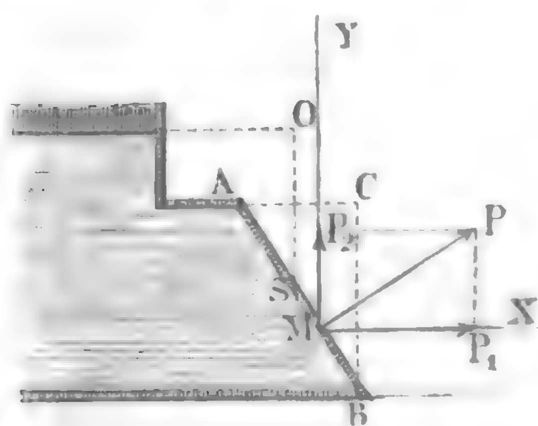
$$P = (Fh - F_1 h_1)\gamma = \left(52{,}5 \cdot \frac{7}{2} - 30 \cdot 2\right) \cdot 61{,}75 = 123{,}75 \,.\, 61{,}75$$
$$= 7641{,}7 \text{ Pfd.},$$

und die Tiefe seines Angriffspunktes unter dem Oberwasserspiegel:

$$u = \frac{52{,}5 \cdot \frac{49}{3} - 30 \cdot \frac{16}{3} - 3 \,.\, 60}{52{,}5 \cdot \frac{7}{2} - 60} = \frac{517{,}5}{123{,}75} = 4{,}182 \text{ Fuß}.$$

Druck nach einer bestimmten Richtung. In vielen Fällen ist es wichtig, nur einen, nach einer bestimmten Richtung wirkenden Theil des Wasserdruckes auf eine Fläche zu kennen. Um einen solchen Componenten zu finden, zerlegen wir den normalen Wasserdruck $\overline{MP} = P$ der Fläche $\overline{AB} = F$, Fig. 607, nach der gegebenen Richtung MX und nach der Richtung MY winkelrecht gegen dieselbe in zwei Seitenkräfte: §. 360

Fig. 607.



$$MP_1 = P_1 \text{ und } MP_2 = P_2.$$

Ist nun α der Winkel PMX, um welchen die Normalkraft von der gegebenen Richtung MX der Seitenkraft abweicht, so erhält man für die Componenten:

$$P_1 = P \cos.\alpha \text{ und } P_2 = P \sin.\alpha.$$

Entwirft man von der Fläche AB in einer winkelrecht auf der gegebenen Richtung MX stehenden Ebene die Projection BC, so hat man für deren Inhalt F_1 die Formel:

$$F_1 = F \,.\, \cos.\, ABC,$$

oder, da der Neigungswinkel ABC der Fläche zu ihrer Projection gleich ist dem Winkel $PMX = \alpha$ zwischen der Normalkraft P und ihrem Componenten P_1, so hat man:

$$F_1 = F \cos.\alpha, \text{ oder umgekehrt:}$$

$$\cos. \alpha = \frac{F_1}{F},$$

und daher die gesuchte Seitenkraft:

$$P_1 = P \cdot \frac{F_1}{F}.$$

Da noch der Normaldruck die Größe $P = F h \gamma$ hat, so folgt endlich:

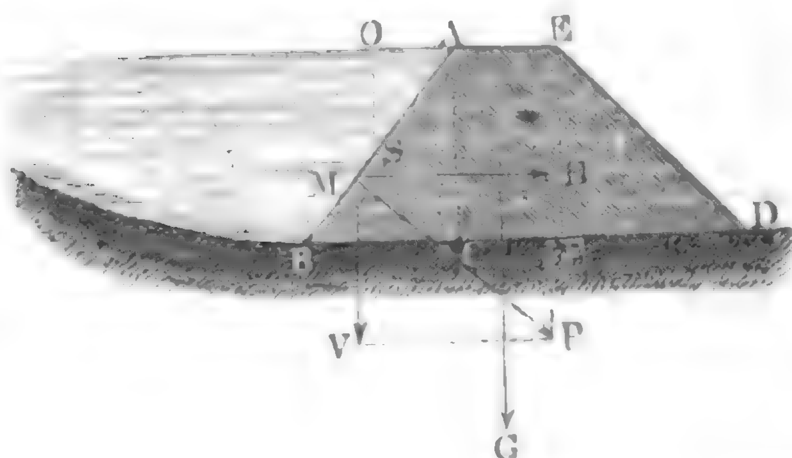
$$P_1 = F_1 h \gamma,$$

d. h. der Druck, womit das Wasser auf eine Fläche nach irgend einer Richtung drückt, ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Projection der Fläche winkelrecht zur gegebenen Richtung und zur Höhe die Tiefe des Schwerpunktes der Fläche unter dem Wasserspiegel hat.

In den meisten Fällen der Anwendung ist es wichtig, nur den verticalen oder einen horizontalen Componenten vom Drucke des Wassers gegen eine Fläche zu kennen. Da die Projection winkelrecht zur Verticalrichtung, die Horizontal- und die Projection winkelrecht zu einer Horizontalrichtung eine Verticalprojection ist, so findet man den Verticaldruck des Wassers gegen eine Fläche, wenn man die Horizontalprojection oder den Grundriß derselben als gedrückte Fläche, und dagegen den Horizontaldruck des Wassers nach irgend einer Richtung, wenn man die Verticalprojection oder den Aufriß der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung als gedrückte Fläche behandelt, in beiden Fällen aber die Tiefe OS des Schwerpunktes S der Fläche unter dem Wasserspiegel als Druckhöhe ansieht.

Bei einem prismatischen Teichdamm $ABDE$, Fig. 608, hat man hiernach für die Horizontalgewalt des Wassers das verticale Längenprofil AC und für die Verticalkraft die Horizontalprojection BC der Wasserfläche AB als gedrückte Fläche anzusehen. Setzt man daher die Länge des Dammes, $= l$, die Höhe $AC = h$ und die vordere Böschung

Fig. 608.



$BC = a$, so folgt die Horizontalkraft des Wassers

$$H = l h \cdot \frac{h}{2} \gamma = \frac{1}{2} h^2 l \gamma,$$

und der Verticaldruck desselben:

$$V = a\,l \cdot \frac{h}{2}\gamma = \frac{1}{2}\,a\,l\,h\,\gamma.$$

Ist nun noch die obere oder Dammkappenbreite $AE = b$, die hintere Böschung $DF = a_1$, und die Dichtigkeit der Dammmasse, $= \gamma_1$, so hat man das Gewicht des Dammes:

$$G = \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right) h\,l\,\gamma_1,$$

und den ganzen Verticaldruck des Dammes gegen den horizontalen Boden:

$$V + G = \frac{1}{2}\,a\,l\,h\,\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right) h\,l\,\gamma_1 = \left[\frac{1}{2}\,a\,\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right] h\,l.$$

Setzt man den Reibungscoefficienten $= \varphi$, so folgt nun die Reibung oder Kraft zum Fortschieben des Dammes:

$$F = \varphi\,(V + G) = \left[\frac{1}{2}\,a\,\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right]\varphi\,h\,l.$$

In dem Falle, wenn der Horizontaldruck des Wassers dieses Fortschieben bewirken soll, ist daher zu setzen:

$$\frac{1}{2}\,h^2\,l\,\gamma = \left[\frac{1}{2}\,\gamma\,a + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right] . \varphi\,h\,l,$$

oder einfacher:

$$h = \varphi\left(a + (2\,b + a + a_1)\,\frac{\gamma_1}{\gamma}\right).$$

Damit also der Damm vom Wasser nicht fortgeschoben werde, muß sein:

$$h < \varphi\left(a + (2\,b + a + a_1)\,\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \text{ oder}$$

$$b > \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{\varphi} - a\right)\frac{\gamma}{\gamma_1} - (a + a_1)\right].$$

Der Sicherheit wegen nimmt man wohl an, daß der Grund des Dammes größtentheils durchwaschen sei, weshalb äußerstenfalls noch ein Gegendruck von unten nach oben, $= (b + a + a_1)\,l\,h\,\gamma$ in Abzug zu bringen und

$$h < \varphi\left[(2\,b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right]$$

zu setzen ist.

Beispiel. Die Dichtigkeit der Lehmdammmasse ist nahe doppelt so groß, als die des Wassers, also:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 2 \text{ und } \frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 = 1;$$

es läßt sich daher für einen Lehmdamm einfach

$$h < \varphi\,(2\,b + a)$$

setzen. Erfahrungen zufolge widersteht ein Damm hinlänglich, wenn die Höhe,

Böschung und Kappenbreite desselben einander gleich sind; setzt man hiernach in der letzten Formel:

$h = b = a$, so ergiebt sich:

$\tau = \frac{1}{3}$, weshalb man in anderen Fällen:

$$h = \frac{1}{3}\left[(2b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right],$$

und insbesondere bei Lehmdämmen:

$h = \frac{1}{3}(2b + a)$, daher umgekehrt:

$$b = \frac{3h - a}{2}$$

zu setzen hat.

Beträgt die Dammhöhe 20 Fuß und der Böschungswinkel $\alpha = 36^0$, so ist die Böschung:

$$a = h\, cotg.\, \alpha = 20 \,.\, cotg.\, 36^0 = 20 \,.\, 1{,}3764 = 27{,}53 \text{ Fuß},$$

und daher die obere Damm- oder Kappenbreite:

$$b = \frac{60 - 27{,}53}{2} = 16{,}24 \text{ Fuß zu machen.}$$

361 **Druck auf krumme Flächen.** Das im letzten Paragraphen gefundene Gesetz über den Druck des Wassers nach einer bestimmten Richtung gilt nur für ebene Flächen und für die einzelnen Elemente krummer Flächen, nicht aber für krumme Flächen überhaupt. Die Normaldrücke auf die einzelnen Elemente einer krummen Fläche lassen sich in Seitenkräfte parallel zu einer gegebenen Richtung und in andere, gegen erstere winkelrecht wirkend, zerlegen. Jene Seitendrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft den Druck in der gegebenen Richtung angiebt, und diese Seitenkräfte lassen sich ebenfalls auf eine Mittelkraft zurückführen, beide Mittelkräfte gestatten aber keine weitere Vereinigung, wenn ihre Richtungen nicht zum Durchschnitte gelangen (§. 97). Im Allgemeinen ist es also nicht möglich, die sämmtlichen Wasserdrücke gegen die Elemente einer krummen Fläche auf eine einzige Kraft zurückzuführen; es kommen jedoch einzelne Fälle vor, wo diese Vereinigung möglich ist.

Sind G_1, G_2, G_3 u. s. w. die Projectionen und h_1, h_2, h_3 u. s. w. die Druckhöhen von den Elementen F_1, F_2, F_3 u. s. w. einer krummen Fläche, so hat man den Druck des Wassers nach der Richtung winkelrecht zur Projectionsebene:

$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 + \cdots)\gamma,$$

und das Moment desselben in Hinsicht auf die Ebene des Wasserspiegels:

$$Pu = (G_1 h_1^2 + G_2 h_2^2 + G_3 h_3^2 + \cdots)\gamma.$$

Kann man die gedrückte krumme Fläche in Elemente zerlegen, die zu ihren Projectionen ein unveränderliches Verhältniß haben, läßt sich also

$$\frac{G_1}{F_1} = \frac{G_2}{F_2} = \frac{G_3}{F_3} \text{ u. s. w.} = n \text{ setzen, so hat man:}$$

$$G_1 = \frac{F_1}{n},\ G_2 = \frac{F_2}{n}$$ u. s. w., daher:

$$P = \left(\frac{F_1 h_1}{n} + \frac{F_2 h_2}{n} + \cdots\right)\gamma = \left(\frac{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots}{n}\right)\gamma = \frac{F h}{n}\gamma.$$

wo F den Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel bezeichnet. Nun hat man aber

$$F = F_1 + F_2 + \cdots = n G_1 + n G_2 + \cdots = n(G_1 + G_2 + \cdots) = n G,$$

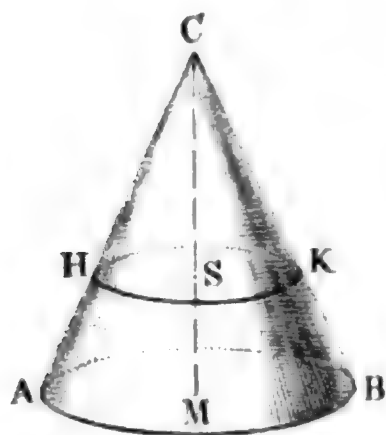
wenn G den Inhalt der Projection der ganzen Fläche ausdrückt, es ist daher:

$$P = \frac{F h}{n}\gamma = G h \gamma;$$

also wie bei jeder ebenen Fläche, der **Wasserdruck nach einer Richtung gleich dem Gewichte eines Wasserprismas, dessen Grundfläche der Projection der krummen Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung und dessen Höhe der Tiefe des Schwerpunktes der krummen Fläche unter dem Wasserspiegel gleich kommt.**

So ist z. B. der Verticaldruck des Wassers gegen den Mantel eines mit Wasser gefüllten, kegelförmigen Gefäßes ACB, Fig. 609, gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Bodenfläche zur Basis und zwei Drittel der Axenlänge CM zur Höhe hat, weil sich die von der Bodenfläche gebildete Horizontalprojection des geraden Kegelmantels ebenso wie der Mantel in lauter gleiche trianguläre Elemente zerlegen läßt, und weil der Schwerpunkt S des Kegelmantels um zwei Drittel der Höhe des Kegels von der Spitze absteht (§. 116). Ist r der Halbmesser der Basis und h die Höhe des Kegels, so hat man den Druck gegen den Boden, $= \pi r^2 h \gamma$, und den Verticaldruck gegen den Mantel, $= \frac{2}{3} \pi r^2 h \gamma$; da aber der Boden mit der Seitenwand fest verbunden ist, und beide Drücke einander entgegen wirken, so folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß durch das Wasser abwärts gedrückt wird,

Fig. 609.

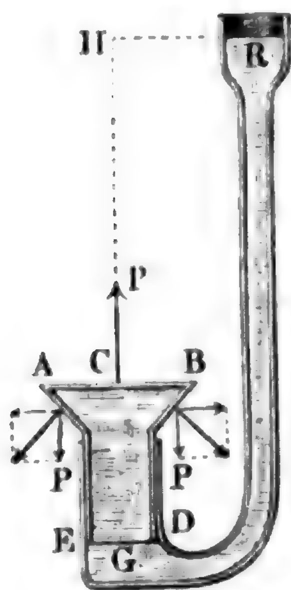


$$= (1 - \tfrac{2}{3})\pi r^2 h \gamma = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \gamma$$

= dem Gewichte der ganzen Wassermasse. Hätte man den Boden durch einen feinen Schnitt vom Mantel getrennt, so würde derselbe mit seiner vollen Kraft $\pi r^2 h \gamma$ nach unten, oder auf seine Unterlage drücken, dagegen wäre aber auch noch der Mantel mit einer Kraft $\frac{2}{3}\pi r^2 h \gamma$ niederzuhalten, um das Abheben desselben durch das Wasser zu verhindern.

Anmerkung. Es ist hiernach die Kraft, welche der Dampf einer Dampfmaschine oder das Wasser einer Wassersäulenmaschine auf den Kolben ausübt, unabhängig von der Form des Kolbens. Wie auch die Druckfläche durch Aushöhlung oder Abrundung vergrößert sein möge, immer bleibt der Druck, mit welchem der Dampf oder das Wasser den Kolben fortschiebt, gleich dem Producte aus dem Querschnitte oder der Horizontalprojection des Kolbens und aus dem Drucke auf die Flächeneinheit. Bei dem trichterförmigen Kolben AB, Fig. 610, dessen größerer Halbmesser $CA = CB = r$ und dessen kleinerer Halbmesser $GD = GE = r_1$ ist, mißt der Druck auf die Grundfläche, $= \pi r^2 p$ und die Reaction auf den Mantel, $= \pi (r^2 - r_1^2) p$; es ist daher der übrigbleibende wirksame Druck:

Fig. 610.

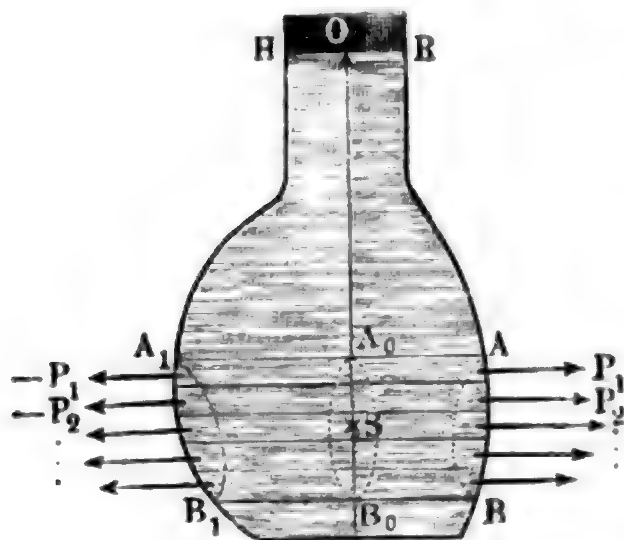


$$P = \pi r^2 p - \pi (r^2 - r_1^2) p = \pi r_1^2 p$$

= Querschnitt des Cylinders mal Druck auf die Flächeneinheit.

362 **Horizontal- und Verticaldruck.** Wie auch eine krumme Fläche AB, Fig. 611, geformt sein möge, immer ist der Horizontaldruck des Wassers gegen dieselbe gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Verticalprojection $A_0 B_0$ der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Druckrichtung und zur Druckhöhe die Tiefe OS des Schwerpunktes S dieser Projection unter dem Wasserspiegel hat. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus der Formel

Fig. 611.



$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots) \gamma$$

sogleich, wenn man berücksichtigt, daß die Druckhöhen h_1, h_2 u. s. w. der Flächenelemente auch zugleich die Druckhöhen ihrer Projectionen sind, daß also

$$G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots$$

das statische Moment der ganzen Projection, d. i. das Product Gh aus der Verticalprojection G und der Tiefe h ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel ist. Man hat also hier wieder

$$P = G h \gamma$$

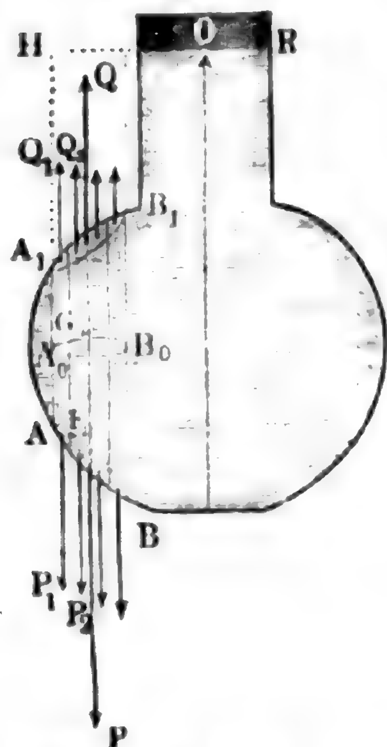
zu setzen, aber nicht außer Acht zu lassen, daß h die Druckhöhe der Verticalprojection ist.

Der Verticalschnitt, wodurch man ein Gefäß mit dem darin befindlichen Wasser in zwei gleiche oder ungleiche Theile theilt, ist zugleich die Verticalprojection von beiden Theilen, der Horizontaldruck auf einen Theil der Gefäßwand ist aber dem Producte aus der Verticalprojection desselben und der Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel proportional; folglich

ist auch der Horizontaldruck des Wassers auf einen Theil AB der Gefäßwand genau so groß, als der entgegengesetzt wirkende Horizontaldruck auf den gegenüber liegenden Theil $A_1 B_1$ derselben, und es heben sich beide Kräfte im Gefäße gegenseitig auf. Das ganze Gefäß wird also von dem eingeschlossenen Wasser nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gepreßt.

Der Verticaldruck $P_1 = G_1 h_1 \gamma$ des Wassers gegen ein Element F_1, Fig. 612, der Gefäßwand ist, da die Horizontalprojection G_1 des Elementes als Querschnitt und die Druckhöhe h_1 als Höhe und also $G_1 h_1$ als das Volumen eines Prismas angesehen werden kann, gleich dem Gewichte einer über dem Elemente stehenden und bis zur Ebene HR des Wasserspiegels reichenden Wassersäule HF_1. Die einen endlichen Theil AB des Bodens oder der Gefäßwand ausmachenden Flächenelemente erleiden daher auch einen Verticaldruck, welcher dem Gewichte sämmtlicher darüberstehenden Wassersäulen, d. i. dem Gewichte der über dem ganzen Stücke stehenden Wassersäule gleich ist. Setzen wir dieses Volumen V_1, so erhalten wir hiernach für den verticalen Wasserdruck:

Fig. 612.



$$P = V_1 \gamma.$$

Für einen anderen Theil $A_1 B_1$ der Gefäßwand, welcher senkrecht über dem vorigen liegt und das Volumen $A_1 B_1 H = V_2$ begrenzt, hat man den entgegengesetzten Verticaldruck:

$$Q = V_2 \gamma;$$

sind aber beide Theile fest mit einander verbunden, so resultirt aus beiden Kräften die vertical abwärts wirkende Kraft:

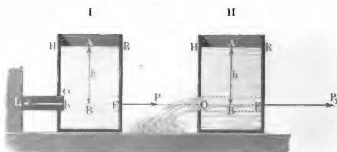
$$R = P - Q = (V_1 - V_2)\gamma = V\gamma$$

= dem Gewichte der zwischen beiden Flächentheilen enthaltenen Wassersäule. Wendet man endlich dieses Gesetz auf das ganze Gefäß an, so folgt, daß der gesammte Verticaldruck des Wassers gegen das Gefäß gleich ist dem Gewichte der eingeschlossenen Wassermasse.

Macht man eine Oeffnung O in die Seitenwand eines Gefäßes HBR, Fig. 613, I. u. II. (a. f. S.), so fällt der Theil des Druckes, welcher dem Querschnitte dieser Oeffnung entspricht, weg, und es bleibt daher der Druck auf das gegenüber liegende Flächenstück F übrig. Wird nun die Oeffnung wie in I., durch einen Stöpsel K verschlossen, dessen Zurückgehen ein Widerstand L von außen verhindert, so findet eine gleichmäßige Vertheilung des Horizontaldruckes auf die Gefäßwand nicht mehr statt, sondern es wird das Gefäß mit einer Kraft $P = Fh\gamma$ fortgeschoben, welche der Stöpsel in entgegengesetzter Richtung aufnimmt. Gelangt nach dem Entstöpseln der Mün-

dung das Wasser O zum Ausfluß, wie II. darstellt, so steigert sich in Folge

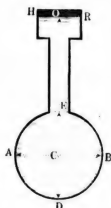
Fig. 613.



der Reaction des ausfließenden Wassers dieser Druck P von $F h \gamma$ auf $P_1 = 2 F h \gamma$, wie in der Folge gezeigt werden wird.

Beispiel Der Verticaldruck P_1 des Wassers auf die untere Halbkugelfläche ADB, Fig. 614, ist dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche oben von der Ebene des Wasserspiegels HR und unten von dieser Halbkugelfläche begrenzt wird. Ist r der Halbmesser $CA = CD$ dieser Fläche, und h die Höhe CO des Wasserspiegels HR über der horizontalen Begrenzungsebene AB derselben, so hat man das Volumen der Halbkugel ABD, $V_1 = \frac{2}{3} \pi r^3$, und das des Cylinders über AB, $V_2 = \pi r^2 h$, daher:

Fig. 614.



$$P_1 = (V_1 + V_2)\gamma = (\tfrac{2}{3} \pi r^3 + \pi r^2 h)\gamma$$
$$= (h + \tfrac{2}{3} r) \pi r^2 \gamma.$$

Der nach oben gerichtete Verticaldruck auf die obere Halbkugelfläche AEB ist dagegen:

$$P_2 = (V_2 - V_1)\gamma = (h - \tfrac{2}{3} r) \pi r^2 \gamma;$$

daher folgt der gesammte Verticaldruck:

$$P = P_1 - P_2 = 2 V_2 = \tfrac{4}{3} \pi r^3 \gamma$$

= dem Gewichte des Wassers in der ganzen Kugel.

Der horizontale Druck auf eine der Halbkugeln DAE und DBE, welche in der Verticalebene DCE zusammenstoßen, wird dagegen durch das Gewicht des Prismas von der Grundfläche $DCE = \pi r^2$ und der Höhe $CO = h$ gemessen, ist folglich:

$$R = \pi r^2 h \gamma.$$

363 **Röhrenstärke.** Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung der Lehre vom Wasserdrucke auf Röhren, Kessel u. s. w. Damit diese Gefäße dem Wasserdrucke hinreichend widerstehen und durch denselben nicht zersprengt werden, hat man ihnen eine gewisse, der Druckhöhe und der inneren Weite entsprechende W a n d s t ä r k e zu geben. Das Zersprengen einer Röhre kann

entweder in Quer- oder in Längenrissen vor sich gehen. Die letzteren entstehen jedoch leichter als die ersteren, wie aus Folgendem erhellen wird.

Ist die Druckhöhe des Wassers in einer Röhre, $= h$, also der Druck desselben auf die Flächeneinheit, $p = h\gamma$, ferner die Weite dieser Röhre, $MN = 2\,CM = 2\,r$, Fig. 615, also der Querschnitt des Wasserkörpers in derselben, $F = \pi r^2$, so beträgt der auf die Endflächen der Röhre ausgeübte und von dem Querschnitte der Röhrenmasse aufzunehmende Wasserdruck:

$$P = Fp = \pi r^2 h \gamma = \pi r^2 p.$$

Hat nun die Röhrenwand eine Dicke $AD = BE = e$, so ist der Querschnitt derselben

$$= \pi (r + e)^2 - \pi r^2 = 2\pi r e + e^2 = 2\pi r e\left(1 + \frac{e}{2r}\right),$$

und bezeichnet man endlich den Tragmodul des Röhrenmaterials durch T, so läßt sich die Tragkraft der ganzen Röhre in der Axenrichtung,

Fig. 615.

$$P = \left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2\pi r e T$$

setzen, so daß nun die Gleichung

$$\left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2\pi r e T = \pi r^2 p \quad \text{oder}$$

$$\left(1 + \frac{e}{2r}\right) 2 e T = r p \text{ (s. §. 205)}$$

aufgestellt werden kann, deren Auflösung die gesuchte Röhrenstärke

$$e = \frac{r p}{2\left(1 + \frac{e}{2r}\right) T},$$

oder meist genau genug,

$$e = \frac{r p}{2\,T} = \frac{r h \gamma}{2\,T} \text{ giebt.}$$

Der mittlere Druck, welchen das Wasser auf ein Wandstück AMB ausübt, dessen Länge $= l$, und Centriwinkel $ACB = 2\alpha^0$ ist, beträgt, da die Projection dieses Stückes rechtwinkelig gegen die Mittellinie CM ein Rechteck vom Inhalte $\overline{AB}.l = 2\,r\,l\,sin.\,\alpha$ ist,

$$P = 2\,r\,l\,sin.\,\alpha\,.\,p = 2\,r\,l\,h\,sin.\,\alpha\,.\,\gamma.$$

Dieser Kraft wird durch die Cohäsionskräfte R, R in den Querschnitten $\overline{AD}.l$ und $\overline{BE}.l = el$ der Röhrenwand das Gleichgewicht gehalten; sie ist daher der Summe $2\,Q$ derjenigen Componenten $\overline{DQ} = Q$ und $\overline{EQ} = Q$ der letzteren Kräfte gleich zu setzen, welche mit der Mittellinie CM parallel gerichtet sind. Setzen wir nun $R = e\,l\,T$, so erhalten wir:

$$Q = R \sin. ARQ = R \sin. ACM = e\,l\,T \sin. \alpha,$$

und daher:

$$2\,e\,l\,T \sin. \alpha = 2\,r\,l\,p \sin. \alpha, \text{ d. i. } e\,T = r\,p,$$

und es ist hiernach die gesuchte Röhrenstärke:

$$e = \frac{r\,p}{T} = \frac{r\,h\,\gamma}{T},$$

also ganz unabhängig von der Lage und Länge der Risse.

Da die erste Entwickelung e nur $= \frac{r\,p}{2\,T}$ giebt, so folgt, daß zur Verhinderung der Entstehung von Längenrissen die Wandstärke noch einmal so groß zu machen ist, als zur Verhinderung der Bildung eines Querrisses.

Aus der gefundenen Formel

$$e = \frac{r\,p}{T} = \frac{r\,h\,\gamma}{T}$$

folgt, daß sich die Stärken gleichartiger Röhren wie die Weiten und wie die Druckhöhen oder Drücke auf die Flächeneinheit verhalten müssen. Eine Röhre, welche dreimal so weit ist, als eine andere, und einen fünfmal so großen Druck auf jede Flächeneinheit auszuhalten hat, als diese, muß eine fünfzehnmal so starke Wand erhalten.

Hohlen Kugeln, welche von innen einen Druck p auf jede Flächeneinheit aushalten müssen, hat man die Stärke

$$e = \frac{r\,p}{2\,T}$$

zu geben, weil hier die Projection der Druckfläche der größte Kreis πr^2, und die Trennungsfläche der Ring $2\,\pi\,r\,e\left(1 + \frac{e}{2\,r}\right)$, oder annähernd, bei kleinerer Dicke, $= 2\,\pi\,r\,e$ ist.

Die gefundenen Formeln geben für $p = 0$ auch $e = 0$, deshalb müßten also Röhren, welche keinen inneren Druck auszuhalten haben, unendlich dünn gemacht werden; da aber jede Röhre schon in Folge ihres eigenen Gewichtes einen gewissen Druck aushalten und auch eine gewisse Dicke erhalten muß, damit sie wasserdicht wird, so hat man zu der gefundenen Größe noch eine gewisse Dicke e_1 hinzuzufügen, um die Stärke einer unter allen Umständen widerstehenden Röhre zu erhalten. Es ist solchem nach für cylindrische Röhren oder Kessel zu setzen:

$$e = e_1 + \frac{r\,h\,\gamma}{T},$$

oder einfacher, wenn d die ganze innere Röhrenweite, p den Druck in

Atmosphären, jede einer 33 Fuß hohen Wassersäule entsprechend, und μ eine Erfahrungszahl bezeichnet:

$$e = e_1 + \mu p d.$$

Gemachten Erfahrungen zufolge ist anzunehmen für Röhren von:

Eisenblech	$e = 0{,}00086\, p d + 0{,}12$	Zoll
Gußeisen	$e = 0{,}00238\, p d + 0{,}33$	„
Kupfer	$e = 0{,}00148\, p d + 0{,}16$	„
Blei	$e = 0{,}00507\, p d + 0{,}20$	„
Zink	$e = 0{,}00242\, p d + 0{,}16$	„
Holz	$e = 0{,}0323\, p d + 1{,}04$	„
natürlichen Steinen . .	$e = 0{,}0369\, p d + 1{,}15$	„
künstlichen Steinen . .	$e = 0{,}0538\, p d + 1{,}53$	„

Beispiel. Wenn eine Wassersäulenmaschine senkrecht stehende, im Inneren 10 Zoll weite Einfallröhren aus Gußeisen hat, wie stark müssen dieselben bei 100, 200 und 300 Fuß Tiefe sein? Nach der Formel ist bei 100 Fuß Druck diese Stärke $= 0{,}00238 \cdot {}^{100}/_{33} \cdot 10 + 0{,}33 = 0{,}07 + 0{,}33 = 0{,}40$ Zoll; bei 200 Fuß $= 0{,}14 + 0{,}33 = 0{,}47$ Zoll, und bei 300 Fuß Druck $= 0{,}22 + 0{,}33 = 0{,}55$ Zoll. Gewöhnlich prüft man gußeiserne Leitungsröhren auf 10 Atmosphären, weshalb hiernach

$$e = 0{,}0238 \,.\, d + 0{,}33 \text{ Zoll},$$

also für Röhren von 10 Zoll Weite die Stärke:

$$e = 0{,}24 + 0{,}33 = 0{,}57 \text{ Zoll}$$

anzuwenden ist.

Anmerkung 1. Im zweiten Theile werden die Wandstärken der Röhren auch für den Fall ermittelt, wo die Röhren nicht bloß hydrostatischen Druck, sondern auch hydraulische Stöße auszuhalten haben. (S. „Ingenieur“ S. 422.)

Anmerkung 2. Von den Stärken der Dampfkesselwände wird im zweiten Theile gehandelt. Ueber die Theorie der Röhrenstärke ist eine Abhandlung von Herrn geh. Regierungsrath Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, Jahrgang 1834, sowie Wiebes Lehre von den einfachen Maschinentheilen, Band I., nachzulesen. Ebenso Rankine's Manuel of applied Mechanics, S. 289, und Scheffler's Monographien über die Gitter- und Bogenträger, und über die Festigkeit der Gefäßwände. Von den technischen Verhältnissen und von den Prüfungen der Röhren wird gehandelt in Hagen's Handbuch der Wasserbaukunst, Theil I., ferner in Genieу's Essai sur les moyens de conduire etc. les eaux, und im Traité théoretique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux, par Dupuit, Paris 1854.

Zweites Capitel

Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern.

. 364 **Auftrieb.** Ein unter das Wasser getauchter Körper wird durch das Wasser von allen Seiten her gedrückt, und es entsteht nun die Frage nach der Größe, Richtung und dem Angriffspunkte der Mittelkraft aus allen diesen Pressungen. Denken wir uns diese Mittelkraft aus einem verticalen und zwei horizontalen Componenten bestehend, und bestimmen wir diese Kräfte nach den Regeln des §. 362. Der Horizontaldruck des Wassers gegen eine Fläche ist gleich dem Horizontaldrucke gegen ihre Verticalprojection; nun ist aber jede Projection eines Körpers AC, Fig. 616, Projection vom Hintertheil ADC und Vordertheil ABC seiner Oberfläche zugleich, es fällt daher auch der horizontale Wasserdruck P gegen den Hintertheil der Oberfläche eines Körpers eben so groß aus als der Druck $-P$ gegen den Vordertheil, und es ist in Folge der entgegengesetzten Richtungen dieser Drücke, die Mittelkraft derselben gleich Null. Da dieses Verhältniß bei jeder beliebigen Horizontalrichtung und dieser entsprechenden Verticalprojection stattfindet, so folgt, daß die Resultirende aus allen Horizontalpressungen Null ist, daß also der unter dem Wasser befindliche Körper AC nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt wird und deshalb kein Bestreben hat, sich in einer Horizontalrichtung fortzubewegen.

Fig. 616.

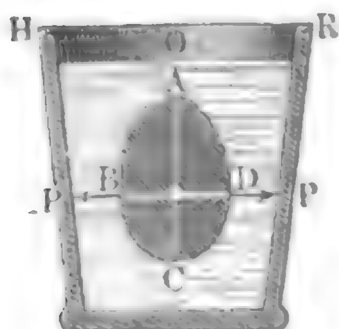
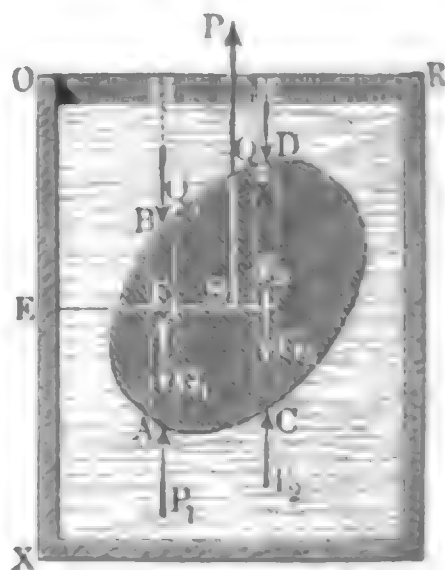


Fig. 617.



Um den Verticaldruck des Wassers gegen den eingetauchten Körper ABD, Fig. 617, zu finden, denken wir uns denselben in verticale Elemen-

tarprismen AB, CD u. s. w. zerlegt, und bestimmen die Verticaldrücke auf die Endflächen A und B, C und D derselben u. s. w. Sind die Längen dieser Säulen l_1, l_2 u. s. w., die Tiefen HB, KD ihrer oberen Enden B, D unter dem Wasserspiegel OR, h_1, h_2 u. s. w., und ihre horizontalen Querschnitte F_1, F_2 u. s. w., so hat man die von oben nach unten wirkenden Verticaldrücke gegen die Enden B, D u. s. w.

$$Q_1, Q_2 \text{ u. s. w.} = F_1 h_1 \gamma, F_2 h_2 \gamma \text{ u. s. w.},$$

und dagegen die von unten nach oben und gegen die Enden A, C u. s. w. wirkenden Drücke

$$P_1, P_2 \text{ u. s. w.} = F_1 (h_1 + l_1) \gamma, F_2 (h_2 + l_2) \gamma \text{ u. s. w.};$$

und es folgt nun durch Vereinigung dieser Parallelkräfte die Mittelkraft:

$$P = P_1 + P_2 + \cdots - (Q_1 + Q_2 + \cdots)$$
$$= F_1 (h_1 + l_1)\gamma + F_2(h_2 + l_2)\gamma + \cdots - F_1 h_1 \gamma - F_2 h_2 \gamma - \cdots$$
$$= (F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots)\gamma = V\gamma,$$

wenn V das Volumen des eingetauchten Körpers oder des verdrängten Wassers bezeichnet.

Hiernach ist also der **Auftrieb**, oder die **Kraft, mit welcher das Wasser einen darin eingetauchten Körper von unten nach oben emporzutreiben sucht, gleich dem Gewichte des verdrängten Wassers oder einer Wassermenge, welche mit dem untergetauchten Körper einerlei Volumen hat.**

Um endlich noch den Angriffspunkt dieser Mittelkraft zu finden, setzen wir die Abstände EF_1, EF_2 u. s. w. der Elementarsäulen AB, CD u. s. w. von einer Verticalebene OX, a_1, a_2 u. s. w. und bestimmen die Momente der Kräfte in Hinsicht auf diese Ebene. Ist nun S der Angriffspunkt des Auftriebes und $ES = x$ der Abstand desselben von jener Grundebene, so hat man:

$$V\gamma . x = F_1 l_1 \gamma . a_1 + F_2 l_2 \gamma . a_2 + \cdots,$$

und daher:

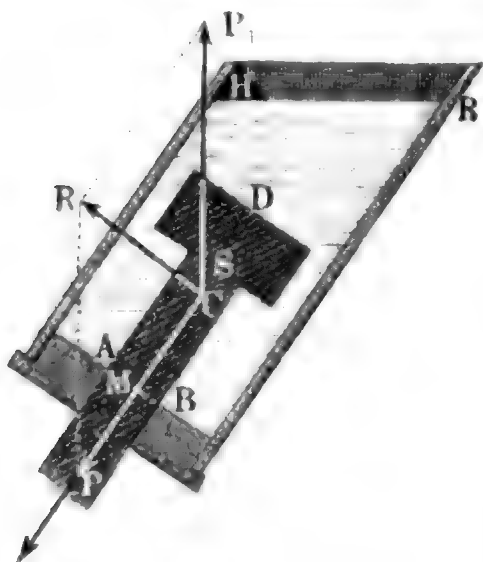
$$x = \frac{F_1 l_1 a_1 + F_2 l_2 a_2 + \cdots}{F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots} = \frac{V_1 a_1 + V_2 a_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

wenn V_1, V_2 u. s. w. die Inhalte der säulenförmigen Elemente bezeichnen. Da sich (nach §. 105) der Schwerpunkt des Körpers genau nach derselben Formel bestimmt, so folgt, **daß der Angriffspunkt S des Auftriebes mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers zusammenfällt.**

Auftrieb bei theilweiser Umgebung mit Wasser. Wenn ein Körper, wie ABD, Fig. 618 (a. f. S.), nicht vollständig vom Wasser AHR umgeben ist, sondern mit der Gefäßwand in einer ebenen Fläche $\overline{AB}$ vom Inhalte F zusammenhängt, oder die Gefäßwand mit dem Querschnitte $\overline{AB} = F$ durchdringt, so fällt von der Wirkung des Wassers §. 366

auf den Körper die Kraft weg, welche dieselbe auf die Fläche AB ausüben würde, wenn letztere frei, also ebenfalls mit dem Wasser in Berührung wäre.

Fig. 618.



Bezeichnet nun h die Druckhöhe auf AB, d. i. die Tiefe des Schwerpunktes dieser Fläche unter dem Wasserspiegel HR, so wäre der Wasserdruck auf AB, $P = Fh\gamma$ und giebt V_1 das Volumen des von ABD verdrängten Wassers an, so ist der Auftrieb des Wassers, welcher den Körper senkrecht aufwärts zu bewegen suchen würde, wenn er ganz frei wäre, $P_1 = V_1\gamma$.

Da nun aber der Druck auf AB wegfällt, so ist die Gesammtwirkung des Wassers auf den Körper nur die Mittelkraft R aus $P_1 = V_1\gamma$ und $-P = -Fh\gamma$. Um diese Mittelkraft zu bestimmen, hat man die verticale Schwerlinie des verdrängten Wasserkörpers und die durch den Mittelpunkt M des Druckes auf AB winkelrecht stehende Gerade bis zum Durchschnitt C zu verlängern, die Kräfte P_1 und $-P$ in diesem Punkte angreifend anzunehmen, und dieselben mittels des Parallelogrammes der Kräfte zu einer Mittelkraft $\overline{CR} = R$ zu vereinigen.

Ist die Neigung der Fläche AB gegen den Horizont, sowie die Abweichung der Kraft P_1 von der Verticalen, $= \alpha$, so hat man folglich den Winkel, welchen die Richtungen der Kräfte P und $-P_1$ zwischen sich einschließen, $MCP_1 = 180^0 - \alpha$, und daher die Größe der den gesammten Wasserdruck auf den Körper ABD messenden Mittelkraft

$$R = \sqrt{P_1^2 + P^2 - 2PP_1 \cos.\alpha}$$
$$= \gamma\sqrt{V_1^2 + (Fh)^2 - 2V_1Fh \cos.\alpha}.$$

Dem Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung entsprechend, findet natürlich auch eine gleiche Reaction $-R$ des Körpers auf das Wasser statt. Ist V_0 das Volumen des Wassers im Gefäße, also $V_0\gamma$ das Gewicht G desselben, so folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß vertical abwärts gedrückt wird,

$$Q = V_0\gamma + P_1 = (V_0 + V_1)\gamma \text{ d. i. } Q = V\gamma,$$

wenn $V = V_0 + V_1$ das Volumen des vom Wasser und vom Körper ABD zugleich eingenommenen Raumes bezeichnet.

Vereinigt man nun noch hiermit den Druck $P = Fh\gamma$, so folgt die Gesammtkraft, welche das Gefäß aufzunehmen hat,

$$R_1 = \sqrt{Q^2 + P^2 - 2QP\cos.\alpha}$$
$$= \gamma\sqrt{V^2 + (Fh)^2 - 2VFh\cos.\alpha}.$$

Wäre die Fläche AB horizontal, also $\alpha =$ Null, so hätte man

$$R = (V_1 - Fh)\gamma \text{ und } R_1 = (V - Fh)\gamma.$$

Wäre auch noch $V_1 = 0$, so würde $R = - Fh\gamma$ ausfallen (s. §. 355).

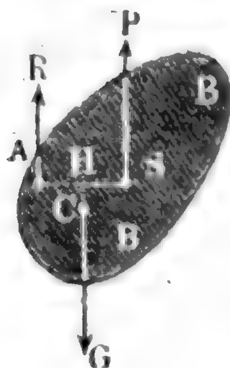
Gleichgewicht der schwimmenden Körper. Zu dem Auftriebe P eines in oder unter Wasser getauchten Körpers gesellt sich noch das in entgegengesetzter Richtung wirkende Gewicht G des Körpers, und es ergiebt sich nun aus beiden eine Mittelkraft: §. 366.

$$R = G - P \text{ oder } = (\varepsilon - 1)\, V\gamma,$$

wenn ε das specifische Gewicht des Körpers bezeichnet.

Ist die Körpermasse homogen, so fällt der Schwerpunkt des verdrängten Wassers mit dem des Körpers zusammen, und es ist daher dieser Punkt zugleich der Angriffspunkt von der Mittelkraft $R = G - P$; findet aber eine Homogenität nicht statt, so fallen diese Schwerpunkte nicht zusammen, und es weicht deshalb auch der Angriffspunkt der Mittelkraft R von beiden Schwerpunkten ab. Setzen wir den Horizontalabstand SH, Fig. 619, beider Schwerpunkte von einander, $= b$ und den Horizontalabstand SA des gesuchten Angriffspunktes A von dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers, $= a$, so haben wir die Gleichung:

Fig. 619.



$$Gb = Ra,$$

woraus sich

$$a = \frac{Gb}{R} = \frac{Gb}{G - P}$$

ergiebt.

Wird der eingetauchte Körper seiner eigenen Schwere überlassen, so können folgende drei Fälle eintreten. Entweder ist das specifische Gewicht ε des Körpers gleich dem des Wassers, oder es ist größer, oder es ist kleiner als das specifische Gewicht des Wassers. Im ersten Falle ist der Auftrieb gleich dem Gewichte, im zweiten ist er kleiner und im dritten ist er größer als das Gewicht des Körpers. Während im ersten Falle Gleichgewicht zwischen dem Gewichte und dem Auftriebe eintritt, muß der Körper im zweiten Falle mit der Kraft

$$G - V\gamma = (\varepsilon - 1)\, V\gamma$$

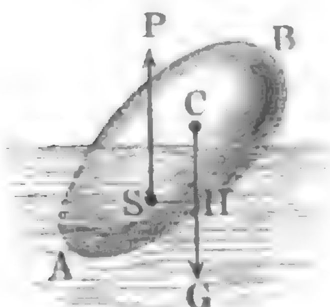
sinken, und im dritten Falle mit der Kraft

$$V\gamma - G = (1 - \varepsilon)\, V\gamma$$

steigen. Das Steigen geht aber nur so lange vor sich, bis die von der Ebene des Wasserspiegels abgeschnittene und von dem Körper verdrängte

Wassermasse V_1 mit dem ganzen Körper einerlei Gewicht hat. Das Gewicht $G = V \varepsilon \gamma$ des Körpers AB, Fig. 620, und der Auftrieb $P = V_1 \gamma$ bilden nun ein Kräftepaar, durch welches der Körper noch so weit umgedreht wird, bis die Richtungen beider Kräfte zusammenfallen, oder bis der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers in eine und dieselbe Verticallinie fällt. Aus der Gleichheit der Kräfte P und G folgt der Ausdruck:

Fig. 620.



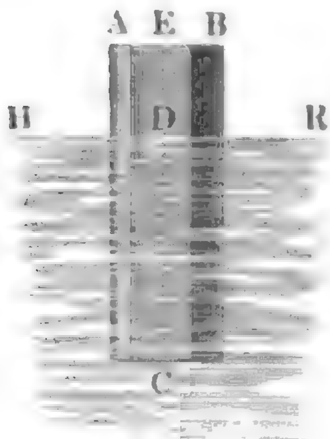
$$V_1 = \varepsilon V, \text{ oder } \frac{V_1}{V} = \frac{\varepsilon}{1}.$$

Man nennt die Linie durch den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers und durch den des verdrängten Wassers die Schwimmaxe (franz. axe de flottaison; engl. axis of floating), und dagegen den durch die Ebene des Wasserspiegels gebildeten Schnitt des schwimmenden Körpers die Schwimmebene (franz. plan de flottaison; engl. plane of floating). Dem Vorstehenden zufolge kann jede Ebene, welche einen Körper so theilt, daß die Schwerpunkte beider Theile in einer Normallinie zu dieser Ebene liegen, und daß sich der eine Theil zum Ganzen wie das specifische Gewicht des Körpers zu dem der Flüssigkeit verhält, Schwimmebene des Körpers sein.

§. 367 **Schwimmtiefe.** Kennt man die Gestalt und das Gewicht eines schwimmenden Körpers, so läßt sich mit Hülfe der vorstehenden Regel die Tiefe des Eintauchens im Voraus berechnen. Ist G das Gewicht des Körpers, so setze man das Volumen des verdrängten Wassers:

$$V_1 = \frac{G}{\gamma};$$

Fig. 621.



verbindet man hiermit die stereometrische Formel für dieses Volumen V_1, so erhält man die gesuchte Bestimmungsgleichung.

Für ein Prisma ABC, Fig. 621, mit verticaler Axe ist z. B. $V_1 = Fy$, wenn F den Querschnitt und y die Tiefe CD des Eintauchens bezeichnet, es folgt daher:

$$Fy = \frac{G}{\gamma} \text{ und } y = \frac{G}{F\gamma} = \frac{Gh}{V\gamma},$$

wenn V das Volumen und h die Länge des schwimmenden Prismas bezeichnet.

Für eine mit der Spitze unter Wasser schwimmende Pyramide

$A\,B\,C$, Fig. 622, ist, da sich die Inhalte ähnlicher Pyramiden wie die Cuben ihrer Höhen verhalten,

$$\frac{V_1}{V} = \frac{y^3}{h^3},$$ und folglich die Tiefe der Eintauchung:

$$C\,D = y = h\sqrt[3]{\frac{V_1}{V}} = h\sqrt[3]{\frac{G}{V\gamma}},$$

wo V das Volumen und h die Höhe der Pyramide bezeichnen.

Fig. 622.

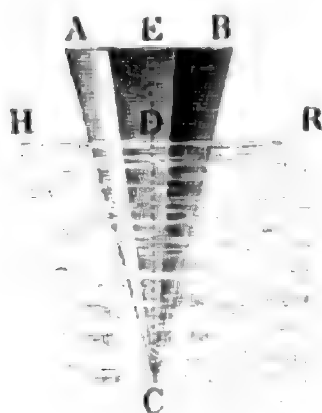
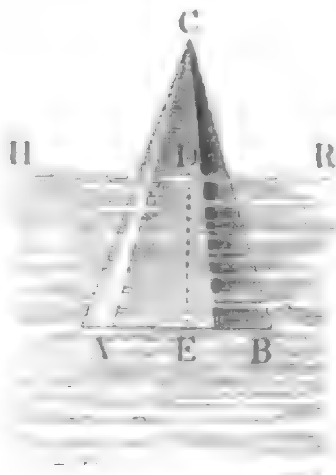


Fig. 623.



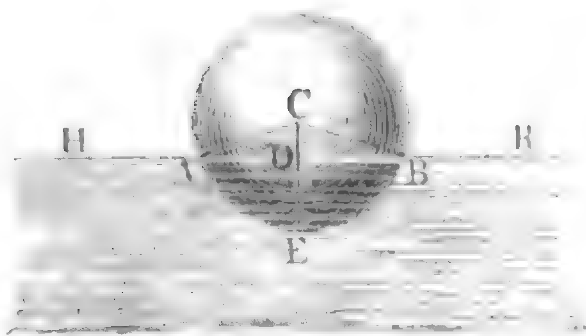
Für eine mit der Basis unter Wasser schwimmende Pyramide $A\,B\,C$, Fig. 623, ergiebt sich hingegen der Abstand $C\,D = y_1$ der Spitze vom Wasserspiegel, aus der Höhe h der ganzen Pyramide, indem man setzt:

$\frac{V_1}{V} = \frac{h^3 - y_1^3}{h^3}$, wonach dann $y_1 = h\sqrt[3]{1 - \frac{V_1}{V}} = h\sqrt[3]{1 - \frac{G}{V\gamma}}$ folgt.

Für eine Kugel $A\,B$, Fig. 624, mit dem Halbmesser $C\,A = r$ ist

$$V_1 = \pi y^2 \left(r - \frac{y}{3}\right),$$

Fig. 624.



daher hat man hier es mit der Auflösung der cubischen Gleichung

$$y^3 - 3\,r\,y^2 + \frac{3\,G}{\pi\,\gamma} = 0$$

zu thun, um die Tiefe $D\,E = y$ der Eintauchung der Kugel zu finden.

Für einen mit horizontaler Axe schwimmenden Cylinder $A\,K$, Fig. 625 (a. f. S.), vom Halbmesser $A\,C = B\,C = r$ ist, wenn α^0 den Centriwinkel $A\,C\,B$ des eingetauchten Bogens bezeichnet, die Tiefe $D\,E$ der Eintauchung:

$$y = r\,(1 - \cos.\,{}^1\!/_2\,\alpha),$$

um aber den Wasserbogen α zu finden, setzen wir das Volumen des verdrängten

Wassers = Ausschnitt $\left(\frac{r^2 \alpha}{2}\right)$ minus Dreieck $\left(\frac{r^2 \sin. \alpha}{2}\right)$, multiplicirt durch die Länge $BK = l$ des Cylinders, also

Fig. 625.

$$(\alpha - \sin. \alpha)\frac{l r^2}{2} = \frac{G}{\gamma},$$

und lösen die Gleichung

$$\alpha - \sin. \alpha = \frac{2\,G}{l\,r^2 \gamma}$$

auf dem Wege der Näherung in Beziehung auf α auf.

Beispiele. 1) Wenn eine schwimmende Holzkugel von 10 Zoll Durchmesser, $4^1/_2$ Zoll tief schwimmt, so ist das Volumen des von ihr verdrängten Wassers:

$$V_1 = \pi\,(^9/_2)^2\,(5 - {}^9/_6) = \frac{\pi\,.\,81\,.\,7}{8} = \frac{567\,.\,\pi}{8} = 222{,}66 \text{ Cubikzoll},$$

während die Kugel selbst den Inhalt $\frac{\pi\,d^3}{6} = \frac{\pi\,.\,10^3}{6} = 523{,}6$ Cubikzoll hat. Es wiegen hiernach 523,6 Cubikzoll Kugelmasse ebensoviel wie 222,66 Cubikzoll Wasser, und es folgt das specifische Gewicht der ersteren:

$$\varepsilon = \frac{222{,}66}{523{,}6} = 0{,}425.$$

2) Wie tief schwimmt ein Holzcylinder von 10 Zoll Durchmesser bei einem specifischen Gewichte $\varepsilon = 0{,}425$? Es ist:

$$\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = \frac{\pi\,r^2\,l\,.\,\varepsilon\,\gamma}{l\,r^2\,\gamma} = \pi\,\varepsilon = 0{,}425\,.\,\pi = 1{,}3352;$$

nun giebt die Segmententafel im „Ingenieur“, S. 154, für den Inhalt $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}32766$ eines Kreissegmentes den Centriwinkel $\alpha^0 = 166^0$, und für $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}34487$ denselben $= 167^0$, es läßt sich daher einfach der dem Abschnitte 1,3352 entsprechende Centriwinkel

$$\alpha^0 = 166^0 + \frac{1{,}33520 - 1{,}32766}{1{,}34487 - 1{,}32766}\cdot 1^0 = 166^0 + \frac{754^0}{1721} = 166^0 26';$$

und die Tiefe der Eintauchung:

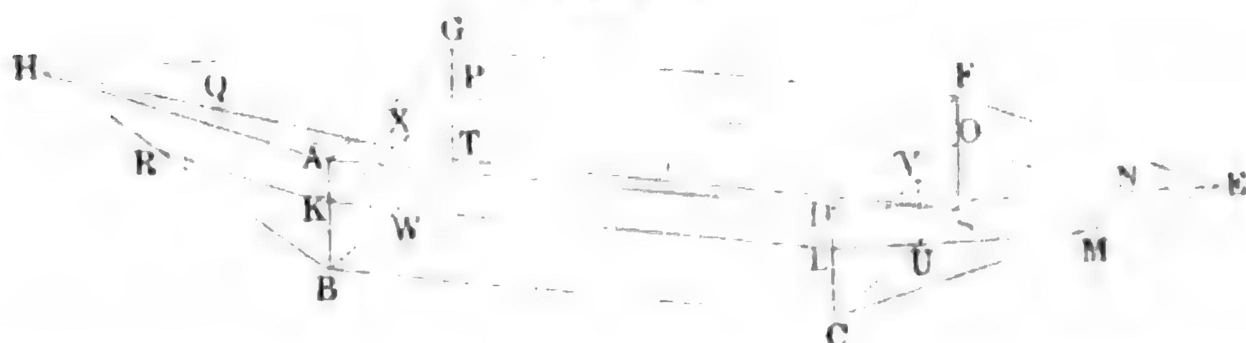
$$y = r\,(1 - \cos.\,{}^1/_2\,\alpha) = 5\,(1 - \cos.\,83^0 13') = 5\,.\,0{,}8819 = 4{,}41 \text{ Zoll}$$

setzen.

§. 368 Die Bestimmung der Eintauchungstiefe kommt vorzüglich bei Kähnen und Schiffen vor. Haben diese Fahrzeuge eine gesetzmäßige Form, so läßt sich diese Tiefe mittels geometrischer Formeln berechnen; fehlt aber die gesetzmäßige Form oder ist das Gesetz der Gestaltung nicht bekannt, oder ist die Form sehr zusammengesetzt, so muß man die Tiefe des Eintauchens durch Experimentiren oder durch Probiren bestimmen.

Ein Beispiel für den ersten Fall gewährt der in Fig. 626 abgebildete, von den ebenen Flächen begränzte Kahn $ACEGH$. Derselbe besteht aus

Fig. 626.



einem Parallelepipede ACF und aus zwei, den Vorder- und Hintertheil bildenden vierseitigen Pyramiden CEF und BGH, und seine Schwimmebene ist aus einem Parallelogramme $KLOP$ und aus zwei Trapezen $LMNO$ und $KPQR$ zusammengesetzt, welche einen Wasserraum abschneiden, der sich in ein Parallelepiped $KCOT$, in zwei dreiseitige Prismen, wie $UVMN$ und $WXRQ$, und in zwei vierseitige Pyramiden, wie CVM und BXR zerlegen läßt. Setzen wir die Länge $AD = BC$ des Mittelstückes $= l$, die Breite $AG = b$ und die Höhe $AB = h$, ferner die Länge von jedem der beiden Schnäbel, $= c$ und die Tiefe der Einsenkung unter Wasser, d. i. $BK = CL = y$. Es folgt zunächst der eingetauchte Theil $KCOT$ des Mittelstückes:

$$= \overline{BC} \,.\, \overline{CS} \,.\, \overline{CL} = l\,b\,y.$$

Setzen wir die Breite der Basis der Pyramide CVM, $CU = x$, und die Höhe dieser Pyramide $= z$, so haben wir:

$$\frac{x}{b} = \frac{z}{c} = \frac{y}{h}, \text{ daher:}$$

$$x = \frac{b}{h}\,y \text{ und } z = \frac{c}{h}\,y;$$

es folgt nun der Inhalt dieser Pyramide:

$$= {}^1\!/_3\, x\,y\,z = \frac{b\,c\,y^3}{3\,h^2},$$

und daher der Inhalt der beiden Pyramiden (CVM und BXR) zusammen

$$= {}^2\!/_3\, \frac{b\,c\,y^3}{h^2}.$$

Der Querschnitt des dreiseitigen Prismas UVN ist:

$$= {}^1\!/_2\, y\,z = \frac{c\,y^2}{2\,h}, \text{ und die Seite } MN = VO:$$

$$= b - \frac{b\,y}{h} = b\left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

daher folgt der Inhalt der beiden Prismen VUN und XWQ zusammen:

$$= 2 \cdot \frac{c y^2}{2h} \cdot b \left(1 - \frac{y}{h}\right) = \frac{b c y^2}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Endlich ergiebt sich durch Addition der gefundenen drei Räume das Volumen des verdrängten Wassers:

$$V = b l y + \tfrac{2}{3} \frac{b c y^3}{h^2} + \frac{b c y^2}{h} - \frac{b c y^3}{h^2} = \left(l + \frac{c y}{h} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{c y^2}{h^2}\right) b y.$$

Ist nun das Bruttogewicht des Schiffes, $= G$, so hat man zu setzen:

$$\left(l + \frac{c y}{h} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{c y^2}{h^2}\right) b y \gamma = G, \text{ oder}$$

$$y^3 - 3 h y^2 - \frac{3 l h^2}{c} \cdot y + \frac{3 h^2 G}{b c \gamma} = 0.$$

Durch die Auflösung der letzten cubischen Gleichung bestimmt sich aus dem Bruttogewichte G des Schiffes die Tiefe y der Einsenkung desselben.

Beispiele. 1) Wenn bei einem Schiffe die Länge des Mittelstückes, $l = 50$ Fuß, die Länge eines jeden Schnabels, $c = 15$ Fuß, die Breite $b = 12$ Fuß und die Tiefe $h = 4$ Fuß beträgt, so kann bei einer Einsenkungstiefe $y = 2$ Fuß die ganze Belastung betragen:

$$G = [50 + 15 \,.\, \tfrac{2}{4} - \tfrac{1}{3} \,.\, 15 \,.\, (\tfrac{2}{4})^2] \,.\, 12 \,.\, 2 \,.\, 61{,}74$$
$$= (50 + 7{,}5 - 1{,}25) \,.\, 24 \,.\, 61{,}74 = 84920 \text{ Pfund.}$$

2) Wenn bei dem vorigen Schiffe das Bruttogewicht 50000 Pfund ausmacht, so hat man für die Senkungstiefe:

$$y^3 - 12 y^2 - 160 y + 215{,}96 = 0.$$

Hieraus folgt

$$y = \frac{215{,}96 + y^3 - 12 y^2}{160} = 1{,}35 + 0{,}00625 y^3 - 0{,}075 y^2, \text{ annähernd}$$

$$y = 1{,}350 + 0{,}00625 \,.\, (1{,}35)^3 - 0{,}075 \,.\, (1{,}35)^2$$
$$= 1{,}35 + 0{,}0154 - 0{,}1367 = 1{,}229, \text{ und nun genauer}$$
$$y = 1{,}350 + 0{,}00625 \,.\, (1{,}229)^3 - 0{,}075\,(1{,}229)^2 = 1{,}225 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Um das Gewicht der Ladungen eines Schiffes anzugeben, versieht man dieses zu beiden Seiten mit einer Scala, der sogenannten Schiffsaiche. Die Eintheilung einer solchen Aiche wird in der Regel empirisch gefunden, indem man untersucht, welche Einsenkungen bestimmten Belastungen entsprechen. Ausführlicher darüber im dritten Bande.

§. 369 **Stabilität schwimmender Körper.** Das Schwimmen der Körper erfolgt entweder in aufrechter oder in schiefer Stellung, ferner mit oder ohne Stabilität. Aufrecht schwimmt ein Körper, z. B. ein Schiff, wenn wenigstens eine durch die Schwimmaxe gehende Ebene Symmetrieebene des Körpers ist, schief schwimmt derselbe, wenn er durch keine der Ebenen, welche sich durch die Schwimmaxe legen lassen, in zwei symmetrische Theile getheilt wird.

Ein Körper schwimmt mit Stabilität, wenn er seinen Gleichgewichtszustand zu behaupten sucht (vergl. §. 141), wenn also mechanische Arbeit aufzuwenden ist, um ihn aus dieser Lage zu bringen, oder wenn er von selbst in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, nachdem man ihn daraus gebracht hat. Ohne Stabilität schwimmt dagegen der Körper, wenn er in eine neue Gleichgewichtslage übergeht, nachdem er, etwa durch Erschütterung oder durch einen Stoß u. s. w., aus der ersten gebracht worden ist.

Wird ein vorher aufrecht schwimmender Körper $A\,B\,C$, Fig. 627, in eine schiefe Lage gebracht, so tritt der Schwerpunkt S des verdrängten Wassers aus der Symmetrieebene EF heraus und nimmt eine Stelle S_1 auf der mehr eingetauchten Hälfte des Schiffsraumes ein. Der in S_1 angreifende Auftrieb $P = V\gamma$ und das im Schwerpunkte C des Schiffes angreifende Gewicht $G = -P$ des Schiffes bilden nun ein Kräftepaar, durch welches (s. §. 93) stets eine Drehung hervorgebracht wird. Um welchen Punkt auch diese Drehung vor sich gehe, immer wird doch C, dem Gewichte G nachgebend, niedergehen, und S_1 oder ein anderer Punkt M der Verticalen $S_1\,P$, der Kraft P folgend, aufsteigen, es wird also die Symmetrie- oder Axenebene EF des Schiffes in C nach unten und in M nach oben gezogen, und daher dieselbe sich aufrecht stellen, wenn M, wie in Fig. 627, über C liegt, und sich

Fig. 627.

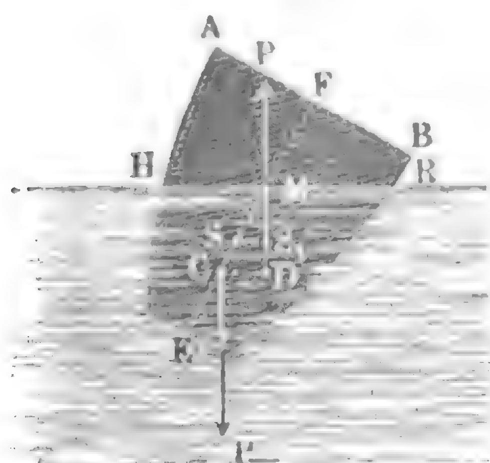
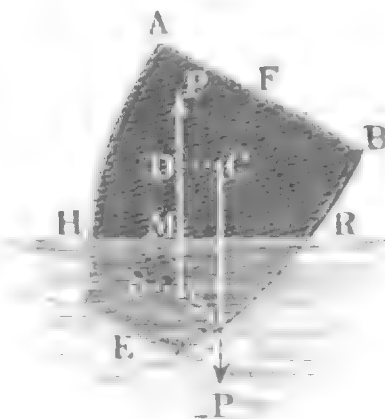


Fig. 628.



dagegen noch mehr neigen, wie in Fig. 628, wenn sich M unter C befindet. Hiernach hängt denn die Stabilität eines schwimmenden Körpers oder Schiffes von dem Punkte M ab, in welchem die Verticale durch den Schwerpunkt S_1 des verdrängten Wassers die Symmetrieebene schneidet. Man nennt diesen Punkt das Metacentrum (franz. métacentre; engl. metacentrum). Ein Schiff oder ein anderer Körper schwimmt also hiernach mit Stabilität, wenn sein Metacentrum über dem Schwerpunkte des Schiffes liegt, und ohne solche, wenn es darunter liegt; er ist endlich im indifferenten Gleichgewichte, wenn beide Punkte zusammenfallen.

Der Horizontalabstand CD des Metacentrums M von dem Schwerpunkte C des Schiffes ist der Hebelarm des von P und $G = -P$ gebildeten Kräfte-

paares, und daher das Moment des letzteren oder das Maß der Stabilität $= P.\overline{CD}$. Bezeichnen wir die Entfernung CM durch c, und den Drehungswinkel SMS_1 des Schiffes oder seiner Axenebene durch φ, so erhalten wir für das Maß der Stabilität des Schiffes:

$$S = Pc \sin.\varphi;$$

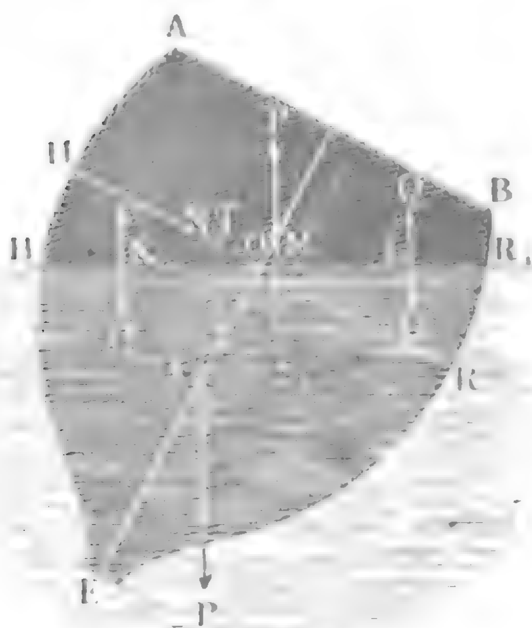
und es ist also hiernach dieses um so größer, je größer das Gewicht, je größer die Entfernung des Metacentrums von dem Schwerpunkte des Schiffes und je größer der Neigungswinkel des letzteren ist.

§. 370 **Bestimmung des Stabilitätsmomentes.** In der letzten Formel

$$S = Pc \sin.\varphi$$

hängt die Stabilität des Schiffes vorzüglich von der Entfernung des Metacentrums vom Schwerpunkte des Schiffes ab, es ist daher von Wichtigkeit, sich eine Formel zur Bestimmung dieser Entfernung zu verschaffen. Durch den Uebergang des Schiffes ABE, Fig. 629, aus der aufrechten Lage in die schiefe Lage rückt der Schwerpunkt S nach S_1, es geht der keilförmige Raum HOH_1 aus dem Wasser hervor und zieht sich der keilförmige Raum ROR_1 unter das Wasser hinab, und es wird dadurch der Auftrieb auf der einen Seite um eine im Schwerpunkte F des Raumes HOH_1 angreifende Kraft Q vermindert und auf der anderen Seite um eine im Schwerpunkte G des Raumes ROR_1 angreifende gleiche Kraft Q vergrößert. Es ersetzt also hiernach der in S_1 angreifende Auftrieb P den anfänglich in S angreifenden Auftrieb sammt dem Kräftepaare $(Q, -Q)$, oder, was auf Eins hinauskommt, eine in S_1 angreifende Gegenkraft $-P$ hält der in S angreifenden Kraft P sammt Kräftepaar $(Q, -Q)$ das Gleichgewicht, oder einfacher, ein Kräftepaar $(P, -P)$ mit den Angriffspunkten S und S_1 ist mit dem Kräftepaare $(Q, -Q)$ im Gleichgewichte.

Fig. 629.



Ist nun das Querprofil $HER = H_1ER_1$ des im Wasser befindlichen Schiffstheiles, $= F$, und das Querprofil $HOH_1 = ROR_1$ des Raumes, um welchen sich das Schiff auf der einen Seite herausgezogen und auf der anderen tiefer eingetaucht hat, $= F_1$, ist ferner der Horizontalabstand KL der Schwerpunkte dieser Räume, $= a$, und der Horizontalabstand MT der Schwerpunkte S und S_1 oder die Horizontalprojection des Weges SS_1

welchen S beim Kippen durchläuft, $= s$, so hat man in Folge des Gleichgewichtszustandes beider Kräftepaare:

$$F s = F_1 a, \text{ daher } s = \frac{F_1}{F} a \text{ und}$$

$$\overline{SM} = \frac{MT}{sin.\,\varphi} = \frac{s}{sin.\,\varphi} = \frac{F_1 a}{F sin.\,\varphi}.$$

Die als Factor in das Maß der Stabilität eintretende Linie $CM = c$ ist $= CS + SM$; bezeichnen wir daher noch den Abstand CS des Schwerpunktes C des Schiffes von dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers durch e, so erhalten wir das Stabilitätsmaß:

$$S = P c \, sin.\,\varphi = P\left(\frac{F_1 a}{F} + e \, sin.\,\varphi\right).$$

Ist der Drehungswinkel klein, so lassen sich die Querschnitte $H O H_1$ und $R O R_1$ als gleichschenkelige Dreiecke ansehen; bezeichnet man die Breite $HR = H_1 R_1$ des Schiffes an der Eintauchungsstelle durch b, so kann man

$$F_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} b \cdot \tfrac{1}{2} b \varphi = \tfrac{1}{8} b^2 \varphi \text{ und } KL = a = 2 \cdot \tfrac{2}{3} \frac{b}{2} = \tfrac{2}{3} b,$$

sowie $sin.\,\varphi = \varphi$ setzen, weshalb die Stabilität

$$S = P\left(\tfrac{1}{12} \frac{b^3 \varphi}{F} + e \varphi\right) = \left(\frac{b^3}{12 F} + e\right) P \varphi \text{ folgt.}$$

Fällt der Schwerpunkt C des Schiffes mit dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers zusammen, so hat man $e = 0$, daher:

$$S = \frac{b^3}{12 F} \cdot P \varphi,$$

und liegt der Schwerpunkt des Schiffes über dem des verdrängten Wassers, so ist dagegen e negativ, daher:

$$S = \left(\frac{b^3}{12 F} - e\right) P \varphi.$$

Auch folgt, daß die Stabilität eines Schiffes in Null übergeht, wenn e negativ und zugleich $e = \frac{b^3}{12 F}$ ist.

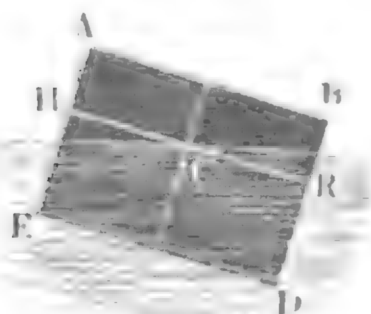
Man sieht aus dem gewonnenen Ergebnisse, daß die Stabilität um so größer ausfällt, je breiter das Schiff ist und je tiefer der Schwerpunkt desselben liegt.

Beispiel. Bei einem Parallelepipede AD, Fig. 630 (a. f. S.), von der Breite $AB = b$, Höhe $AE = h$ und Einsenkungstiefe $EH = y$, ist $F = b y$ und $e = -\frac{h - y}{2}$, daher das Maß der Stabilität:

$$S = P\varphi\left(\frac{b^3}{12\,b\,y} - \frac{h}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

oder, wenn das specifische Gewicht der Masse des Parallelepipedes, $= \varepsilon$ gesetzt wird:

Fig. 630.



$$S = P\varphi\left(\frac{b^2}{12\,\varepsilon\,h} - \frac{h}{2}\,(1 - \varepsilon)\right).$$

Hiernach hört die Stabilität auf, wenn

$$b^2 = 6\,h^2\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon),\text{ d. i. wenn}$$

$$\frac{b}{h} = \sqrt{6\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon)}\text{ wird.}$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ folgt:

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{6}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}225;$$

wenn also die Breite noch nicht 1,225 der Höhe ist, so schwimmt das Parallelepiped ohne Stabilität.

371 **Schiefes Schwimmen.** Die Formel

$$S = P\left(\frac{F_1\,a}{F} \pm e\,sin.\,\varphi\right)$$

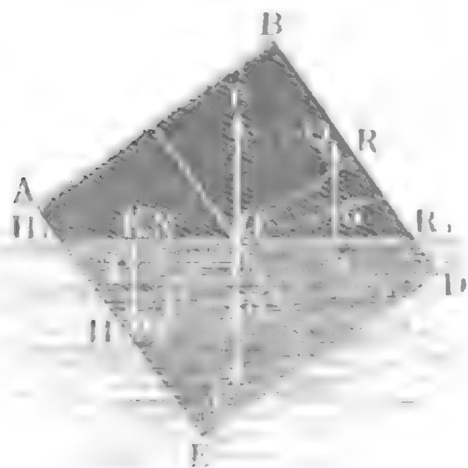
für die Stabilität eines schwimmenden Körpers läßt sich auch dazu anwenden, um die verschiedenen Lagen schwimmender Körper zu finden; denn setzen wir $S =$ Null, so erhalten wir die Gleichung, welche die Gleichgewichtslage bedingt, deren Auflösung auf die Bestimmung des entsprechenden Neigungswinkels führt. Es ist also die Gleichung

$$\frac{F_1\,a}{F} \pm e\,sin.\,\varphi = 0$$

in Hinsicht auf φ aufzulösen.

Für ein Parallelepiped $ABDE$, Fig. 631, ist der Querschnitt $F = HRDE = H_1R_1DE = by$, wenn b die Breite $AB = HR$ und y die Senktiefe $EH = DR$ bezeichnet, sowie der Querschnitt

Fig. 631.



$$F_1 = HOH_1 = ROR_1,$$

als rechtwinkeliges Dreieck mit der Kathete

$$OH = OR = \frac{1}{2}\,b,$$

und der Kathete

$$HH_1 = RR_1 = \frac{1}{2}\,b\,tang.\,\varphi:$$

$$F_1 = \frac{1}{8}\,b^2\,tang.\,\varphi.$$

Nun steht ferner der Schwerpunkt F von der Basis HR um

$$FU = \frac{1}{3}\,HH_1 = \frac{1}{6}\,b\,tang.\,\varphi$$

und von der Mitte O um

$$OU = \frac{2}{3}\,OH = \frac{1}{3}\,b$$

ab, es folgt daher der Horizontalabstand des Schwerpunktes F von der Mitte O:

$$= OK = ON + NK = OU\,cos.\,\varphi + FU\,sin.\,\varphi$$
$$= \tfrac{1}{3}\,b\,cos.\,\varphi + \tfrac{1}{6}\,b\,tang.\,\varphi\,sin.\,\varphi,$$

und der Arm:

$$a = \overline{KL} = 2\,\overline{OK} = \tfrac{2}{3}\,b\,cos.\,\varphi + \tfrac{1}{3}\,b\,\frac{sin.\,\varphi^2}{cos.\,\varphi}.$$

Diesemnach ist die Gleichung für die schiefe Gleichgewichtslage:

$$\frac{\tfrac{1}{8}\,b^2\,tang.\,\varphi\,(\tfrac{2}{3}\,b\,cos.\,\varphi^2 + \tfrac{1}{3}\,b\,sin.\,\varphi^2)}{b\,y\,cos.\,\varphi} - e\,sin.\,\varphi = 0,$$

oder, $\frac{sin.\,\varphi}{cos.\,\varphi} = tang.\,\varphi$ eingeführt:

$$sin.\,\varphi\,[(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{24}\,tang.\,\varphi^2)\,b^2 - e\,y] = 0;$$

welcher Gleichung durch

$$sin.\,\varphi = 0 \text{ und durch}$$
$$tang.\,\varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{12\,e\,y}{b^2} - 1}$$

Genüge geleistet wird. Dem durch die erste Gleichung bestimmten Winkel $\varphi = 0$ entspricht das aufrechte, dem zweiten aber das schiefe Schwimmen. Die Möglichkeit des letzteren bedingt, daß $\frac{e\,y}{b^2} > \tfrac{1}{12}$ ausfällt. Ist nun h die Höhe des Parallelepipedes und ε dessen specifisches Gewicht, so hat man:

$$y = \varepsilon\,h \text{ und } e = \frac{h - y}{2} = (1 - \varepsilon)\,\frac{h}{2},$$

daher folgt:

$$tang.\,\varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{6\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon)\,h^2}{b^2} - 1},$$

und es ist die Bedingungsgleichung für das schiefe Schwimmen:

$$\frac{h}{b} > \sqrt{\frac{1}{6\,\varepsilon\,(1 - \varepsilon)}}.$$

Beispiele. 1) Wenn das schwimmende Parallelepiped eben so hoch als breit ist und das specifische Gewicht $\varepsilon = \tfrac{1}{2}$ hat, so ist

$$tang.\,\varphi = \sqrt{2}\,\sqrt{3\,.\,\tfrac{1}{2} - 1} = \sqrt{3 - 2} = 1, \text{ daher } \varphi = 45^0.$$

2) Wenn die Höhe $h = 0{,}9$ der Breite b, das specifische Gewicht aber wieder $\tfrac{1}{2}$ ist, so hat man

$$tang.\,\varphi = \sqrt{3\,.\,0{,}81 - 2} = \sqrt{0{,}43} = 0{,}6557, \text{ daher } \varphi = 33^0\,15'.$$

Specifisches Gewicht. Das Gesetz vom Auftriebe des Wassers läßt sich zur Bestimmung der Dichtigkeit oder des specifischen Gewichtes von Körpern benutzen. Nach §. 364 ist der Auftrieb des Wassers gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit; bezeichnet daher V das Volumen des §. 372

Körpers und γ_1 die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so hat man den Auftrieb $P = V\gamma_1$. Ist nun aber γ_2 die Dichtigkeit der Körpermasse, so hat man das Gewicht des Körpers, $G = V\gamma_2$, es folgt daher das Dichtigkeitsverhältniß:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{G}{P},$$

d. h. die Dichtigkeit des eingetauchten Körpers verhält sich zur Dichtigkeit des Fluidums, wie das absolute Gewicht des Körpers zum Auftriebe oder Gewichtsverluste beim Untertauchen.

Hiernach ist also $\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma_1$ und $\gamma_1 = \frac{P}{G}\gamma_2$; oder wenn γ die Dichtigkeit des Wassers, ε_1 das specifische Gewicht der Flüssigkeit und ε_2 das des Körpers bezeichnen, also $\gamma_1 = \varepsilon_1 \gamma$ sowie $\gamma_2 = \varepsilon_2 \gamma$ gesetzt wird,

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P}\varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_1 = \frac{P}{G}\varepsilon_2.$$

Wenn man also das Gewicht eines Körpers und den Gewichtsverlust desselben beim Untertauchen kennt, so läßt sich aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der Körpermasse, und umgekehrt, aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der letzteren, die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der ersteren finden.

Ist die Flüssigkeit, worin man den festen Körper abwiegt, Wasser, so hat man $\varepsilon_1 = 1$ und $\gamma_1 = \gamma = 1000$ Kilogramm oder 61,74 Pfund, je nachdem man das Cubikmeter oder den Cubikfuß zur Volumeneinheit annimmt, daher ist für diesen Fall die Dichtigkeit des Körpers:

$$\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}} \text{ mal Dichtigkeit des Wassers},$$

und das specifische Gewicht desselben:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}}.$$

Um den Auftrieb oder Gewichtsverlust zu ermitteln, bedient man sich, wie zur Bestimmung des Gewichtes G, einer gewöhnlichen Wage, nur befindet sich unten an der einen Schale dieser Wage noch ein Häkchen, um den Körper mittels eines Haares, Drahtes oder anderen feinen Fadens daran anzuhängen, bevor er in das Wasser, welches in einem untergesetzten Gefäße enthalten ist, eingetaucht wird. Gewöhnlich nennt man eine zu diesem Abwägen unter Wasser eingerichtete Wage eine hydrostatische Wage (franz. balance hydrostatique; engl. hydrostatic balance).

Ist der Körper, dessen specifisches Gewicht man ermitteln will, weniger dicht als Wasser, so kann man ihn mit einem anderen schweren Körper

mechanisch verbinden, damit die Verbindung im Wasser noch ein Bestreben zum Sinken behält. Verliert dieser schwere Körper im Wasser das Gewicht P_2 und die Verbindung P_1, so ist der Gewichtsverlust des leichteren Körpers:

$$P = P_1 - P_2,$$

bezeichnet nun wieder G das Gewicht des leichteren Körpers, so hat man dessen specifisches Gewicht:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{G}{P_1 - P_2}.$$

Kennt man das specifische Gewicht ε einer mechanischen Verbindung oder Zusammensetzung zweier Körper, und sind auch die specifischen Gewichte ε_1 und ε_2 der Bestandtheile derselben bekannt, so lassen sich nun nach dem sogenannten Archimedischen Principe auch aus dem Gewichte des Ganzen die Gewichte G_1 und G_2 der Bestandtheile berechnen.

Jedenfalls ist $G_1 + G_2 = G$ und auch

$$\text{Volumen } \frac{G_1}{\varepsilon_1 \gamma} + \text{Volumen } \frac{G_2}{\varepsilon_2 \gamma} = \text{Volumen } \frac{G}{\varepsilon \gamma},$$

also:

$$\frac{G_1}{\varepsilon_1} + \frac{G_2}{\varepsilon_2} = \frac{G}{\varepsilon}.$$

Durch Vereinigung beider Gleichungen ergiebt sich nun:

$$G_1 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \text{ oder}$$

$$G_2 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Beispiele. 1) Wenn ein 310 Gramm schweres Stück Kalkstein unter dem Wasser um 121,5 Gramm leichter wird, so ist das specifische Gewicht dieses Körpers:

$$\varepsilon = \frac{310}{121{,}5} = 2{,}55.$$

2) Um das specifische Gewicht eines Stückes Eichenholz zu finden, hat man es mit einem Bleidrahte, welcher beim Abwägen im Wasser 10,5 Gramm an Gewicht verlor, umbunden. Wenn nun das Holzstück selbst 426,5 Gramm wog, und die Verbindung unter Wasser 484,5 Gramm leichter war als in der Luft, so ergiebt sich das specifische Gewicht der Holzmasse:

$$\varepsilon = \frac{426{,}5}{484{,}5 - 10{,}5} = \frac{426{,}5}{474} = 0{,}9.$$

3) Ein vollkommen mit Quecksilber angefülltes und vollkommen geschlossenes eisernes Gefäß hatte ein Bruttogewicht von 500 Pfund und verlor beim Abwägen unter Wasser 40 Pfund an Gewicht; wenn nun das specifische Gewicht des Gußeisens = 7,2 und das des Quecksilbers 13,6 ist, so ergiebt sich das Gewicht des leeren Gefäßes:

$$G_1 = 500\left(\frac{40}{500} - \frac{1}{13,6}\right) : \left(\frac{1}{7,2} - \frac{1}{13,6}\right) = 500(0,08 - 0,07353) : (0,1388 - 0,0735)$$
$$= \frac{500 \cdot 0,00647}{0,0653} = \frac{3235}{65,3} = 49,5 \text{ Pfund},$$

und das Gewicht des eingeschlossenen Quecksilbers:

$$G_2 = 500 \cdot (0,08 - 0,1388) : (0,07353 - 0,1388) = \frac{500 \cdot 0,0588}{0,0653} = \frac{2940}{6,53}$$
$$= 450,2 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung 1. Zur Ausmittelung der specifischen Gewichte von Flüssigkeiten, lockeren Massen u. s. w. reicht auch das bloße Abwägen in freier Luft aus, weil man diesen Körpern durch Einfüllen in Gefäße jedes beliebige Volumen ertheilen kann. Wiegt eine leere Flasche $= G$, wiegt ferner dieselbe mit Wasser angefüllt $= G_1$ und hat dieselbe das Gewicht G_2, wenn sie eine andere Masse enthält, so hat man das specifische Gewicht dieser Masse:

$$\varepsilon = \frac{G_2 - G}{G_1 - G}.$$

Um z. B. das specifische Gewicht von Roggen (in Masse) zu finden, wurde ein Fläschchen mit Roggenkörnern angefüllt, und nach starkem Schütteln gewogen. Nach Abzug des Gewichtes der leeren Flasche ergab sich das Gewicht dieser Roggenmasse, $= 120,75$ Gramm, und das Gewicht einer gleichen Wassermenge, $= 155,65$; es folgt demnach das specifische Gewicht der Roggenmasse

$$= \frac{120,75}{155,65} = 0,776,$$

und es wiegt sonach 1 Cubikfuß dieses Getreides

$$= 0,776 \cdot 66 = 51,22 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung 2. Das schon von Archimedes aufgelöste Problem, aus dem specifischen Gewichte einer Zusammensetzung und aus den specifischen Gewichten der Bestandtheile das Verhältniß der Bestandtheile zu finden, gestattet nur eine beschränkte Anwendung auf chemische Verbindungen, Metalllegirungen u. s. w., weil bei solchen meist eine Contraction, zuweilen aber auch eine Ausdehnung der Massen stattfindet, so daß das Volumen der Verbindung nicht mehr gleich ist der Summe der Volumina der Bestandtheile.

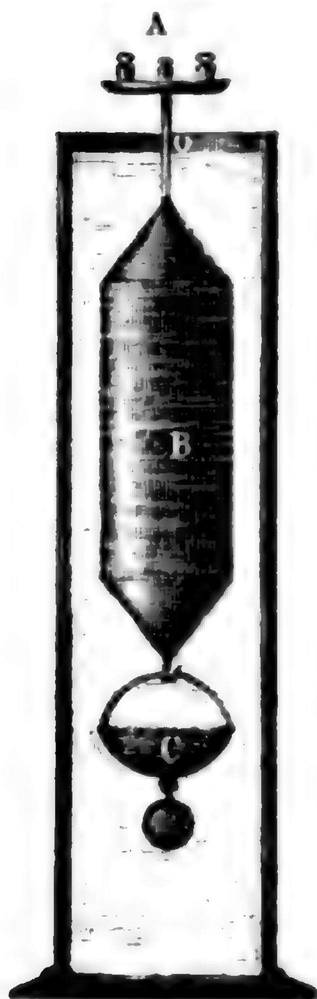
§. 373 **Aräometer.** Zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten werden vorzüglich auch die Aräometer, Senkwagen (franz. aréomètres; engl. areometers, hydrometers) gebraucht. Diese Instrumente sind hohle, in Beziehung auf eine Axe symmetrisch geformte Körper mit sehr tief liegendem Schwerpunkte, und geben, indem sie in einer Flüssigkeit aufrecht schwimmen, die Dichtigkeit dieser Flüssigkeit an. Man fertigt sie aus Glas, Messingblech u. s. w. an und nennt sie nach ihrem verschiedenen Gebrauche, hydrostatische Senkwagen, Soolwagen, Bierwagen, Branntweinwagen, Alkoholometer u. s. w. Es giebt zwei Arten von Senkwagen, nämlich Gewichtsaräometer (franz. ar. à poids constant; engl. hyd. with weights) und Scalenaräometer (franz. ar. à volume constant; engl. graduated hyd.). Die ersteren werden auch oft zur Bestimmung der Gewichte, und namentlich der specifischen Gewichte von festen Körpern in Anwendung gebracht.

1) Ist V das Volumen des unter Wasser befindlichen Theiles einer bis zu einer gewissen Marke O eingetauchten, übrigens schwimmenden Senkwage ABC, Fig. 632, G das Gewicht der ganzen Wage, P das auf den Teller A aufgelegte Gewicht beim Schwimmen im Wasser, dessen Dichtigkeit $= \gamma$ sein möge, und P_1 das eben daselbst aufzulegende Gewicht beim Schwimmen in einer anderen Flüssigkeit von der Dichtigkeit γ_1, so hat man:

Fig. 632.

Fig. 634.

Fig. 633.



$$V\gamma = P + G \text{ und}$$
$$V\gamma_1 = P_1 + G,$$

daher das Verhältniß der Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{P_1 + G}{P + G}.$$

2) Ist P das Gewicht, welches auf den Teller gelegt werden muß, um die im Wasser schwimmende Senkwage ABC, Fig. 633, bis zu einer Marke O einzusenken, und ist P_1 das Gewicht, welches man mit dem abzuwägenden Körper gleichzeitig auf A zu legen hat, um dieselbe Einsenkung zu erhalten, so hat man das Gewicht dieses Körpers einfach:

$$G_1 = P - P_1.$$

Ist aber die Auflage P_1 um P_2 zu vergrößern, wenn der abzuwägende Körper in das unter Wasser befindliche Schälchen C gelegt wird, um die Senkungstiefe unverändert zu behalten, so beträgt der Auftrieb $= P_2$, und daher das specifische Gewicht des Körpers:

$$\varepsilon = \frac{G_1}{P_2} = \frac{P - P_1}{P_2}.$$

Die Senkwagen mit unten angehängten Schälchen zur Bestimmung specifischer Gewichte von festen Körpern, wie z. B. von Mineralien, heißen Nicholson'sche Senkwagen.

3) Setzen wir das Gewicht einer Senkwage BC, mit Scala AB, Fig. 634, $= G$, und das eingetauchte Volumen, wenn diese Wage im Wasser schwimmt, $= V$, so ist $G = V\gamma$. Steigt diese Wage um die Tiefe $OX = x$ empor, wenn dieselbe in eine schwerere Flüssigkeit einge-

taucht wird, so ist bei dem Querschnitte F des Stäbchens das noch eingetauchte Volumen

$$= V - Fx, \text{ und daher } G = (V - Fx)\gamma_1.$$

Beide Formeln, durch einander dividirt, geben nun die Dichtigkeit der Flüssigkeit:

$$\gamma_1 = \frac{V}{V - Fx} \cdot \gamma = \gamma : \left(1 - \frac{F}{V}x\right) = \frac{\gamma}{1 - \mu x},$$

wenn der constante Quotient $\frac{F}{V}$ durch μ bezeichnet wird.

Ist die Flüssigkeit, worin man das Aräometer eintaucht, leichter als Wasser, so sinkt dasselbe in ihr um die Tiefe x, weshalb dann

$$G = (V + Fx)\gamma \text{ und daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{1 + \mu x} \text{ zu setzen ist.}$$

Um den Coefficienten $\mu = \frac{F}{V}$ zu finden, wird die Wage durch ein Gewicht P, etwa durch oben (bei A) eingegossenes und den tiefsten Punkt derselben einnehmendes Quecksilber so weit beschwert, daß sie, im Wasser schwimmend, um eine bedeutende Länge des zum Anbringen einer Scala dienenden Halses tiefer einsinkt. Setzt man nun $P = Fl\gamma$, wobei l die durch P bewirkte Senkung bedeutet, so erhält man:

$$\mu = \frac{F}{V} = \frac{P}{Vl\gamma} = \frac{P}{Gl}.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einem 65 Gramm schweren Gewichtsaräometer vom Teller 13,5 Gramm wegzunehmen sind, damit es beim Schwimmen in Alkohol ebenso tief einsinkt als beim Schwimmen im Wasser, so ist das specifische Gewicht dieses Alkohols

$$= \frac{65 - 13{,}5}{65} = 1 - 0{,}208 = 0{,}792.$$

2) Bei einer Nicholson'schen Wage ist das Normalgewicht 100 Gramm, d. h. man hat 100 Gramm aufzulegen, um das Instrument bis 0 einzusenken; hiervon mußten aber 66,5 Gramm weggenommen werden, als man ein abzuwägendes Stück Messing mit auf den oberen Teller gelegt hatte, und es waren wieder 7,85 Gramm zuzulegen, als dieser Körper in dem unteren Teller lag. Deshalb ist das absolute Gewicht dieses Messingstückes = 66,5 Gramm, und das specifische Gewicht desselben

$$= \frac{66{,}5}{7{,}85} = 8{,}47.$$

3) Ein 75 Gramm schweres Scalenaräometer steigt, nachdem man seine Füllung um 31 Gramm vermindert hat, um l = 6 Zoll = 72 Linien, und hat daher den Coefficienten:

$$\mu = \frac{31}{75 \cdot 72} = 0{,}00574.$$

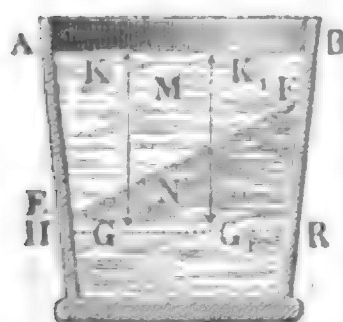
Nach Ergänzung der Füllung und Wiederherstellung des Gewichtes von 75 Gramm stieg es, in einer Salzsoole schwimmend, um 29 Linien, daher ist das specifische Gewicht dieser Flüssigkeit

$$= 1 : (1 - 0{,}00574 \,.\, 29) = 1 : 0{,}833 = 1{,}2.$$

Anmerkung. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes gehört in die Physik, Chemie und Technologie.

Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten. Befinden sich mehrere Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten in einem Gefäße zugleich, ohne daß sie eine chemische Einwirkung auf einander ausüben, so legen sich dieselben in Folge der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theile nach ihren specifischen Gewichten über einander, nämlich die dichteste unten, die weniger dichte darüber und die leichteste oben. Auch sind im Gleichgewichtszustande die Begrenzungsflächen, sowie die freie Oberfläche horizontal; denn so lange die Begrenzungsfläche EF zwischen den Massen M und N, Fig. 635, geneigt ist, so lange stehen auch über einer Horizontalschicht HR verschieden schwere Flüssigkeitssäulen wie GK, $G_1 K_1$ u. s. w.; es kann daher auch der Druck in dieser Schicht nicht überall derselbe sein und folglich auch kein Gleichgewichtszustand eintreten. §. 374

Fig. 635.



In communicirenden Röhren AB und CD, Fig. 636, ordnen sich die Flüssigkeiten zwar ebenfalls nach ihren Dichtigkeiten über einander, allein ihre Oberflächen AO und DG liegen nicht in einem und demselben Niveau.

Fig. 636.

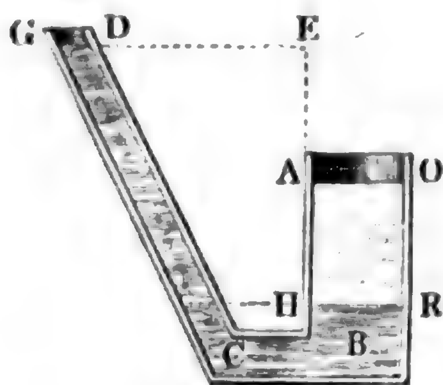
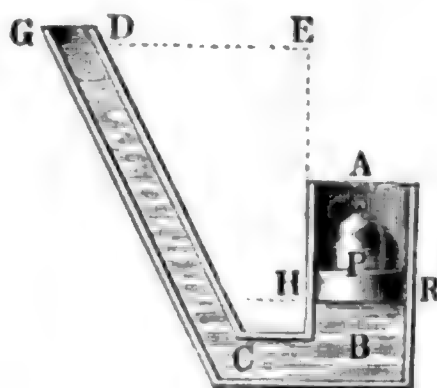


Fig. 637.



Ist F der Inhalt des Querschnittes HR eines Kolbens, Fig. 637, in dem einen Schenkel AB von zwei communicirenden Röhren, und h die Druckhöhe, oder die Höhe EH des Wasserspiegels in der zweiten Röhre CD über HR, so hat man den Druck gegen die Kolbenfläche:

$$P = F h \gamma.$$

Ersetzt man dagegen die Kolbenkraft durch eine Flüssigkeitssäule $HAOR$, Fig. 636, von der Höhe $AH = h_1$ und der Dichtigkeit γ_1, so hat man:

$$P = F h_1 \gamma_1;$$

und es giebt nun das Gleichsetzen beider Ausdrücke die Gleichung:

$$h_1 \gamma_1 = h \gamma,$$

oder die Proportion:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Es verhalten sich also in communicirenden Röhren, beim Zustande des Gleichgewichtes unter zwei verschiedenen Flüssigkeiten, die Druckhöhen, oder die Höhen der Flüssigkeitssäulen, von der gemeinschaftlichen Berührungsebene aus gemessen, umgekehrt wie die Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten.

Da das Quecksilber ungefähr 13,6 mal so schwer ist als Wasser, so hält hiernach in communicirenden Röhren eine Quecksilbersäule einer 13,6 mal so hohen Wassersäule das Gleichgewicht.

Drittes Capitel.

Von den Molekularwirkungen des Wassers.

§. 375 **Molekularkräfte.** Die Cohäsion des Wassers ist, obgleich sehr klein, jedoch nicht Null. Die Theile oder Moleküle (franz. molécules; engl. molecules) hängen aber nicht allein unter einander, sondern auch mit anderen Körpern, z. B. mit den Gefäßwänden, zusammen, so daß ebenfalls eine Kraft nöthig ist, um diesen Zusammenhang, den man Adhäsion (franz. adhérence; engl. adhesion) des Wassers nennt, aufzuheben. Ein an einem festen Körper hängender Wassertropfen weist die Existenz der Cohäsion und Adhäsion des Wassers zugleich nach. Ohne die Cohäsion könnte das Wasser keinen Tropfen bilden, und ohne die Adhäsion könnte es an dem festen Körper nicht hängen bleiben; es wird hier die Schwerkraft nicht allein von der Cohäsion, sondern auch von der Adhäsion des Wassers überwunden. Die Wirkungen, welche aus der Vereinigung der Cohäsions- und Adhäsionskräfte hervorgehen, bezeichnet man zur Unterscheidung von den Wirkungen der Trägheit, der Schwerkraft u. s. w. mit dem Namen: die Molekularwirkungen. Die Capillarität oder das Heben oder Senken des Wasser- oder Quecksilberspiegels in engen Röhren oder zwischen sehr nahe stehenden Wänden ist ein vorzüglicher Fall der Molekularwirkung.

Adhäsionsplatten. Man hat die Cohäsion und Adhäsion des Wassers §. 37
durch sogenannte Adhäsionsplatten zu bestimmen gesucht. Man hängt zu diesem Zwecke eine solche Platte statt einer Wagschale an das Ende eines Wagbalkens, bringt die Wage durch ein Tarirgewicht zum Einspielen, und nähert das Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit der Platte allmälig, bis ihre ebene Grundfläche mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung kommt. Nun vergrößert man durch allmäliges Zulegen das Gewicht der Wagschale am anderen Ende des Wagbalkens, bis die Platte vom Wasserspiegel abgerissen wird. Die Ergebnisse solcher Versuche sind besonders davon abhängig, ob die Berührungsfläche der Platte von dem Wasser benetzt wird oder nicht. Im ersteren Falle bleibt stets nach der Berührung eine dünne Wasserschicht an der Platte hängen, man hat daher beim Abreißen derselben vom Wasser nicht die Adhäsion des Wassers an der Platte, sondern die Cohäsion des Wassers überwunden. Deshalb hängt auch die Kraft zum Abreißen verschiedener Platten vom Wasserspiegel gar nicht von der materiellen Beschaffenheit der Platten ab. Andere Flüssigkeiten als Wasser erfordern dagegen auch andere Kräfte an den Adhäsionsplatten. Du Buat fand, daß die Adhäsion zwischen dem Wasser und einem überzinnten Eisenbleche auf einen Quadratzoll, 65 bis 70 Gran beträgt. Dies giebt auf 1 Quadratmeter ungefähr eine Kraft von 5 Kilogramm, und auf 1 Quadratfuß eine Kraft von 1,05 Pfund. Hiervon nur wenig abweichende Werthe fand Achard für Scheiben aus Blei, Eisen, Kupfer, Messing, Zinn und Zink, ferner Gay-Lussac an einer Glasscheibe, und Huth an verschiedenen Holztafeln.

Wenn dagegen die Fläche der Scheibe von der Oberfläche des Wassers nicht benetzt wird, so stellen sich ganz andere Ergebnisse heraus, weil dann nicht die Cohäsion des Wassers an sich, sondern die Adhäsion desselben an der Platte überwunden wird. Es scheint, als wenn in diesem Falle die Zeit der Berührung einen großen Einfluß auf die Kraft zum Losreißen der Scheibe ausübe. Gay-Lussac fand z. B. für eine Glasplatte von 120 Millimeter Durchmesser, um sie von der Oberfläche des Quecksilbers loszureißen, 150 bis 300 Gramm Kraft nöthig, je nachdem die Zeit der Berührung eine kurze oder eine längere war.

Anmerkung. In Frankenheim's Lehre der Cohäsion werden die Cohäsionserscheinungen, wie sie z. B. das Abziehen benetzter Platten von der Oberfläche des Wassers darbietet, Synaphie, und dagegen die Adhäsionserscheinungen, wie sie z. B. bei der Trennung unbenetzter Platten von der Oberfläche einer Flüssigkeit vorkommen, Prosaphie genannt.

Adhäsion an Seitenwänden. Wenn ein Wassertropfen auf der §. 37
Oberfläche eines anderen Körpers zerfließt, und daher diese benetzt, so ist die Adhäsion überwiegend, bleibt dagegegen der Wassertropfen in seiner kugeligen

Form auf der Fläche eines festen oder flüssigen Körpers liegen, ohne dieselbe zu benetzen, so herrscht die Cohäsion des Wassers vor.

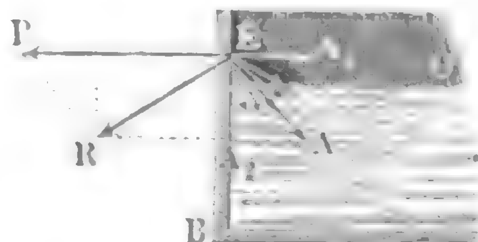
Ein Zusammenwirken beider Kräfte macht sich besonders an der Oberfläche einer Flüssigkeit in der Nähe der Gefäßwand bemerklich; es steigt daselbst das Wasser in die Höhe und bildet eine concave Oberfläche, wenn die Cohäsion des Wassers von der Adhäsion übertroffen und daher die Gefäßwand benetzt wird; es krümmt sich hingegen der Wasserspiegel in der Nähe der Gefäßwand abwärts und bildet daselbst eine convexe Fläche, wenn keine Benetzung eintritt und daher die Cohäsion überwiegend ist.

Diese Erscheinungen lassen sich sehr leicht auf folgende Weise erklären.

Ein Element E in der Oberfläche HR des Wassers (Fig. 638) wird von seiner Umgebung nach allen Richtungen abwärts gezogen, und es resultirt aus allen diesen Anziehungen eine einzige, vertical abwärts wirkende Kraft A. Hingegen ein Element E an der verticalen Gefäßwand BE, Fig. 639,

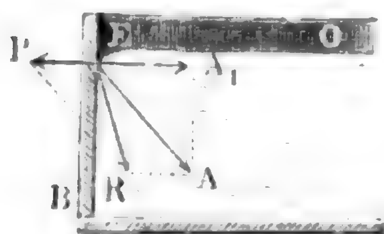
Fig. 638.

Fig. 639.



wird von dieser mit einer Horizontalkraft P und von dem den Quadranten BEO einnehmenden Wasser mit einer schräg abwärts wirkenden Mittelkraft A angezogen, so daß zuletzt eine Mittelkraft R resultirt, gegen deren Richtung sich (s. §. 354) der Wasserspiegel in E rechtwinkelig stellt. Je nachdem nun die Anziehungskraft P der Gefäßwand größer oder kleiner ist als der horizontale Component A_1 der mittleren Cohäsionskraft A des Wassers, nimmt die Mittelkraft R entweder eine Richtung von innen nach außen, oder eine solche von außen nach innen an. Im ersteren Falle (Fig. 639) zieht sich der Wasserspiegel bei E an der Wand in die Höhe, im zweiten Falle hingegen senkt sich, wie Fig. 640 vor Augen führt, der Wasserspiegel an der Gefäßwand BE herab.

Fig. 640.



Diese Verhältnisse gestalten sich noch anders, wenn das Wasser bis an den Rand des Gefäßes reicht, weil hier die Anziehungskraft der Gefäßwand eine andere Richtung annimmt. Wenn z. B. der anfangs bis zum Rande C des Gefäßes BCO reichende Wasserspiegel EO, Fig. 641 durch langsamen Zufluß allmälig zum Steigen gebracht wird, so nimmt die Anziehungskraft P eine immer mehr und mehr abwärts gehende Richtung an, wobei ihr horizontaler Component immer kleiner und kleiner und zuletzt

gar von dem horizontalen Componenten A_1 der Cohäsionskraft A des Wassers übertroffen wird. In Folge dessen ändert sich natürlich auch die Gestalt des Wasserspiegels bei E unaufhörlich, wobei die Concavität desselben allmälig in Convexität, und die Depression desselben unter dem Gefäßrande in eine Elevation übergeht, welche letztere eine gewisse Größe erreichen muß, bevor der Abfluß des Wassers über dem Gefäßrande erfolgt.

Fig. 641.

Spannung des Wasserspiegels. Da jedes der sämmtlichen Theilchen in der Oberfläche HR, Fig. 638, einer Flüssigkeit von der darunter befindlichen Masse mit einer Kraft A abwärts gezogen wird, so läßt sich annehmen, daß dadurch an der ganzen Oberfläche eine Verdichtung und ein Zusammenhang der Flüssigkeitstheile unter einander entsteht, und daß daher eine gewisse Kraft nöthig ist, um diesen Zusammenhang aufzuheben oder die Oberfläche der Flüssigkeit zu zerreißen. Dieses Zusammenhängen der Oberflächentheile einer Flüssigkeit macht sich nicht allein beim Eintauchen eines fremden Körpers in die Flüssigkeit bemerklich, sondern tritt überhaupt dann hervor, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit eine Krümmung annimmt, wie z. B. in der Nähe der Gefäßwand. Wenn man mit **Young** annimmt, daß die Spannung oder Cohäsion der Oberfläche einer Flüssigkeit an allen Stellen eine und dieselbe ist, so lassen sich daraus, wie der Herr Geheime Oberbaurath **Hagen** nachgewiesen hat, sämmtliche mit der Erfahrung im besten Einklange stehenden Gesetze nach der Capillarität ableiten. §. 378

Fig. 642.

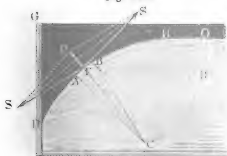
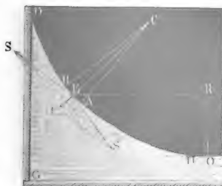


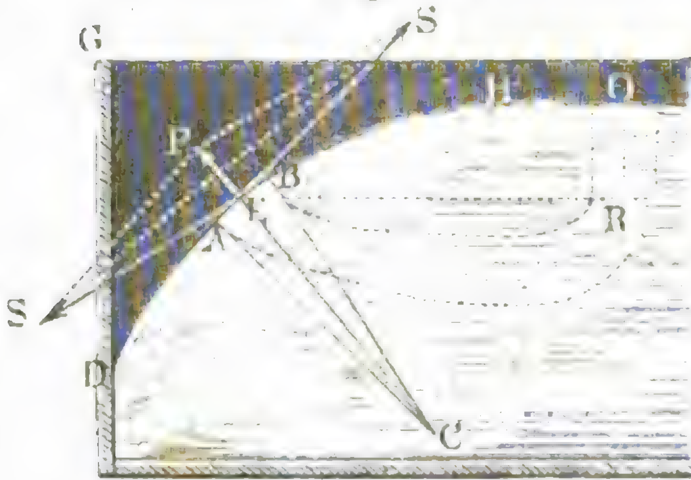
Fig. 643



In der Nähe einer ebenen Wand DG, Fig. 642 und 643, bildet die Oberfläche einer Flüssigkeit eine entweder nach unten oder nach oben gebogene cylindrische Fläche DAH. Ist P die Normalkraft auf ein Element $AEB = \sigma$ dieser Fläche, S die Spannung dieses Elementes und r der Krümmungshalbmesser

$CA = CB$ desselben, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke EPS und ABC:

Fig. 644.



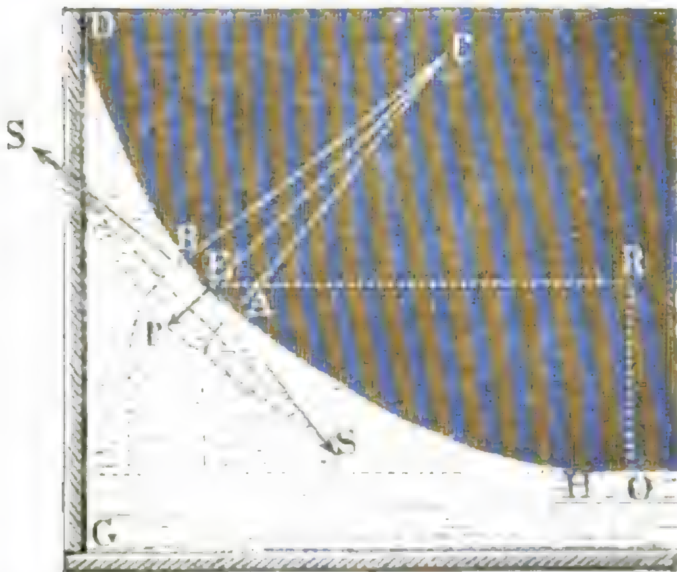
$$\frac{P}{S} = \frac{AB}{CA} = \frac{\sigma}{r},$$

und daher die Normal- oder Biegungskraft:

$$P = \frac{\sigma}{r} S.$$

Steht nun das Flächenelement AEB um die senkrechte Tiefe $OR = y$ unter oder über dem freien, von der Seitenwand DG nicht afficirten Wasserspiegel, und bedeutet γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so ist, nach dem (aus §. 356) bekannten hydrostatischen Gesetze, der Druck des Wassers auf das Element $\overline{AB} = \sigma$:

Fig. 645.



$$P = \sigma y \gamma,$$

und daher zu setzen:

$$\sigma y \gamma = \frac{\sigma}{r} S, \text{ und}$$

$$y = \frac{S}{r \gamma}.$$

Es ist also hiernach sowohl die Depression als auch die Elevation eines Elementes der Oberfläche einer Flüssigkeit in Rücksicht auf den freien oder unafficirten Theil dieser Fläche, dem Krümmungshalbmesser derselben umgekehrt proportional.

§. 379 In der Nähe einer gekrümmten Seitenwand, z. B. einer verticalen Cylinderfläche, bildet die Oberfläche des Wassers eine doppelt gekrümmte Fläche, und es wird hier die unter dem rectangulären Flächenelemente $FGHK$, Fig. 646, hängende Wassersäule von zwei Kräften P_1 und P_2 getragen, wovon die eine die Mittelkraft von den Spannungen S_1, S_1 in der zur Seite $FG = HK$ parallelen Normalebene ABE, und die andere die Mittelkraft der Spannungen S_2, S_2 in der zur Seite $GH = FK$ parallelen Normalebene CDE ist. Jener Ebene entspricht der kleinste und dieser der größte Krümmungshalbmesser; setzen wir beide Halbmesser $= r_1$ und r_2, sowie die Seitenlängen $FG = \sigma_1$ und $GH = \sigma_2$, und beziehen wir die Spannung S auf die Breite = Eins, so haben wir die in beiden Ebenen wirkenden Spannungen:

$$S_1 = \sigma_2 S \text{ und } S_2 = \sigma_1 S$$

und die hieraus entspringenden Normalkräfte:

$$P_1 = \sigma_2 S \cdot \frac{\sigma_1}{r_1} = \frac{S \sigma_1 \sigma_2}{r_1} \text{ und}$$

$$P_2 = \sigma_1 S \cdot \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{S \sigma_1 \sigma_2}{r_2},$$ daher die Mittelkraft derselben:

$$P = P_1 + P_2 = S \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

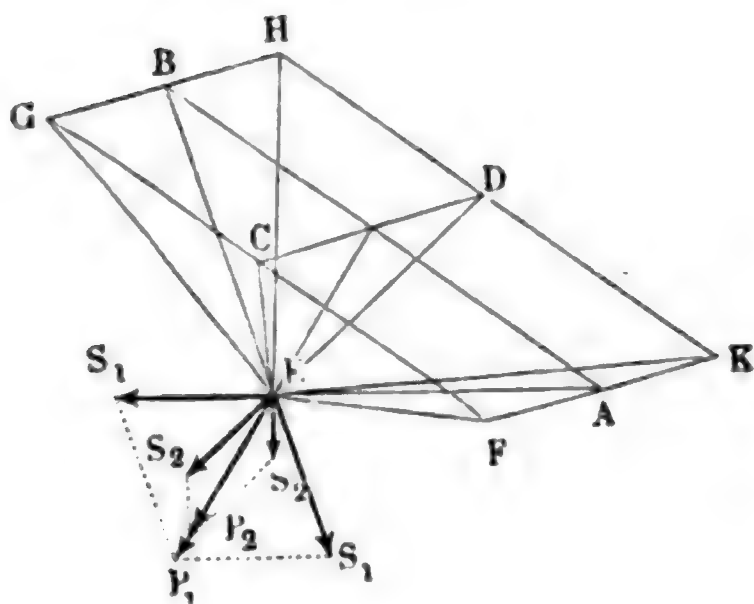


Fig. 646.

Bezeichnet auch hier y die Höhe des als ein Rechteck vom Inhalt $\sigma_1 \sigma_2$ anzusehenden Elementes $FGHK$ der Oberfläche über dem untersten oder allgemeinen Wasserspiegel, so haben wir die Kraft, mit welcher dieses Element von dem darüber oder darunter befindlichen Wasser normal auf- oder abwärts gezogen wird,

$$P = y \, . \, \sigma_1 \sigma_2 \gamma,$$

und es folgt nun durch Gleichsetzung beider Ausdrücke für P:

$$y \sigma_1 \sigma_2 \gamma = S \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$ daher:

$$y = \frac{S}{\gamma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Es ist also bei der cylindrischen Wand die Erhebung (Senkung) der Oberfläche des Wassers über (unter) dem allgemeinen Wasserspiegel an jeder Stelle der Summe von den umgekehrten Maximal- und Minimalkrümmungshalbmessern proportional. Diese Formel enthält auch die des vorigen Paragraphen in sich, denn wenn der Normalschnitt CED gerade ist, so hat man:

$$r_2 = \infty, \text{ daher}$$

$$\frac{1}{r_2} = 0 \text{ und}$$

$$y = \frac{S}{\gamma} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Krumme Fläche des Wasserspiegels. Die Curve, welche der (§. 38 verticale Durchschnitt des Wasserspiegels in der Nähe einer ebenen Wand

bildet, läßt sich, nach Hagen, wie folgt, finden. Es sei AR, Fig. 647, die Oberfläche des von der verticalen Wand BK angezogenen Wassers, HR der allgemeine Wasserspiegel, ferner der Durchschnitt H beider Flächen der Coordinatenanfangspunkt. Man setze ferner die Coordinaten eines Punktes O in der Oberfläche AOR, $HM = x$ und $MO = y$, ferner den Bogen $AO = s$ und den Tangentenwinkel $OTM = \alpha$, sowie die Elemente OQ, QP und OP, respect. $= \partial x$, ∂y und ∂s.

Fig. 647.

Da $y = \frac{S}{r\gamma}$ und nach Artikel 33 der analytischen Hülfslehren,

$r = -\frac{\partial s}{\partial \alpha}$, sowie $\partial y = -\partial s \sin. \alpha$ ist, so hat man:

$$y = -\frac{S \partial \alpha}{\gamma \partial s} = \frac{S \sin. \alpha . \partial \alpha}{\gamma \partial y}, \text{ oder:}$$

$$y \partial y = \frac{S}{\gamma} \sin. \alpha . \partial \alpha,$$

und es giebt nun die Integration:

$$\tfrac{1}{2} y^2 = \frac{S}{\gamma} \int \sin. \alpha . \partial \alpha = Con. - \frac{S}{\gamma} \cos. \alpha.$$

Da für den Punkt R, α und y zugleich Null sind, ist

$$0 = Con. - \frac{S}{\gamma} \cos. 0, \text{ daher: } Con. = \frac{S}{\gamma} \text{ und}$$

$$y^2 = \frac{2S}{\gamma}(1 - \cos. \alpha) = \frac{4S}{\gamma}\frac{(1 - \cos. \alpha)}{2} = \frac{4S}{\gamma}(\sin. \tfrac{1}{2}\alpha)^2,$$

so daß:

$$y = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}} \cdot \sin. \tfrac{1}{2} \alpha \text{ folgt.}$$

Für $\alpha^0 = 90^0$ hat man $\sin. \tfrac{1}{2}\alpha = \sin. 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; daher ist die größte Erhebung der Oberfläche des Wassers unmittelbar an der Seitenwand,

$$h = 2\sqrt{\frac{S}{\gamma}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2S}{\gamma}}, \text{ also umgekehrt:}$$

$$\frac{S}{\gamma} = \tfrac{1}{2} h^2, \text{ und}$$

1) $y = h\sqrt{2} . \sin. \tfrac{1}{2} \alpha.$

Durch Differenziiren dieses Ausdruckes bekommt man:

$$\partial y = \tfrac{1}{2} h \sqrt{2} \cos. \tfrac{1}{2} \alpha . \partial \alpha = h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cos. \tfrac{1}{2} \alpha . \partial \alpha,$$

und da auch $\partial y = - \partial x . tang. \alpha$ ist, so folgt:

$$\partial x = - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\cos. \tfrac{1}{2} \alpha}{tang. \alpha} \cdot \partial \alpha = - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\cos. \tfrac{1}{2} \alpha \cos. \alpha}{\sin. \alpha} \cdot \partial \alpha$$

$$= - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{\cos. \tfrac{1}{2} \alpha \left[(\cos. \tfrac{1}{2} \alpha)^2 - (\sin. \tfrac{1}{2} \alpha)^2\right]}{2 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha . \cos. \tfrac{1}{2} \alpha} \partial \alpha$$

$$= - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{1 - 2 (\sin. \tfrac{1}{2} \alpha)^2}{2 \sin. \tfrac{1}{2} \alpha} \partial \alpha$$

$$= - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\tfrac{1}{2}}{\sin. \tfrac{1}{2} \alpha} - \sin. \tfrac{1}{2} \alpha\right) \partial \alpha.$$

Nun ist aber

$$\int \sin. \tfrac{1}{2} \alpha . \partial \alpha = - 2 \cos. \tfrac{1}{2} \alpha \text{ und}$$

$$\int \frac{\partial \alpha}{\sin. \tfrac{1}{2} \alpha} = 2 \, Log. nat. tang. \tfrac{1}{4} \alpha$$

(s. analyt. Hülfslehren Art. 26);

daher hat man:

$$x = - h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, (Log. nat. tang. \tfrac{1}{4} \alpha + 2 \cos. \tfrac{1}{2} \alpha) + Con.$$

Da für $x = 0$, $\alpha^0 = 90^0$, $tang. \tfrac{1}{4} \alpha = tang. 22\tfrac{1}{2}^0 = \sqrt{2} - 1$ und $\cos. \tfrac{1}{2} \alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, so folgt:

$$Con. = h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left[Log. nat. (\sqrt{2} - 1) + 2 \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right], \text{ und}$$

$$2) \quad x = h \sqrt{\tfrac{1}{2}} \left[Log. nat. \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{tang. \tfrac{1}{4} \alpha}\right) + 2 \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \cos. \tfrac{1}{2} \alpha\right)\right]$$

$$= h \left[1 - \sqrt{2} . \cos. \tfrac{1}{2} \alpha - \sqrt{\tfrac{1}{2}} \, Log. nat. (\sqrt{2} + 1) tang. \tfrac{1}{4} \alpha\right].$$

Für $\alpha = 0$ hat man:

$$\cos. \tfrac{1}{2} \alpha = 1 \text{ und } Log. nat. tang. \tfrac{1}{4} \alpha = - \infty,$$

daher:

$$x = + \infty;$$

es ist also HR die Asymptote, welcher sich der Durchschnitt AOR der Oberfläche des Wassers ohne Ende nähert.

Anmerkung. Wenn man die Formel (1) umkehrt, also

$$\sin. \tfrac{1}{2} \alpha = \frac{y}{h} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

setzt, so kann man für jeden beliebigen Werth von y, erst α und hieraus wieder mittelst (2) den entsprechenden Werth von x berechnen.

Die Messungen, welche Hagen hierüber angestellt hat, weisen eine sehr

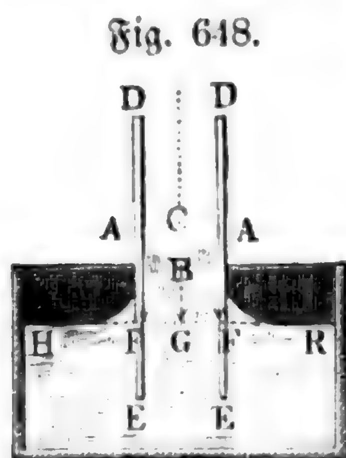
gute Uebereinstimmung dieser Theorie mit der Erfahrung nach. Dieselben sind mittelst einer matt geschliffenen Messingtafel an Brunnenwasser angestellt worden, und haben auf folgende Ergebnisse geführt:

y in Lin., gemessen	1,37	0,70	0,49	0,34	0,24	0,18	0,12	0,07	0,04	0,016
x „ gemessen	0,00	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,88	2,50	3,13	3,74
x „ berechnet	0,00	0,33	0,64	0,96	1,28	1,56	1,95	2,47	3,01	3,90

Diese Zahlenwerthe beziehen sich auf Pariser Linien. Aus $h = 1,37$ Linien berechnet sich $\frac{S}{\gamma} = 0,94$ und der kleinste Krümmungshalbmesser $r = 0,68$ Linien. Tafel von Buxbaum, Thonschiefer und Glas gaben dieselben Resultate.

§. 381 **Paralleltafeln.** Zwischen zwei sehr nahe gestellten Tafeln, DE, DE, Fig. 648, erhebt sich das Wasser nicht allein an den Rändern, sondern auch in der Mitte, und es bildet die Oberfläche desselben nahe den halben Mantel eines elliptischen Cylinders. Die eine Halbaxe des elliptischen Durchschnittes ist der halben Weite $CA = a$, und die andere Halbaxe $CB = b$, der Differenz $AF - BG = h_2 - h_1$ zwischen der größten und kleinsten Erhebung (h_2 und h_1) der elliptischen Oberfläche ABA über dem allgemeinen Wasserspiegel gleich. Nach dem Ingenieur S. 171 ist der Krümmungshalbmesser der Ellipse in A:

Fig. 648.



$$r_1 = \frac{b^2}{a} = \frac{(h^2 - h_1)^2}{a}, \text{ und der in } B:$$

$$r_2 = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{(h_2 - h_1)},$$

daher hat man nach §. 378 die Erhebung der Oberfläche des Wassers in A:

$$h_2 = \frac{S}{r_1 \gamma} = \frac{a S}{(h_2 - h_1)^2 \gamma}, \text{ und dagegen in } B:$$

$$h_1 = \frac{S}{r_2 \gamma} = \frac{(h_2 - h_1) S}{a^2 \gamma}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen von einander erhält man:

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{h_2 - h_1}{a^2}\right),$$

oder:

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{1}{a^2}\right);$$

daher folgt:

$$1)\ h_2 - h_1 = a \sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}},$$

$$2)\ h_2 = \frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{S}{\gamma}\left(\frac{S}{\gamma} + a^2\right)^2},$$

$$3)\ h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} \sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}},$$

und endlich das Verhältniß:

$$n = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{a^2\gamma}{S} = a^2 : \frac{S}{\gamma}.$$

Ist a sehr klein, so kann man

$$h_2 = h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}$$

setzen, dann wächst also die Erhebung der Oberfläche des Wassers umgekehrt wie der Abstand der Tafeln von einander.

Genauer ist aber

$$h_2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}\left(1 + {}^2/_3 \frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} + {}^2/_3\, a, \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma}\left(1 - {}^1/_3 \cdot \frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} - {}^1/_3\, a.$$

Umgekehrt folgt hiernach:

$$\frac{S}{\gamma} = a h_1 + \frac{a^2}{3}.$$

Diese Formeln stimmen, wenn der Abstand der Tafeln sehr klein, namentlich $\frac{a}{h_1}$ noch nicht $^1/_2$ ist, sehr gut mit den Beobachtungen überein.

Hagen fand bei Versuchen mit zwei parallelen Plantafeln in Brunnenwasser, im Mittel durch Beobachtungen:

$$h_1 = 1{,}55,\ h_2 = 2{,}09 \text{ und } h = 1{,}38 \text{ Pariser Linien,}$$

und durch Rechnung:

$$\frac{S}{\gamma} = 1{,}04,\ h_2 = 2{,}12 \text{ und } h = 1{,}44 \text{ Pariser Linien.}$$

Neuere Versuche (s. Poggendorff's Annalen, Bd. 77) gaben für

$a = 0{,}360;\ 0{,}5875;\ 0{,}7575$ Linien,
$h_1 = 2{,}562;\ 1{,}429;\ 1{,}068$ „ und
$\frac{S}{\gamma} = 0{,}949;\ 0{,}907;\ 0{,}917$ „

also im Mittel:

$$\frac{S}{\gamma} = 0{,}9243 \text{ und } S = 0{,}01059 \text{ Gramme.}$$

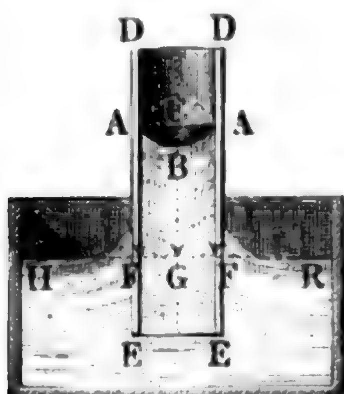
(Vergl. den vorigen Paragraphen.)

382 **Haarröhrchen.** Die Erhebung der Oberfläche des Wassers in senkrechten engen Röhren, oder sogenannten Haarröhrchen (franz. tubes capillaires; engl. capillary tubes) läßt sich bei Zugrundelegung der Formel

$$y = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

des §. 379 leicht finden, wenn man annimmt, daß die Oberfläche (der Meniscus) ein halbes Sphäroid ABA, Fig. 649, bilde, dessen kreisförmige Basis AA mit dem Querschnitte der Röhre zusammenfällt. Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei, setzen wir also wieder die halbe Röhrenweite $CA = a$, und die Minimal- und Maximalerhebung BG und AF des Wassers in der Röhre über dem allgemeinen Wasserspiegel HR, $= h_1$ und h_2, so haben wir für

Fig. 649.



$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\ r_1 = a \text{ und } r_2 = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a}, \text{ und für}$$

$$h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\ r_1 = r_2 = \frac{a^2}{h_2 - h_1} \text{ zu setzen, weshalb nun}$$

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2}\right) \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma}\cdot\frac{(h_2 - h_1)}{a^2} \text{ folgt.}$$

Durch Subtraction der letzten Gleichungen von einander erhält man:

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{2(h_2 - h_1)}{a^2}\right),$$

oder:

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a(h_2 - h_1)} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{2}{a^2}\right),$$

auch:

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(h_2 - h_1)^3 - \frac{1}{a}(h_2 - h_1)^2 = a.$$

Ist a klein, so kann man auch

$$\frac{2}{a^2}(h_2 - h_1)^3 - \frac{1}{a}(h_2 - h_1)^2 = a$$

setzen, woraus dann

$$h_2 - h_1 = a$$

folgen würde. Nimmt man aber $h_2 - h_1 = a + \delta$ an, und setzt

$(h_2 - h_1)^2 = a^2 + 2a\delta$, sowie $(h_2 - h_1)^3 = a^3 + 3a^2\delta$,

so erhält man:

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(a^3 + 3a^2\delta) - \frac{1}{a}(a^2 + 2a\delta) = a,$$

oder:

$$\frac{\gamma}{S}a^3 + \left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)\cdot 3a^2\delta - 2\delta = 0,$$

und es folgt:

$$\delta = -\frac{\gamma a^3}{3\gamma a^2 + 4S}, \text{ oder annähernd, } \delta = -\frac{\gamma a^3}{4S}.$$

Hiernach ist nun

$$h_2 - h_1 = a - \frac{\gamma a^3}{4S},$$

daher:

$$h_1 = \frac{2S}{\gamma}\cdot\frac{1}{a^2}\left(a - \frac{\gamma a^3}{4S}\right) = \frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} - \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{\left(a - \frac{\gamma a^3}{4S}\right)^2}\right) = \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{4S}\right)^2\right]$$

$$= \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{2S}\right)\right] = \frac{2}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} + \frac{a}{2}.$$

Es wächst also bei den Haarröhrchen die mittlere Erhebung umgekehrt wie die Röhrenweite.

Auch hat man zur Bestimmung von S:

$$\frac{S}{\gamma} = \frac{1}{2}a h_1 + \frac{a^2}{4}.$$

Beobachtungen, welche Hagen mit Brunnenwasser an Haarröhrchen angestellt hat, gaben Folgendes:

Röhrenweite a, Linien	0,295	0,336	0,413	0,546	0,647	0,751	0,765
Erhebung h_1, Linien	10,08	8,50	6,87	5,17	4,28	3,72	3,59
Spannungsmaß $\frac{S}{\gamma}$, Gramme	1,508	1,455	1,458	1,478	1,473	1,512	1,494

Nach diesen Versuchen ist also im Mittel:

$$\frac{S}{\gamma} = 1{,}482 \text{ und } S = 0{,}0170 \text{ Gramme.}$$

Die Abweichungen dieser Werthe sollen ihren Grund darin haben, daß die Spannung S der Oberfläche des Wassers mit der Zeit abnimmt, und bei dem gekochten Wasser viel kleiner ausfällt als bei dem frischen Wasser. Es ist also anzunehmen, daß die Spannung des Wassers in jedem Streifen von 1 Linie Breite, $S = 0{,}0106$ bis $0{,}0170$ Gramm beträgt.

§. 383 Die vorstehende Theorie findet auch in dem Falle ihre Anwendung, wenn die Wand nicht von der Flüssigkeit benetzt wird; es findet hier keine Erhöhung, sondern eine Senkung der Oberfläche statt, und es ist die letztere auch nicht concav, sondern convex. Die aus dem Niveauabstande BG entstehende und von unten nach oben wirkende Verticalkraft P wird auch hier durch die Spannungen S und S der Oberfläche ABA, Fig. 650, der Flüssigkeit in der Röhre aufgehoben. Die Adhäsionskraft des festen Körpers kommt hierbei, der vorstehenden Theorie zu Folge, nicht weiter in Betracht.

Fig. 650.

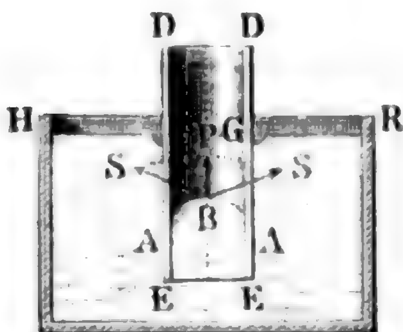


Fig. 651.

Setzt man die Kraft, mit welcher die Röhrenwand die Flüssigkeitssäule BG, Fig. 651, an sich zieht, dem Röhrenumfange proportional, setzt also für eine cylindrische Röhre diese Kraft $P = \mu . 2\pi a$, wo μ einen Coefficienten ausdrückt, so hat man:

$$\pi a^2 h = 2 \mu \pi a,$$

und daher die mittlere Erhebung des Wassers in der Röhre:

$$h = \frac{2\mu}{a}.$$

Für zwei parallele Tafeln ist dagegen $P = 2\mu l$ und $P = 2ahl\gamma$, wo l die unbestimmte Länge der Wassersäule bezeichnet, und daher:

$$h = \frac{\mu}{a},$$

d. i. halb so groß wie bei der Röhre, wenn der Abstand $2a$ der Tafeln der

Röhrenweite gleich ist. Dieses stimmt auch mit den Resultaten der letzten Paragraphen vollkommen.

Nach den Hagen'schen Versuchen hängt die Festigkeit oder Spannung der Oberfläche einer Flüssigkeit nicht von dem Grade ihrer Flüssigkeit ab, ist aber um so größer, je schwerer die Flüssigkeit an anderen Körpern haftet. Nach Anderen, namentlich nach Brunner und Frankenheim (s. Poggendorff's Annalen, Bd. 70 und 72), nimmt aber die Steighöhe h in den Haarröhren und folglich auch S ab, wenn die Temperatur der Flüssigkeit eine größere wird.

Für Alkohol ist S ungefähr die Hälfte und für Quecksilber das Achtfache von der Festigkeit der Oberfläche des Wassers.

Anmerkung 1. Hagen findet durch Messung und Wägung von Flüssigkeitstropfen, welche sich von den Grundflächen kleiner Cylinder losreißen, ziemlich dieselben Werthe wie durch die Beobachtungen an Capillartafeln. Ebenso haben die Versuche mit Adhäsionsplatten eine gute Uebereinstimmung geliefert, unter der Voraussetzung, daß der Kraft zum Losreißen einer Platte durch das Gewicht des gehobenen Flüssigkeitscylinders und durch die Spannung in dem Mantel dieses Cylinders das Gleichgewicht gehalten wird.

Anmerkung 2. Die Anzahl der Schriften über die Capillarität ist zu groß, als daß hier eine vollständige Mittheilung derselben erfolgen könnte. Es haben sich mit diesem Gegenstande sogar die größten Mathematiker, wie Laplace, Poisson, Gauß u. s. w. beschäftigt. Eine vollständige Mittheilung der älteren Literatur findet man in Frankenheim's Lehre von der Cohäsion. Die Schrift, welche bei Bearbeitung dieses Capitels vorzüglich benutzt wurde, ist folgende: Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten von Hagen, eine in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesene Abhandlung, Berlin 1845. Eine neue physikalische Theorie der Capillarität von J. Mile enthält Bd. 45 von Poggendorff's Annalen (1838). Es gehören hierher auch Boutigny's Studien über die Körper im sphäroidalen Zustande, deutsch von Arendt. Leipzig 1858.

Viertes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

§. 384 **Spannkraft der Gase.** Die uns umgebende atmosphärische Luft, sowie auch alle übrigen Luftarten oder Gase (franz. gaz; engl. gas) besitzen, in Folge der Repulsivkraft ihrer Theile oder Moleküle, ein Bestreben, einen größeren und größeren Raum einzunehmen. Man erhält daher auch nur eine begrenzte Luftmasse durch Absperren oder Einschließen derselben in vollkommen verschlossenen Gefäßen. Die Kraft, mit welcher sich die Gase auszudehnen suchen, heißt ihre Elasticität, Spannkraft oder Expansivkraft (franz und engl. tension). Sie äußert sich durch einen Druck, welchen das Gas gegen die Wände des dasselbe einschließenden Gefäßes ausübt, und ist insofern von der Elasticität der festen oder tropfbar flüssigen Körper verschieden, als sie in jedem Zustande der Dichtigkeit sich wirksam zeigt, wogegen die Expansivkraft der letztgenannten Körper bei einem gewissen Zustande der Ausdehnung Null ist. Man mißt den Druck oder die Spannkraft der Luft und anderer Gase durch Barometer, Manometer und Ventile. Das Barometer (franz. baromètre; engl. barometer) wird vorzüglich angewendet, um den Druck der Atmosphäre zu bestimmen. Das gewöhnlichste oder sogenannte Gefäßbarometer, Fig. 652, besteht in einer, an einem Ende *A* verschlossenen und am anderen Ende *B* offenen Glasröhre, welche, nachdem sie mit Quecksilber gefüllt ist, umgestürzt und mit ihrem offenen Ende in ein ebenfalls Quecksilber enthaltendes Gefäß *CD* eingetaucht wird. Nach dem Umkehren dieses Instrumentes bleibt in der Röhre eine Quecksilbersäule *BS* zurück, welcher (s. §. 374) durch den Druck der Luft gegen die Oberfläche *HR* des Quecksilbers das Gleichgewicht gehalten wird. Der über der Quecksilbersäule befindliche Raum *AS* ist luftleer; es erleidet daher diese Säule von oben keinen Druck, weshalb denn auch die Höhe dieser Säule, oder vielmehr die Höhe des Quecksilbers in derselben über dem Quecksilberspiegel *HR* im Gefäße als Maß des Luftdruckes dienen kann. Um diese Höhe bequem und scharf messen zu können, ist eine genau eingetheilte Scala angebracht, welche längs der Röhre hinläuft und nach Befinden noch mit einem verschiebbaren Zeiger *S* versehen ist.

Fig. 652.

Anmerkung. Die ausführliche Beschreibung der verschiedenen Barometer, die Anleitung zum Gebrauche derselben u. s. w. gehört in die Physik. Siehe Lehrbuch der Physik und Meteorologie von Müller, Bd. I.

Atmosphärendruck. Durch Barometer hat man gefunden, daß bei §. 3
einem mittleren Zustande der Atmosphäre und an wenig über dem Meere gelegenen Orten dem Luftdrucke durch eine ungefähr 76 Centimeter oder nahe 28 Pariser Zoll = 29 preuß. Zoll hohe Quecksilbersäule von 0 Grad Wärme das Gleichgewicht gehalten wird. Da das specifische Gewicht des Quecksilbers bei Null Grad Wärme 13,6 ist, so folgt, daß der Luftdruck auch gleich ist dem Gewichte einer $0,76 \,.\, 13,6 = 10,336$ Meter $= 31,73$ Pariser Fuß $= 32,84$ preuß. Fuß hohen Wassersäule.

Man mißt die Spannung der Luft auch oft durch den Druck, welchen dieselbe auf die Flächeneinheit ausübt. Da ein Cubikcentimeter Quecksilber 0,0136 Kilogramm wiegt, so ist der Atmosphärendruck oder das Gewicht einer 76 Centimeter hohen Quecksilbersäule bei 1 Quadratcentimeter Basis:

$$p = 0,0136 \,.\, 76 = 1,0336 \text{ Kilogramm.}$$

Nun ist aber ein Quadratzoll 6,841 Quadratcentimeter, daher mißt der mittlere Druck der Atmosphäre auch $= 1,0336 \,.\, 6,841 = 7,071$ Kilogramm $= 14,142$ Pfund auf einen Quadratzoll und $= 2036$ Pfund auf einen Quadratfuß.

Den mittleren Barometerstand genau 28 pariser Zoll = 29 preuß. Zoll angenommen, erhält man den Druck der Atmosphäre auf einen Quadratzoll 14,103 Pfund, und auf einen Quadratfuß 2030,8 Pfund

Es ist sehr gewöhnlich in der Mechanik, den mittleren Atmosphärendruck als Einheit anzunehmen, und andere Expansivkräfte auf diesen zu beziehen, und in Atmosphärendrücken, oder Atmosphären, wie man schlechtweg sagt, anzugeben. Hiernach entspricht dem Drucke von n Atmosphären eine $28 \,.\, n$ Pariser Zoll hohe Quecksilbersäule oder ein Gewicht von $14,103\, n$ preuß. Pfund auf jeden Quadratzoll; und umgekehrt, einer h Zoll hohen Quecksilbersäule die Expansivkraft von $\frac{h}{28} = 0,03571\, h$ Atmosphären, und dem Drucke von p Pfund auf den Quadratzoll die Spannung von $\frac{p}{14,103} = 0,07091\, p$ Atmosphären. Uebrigens giebt die Gleichung $\frac{h}{28} = \frac{p}{14,103}$ die Reductionsformeln:

$$h = 1,985\, p \text{ Zoll und } p = 0,5037\, h \text{ Pfund.}$$

Bei einer Spannung von h Zoll $= p$ Pfund ist daher der Druck gegen eine ebene Fläche von F Quadratzoll:

$$P = Fp = 0,5037\ Fh \text{ Pfund}$$
$$= Fh\gamma = 1,985\ Fp \text{ Zoll.}$$

Beispiele. 1) Wenn bei einer Wassersäulenmaschine das Wasser 250 Fuß hoch über der Kolbenfläche steht, so ist der Druck gegen diese Fläche

$$= \frac{250}{32,84} = 7,6 \text{ Atmosphären.}$$

2) Wenn der Wind eines Cylindergebläses 1,2 Atmosphäre Spannung hat, so ist der Druck desselben auf jeden Quadratzoll

$$= 1,2 . 14,10 = 16,92 \text{ Pfund,}$$

und auf die Kolbenfläche von 50 Zoll Durchmesser,

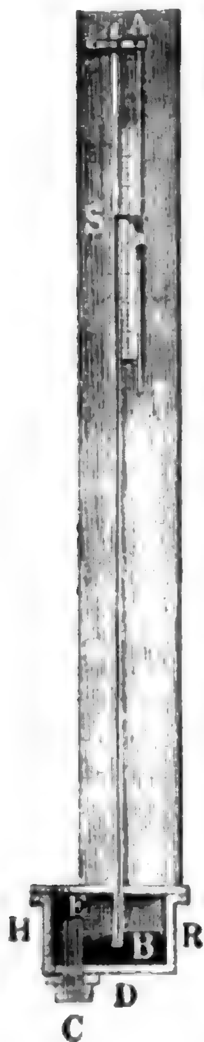
$$= \frac{\pi . 50^2}{4} \cdot 16,92 = 33222 \text{ Pfund.}$$

Da die Atmosphäre den Gegendruck $\frac{\pi . 50^2}{4} \cdot 14,10 = 27685$ Pfund ausübt, so folgt die Kolbenkraft:

$$P = 33222 - 27685 = 5537 \text{ Pfund.}$$

386 **Manometer.** Um die Spannung der in Gefäßen eingeschlossenen Gase oder Dämpfe zu finden, werden barometerähnliche Instrumente, welche man Manometer (franz. manomètres; engl. manometers) nennt, angewendet. Diese Instrumente werden mit Quecksilber oder mit Wasser angefüllt, und sind oben entweder offen oder verschlossen, im letzteren Falle aber wieder im oberen Theile entweder luftleer oder mit Luft erfüllt. Das Manometer mit dem luftleeren Raume, Fig. 653, ist von dem gewöhnlichen Barometer nicht verschieden. Um mit Hülfe desselben die Spannung der Luft in einem Behälter messen zu können, wird eine Röhre CE angebracht, die mit einem Ende C in dem Behälter und mit dem anderen Ende E über dem Quecksilberspiegel HR im Gehäuse HDR des Instrumentes ausmündet. Der Raum HER über dem Quecksilber wird dadurch mit dem Luftbehälter in Communication gesetzt; es nimmt daher die in ihm befindliche Luft die Spannung der Luft im Behälter an, und drückt eine Quecksilbersäule BS in die Röhre, welche sich mit dem zu messenden Luftdrucke ins Gleichgewicht setzt.

Fig. 653.



Das oben offene Hebermanometer ABC, Fig. 654, giebt den Ueberschuß der Spannung in einem Gefäße MN über den Atmosphärendruck an, weil dieser Spannung durch die Vereinigung des Luftdruckes über S mit der Quecksilbersäule RS das Gleichgewicht gehalten wird. Ist b der Barometerstand und h der Manometerstand oder der Höhen-

abstand RS der Quecksilberspiegel H und S in den beiden Schenkeln des Manometers, so hat man die durch die Höhe einer Quecksilbersäule gemessene Spannung der mit dem kleinen Schenkel communicirenden Luft:

$$b_1 = b + h,$$

oder durch den Druck auf den Quadratzoll gemessen:

$$p = 0,5037\ (b + h) \text{ Pfund},$$

oder, wenn b der mittlere Barometerstand ist,

$$p = 14,10 + 0,5037\ h \text{ Pfund}.$$

Gewöhnlicher als die Hebermanometer sind die Gefäßmanometer, wie $ABCD$, Fig. 655. Da hier die Luft durch eine größere Quecksilber- oder nach Befinden Wassermasse, auf die Flüssigkeitssäule wirkt, so werden die Schwingungen der Luft nicht so schnell auf die Flüssigkeitssäule übergetra-

Fig. 654.

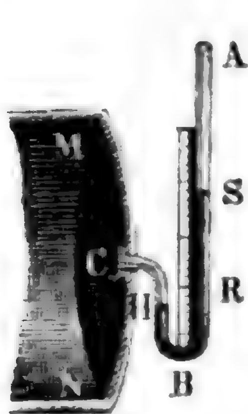


Fig. 655.

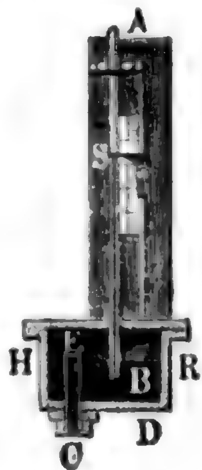
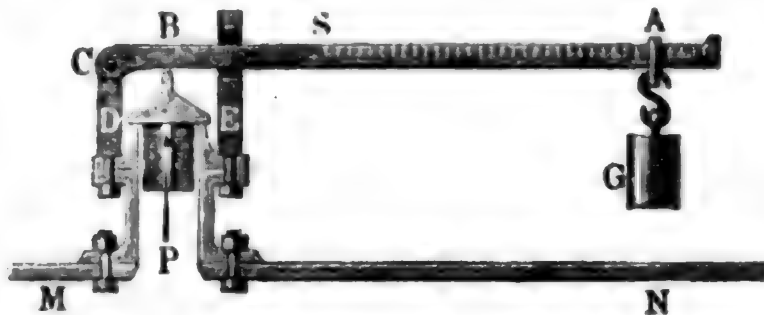


Fig. 656.



gen, und es wird das Messen dieser mehr in Ruhe befindlichen Säule erleichtert und sicherer. Der Bequemlichkeit des Messens oder Ablesens an der Scala wegen bringt man oft noch einen Schwimmer an, welcher auf dem Quecksilber schwimmt und mittels eines über einer Rolle liegenden Fadens mit einem über der Scala wegleitenden Zeiger verbunden ist.

Die Manometer lassen sich natürlich auch zum Messen des Druckes von Wasser und wasserförmigen Flüssigkeiten anwenden; man nennt sie aber dann Piezometer (franz. piézometres; engl. piezometers).

Mit Hülfe eines Ventils DE, Fig. 656, bestimmt sich ebenfalls, jedoch weniger scharf, die Expansivkraft des in MN abgeschlossenen Gases oder Dampfes, wenn man das Laufgewicht G so stellt, daß es eben dem Luft- oder Dampfdrucke das Gleichgewicht hält. Ist $CS = s$ die Entfernung des Schwerpunktes des armirten Hebels von der Drehaxe C, $CA = a$ der Hebelarm des Laufgewichtes, und Q das Gewicht des Hebels sammt Ventil, so hat man das statische Moment, mit welchem das Ventil durch die Gewichte zugedrückt wird,

$$= Ga + Qs;$$

ist ferner der Gas- oder Dampfdruck von unten, $= P$, der Atmosphärendruck

von oben, $= P_1$, und endlich der Hebelarm CB des Ventils, $= b$, so hat man das statische Moment, mit welchem sich das Ventil zu heben sucht,

$$= (P - P_1)\, b,$$

und es giebt nun das Gleichsetzen dieser beiden Momente:

$$Pb - P_1 b = Ga + Qs, \text{ folglich:}$$

$$P = P_1 + \frac{Ga + Qs}{b}.$$

Bezeichnet r den Halbmesser des Ventils DE, p die innere und p_1 die äußere Spannung, gemessen durch den Druck auf einen Quadratzoll, so hat man:

$$P = \pi r^2 p \text{ und } P_1 = \pi r^2 p_1, \text{ daher:}$$

$$p = p_1 + \frac{Ga + Qs}{\pi r^2 b}.$$

Beispiele. 1) Wenn der Quecksilberstand eines oben offenen Manometers 3,5 Zoll, und der Barometerstand 27 Zoll beträgt, so ist die entsprechende Expansivkraft:

$$h = b + h_1 = 27 + 3,5 = 30,5 \text{ Zoll, oder:}$$
$$p = 0,5037 \,.\, h = 0,5037 \,.\, 30,5 = 15,36 \text{ Pfund.}$$

2) Wenn der Wassermanometerstand 21 Zoll hoch ist, so entspricht demselben bei dem Barometerstande von 27 Zoll, die Expansivkraft:

$$h = 27 + \frac{21}{13,6} = 28,54 \text{ Zoll} = 15,38 \text{ Pfund.}$$

3) Wenn das statische Moment eines unbelasteten Sicherheitsventils 10 Zollpfund, das statische Moment des 10 Pfund schweren Laufgewichtes, $= 15 \,.\, 10 = 150$ Zollpfund, der Hebelarm des Ventils, von Ventil- bis Drehaxe gemessen, $b = 4$ Zoll und der Halbmesser des Ventils, $r = 1,5$ Zoll beträgt, so ist die Differenz der Drücke auf beide Ventilflächen:

$$p - p_1 = \frac{150 + 10}{\pi\, (1,5)^2 \,.\, 4} = \frac{160}{9\pi} = 5,66 \text{ Pfund.}$$

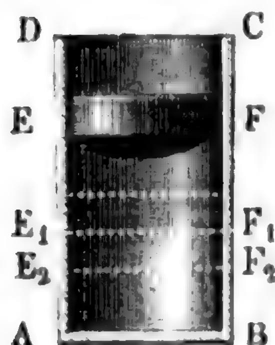
Wäre der Atmosphärendruck $p_1 = 14$ Pfund, so fiele hiernach die Spannung der Luft unter dem Ventile:

$$p = 19,66 \text{ Pfund aus.}$$

§. 387 **Mariotte'sches Gesetz.** Die Spannung der Gase wächst mit der Verdichtung derselben; je mehr man ein gewisses Luftquantum zusammendrückt oder verdichtet, desto größer wird auch dessen Spannkraft, und je mehr man dasselbe sich ausdehnen oder verdünnen läßt, desto kleiner zeigt sich auch seine Expansivkraft. Das Verhältniß, in welchem die Spannkraft und die Dichtigkeit oder das Volumen der Gase zu einander stehen, wird durch das von Mariotte (oder Boyle) entdeckte und nach ihm benannte Gesetz ausgedrückt. Es behauptet, daß die Dichtigkeit einer und derselben Luftmenge der Spannkraft derselben proportional, oder, da die Räume, welche von einer und derselben Masse eingenommen werden, den Dichtigkeiten umge-

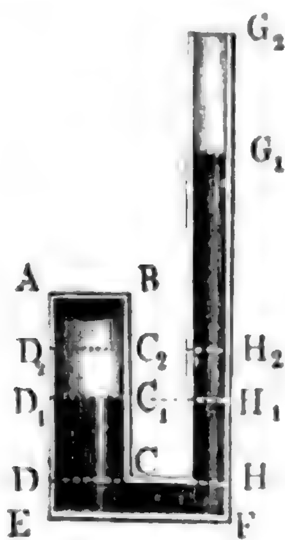
kehrt proportional sind, **daß sich die Volumina einer und derselben Gasmasse umgekehrt wie deren Expansivkräfte** verhalten. Wird demnach eine gewisse Luftmenge bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt, ihre Dichtigkeit also verdoppelt, so stellt sich auch ihre Spannung noch einmal so groß heraus als anfänglich, und wird dagegen ein gewisses Luftquantum bis auf das Dreifache seines anfänglichen Raumes ausgedehnt, also seine Dichtigkeit bis auf den dritten Theil herabgezogen, so bleibt auch die Elasticität desselben nur ein Drittel von der anfänglichen Spannkraft. Ist z. B. unter dem Kolben EF eines Cylinders AC, Fig. 657, gewöhnliche atmosphärische Luft, welche anfänglich auf jeden Quadratzoll mit 14 Pfd. drückt, so wird dieselbe mit 28 Pfd. drücken, wenn man den Kolben nach $E_1 F_1$ geschoben und dadurch die eingeschlossene Luft bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt hat, und es wird diese Kraft 3 . 14 = 42 Pfund betragen, wenn der Kolben nach $E_2 F_2$ gekommen ist und zwei Drittel der ganzen Höhe zurückgelegt hat. Ist der Inhalt der Kolbenfläche 1 Quadratfuß, so beträgt der Atmosphärendruck gegen dieselbe = 144 . 14 = 2016 Pfund; um daher den Kolben um die halbe Cylinderhöhe niederzudrücken, sind nach und nach 2016 Pfund, und um ihn um zwei Drittel dieser Höhe niederzuschieben, sind allmälig 2 . 2016 = 4032 Pfund auf denselben aufzusetzen u. s. w.

Fig 657.



Ebenso läßt sich durch Zugießen von Quecksilber in die mit dem Luftcylinder AC, Fig. 658, communicirende Röhre $G_2 H$ das Mariotte'sche Gesetz prüfen. Hat man anfänglich durch die Quecksilbermasse $DEFH$ eine Luftsäule AC abgesperrt, welche mit der äußeren Luft gleiche Spannkraft besitzt, und später durch zugegossenes Quecksilber den Luftcylinder bis auf die Hälfte, auf das Viertel u. s. w. des anfänglichen Volumens zusammengedrückt, so wird man finden, daß die Niveauabstände $G_1 H_1$, $G_2 H_2$ u. s. w. der Oberflächen des Quecksilbers der einfachen, dreifachen Barometerhöhe b u. s. w. gleich sind, daß also, wenn man hierzu die dem äußeren Luftdrucke entsprechende einfache Höhe addirt, die Spannkraft zweimal, viermal u. s. w. so groß ist als beim anfänglichen Volumen.

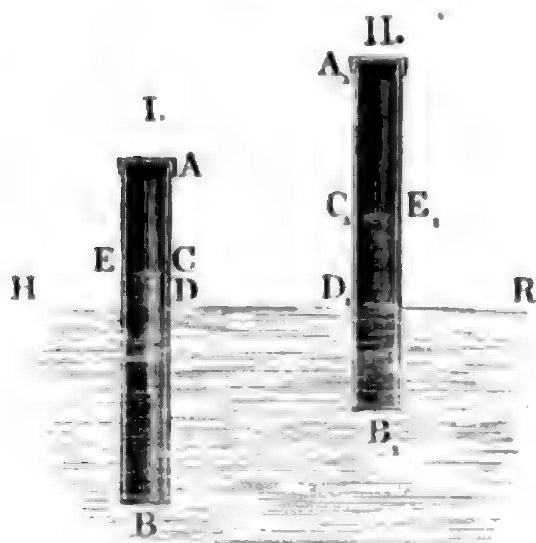
Fig 658.



Sehr leicht läßt sich auch die Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes auf der Seite der Ausdehnung der Luft nachweisen, wenn man eine cylindrische (gut calibrirte) Röhre AB, Fig. 659 (a. f. S.), senkrecht in das Quecksilber (Wasser) taucht und, nach gehörigem Verschlusse des oberen Endes A, das abgeschlossene Luftvolumen AE (I.) durch behutsames Aufziehen

dieser Röhre ausdehnt, so daß es nun ein Volumen $A_1 E_1$ (II.) annimmt. Die Dichtigkeiten der Luft in diesen Räumen AE und $A_1 E_1$ sind jedenfalls den Höhen AC und $A_1 C_1$ derselben umgekehrt, und ihre Spannungen den Differenzen zwischen dem Barometerstande b und den Höhen CD und $C_1 D_1$ der über der Oberfläche HR des Quecksilbers stehenden Quecksilbersäulen DE und $D_1 E_1$ direct proportional; es ist folglich nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Fig. 659.



$$\frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{b - C_1 D_1}{b - CD},$$

was auch durch die Beobachtung bei jeder beliebigen Eintauchung der Röhre AB bestätigt wird.

Sind h und h_1 oder p und p_1 die Spannkräfte, γ und γ_1 die entsprechenden Dichtigkeiten, und V und V_1 die zugehörigen Volumina einer und derselben Luftmenge, so hat man nach dem angegebenen Gesetze:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{h}{h_1} = \frac{p}{p_1}; \text{ oder } V_1 \gamma_1 = V\gamma, \text{ sowie } V_1 p_1 = Vp; \text{ daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{h_1}{h}\gamma = \frac{p_1}{p}\gamma \text{ sowie } V_1 = \frac{h}{h_1} V = \frac{p}{p_1} V.$$

Hiernach läßt sich die Dichtigkeit und auch das Volumen der Luft von einer Spannung auf die andere reduciren.

Anmerkung. Nur bei sehr großen Pressungen der Luft kommen bemerkbare Abweichungen von dem Mariotte'schen Gesetze vor. Nach Regnault ist z. B. für atmosphärische Luft, wenn das Luftvolumen V_0 von 1 Meter Pressung in V_1 übergeht, die Pressung desselben

$$p = \frac{V_0}{V}\left[1 - 0{,}0011054\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) + 0{,}000019381\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2\right] \text{ Meter,}$$

so daß für $\frac{V_0}{V} =$	5	10	15	20
$p =$	4,97944	9,91622	14,82484	19,71988 Met. ausfällt.

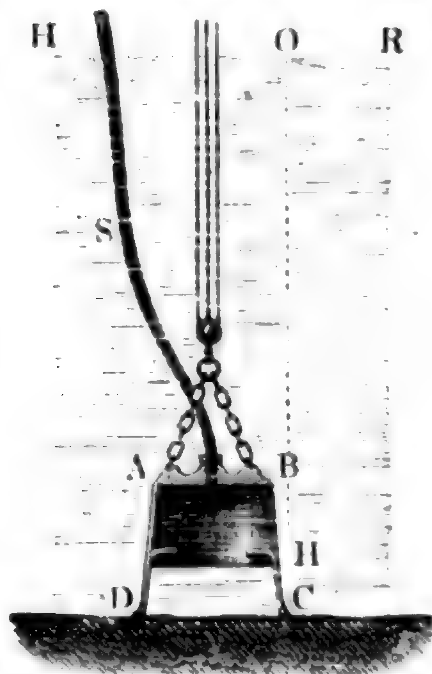
Beispiele. 1) Wenn bei einer Gebläsemaschine der Manometerstand 3 Zoll mißt, während der Barometerstand 28 Zoll beträgt, so ist die Dichtigkeit des Windes $= \frac{28 + 3}{28} = \frac{31}{28} = 1{,}107$ mal so groß, als die der äußeren Luft.

2) Wenn ein Cubikfuß atmosphärische Luft bei 28 Zoll Barometerstand $\frac{61{,}74}{770}$ Pfund wiegt, so hat er bei 34 Zoll Barometerstand ein Gewicht von:

$$\frac{61,74}{770} \cdot \frac{34}{28} = \frac{2099}{21560} = 0,09736 \text{ Pfund.}$$

3) Wie tief kann eine Taucherglocke (franz. cloche à plongeur; engl. diving-bell) $ABCD$, Fig. 660, unter das Wasser HRD getaucht werden, damit das Wasser nur bis zu einer gewissen Höhe $CH = y$ in dieselbe eindringe? Anfänglich steht die Glocke mit ihrer Mündung CD über dem Wasserspiegel HR, wobei ihr ganzer Raum V mit atmosphärischer Luft angefüllt ist, deren Wasserbarometerstand $= b$ sein möge. Sinkt nachher die Glocke um die Tiefe $OC = x$, und bringt hierbei ein Wasservolumen W in die Glocke, so geht, wenn keine Luft durch den Schlauch S zugedrückt wird, das Volumen der abgeschlossenen Luft in $V - W$ und der Barometerstand derselben in $b + x - y$ über, und es ist folglich:

Fig. 660.



$$\frac{b + x - y}{b} = \frac{V}{V - W},$$

woraus sich nun ergiebt:

$$x = y - b + \frac{Vb}{V - W} = y + \frac{Wb}{V - W}.$$

Ist der mittlere Querschnitt des unteren Theiles der Glocke, $= F$, so läßt sich noch $W = Fy$ und daher

$$x = y\left(1 + \frac{Fb}{V - Fy}\right) \text{ setzen.}$$

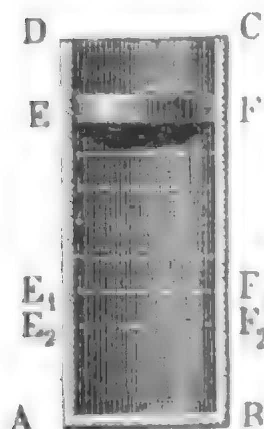
Für den Wasserbarometerstand $b = 30$ Fuß ist bei dem Volumen der Glocke, $V = 100$ Cubikfuß, dem mittleren Querschnitte ihrer unteren Hälfte, $F = 20$ Quadratfuß, und der zuläßigen Höhe des Wassers in derselben, $y = 3$ Fuß, das Volumen des letzteren: $W = Fy = 20 \, . \, 3 = 60$ Cubikfuß, folglich das der abgesperrten Luft: $V - W = 40$ Cubikfuß, ferner die Dichtigkeit der letzteren $= \frac{100}{40} = 2\frac{1}{2}$ mal so groß als die der äußeren Luft, und die entsprechende Tiefe der Eintauchung:

$$x = 3 + \frac{60 \, . \, 30}{40} = 3 + 45 = 48 \text{ Fuß.}$$

Arbeit der comprimirten Luft. Die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um ein gewisses Luftquantum bis zu einem gewissen Grade zu verdichten, sowie auch die Arbeit, welche die Luft bei ihrem Ausdehnen zu verrichten vermag, läßt sich nicht sogleich angeben, weil die Expansivkraft in jedem Momente des Verdichtens oder Ausdehnens eine andere ist, wir müssen uns daher nach einer besonderen Formel zur Berechnung dieses Werthes umsehen. Denken wir uns in einem Cylinder AC, Fig. 661 (a. f. S.), durch einen Kolben EF eine gewisse Luftmasse AF abgesperrt, und untersuchen wir, welche Arbeit erfordert wird, um den Kolben um einen gewissen Weg $EE_1 = FF_1$ fortzuschieben. Ist die anfängliche §. 388

Spannung $= p$ und die anfängliche Höhe des Cylinderraumes, $AE = s$, dagegen die Spannung nach Durchlaufung des Raumes EE_1, $= p_1$, und die Höhe $E_1 A$ des noch übrigbleibenden Luftvolumens, $= s_1$, so gilt die Proportion:

Fig. 661.



$$p_1 : p = s : s_1, \text{ welche giebt } p_1 = \frac{s}{s_1} p.$$

Während Durchlaufung eines sehr kleinen Wegtheiles $E_1 E_2 = \sigma$ läßt sich die Spannung p_1 als unveränderlich ansehen, und es ist daher die dabei aufzuwendende mechanische Arbeit $= F p_1 \sigma = \frac{F p s \sigma}{s_1}$, wofern noch F die Kolbenfläche bezeichnet.

Den Lehren der Logarithmen zufolge *) ist aber eine sehr kleine Größe

$$x = Log.\, nat.\, (1 + x) = 2{,}3026\ Log.\, (1 + x),$$

wenn $Log.\, nat.$ den natürlichen und $Log.$ den gemeinen Logarithmen bezeichnet; es läßt sich folglich auch

$$F p s \frac{\sigma}{s_1} = F p s\ Log.\, nat. \left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$$
$$= 2{,}3026\ F p s\ Log. \left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right)$$

setzen. Nun ist aber

$$Log.\, nat. \left(1 + \frac{\sigma}{s_1}\right) = Log.\, nat. \left(\frac{s_1 + \sigma}{s_1}\right)$$
$$= Log.\, nat.\, (s_1 + \sigma) - Log.\, nat.\, s_1;$$

daher jene Elementararbeit auch

$$F p s \frac{\sigma}{s_1} = F p s\, [Log.\, nat.\, (s_1 + \sigma) - Log.\, nat.\, s_1].$$

Denken wir uns den ganzen Weg EE_1 aus n Wegtheilen wie σ bestehend, setzen wir also $EE_1 = n\sigma$, so finden wir die allen diesen Theilen entsprechenden Arbeiten, wenn wir in der letzten Formel nach und nach statt s_1; $s_1 + \sigma$, $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$, ... bis $s_1 + (n-1)\sigma$ und statt $s_1 + \sigma$; $s_1 + 2\sigma$, $s_1 + 3\sigma$ u. s. w. bis $s_1 + n\sigma$ oder s setzen, und finden nun durch Summiren der dadurch erhaltenen Werthe den vollständigen Arbeitsaufwand beim Durchlaufen des Weges $s - s_1$:

---

*) Nach der Reihe $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \cdots$ (s. §. 194, sowie auch analytische Hülfslehren Art. 19) ist für ein kleines x, $e^x = 1 + x$, daher;

$$Log.\, nat.\, (1 + x) = x.$$

$$A = Fps \left\{ \begin{array}{l} Log. nat. (s_1 + \sigma) - Log. nat. s_1 \\ Log. nat. (s_1 + 2\sigma) - Log. nat. (s_1 + \sigma) \\ Log. nat. (s_1 + 3\sigma) - Log. nat. (s_1 + 2\sigma) \\ \quad . \qquad\qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad\qquad . \\ \quad . \qquad\qquad\qquad . \\ Log. nat. (s_1 + n\sigma) - Log. nat. [s_1 + (n-1)\sigma] \end{array} \right\}$$

$$= Fps\, [Log. nat. (s_1 + n\sigma) - Log. nat. s_1]$$

$$= Fps\, (Log. nat. s - Log. nat. s_1) = Fps\, Log. nat. \left(\frac{s}{s_1}\right),$$

da sich immer ein Glied in der einen Zeile mit einem Gliede der folgenden Zeile aufhebt.

Da ferner $\frac{s}{s_1} = \frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p}$ ist, so läßt sich diese **Arbeit** auch setzen:

$$A = Fps\, Log. nat. \left(\frac{h_1}{h}\right) = Fps\, Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Nehmen wir den Kolbenweg $s - s_1 = x$ an, so finden wir hiernach auch die **mittlere Kraft des Kolbens** bei Verdichtung der Luft in dem Verhältnisse

$$\frac{h_1}{h} = \frac{p_1}{p},$$

$$P = \frac{A}{x} = Fp\, \frac{s}{x}\, Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Setzen wir $F = 1$ (Quadratfuß) und $s = 1$ (Fuß), so erhalten wir die Leistung

$$A = p\, Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\, p\, Log. \left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Diese Formel giebt die mechanische Arbeit an, welche aufzuwenden ist, um eine Raumeinheit (1 Cubikfuß) Luft aus der tieferen Pressung oder Spannung p in die höhere Spannung p_1 zu versetzen und sie dadurch auf das Volumen $\left(\frac{p}{p_1}\right)$ Cubikfuß zurückzuführen. Dagegen drückt

$$A = p_1\, Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right) = 2{,}3026\, p_1\, Log. \left(\frac{p_1}{p}\right)$$

die Arbeit aus, welche eine Raumeinheit Gas ausgiebt oder verrichtet, wenn sie aus der höheren Pressung p_1 in die tiefere p übergeht.

Um eine Luftmasse vom Volumen V und der Spannung p durch Verdichtung auf das Volumen V_1 und auf die Spannung $p_1 = \frac{V}{V_1}\, p$ zurückzuführen, ist hiernach die mechanische Arbeit $Vp\, Log. nat. \left(\frac{V}{V_1}\right)$ aufzuwenden nöthig, und wenn umgekehrt, das Volumen V_1 bei der Spannung

p_1 durch Verdünnung in das Volumen V und in die Spannung $p = \frac{V_1}{V} p_1$ übergeht, so wird die Arbeit

$$V p \; Log. nat. \left(\frac{V}{V_1}\right) = V_1 p_1 \; Log. nat. \left(\frac{V}{V_1}\right) \text{ frei.}$$

Anmerkung. Zur Erzeugung mäßiger Spannungsdifferenzen $(p_1 - p)$ oder kleiner Volumenveränderungen $(V_1 - V)$ kann man auch einfach die erforderliche Arbeit

$$A = F\left(\frac{p + p_1}{2}\right)(s - s_1) = F s \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p + p_1}{2}\right)$$
$$= V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p + p_1}{2}\right)$$

setzen, oder genauer, mit Hülfe der Simpson'schen Regel, wenn z den Druck beim mittleren Kolbenwege $\frac{s + s_1}{2}$ bezeichnet:

$$A = V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p + 4z + p_1}{6}\right).$$

Nun ist aber:

$$\frac{z}{p} = \frac{s}{\frac{1}{2}(s + s_1)} = \frac{2s}{s + s_1} = \frac{2}{1 + \frac{p}{p_1}} = \frac{2 p_1}{p + p_1},$$

daher folgt:

$$A = \frac{1}{6} V \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(p + \frac{8 p p_1}{p + p_1} + p_1\right)$$
$$= \frac{1}{6} V p \left(\frac{p_1}{p} + \frac{8(p_1 - p)}{p_1 + p} - \frac{p}{p_1}\right).$$

Beispiele. 1) Wenn ein Gebläse pro Secunde 10 Cubikfuß Luft von 28 Zoll Spannung in Wind von 30 Zoll Spannung verwandelt, so ist die von demselben in jeder Secunde zu verrichtende Arbeit

$$A = 17280 \,.\, 0{,}5037 \,.\, 28 \; Log. nat. (30/_{28}) = 243710 \,(Log. nat. 15 - Log. nat. 14)$$
$$= 243710 \,(2{,}708050 - 2{,}639057) = 243710 \,.\, 0{,}068993$$
$$= 16814 \text{ Zollpfund} = 1401 \text{ Fußpfund.}$$

Die Annäherungsformel in der Anmerkung giebt diese Arbeit:

$$A = \frac{1}{6} \,.\, 243710 \,.\left(\frac{30}{28} + \frac{8 \,.\, 2}{29} - \frac{28}{30}\right) = 40610 \,.\left(\frac{15}{14} + \frac{8}{58} - \frac{14}{15}\right)$$
$$= 40618 \,.\, 0{,}41387 = 16811 \text{ Zollpfund} = 1401 \text{ Fußpfund.}$$

2) Wenn bei einer Dampfmaschine unter der Kolbenfläche $F = \pi \,.\, 8^2 = 201$ Quadratzoll eine Dampfmasse von 15 Zoll Höhe und 3 Atmosphären Spannung steht, welche den Kolben bei ihrer Ausdehnung um 25 Zoll fortschiebt, so ist die hierbei entwickelte und auf den Kolben übergetragene mechanische Arbeit unter der Voraussetzung, daß der Dampf bei seiner Expansion dem Mariotte'schen Gesetze folgt:

$$A = 201 \,.\, 3 \,.\, 14{,}10 \,.\, 15 \; Log. nat. \left(\frac{15 + 25}{15}\right) = 127534 \; Log. nat. \, {}^8/_3$$
$$= 127534 \,.\, 0{,}98083 = 125089 \text{ Zollpfund} = 10424 \text{ Fußpfund}$$

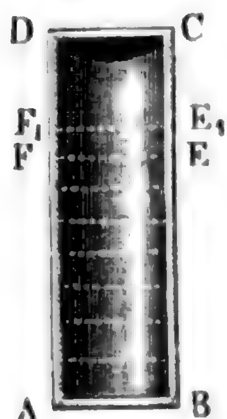
und die mittlere Kolbenkraft, ohne Rücksicht auf die Kolbenreibung und auf den Gegendruck:

$$P = \frac{125089}{25} = 4604 \text{ Pfund.}$$

Druck in den verschiedenen Luftschichten. Die in einem Gefäße eingeschlossene Luft ist in verschiedenen Tiefen von verschiedener Dichtigkeit und Spannung, denn die oberen Luftschichten drücken die unteren Luftschichten, auf welchen sie ruhen, zusammen; es ist deshalb nur in einer und derselben Horizontalschicht einerlei Dichtigkeit und einerlei Spannung, und es nehmen beide mit der Tiefe zu. Um aber das Gesetz dieser Zunahme der Dichtigkeit von oben nach unten oder der Abnahme derselben von unten nach oben zu finden, schlagen wir einen Weg ein, der dem des vorigen Paragraphen sehr ähnlich ist. §. 3

Denken wir uns eine verticale Luftsäule AE, Fig. 662, vom Querschnitte $AB = 1$, und von der Höhe $AF = s$. Setzen wir für die untere Luftschicht die Dichtigkeit $= \gamma$ und die Spannung $= p$, und für die obere Luftschicht EF die Dichtigkeit $= \gamma_1$ und die Spannkraft $= p_1$, so haben wir zunächst $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p}$. Bezeichnet σ die Höhe EE_1 der Schicht E_1F, so ist das Gewicht derselben, sowie auch die dieser Höhe σ entsprechende Abnahme der Spannkraft:

Fig. 662.



$$v = 1 \cdot \sigma \cdot \gamma_1 = \frac{\sigma \gamma p_1}{p},$$

und umgekehrt:

$$\sigma = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{v}{p_1},$$

oder, wie im vorigen Paragraphen:

$$\sigma = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat. \left(1 + \frac{v}{p_1}\right) = \frac{p}{\gamma} [Log.\,nat.\,(p_1 + v) - Log.\,nat.\,p_1].$$

Setzen wir hierin statt p_1, nach und nach $p_1 + v$, $p_1 + 2v$, $p_1 + 3v$ u. s. w. bis $p = p_1 + (n - 1)v$, und addiren wir die entsprechenden Luftschichthöhen oder Werthe von σ, so bekommen wir die Höhe der ganzen Luftsäule, ganz wie im vorigen Paragraphen:

$$s = \frac{p}{\gamma} (Log.\,nat.\,p - Log.\,nat.\,p_1) = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat. \left(\frac{p}{p_1}\right)$$

oder auch:

$$s = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat. \left(\frac{b}{b_1}\right) = 2,302 \frac{p}{\gamma} Log. \left(\frac{b}{b_1}\right),$$

wenn b und b_1 die den Spannkräften p und p_1 entsprechenden Barometerstände in A und in F bezeichnen.

Ist umgekehrt die Höhe s gegeben, so läßt sich die ihr entsprechende Expansivkraft und Dichtigkeit der Luft berechnen. Es ist nämlich:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = e^{\frac{s\gamma}{p}}, \text{ also } \gamma_1 = \gamma e^{-\frac{s\gamma}{p}},$$

wobei $e = 2,71828$, die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet.

Anmerkung. Diese Formel findet ihre Anwendung beim barometrischen Höhenmessen, welches im „Ingenieur", Seite 273 abgehandelt wird. Ohne Berücksichtigung der Temperatur u. s. w. läßt sich im Mittel

$$s = 58604 \; Log. \left(\frac{b}{b_1}\right) \text{ Fuß setzen.}$$

Beispiele. 1) Wenn man den Barometerstand am Fuße eines Berges, 339 und am Gipfel desselben, 315 Linien gefunden hat, so ergiebt sich die Höhe dieses Berges:

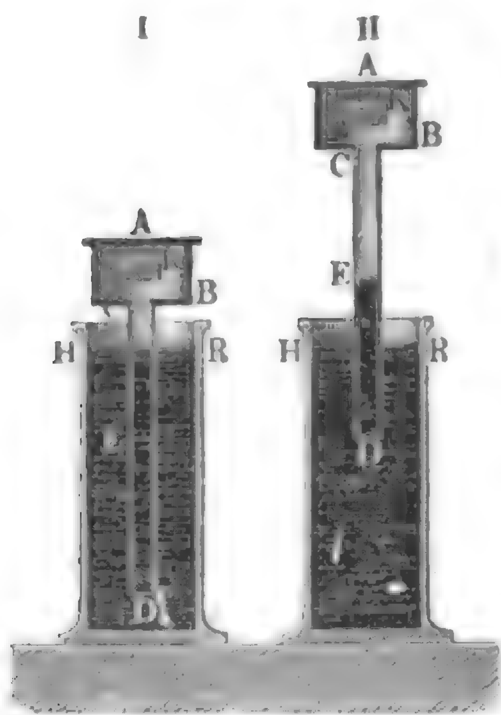
$$s = 58604 \,.\, Log. (^{339}/_{315}) = 58604 \,.\, 0,031889 = 1869 \text{ Fuß.}$$

2) Für die Dichtigkeit der Luft auf einem 10000 Fuß hohen Berge hat man: $Log. \frac{\gamma}{\gamma_1} = {}^{10000}/_{58604} = 0,1706$, daher $\frac{\gamma}{\gamma_1} = 1,481$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1}{1,481} = 0,675$; es ist also dieselbe nur $67\frac{1}{2}$ Procent von der Dichtigkeit am Fuße.

390 **Stereometer und Volumenometer.** Das Mariotte'sche Gesetz findet eine praktische Anwendung bei der Bestimmung der Volumina gewisser, namentlich pulverförmiger, faseriger Körper u. s. w. mittels der sogenannten Stereometer oder Volumenometer.

1) Das Stereometer von Say. Wird die mit dem verschlossenen Gefäße AB, Fig. 663 I., in Verbindung stehende und ins Quecksilber HDR eingetauchte Glasröhre CD emporgezogen, ohne ganz aus dem Quecksilber zu kommen (II.), so tritt in Folge der Ausdehnung der abgesperrten Luft, von oben eine gewisse Luftsäule CE, in die Röhre, und es bleibt von unten eine gewisse Quecksilbersäule DE in derselben zurück, wobei sich die nun verminderte Spannkraft der eingeschlossenen Luft mit dem um den Druck der Quecksilbersäule DE verminderten Atmosphärendruck ins Gleichgewicht setzt. Ist nun V_0 das Volumen des Raumes ABC, V_1 das zu bestimmende Volumen des in denselben gebrachten Körpers K und V das Volumen der Luftsäule CE, sowie b der Barometerstand und h die Höhe der eingedrungenen Quecksilbersäule DE, so hat man, da eine und dieselbe Luftmenge erst das Volumen $V_0 - V_1$ bei der Pressung b, und dann das Volumen $V_0 - V_1 + V$ bei der Pressung $b - h$, annimmt, nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Fig. 663.



$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 + V} = \frac{b - h}{b},$$

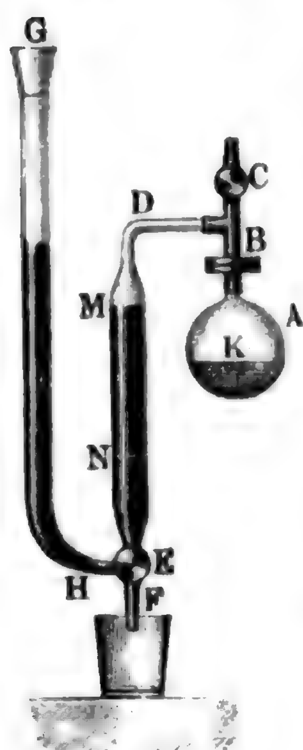
wonach dann das gesuchte Körpervolumen

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b - h}{h}\right) V \text{ folgt.}$$

Wenn man das Volumina V_0 kennt, und die Röhre bei der Bestimmung so weit herauszieht, daß die Länge und folglich auch das Volumen V der Luftsäule in der Röhre CD ein bestimmtes ist, und man beobachtet außer dem Barometerstande b, noch die Höhe h der Wassersäule DE, so kann man mittels dieser Formel das Volumen V_1 des Körpers K berechnen.

2) Das Volumenometer von Regnault. Wird der mit atmosphärischer Luft erfüllte Raum $ABCD$, Fig. 664, welcher auch den Körper K enthält, dessen Volumen V_1 bestimmt werden soll, durch den Hahn bei C abgesperrt, und dann durch den geöffneten Hahn E so viel Quecksilber aus der Röhre DE abgelassen, daß dessen Oberfläche von M nach N sinkt, so kann man nach dem Mariotte'schen Gesetze wieder die obige Formel

Fig. 664.



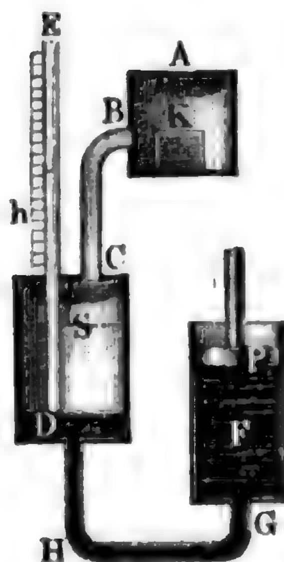
$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 + V} = \frac{b - h}{b}$$

aufstellen, wenn man das Volumen des Raumes $ABDM$ durch V_0, das Volumen des abgelassenen Quecksilbers durch V und die Höhe MN desselben durch h bezeichnet. Es folgt deshalb auch genau wie oben das Volumen des Körpers in A,

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b - h}{h}\right) V.$$

Um für eine zweite Messung die Röhre DE von Neuem mit Quecksilber zu füllen, stellt man durch Drehung des Hahnes E eine Communication der Röhre DE mit dem Quecksilbergefäße GH her.

Fig. 665.



3) Das Volumenometer von Kopp. Die im Raume $ABCD$, Fig. 665, eingeschlossene Luft hat die äußere Pressung, wenn das Quecksilber in DG die untere Mündung D der Manometerröhre DE berührt. Drückt man aber durch einen Kolben P das Quecksilber in DG bis zu einer gewissen Höhe empor, wobei seine Oberfläche die Spitze S berührt, so wird die abgesperrte Luft zusammengedrückt, und es steigt auch das Quecksilber in der Manometerröhre auf eine an einer Scala abzulesenden Höhe h. Ist

nun wieder V_0 das Volumen des Luftraumes $ABCD$, V_1 das gesuchte Volumen des in denselben gebrachten Körpers und V das Volumen des zugeflossenen Quecksilbers, so hat man dies Mal

$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 - V} = \frac{b + h}{b},$$

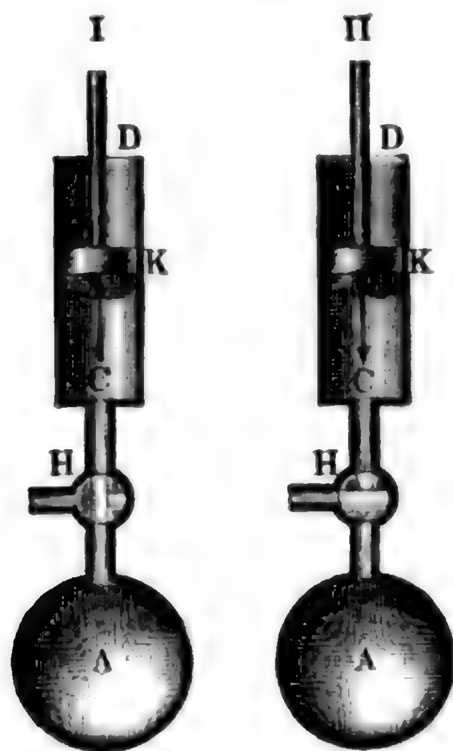
und daher das gesuchte Körpervolumen:

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b + h}{h}\right) V.$$

Die constanten Volumina V_0 und V sind durch Einfüllung mit Quecksilber und Abwägen der eingenommenen Quecksilbermenge für jedes Instrument besonders zu bestimmen.

391 **Die Luftpumpe** (franz. machine pneumatique; engl. air-pump, syringe). Wenn man den Kolben K, Fig. 666, einer Luftpumpe bei der Hahnstellung (I) aufzieht und bei der Hahnstellung (II) niederdrückt, so wirkt dieselbe als Verdünnungspumpe; wenn man dagegen denselben bei Hahnstellung (II) aufzieht und bei der Hahnstellung (I) zurückschiebt, so wirkt sie als Verdichtungspumpe. Bei wiederholtem Auf- und Niederziehen des Kolbens K im Cylinder CD wird dadurch die Luft im Recipienten A, im ersten Falle immer mehr und mehr verdünnt, im zweiten dagegen immer dichter und dichter.

Fig. 666.



1) Die Verdünnungspumpe. Ist V der Recipientenraum, bis zum Hahne H gemessen, ferner V_1 der schädliche Raum, von H bis tiefsten Kolbenstande gerechnet, und bezeichnet C den vom Kolben K durchlaufenen Raum, welcher auch durch das Product Fs von Kolbenfläche F und Kolbenweg s gemessen wird, so geht, nach dem Mariotte'schen Gesetze, die Pressung b der anfangs im Recipienten eingeschlossenen Luft, am Ende des Kolbenschubes in die Pressung:

$$b_1 = \left(\frac{V + V_1}{V + V_1 + C}\right) b \text{ über.}$$

Da beim Rückgange des Kolbens der schädliche Raum mit Luft von der äußeren Pressung b gefüllt bleibt, so ist ferner für die Pressung b_2 der Luft im Recipienten am Ende des zweiten Zuges:

$$(V + V_1 + C)\, b_2 = V b_1 + V_1 b$$
$$= \frac{V^2 b}{V + V_1 + C} + \frac{V V_1 b}{V + V_1 + C} + V_1 b, \text{ daher}$$
$$b_2 = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^2 b + \frac{V V_1 b}{(V + V_1 + C)^2} + \frac{V_1 b}{V + V_1 + C}.$$

Ebenso ist für die Spannung b_3 am Ende des dritten Zuges

$$(V + V_1 + C)\, b_3 = V b_2 + V_1 b, \text{ und daher}$$
$$b_3 = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^3 b + \frac{V^2 V_1 b}{(V + V_1 + C)^3} + \frac{V V_1 b}{(V + V_1 + C)^2}$$
$$+ \frac{V_1 b}{V + V_1 + C} = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^3 b + \left[\left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^2\right.$$
$$\left. + \frac{V}{V + V_1 + C} + 1\right] \frac{V_1 b}{V + V_1 + C},$$

und es läßt sich hiernach leicht ermessen, daß die Pressung b_n am Ende des n ten Zuges,

$$b_n = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^n b$$
$$+ \left[\left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^{n-1} + \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^{n-2} + \cdots + 1\right] \frac{V_1 b}{V + V_1 + C}$$

zu setzen ist.

Bezeichnet man $\frac{V}{V + V_1 + C}$ durch p, und $\frac{V_1}{V + V_1 + C}$ durch q, so hat man hiernach:

$$b_n = p^n b + (1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1})\, q b,$$

oder, da die Summe der in der Parenthese eingeschlossenen geometrischen Reihe, $= \frac{p^n - 1}{p - 1} = \frac{1 - p^n}{1 - p}$ ist (s. „Ingenieur" Seite 82), so folgt einfach die gesuchte Endpressung:

$$b_n = \left[p^n + \left(\frac{1 - p^n}{1 - p}\right) q\right] b.$$

Für $n = \infty$ fällt $p^n = 0$, und folglich die möglich kleinste Spannung $b_n = \frac{q b}{1 - p} = \frac{V_1 b}{C + V_1}$ aus.

2) Die Verdichtungspumpe. Gelten dieselben Bezeichnungen wie für die Verdünnungspumpe, so hat man hier für die Luftpressung b_1 am Ende des ersten Schubes:

$$(V + V_1)\, b_1 = (V + V_1 + C)\, b, \text{ daher } b_1 = \left(\frac{V + V_1 + C}{V + V_1}\right) b;$$

ferner für die Pressung b_2 am Ende des zweiten Schubes:

$$(V + V_1) b_2 = V b_1 + (V_1 + C) b, \text{ daher}$$

$$b_2 = \frac{(V + V_1 + C) V b}{(V + V_1)^2} + \frac{V_1 + C}{V + V_1} b$$

$$= \left(\frac{V}{V + V_1}\right)^2 b + \left(\frac{V}{V + V_1} + 1\right) \frac{V_1 + C}{V + V_1} b.$$

Ebenso folgt für die Pressung am Ende des dritten Schubes:

$$(V + V_1) b_3 = V b_2 + (V_1 + C) b, \text{ und daher}$$

$$b_3 = \left(\frac{V}{V + V_1}\right)^3 b + \left[\left(\frac{V}{V + V_1}\right)^2 + \frac{V}{V + V_1} + 1\right] \frac{V_1 + C}{V + V_1} b,$$

oder, wenn man

$$\frac{V}{V + V_1} = p_1 \text{ und } \frac{V_1 + C}{V + V_1} = q_1 \text{ setzt,}$$

$$b_3 = [p_1^3 + (1 + p_1 + p_1^2) q_1] b.$$

Allgemein hat man die Pressung am Ende des *nten* Kolbenspieles:

$$b_n = [p_1^n + (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n-1}) q_1] b, \text{ oder da}$$

$$1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n-1} = \frac{p_1^n - 1}{p_1 - 1} = \frac{1 - p_1^n}{1 - p_1} \text{ ist,}$$

$$b_n = \left[p_1^n + \left(\frac{1 - p_1^n}{1 - p_1}\right) q_1\right] b.$$

Für $n = \infty$, wo $p_1^n = 0$ ist, stellt sich

$$b_n = \frac{q b_1}{1 - p_1} = \frac{V_1 + C}{V_1} b$$

heraus. Dies ist natürlich auch die größte Spannung, welche durch diese Compressionspumpe erzeugt werden kann.

Wäre der schädliche Raum also $V_1 =$ Null, so hätte man bei der Verdünnungspumpe $q = 0$, daher:

$$b_n = p^n b = \left(\frac{V}{V + C}\right)^n p;$$

dagegen bei der Verdichtungspumpe $p_1 = 1$ und $\frac{1 - p_1^n}{1 - p_1} = n$, folglich:

$$b_n = (1 + n q_1) b = \left(1 + n \frac{C}{V}\right) b.$$

Beispiel. Wenn bei einer Luftpumpe der Recipient das Volumen $V = 1000$ Cubikzoll und der schädliche Raum die Größe von 10 Cubikzoll einnimmt, während der Cylinderraum 300 Cubikzoll mißt, so ist die Spannung der eingeschlossenen Luft nach 20 Spielen:

1) beim Verdünnen, da

$$p = \frac{1000}{1310} = 0{,}76336 \text{ und}$$

$$q = \frac{10}{1310} = \frac{1}{131} = 0{,}0076336 \text{ mißt,}$$

$$b_n = b_{20} = \left(0{,}76336^{20} + \frac{1 - 0{,}76336^{20}}{1 - 0{,}76336} \cdot 0{,}0076336\right) b$$
$$= (0{,}0045143 + 0{,}0321126)\, b = 0{,}076269\, b;$$ dagegen

2) beim Verdichten, wo

$$p_1 = \frac{1000}{1010} = 0{,}99010$$ und

$$q_1 = \frac{310}{1010} = 0{,}30693$$ ist,

$$b_n = b_{20} = \left(0{,}9901^{20} + \frac{1 - 0{,}9901^{20}}{1 - 0{,}9901} \cdot 0{,}30693\right) b$$
$$= \left(0{,}81954 + \frac{0{,}18046}{0{,}009901} \cdot 0{,}30693\right) b = 6{,}414\, b.$$

Gay-Lussac'sches Gesetz. Einen wesentlichen Einfluß auf die Dichtigkeit und Expansivkraft der Gase hat die Wärme oder Temperatur derselben. Je mehr die in einem Gefäße eingeschlossene Luft erwärmt wird, desto größer zeigt sich auch die Expansivkraft derselben, und je mehr die Temperatur der in einem Gefäße durch einen Kolben abgeschlossenen Luft erhöht wird, desto mehr dehnt sich auch die Luft aus und schiebt den Kolben auswärts. Versuche von Gay-Lussac, welche in neueren Zeiten von Rudberg, Magnus und Regnault wiederholt worden sind, haben ergeben, daß bei gleicher Dichtigkeit die Expansivkraft, und bei gleicher Expansivkraft das Volumen einer und derselben Luftmenge wie die Temperatur wächst. Man kann dieses Gesetz dem Mariotte'schen an die Seite setzen, und es zur Unterscheidung das Gay-Lussac'sche Gesetz nennen. Nach den neuesten Versuchen nimmt die Expansivkraft eines gewissen Luftvolumens bei Erwärmung vom Frost- bis Siedepunkt um 0,367 ihres anfänglichen Werthes zu, oder es wächst bei dieser Temperaturerhöhung das Volumen einer gewissen Luftmasse bei unveränderlicher Spannung um 36,7 Procent. Giebt man die Temperatur nach Centesimalgraden an, deren der Raum zwischen Frost- und Siedepunkt 100 enthält, so folgt die Ausdehnung auf jeden Grad, $= 0{,}00367$ und auf t^0 Temperatur, $= 0{,}00367 \,.\, t$; bedient man sich dagegen der Réaumur-schen Grade, von denen 80 auf den Abstand zwischen dem Frost- und Siedepunkt gehen, so hat man die Ausdehnung auf jeden Grad 0,00459, also für $t^0 = 0{,}00459 \,.\, t$. §. 3

Diese Verhältnißzahl oder der sogenannte Ausdehnungscoefficient $\delta = 0{,}00367$, gilt eigentlich nur für die atmosphärische Luft; den übrigen Gasen entsprechen meist wenig größere Werthe, auch nimmt selbst bei der atmosphärischen Luft dieser Coefficient mit der Temperatur wenig zu.

Wird eine Luftmasse vom anfänglichen Volumen V_0 und von der Temperatur Null um t Grad erwärmt, ohne eine andere Spannung anzunehmen, so ist das neue Volumen:

$$V = (1 + 0{,}00367\, t)\, V_0,$$

und erhält es die Temperatur t_1, so entsteht das Volumen:

$$V_1 = (1 + 0{,}00367\ t)\ V_0,$$

und es folgt durch Division das Volumenverhältniß:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\ t}{1 + 0{,}00367\ t_1},$$

dagegen das entsprechende Dichtigkeitsverhältniß:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + 0{,}00367\ t_1}{1 + 0{,}00367\ t},$$

oder allgemein:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}.$$

Geht außerdem noch eine Veränderung in der Spannung vor, ist p_0 die Spannung bei Null, p die bei t, und p_1 die bei t_1 Wärme, so hat man:

$$V = (1 + 0{,}00367\ t)\ \frac{p_0}{p}\ V_0,$$

ferner:

$$V_1 = (1 + 0{,}00367\ t_1)\frac{p_0}{p_1}\ V_0,$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + 0{,}00367\ t}{1 + 0{,}00367\ t_1} \cdot \frac{p_1}{p} \text{ und}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367 \cdot t_1}{1 + 0{,}00367 \cdot t} \cdot \frac{p}{p_1}, \text{ oder:}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367 \cdot t_1}{1 + 0{,}00367 \cdot t} \cdot \frac{b}{b_1}, \text{ sowie}$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Beispiel. Wenn eine Luftmasse von 800 Cubikfuß Inhalt, 15 Pfd. Spannkraft und 10 Grad Wärme, durch das Gebläse und durch den Erwärmungsapparat eines Hohofens in eine Spannung von 19 Pfd. und in eine Temperatur von 200 Grad versetzt wird, so nimmt sie zuletzt das größere Volumen:

$$V_1 = \frac{1 + 0{,}00367 \cdot 200}{1 + 0{,}00367 \cdot 10} \cdot {}^{15}/_{19} \cdot 800 = \frac{1{,}734}{1{,}0367} \cdot \frac{12000}{19} = 1056 \text{ Cubikfuß an.}$$

Anmerkung. Die Formel:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}$$

läßt sich auf feste und einige liquide Körper anwenden, nur ist hierin für jeden festen Stoff ein besonderes Ausdehnungsverhältniß einzuführen; z. B.

für Gußeisen: $\delta = 0{,}0000336$,
für Glas: $\delta = 0{,}0000258$,
für Quecksilber: $\delta = 0{,}0001802$.

Dichtigkeit der Luft. Mit Hülfe der Formel am Ende des vorigen Paragraphen läßt sich nun auch die einer gegebenen Temperatur und Spannung der Luft entsprechende Dichtigkeit γ berechnen. Durch neuere Wägungen und Messungen von Seiten Regnault's hat man das Gewicht von einem Cubikmeter atmosphärische Luft bei Null Grad Wärme und 0,76 Meter Barometerstand, $= 1{,}2935$ Kilogramm gefunden. Da ein Cubikfuß (preuß.) $= 0{,}030916$ Cubikmeter und 1 Kilogramm $= 2{,}0$ Neupfund ist, so beträgt bei den angegebenen Verhältnissen, die Dichtigkeit der Luft

$$= 2 \,.\, 0{,}030916 \,.\, 1{,}2935 = 0{,}07998 \text{ Pfund.}$$

Ist nun die Temperatur $= t^0$ Cent., so folgt die Dichtigkeit, für das französische Maß:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogramm,}$$

und für das preußische Maß:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \text{ Pfund.}$$

Weicht auch noch die Expansivkraft von der mittleren ab, ist also der Barometerstand nicht 0,76 Meter, sondern b, so erhält man:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{b}{0{,}76} = \frac{1{,}702 \,.\, b}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogramm,}$$

oder wenn man, wie in Deutschland gewöhnlich, b in Pariser Zoll giebt, da 0,76 Meter $= 28{,}075$ Zoll ist:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{b}{28{,}075} = \frac{0{,}002849 \,.\, b}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Pfund.}$$

Sehr oft drückt man aber auch die Expansivkraft durch den Druck p auf das Quadratcentimeter oder auf den Quadratzoll aus, deshalb ist dann der Factor $\frac{p}{1{,}0336}$ oder $\frac{p}{14{,}10}$ einzuführen, und es folgt so:

$$\gamma = \frac{1{,}2935}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{p}{1{,}0336} = \frac{1{,}2514\, p}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogramm}$$

oder:

$$\gamma = \frac{0{,}07998}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \frac{p}{14{,}10} = \frac{0{,}005672\, p}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \text{ Pfund.}$$

Bei gleicher Temperatur und Expansivkraft ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes nahe $^5/_8$ von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, weshalb man für Wasserdampf

$$\gamma = \frac{0{,}8084}{1 + 0{,}00367\ t} \cdot \frac{p}{1{,}0336} = \frac{0{,}7821\, p}{1 + 0{,}00367\ t} \text{ Kilogramm}$$

oder

$$\gamma = \frac{0,04999}{1 + 0,00367 \,.\, t} \cdot \frac{p}{14,10} = \frac{0,003539\, p}{1 + 0,00367\, t} \text{ Pfund}$$

erhält.

Beispiele. 1) Welches Gewicht hat der in einem cylindrischen Regulator von 40 Fuß Länge und 6 Fuß Weite enthaltene Wind bei 10 Grad Wärme und 18 Pfund Pressung? Die Dichtigkeit dieses Windes ist:

$$\gamma = \frac{0,005672 \,.\, 18}{1,0367} = \frac{0,102096}{1,0367} = 0,09848 \text{ Pfund},$$

und der Fassungsraum des Regulatorkessels:

$$V = \pi \,.\, 3^2 \,.\, 40 = 1131 \text{ Cubikfuß},$$

daher wiegt die gedachte Windmasse:

$$V\gamma = 0,09848 \,.\, 1131 = 111,4 \text{ Pfund}.$$

2) Eine Dampfmaschine verbraucht in der Minute 500 Cubikfuß Dampf von 107° Wärme und 36 Pariser Zoll = 0,5037 . 36 = 18,133 Pfund Spannkraft; wie viel Pfund Wasser bedarf sie zur Erzeugung dieser Dampfmenge? Die Dichtigkeit dieses Dampfes ist

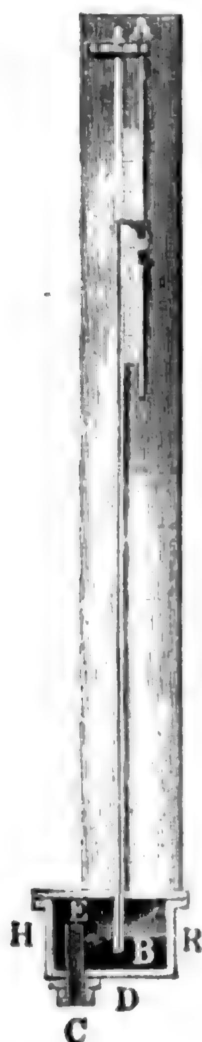
$$= \frac{0,003539 \,.\, 18,133}{1 + 0,00367 \,.\, 107} = \frac{0,06417}{1,393} = 0,04607 \text{ Pfund},$$

daher das Gewicht von 500 Cubikfuß Dampf, oder das Gewicht der entsprechenden Wassermenge

$$V\gamma = 500 \,.\, 0,04607 = 23,035 \text{ Pfund}.$$

§. 394 **Luftmanometer.** Mit Hülfe der in den letzten Paragraphen gewonnenen Ergebnisse läßt sich nun auch die Theorie des Luftmanometers entwickeln. Dasselbe besteht aus einer gut calibrirten, oben mit Luft und unten mit Quecksilber angefüllten Barometerröhre AB, Fig. 667, und aus einem ebenfalls Quecksilber enthaltenden Gefäße CER, welches mit dem Gase oder Dampfe, dessen Spannkraft man wissen will, durch ein Rohr CE in Communication gesetzt wird. Aus den Höhen der Luft- und Quecksilbersäulen in AB läßt sich diese Spannkraft wie folgt berechnen. Gewöhnlich ist das Instrument so eingerichtet, daß das Quecksilber in der Röhre mit dem Quecksilber im Gefäße auf gleiche Höhe steht, wenn die Temperatur der eingeschlossenen Luft, $t = 10$ Grad und die Spannung im Raume ER dem mittleren Atmosphärendrucke $b = 0,76$ Meter oder 28 Zoll gleich ist.

Fig. 667.



Ist aber beim Barometerstande b, im Raume ER eine Quecksilbersäule h_1 in die Röhre gestiegen und die Länge AS der übrig bleibenden Luftsäule, $= h_2$, so hat man die Spannung derselben

$$z = \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) b,$$

und daher den Barometerstand der Luft in ER:

$$b_1 = h_1 + z = h_1 + \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) b.$$

Findet noch ein Temperaturwechsel statt, ist die Temperatur bei der Beobachtung von h_1 und h_2 nicht wie anfänglich, $= t$, sondern $= t_1$, so hat man die Spannung der Luftsäule AS:

$$z = \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) . \, b,$$

und daher den in Frage stehenden Barometerstand:

$$b_1 = h_1 + \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, t_1}{1 + 0{,}00367 \,.\, t} \cdot \left(\frac{h_1 + h_2}{h_2}\right) \cdot b.$$

Für $b = 28$ Zoll (Paris.) und $t = 10^0$ C. folgt:

$$b_1 = h_1 + 27 \; (1 + 0{,}00367 \; t_1) \; \frac{h}{h_2},$$

wobei noch $h = h_1 + h_2$ die ganze Röhrenlänge, vom oberen Ende A bis zum Quecksilberspiegel HR gemessen, bezeichnet.

Aus dem Barometerstande b_1 Zoll folgt die Pressung auf den Quadratzoll (preuß.):

$$p_1 = \frac{14{,}10}{28} \, h_1 + 14{,}10 \,.\, {}^{27}/_{28} \; (1 + 0{,}00367 \; t_1) \; \frac{h}{h_2}$$

$$= 0{,}5037 \; h_1 + 13{,}60 \; (1 + 0{,}00367 \; t_1) \, \frac{h}{h_2} \text{ Pfund.}$$

Setzt man $\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \mu$, so folgt

$$(b_1 - h_1) \, (h - h_1) = \mu \, h \, b, \text{ und daher}$$

$$h_1 = \frac{b_1 + h}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + h}{2}\right)^2 + (\mu \, b - b_1) \, h}.$$

Nach dieser Formel läßt sich eine Scala berechnen, an welcher man die Pressung b_1 durch die Manometerhöhe angegeben abliest.

Beispiel. Wenn ein Luftmanometer von 25 Zoll Länge bei 21^0 Wärme eine Luftsäule von 12 Zoll Länge zeigt, so ist der entsprechende Barometerstand:

$$b_1 = 25 - 12 + 27 \; (1 + 0{,}00367 \,.\, 21) \,.\, {}^{25}/_{12} = 13 + 9 \,.\, 1{,}07707 \,.\, {}^{25}/_{4}$$
$$= 13 + 60{,}58 = 73{,}58 \text{ Zoll,}$$

und der Druck auf einen Quadratzoll

$$p_1 = 0{,}5037 \,.\, 73{,}58 = 3706 \text{ Pfund.}$$

Auftrieb der Luft. Das aus §. 364 bekannte Gesetz vom Auftriebe §. 395
des Wassers gegen die in dasselbe eingetauchten festen Körper läßt sich natür-

lich auch auf die in der Luft befindlichen Körper anwenden. Ist V das Volumen dieses Körpers und γ die Dichtigkeit der Luft, worin sich derselbe befindet, so beträgt, diesem Gesetze zufolge, der Auftrieb $P = V\gamma$; hat folglich der Körper das scheinbare Gewicht G (in der Luft), so ist sein wahres Gewicht (im luftleeren Raume):

$$G_1 = G + V\gamma.$$

Ist ferner γ_1 die Dichtigkeit dieses Körpers, so hat man auch:

$$G_1 = V\gamma_1, \text{ daher:}$$

$$V = \frac{G_1}{\gamma_1}, \text{ so daß nun:}$$

$$G_1 = G + \frac{G_1\gamma}{\gamma_1}, \text{ oder } G_1(\gamma_1 - \gamma) = G\gamma_1, \text{ also:}$$

$$G_1 = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma}\right) G \text{ folgt.}$$

Wird der Körper an der Wage durch ein Gewichtsstück G_2 gewogen, dessen Dichtigkeit γ_2 ist, so gilt für dasselbe die Gleichung:

$$G_2 = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma}\right) G,$$

und es folgt endlich mittels Division der letzten Gleichungen durch einander das Gewichtsverhältniß

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma} = \frac{1 - \frac{\gamma}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

oder annähernd und meist genügend scharf:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\gamma}{\gamma_2} = 1 + \gamma\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right),$$

oder auch:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

wenn ε, ε_1 und ε_2 die specifischen Gewichte der Luft, des abgewogenen Körpers und der Gewichtsmasse bezeichnen.

In vielen Fällen der Anwendung sind $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ und $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}$ so kleine Brüche, daß man sie ganz außer Acht und das wahre Gewicht (G_1) dem scheinbaren Gewichte G gleichsetzen kann.

Anmerkung. Das Gesetz vom Auftriebe der Luft findet auch noch seine Anwendung bei der Bestimmung der Steigkraft und Steighöhe eines Luftballons (franz. aérostat; engl. air-balloon) AB, Fig. 668. Ist V das Volumen des Ballons, G das ganze scheinbare Gewicht desselben sammt Schiff u. s. w., γ_1 die Dichtigkeit der äußeren und γ_2 die der eingeschlossenen Luft, so hat man den Auftrieb:

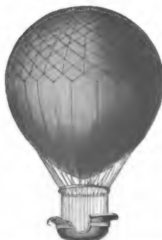
$$P = V\gamma_1 = V\gamma_2 + G,$$

und daher:

$$V(\gamma_1 - \gamma_2) = G,$$

also z. B. den nöthigen Fassungsraum des Ballons:

Fig. 668.



$$V = \frac{G}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

und die Dichtigkeit der äußeren Luft beim höchsten Stande des Ballons:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{G}{V}.$$

Aus dieser Dichtigkeit läßt sich noch mittels der in §. 389 gefundenen Formel:

$$s = \frac{p}{\gamma} Log. nat. \left(\frac{b}{b_1}\right) = \frac{p}{\gamma} Log. nat. \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right)$$

die größte Steighöhe s des Ballons bestimmen, wenn wir hierin für γ die nach § 393 zu bestimmende Dichtigkeit der Luft am Anfangspunkte einsetzen.

Beispiel 1. Wie verhält sich das wahre Gewicht des trockenen Nadelholzes zum scheinbaren Gewichte desselben, wenn das letztere mittels Messinggewichte bei 0 Grad Wärme und 27 Zoll Barometerstand bestimmt worden ist. Die Dichtigkeit der Luft ist nach §. 393:

$$\gamma = 0{,}002849 . 27 = 0{,}07692 \text{ Pfund},$$

die des Holzes:

$$\gamma_1 = 0{,}453 . 61{,}74,$$

und des Messings:

$$\gamma_2 = 8{,}55 . 61{,}74 \text{ (s. §. 61)},$$

folglich das gesuchte Gewichtsverhältniß:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \frac{0{,}07692}{61{,}74} \cdot \left(\frac{1}{0{,}453} - \frac{1}{8{,}55}\right) = 1 + 0{,}001246 . 2{,}091 = 1{,}00261.$$

Es verlieren also hiernach 1000 Pfund Holz durch den Auftrieb der Luft ungefähr $2^2/_3$ Pfund an Gewicht.

Beispiel 2. Wenn ein Luftballon eine Kugel von $d = 30$ Fuß Durchmesser bildet, die Füllung derselben die Dichtigkeit $\gamma_1 = 0{,}017$ Pfund hat und das Gewicht des ganzen Ballons sammt Schiff und Last, $G = 500$ Pfund beträgt, so ist die Dichtigkeit der äußeren Luft an der Stelle, wo das Luftschiff zu steigen aufhört:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{G}{V} = \gamma_2 + \frac{6\,G}{\pi\, d^3} = 0{,}017 + \frac{3000}{\pi . 30^3} = 0{,}017 + 0{,}03537$$
$$= 0{,}05237 \text{ Pfund}.$$

Ist nun die Dichtigkeit der äußeren Luft am Fußpunkte, $\gamma = 0{,}0800$ Pfund, so hat man:

$$Log.\ nat. \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = Log.\ nat. \left(\frac{8000}{5237}\right) = 0{,}4948,$$

und nimmt man noch das Verhältniß des Druckes per Quadratfuß zur Dichtigkeit γ der Luft, d. i. $\frac{p}{\gamma} = 25393$ an, so erhält man die größte Steighöhe dieses Luftschiffes:

$$s = \frac{p}{\gamma}\ Log.\ nat. \left(\frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = 25393 . 0{,}4948 = 12564 \text{ Fuß}.$$

Siebenter Abschnitt.

Dynamik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

§. 396 **Ausfluss.** Die Lehre vom Ausflusse (franz. écoulement; engl. efflux) der Flüssigkeiten aus Gefäßen macht den ersten Haupttheil der Hydrodynamik aus. Wir unterscheiden zuerst den Ausfluß des Wassers und den Ausfluß der Luft, und dann noch den Ausfluß bei veränderlichem und den bei unveränderlichem Drucke von einander. Zunächst ist von dem Ausflusse des Wassers unter constantem Drucke die Rede. Als constant läßt sich der Druck des Wassers annehmen, wenn von einer Seite eben soviel Wasser zutritt, als auf einer anderen Seite ausfließt, oder wenn die in einer gewissen Zeit ausfließende Wassermenge in Beziehung auf den Fassungsraum des Gefäßes sehr klein ist. Die Hauptaufgabe, um deren Lösung es sich hier handelt, ist die Bestimmung der Wassermenge (franz. dépense; engl. discharge), welche unter gegebenem Drucke in einer bestimmten Zeit durch eine gegebene Oeffnung (franz. orifice; engl. aperture) ausfließt.

Ist die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, so hat man für die im Laufe von t Secunden unter unveränderlichem Drucke ausfließende Wassermenge:

$$V = Q t.$$

Um aber die Ausflußmenge pro Secunde zu erhalten, ist es nöthig, die Größe der Oeffnung und die Geschwindigkeit der ausfließenden Wasserelemente zu kennen. Der Einfachheit der Untersuchung wegen nehmen wir zunächst an, daß die Wasserelemente in geraden und parallelen Linien ausströmen und

deshalb einen prismatischen Wasserstrahl (franz. veine, courant de fluide; engl. stream of the fluid) bilden. Ist nun F der Querdurchschnitt des Wasserstrahls und v die Geschwindigkeit des Wassers oder eines jeden Wasserelementes, so bildet die Ausflußmenge pro Secunde ein Prisma von der Basis F und Höhe v, es ist also:

$$Q = F v \text{ Raumeinheiten}$$

und

$$G = F v \gamma \text{ Gewichtseinheiten},$$

wofern γ die Dichtigkeit des Wassers oder der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Beispiele. 1) Wenn durch eine Schutzöffnung von 1,7 Quadratfuß das Wasser mit 14 Fuß Geschwindigkeit ausfließt, so beträgt die Wassermenge pro Secunde:

$$Q = 14 \, . \, 1{,}7 = 23{,}8 \text{ Cubikfuß},$$

und daher die stündlich ausfließende Wassermenge

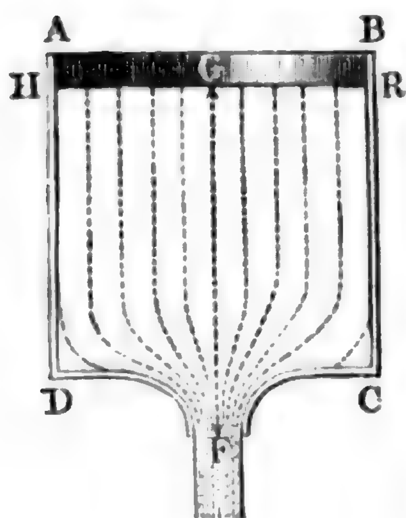
$$= 23{,}8 \, . \, 3600 = 85680 \text{ Cubikfuß}.$$

2) Wenn durch eine Mündung von 5 Quadratzoll in 3 Minuten 10 Secunden 264 Cubikfuß Wasser ausgeflossen sind, so betrug die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{V}{F t} = \frac{264}{\frac{5}{144} \cdot 190} = \frac{264 \, . \, 144}{5 \, . \, 190} = 40 \text{ Fuß}.$$

Ausflussgeschwindigkeit. Denken wir uns ein mit Wasser angefülltes Gefäß $A C$, Fig. 669, mit einer innen abgerundeten horizontalen §. 397

Fig. 669.



Ausmündung F, welche nur einen sehr kleinen Theil von der Oberfläche $H R$ des Wassers einnimmt. Setzen wir die während des Ausflusses als unveränderlich anzusehende Druckhöhe $F G$ (franz. charge d'eau; engl. height of water) $= h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, und die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, also ihr Gewicht $= Q \gamma$. Die mechanische Arbeit, welche diese Wassermasse beim Herabsinken von der Höhe h zu verrichten vermag, ist $= Q h \gamma$, und die mechanische Arbeit, welche die ausfließende Masse $Q \gamma$ in sich aufnimmt, indem sie aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v übergeht, ist $\frac{v^2}{2 g} Q \gamma$ (§. 74). Findet nun ein Arbeitsverlust beim Durchgange durch die Oeffnung nicht statt, so sind beide Arbeiten einander gleich, es ist also $h Q \gamma = \frac{v^2}{2 g} Q \gamma$, d. i.:

$$h = \frac{v^2}{2 g}$$

und umgekehrt,

$$v = \sqrt{2gh},$$

in Metermaß:

$$h = 0{,}0510\, v^2, \text{ und } v = 4{,}429 \sqrt{h},$$

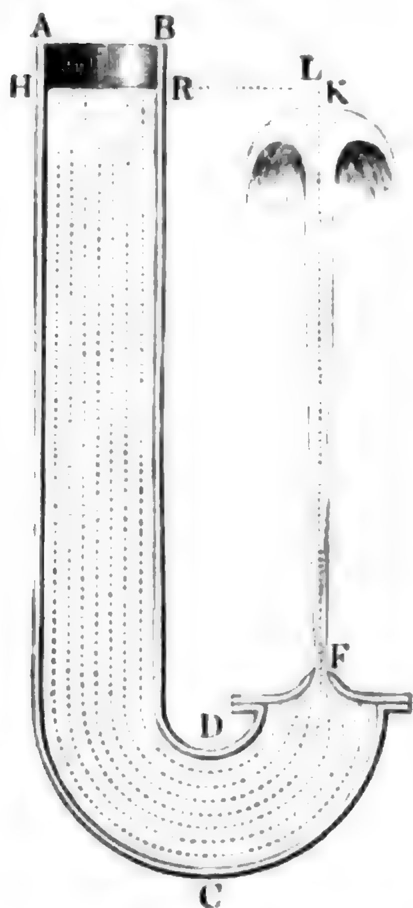
dagegen in Fußmaß:

$$h = 0{,}016\, v^2, \text{ und } v = 7{,}906 \sqrt{h}.$$

Es ist also die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers so groß wie die Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes läßt sich auch durch folgenden Versuch erweisen. Wenn man im Gefäße ACF, Fig. 670, eine nach oben gerichtete Oeffnung anbringt, so steigt der Wasserstrahl FK vertical in die Höhe und erreicht beinahe das Niveau HR des Wassers im Gefäße, und es läßt sich annehmen, daß er es vollkommen erreichen würde, wenn alle Hindernisse, wie z. B. Widerstand der Luft, Reibung an den Gefäßwänden, Störung durch das zurückfallende Wasser u. s. w. beseitigt wären. Da aber ein auf eine senkrechte Höhe h aufsteigender Körper die Anfangsgeschwindigkeit

Fig. 670.



$$v = \sqrt{2gh}$$

hat (§. 15), so folgt hiernach auch, daß die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}$$

sein muß.

Für eine andere Druckhöhe h_1 ist die Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2gh_1},$$

man hat daher:

$$v : v_1 = \sqrt{h} : \sqrt{h_1};$$

es verhalten sich also die Ausflußgeschwindigkeiten einer und derselben Flüssigkeit wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Beispiele. 1) Die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch eine 10 Quadratzoll große Oeffnung unter dem Drucke von 5 Fuß ausströmt, ist:

$$Q = Fv = 10 \,.\, 12\sqrt{2gh} = 120 \,.\, 7{,}906\sqrt{5} = 948{,}7 \,.\, 2{,}236 = 2121 \text{ Cubikzoll.}$$

2) Damit durch eine Oeffnung von 6 Quadratzoll in der Secunde 252 Cubikzoll Wasser ausfließen, ist die Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = \frac{0{,}016}{12} \cdot \left(\frac{252}{6}\right)^2 = \frac{0{,}004}{3} \cdot 42^2 = 2{,}35 \text{ Zoll}$$

nöthig.

Zu- und Ausflussgeschwindigkeit. Wenn das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit c zufließt, so kommt zur Arbeit $h \,.\, Q\gamma$ noch die der Geschwindigkeitshöhe $h_1 = \frac{c^2}{2g}$ entsprechende und dem zufließenden Wasser innewohnende Arbeit $\frac{c^2}{2g} Q\gamma$ hinzu, weshalb nun zu setzen ist:

$$(h + h_1)\, Q\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma, \text{ oder } h + h_1 = \frac{v^2}{2g},$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\,(h + h_1)} = \sqrt{2gh + c^2}.$$

Da bei einem beständig voll erhaltenen Gefäße die zufließende Wassermasse ebenso groß ist, wie die ausfließende Masse Q, so läßt sich $Gc = Fv$ setzen, wofern G den Inhalt des Querschnittes HR (Fig. 669) vom zuströmenden Wasser bezeichnet. Setzen wir hiernach $c = \frac{F}{G} v$, so erhalten wir:

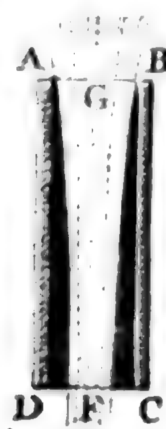
$$h = \frac{v^2}{2g} - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

und daher:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Dieser Formel zufolge nimmt die Geschwindigkeit um so mehr zu, je größer das Querschnittsverhältniß $\frac{F}{G}$ ist, nach ihr fällt ferner die Geschwindigkeit am kleinsten, nämlich $= \sqrt{2gh}$ aus, wenn der Querschnitt F der Ausflußöffnung sehr klein ist gegen den Querdurchschnitt G der Zuflußöffnung, und es nähert sich dieselbe immer mehr und mehr dem Unendlichen, je kleiner der Unterschied zwischen diesen Mündungen ist. Wenn $F = G$, also $\frac{F}{G} = 1$ ist, so fällt $v = \frac{\sqrt{2gh}}{0} = \infty$ und also auch $c = \infty$ aus. Dieser unendliche Werth ist so zu verstehen, daß bei einem bodenlosen Gefäße $A\,C$, Fig. 671, das Wasser mit einer unmeßbar großen Geschwindigkeit zu- und abfließen muß, damit der Wasserstrahl GF die Ausmündung CD ausfüllt. Setzt man $v = \frac{Gc}{F}$ ein, so erhält man:

Fig. 671.



$$h = \left[\left(\frac{G}{F}\right)^2 - 1\right] \frac{c^2}{2g}, \text{ daher } F = \frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}},$$

welcher Ausdruck anzeigt, daß der Querschnitt F des ausfließenden Strahles bei einer endlichen Zuflußgeschwindigkeit stets kleiner ist als der Querschnitt G des zufließenden Strahles, und daß er daher die Ausmündung gar nicht ausfüllt, wenn dieselbe größer ist als $\frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}}$.

Anmerkung. Die Richtigkeit der schon von Daniel Bernoulli aufgestellten Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

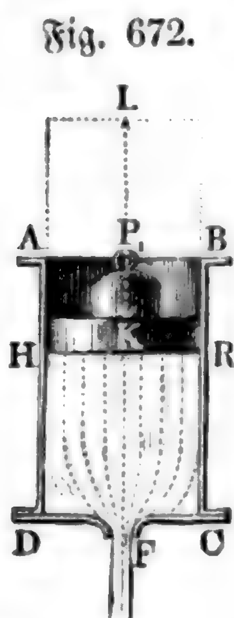
ist später von Vielen in Zweifel gezogen worden; wie unbegründet aber die gemachten Ausstellungen sind, habe ich in der allgemeinen Maschinenencyklopädie von Hülsse, Artikel „Ausfluß", zu beweisen gesucht.

Beispiel. Wenn aus einem prismatischen Gefäße von 60 Quadratzoll Querschnitt das Wasser durch eine 5 Zoll weite kreisrunde Bodenöffnung bei einer Druckhöhe von 6 Fuß ausfließt, so ist die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906\sqrt{6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{25\,\pi}{4\,.\,60}\right)^2}} = \frac{7{,}906\,.\,2{,}449}{\sqrt{1 - (0{,}327)^2}} = \frac{19{,}362}{\sqrt{0{,}8931}} = \frac{19{,}362}{0{,}945} = 20{,}49 \text{ Fuß}.$$

399 **Ausflussgeschwindigkeit, Druck und Dichtigkeit.** Die gefundenen Formeln gelten nur dann, wenn der Luftdruck auf den Wasserspiegel ebenso groß ist, wie der Druck der Luft gegen die Ausmündung; sind aber diese Drücke verschieden von einander, so bedürfen diese Formeln noch einer Ergänzung. Wird die Oberfläche HR, Fig. 672, durch einen Kolben K mit einer Kraft P_1 gedrückt, welcher Fall z. B. bei Feuerspritzen vorkommt, so denke man sich diese Kraft durch den Druck einer Wassersäule ersetzt. Ist h_1 die Höhe LK dieser Säule, und γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so setze man also:

Fig. 672.



$$P_1 = G h_1 \gamma.$$

Führt man nun statt h die um $h_1 = \frac{P_1}{G\gamma}$ vergrößerte Druckhöhe

$$h + h_1 = h + \frac{P_1}{G\gamma}$$

ein, so bekommt man für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{P_1}{G\gamma}\right)},$$

wobei wir überdies $\frac{F}{G}$ sehr klein voraussetzen. Bezeichnen wir noch den Druck auf jede Flächeneinheit der Oberfläche G durch p_1, so haben wir einfacher:

$$\frac{P_1}{G} = p_1,$$

und daher:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)}.$$

Bezeichnen wir endlich den Wasserdruck im Niveau der Ausmündung durch p, so können wir auch setzen:

$$p = \left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma,$$

also:

$$h + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma},$$

weshalb

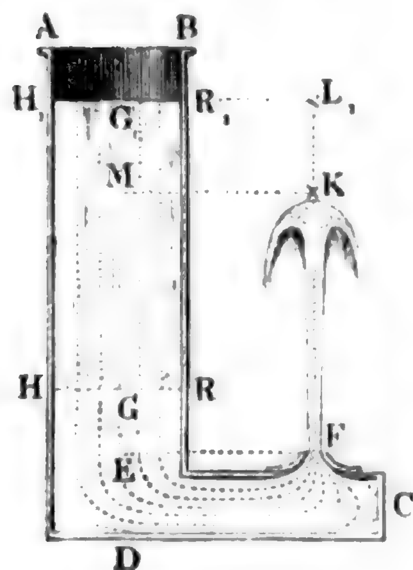
$$v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}$$

folgt.

Hiernach wächst also die Ausflußgeschwindigkeit wie die Quadratwurzel aus der Pressung auf die Flächeneinheit, und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit. Bei gleichem Drucke fließt also z. B. die 4mal so schwere Flüssigkeit $^1/_2$mal so schnell aus, als die einfach schwere Flüssigkeit. Da die Luft 770mal so leicht als Wasser ist, so würde sie, wenn sie unelastisch wäre, unter gleichem Drucke $\sqrt{770} = 27^3/_4$mal so schnell ausfließen, als Wasser.

Diese Theorie findet auch ihre Anwendung auf die Fälle, wo das ausfließende Wasser noch durch eine andere Flüssigkeitssäule gedrückt wird. Steht über der Oberfläche HR des Wassers HEF in einem Gefäße ACD, Fig. 673, noch eine Flüssigkeitssäule HR_1, deren Höhe $GG_1 = h_1$ und Dichtigkeit $= \gamma_1$ ist, während das Wasser die Dichtigkeit γ hat, so kann man dieselbe durch eine Wassersäule von der Höhe $\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1$ ersetzen, ohne daß sich der Druck auf HR ändert und folglich auch die Geschwindigkeit v des durch die Mündung F fließenden Wassers eine andere wird. Ist folglich noch h die Druckhöhe EG des Wassers, d. i. die Höhe der Trennungsfläche HR über der Mündung F, so hat man folglich die Geschwindigkeitshöhe:

Fig. 673.



$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1,$$

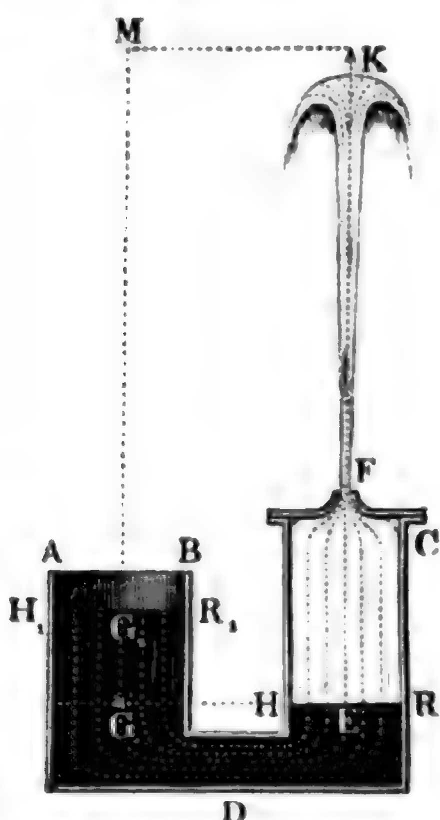
und daher:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1\right)}.$$

Ist nun $\gamma_1 < \gamma$, und also auch $h + \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 < h + h_1$, so reicht auch der senkrecht in die Höhe steigende Wasserstrahl FK nicht bis in das Niveau $H_1 R_1 L_1$ der Oberfläche der Flüssigkeit $H_1 R$.

Steht die Trennungsfläche HR, Fig. 674, nicht über, sondern um eine gewisse Höhe $EF = h$ unter der Mündung F des Ausflußgefäßes ADC, während die Oberfläche $H_1 R_1$ der Flüssigkeit $H_1 DR$ um die Höhe $GG_1 = h_1$ über der Trennungsfläche HR liegt, so hat man:

Fig. 674.



$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 - h,$$

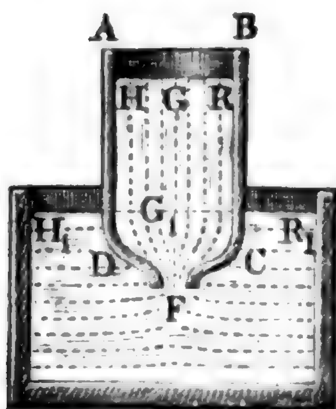
und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 - h\right)}.$$

Dieser Fall setzt voraus, daß $\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 > h$, oder $\frac{h_1}{h} > \frac{\gamma}{\gamma_1}$ sei. Es ist hiernach leicht zu ermessen, daß in diesem Falle der emporsteigende Wasserstrahl FK über die Oberfläche $H_1 R_1$ der Flüssigkeit $H_1 DR$ steigen kann. Ist $GM = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1$ die auf Wasser reducirte Höhe der Flüssigkeit, so giebt M das Niveau an, welches der steigende Strahl fast erreicht.

Fließt das Wasser nicht frei, sondern unter Wasser aus, so tritt wegen des Gegendruckes eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ein. Ist die Mündung F des Gefäßes AC, Fig. 675, um die Höhe $FG = h$ unter dem Wasserspiegel HR des Oberwassers, und um die Höhe $FG_1 = h_1$ unter dem Wasserspiegel $H_1 R_1$ des Unterwassers, so hat man von oben nach unten die Pressung:

Fig. 675.



$$p = h\gamma,$$

und von unten nach oben die Gegenpressung:

$$p_1 = h_1 \gamma,$$

daher die Kraft des Ausflusses:

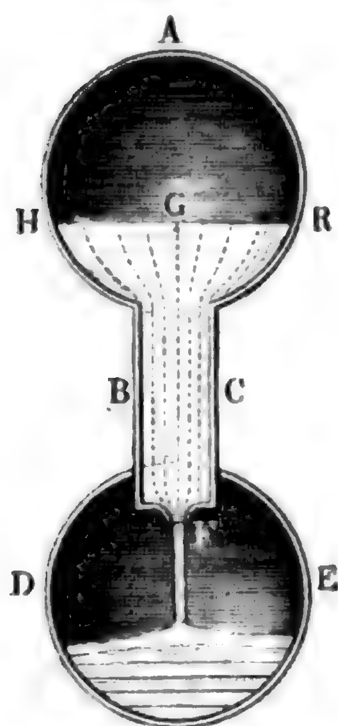
$$p - p_1 = (h - h_1)\,\gamma,$$

und die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{p - p_1}{\gamma}\right)} = \sqrt{2g\,(h - h_1)}.$$

Beim Ausflusse unter Wasser ist also der Niveauabstand $h - h_1$ zwischen den Wasserspiegeln als Druckhöhe anzusehen.

Fig. 676.



Wird das Wasser auf der Seite der Ausmündung durch die Kraft p und auf der Seite der Einmündung oder des Wasserspiegels durch die Kraft p_1 gepreßt, so hat man nun allgemein:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}.$$

Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn das Wasser aus einem verschlossenen Gefäße ABC in ein anderes verschlossenes Gefäß DE, Fig. 676, fließt. Es ist hier h die Tiefe FG der Mündung F unter dem Wasserspiegel HR, p_1 die Pressung der Luft in AHR, und p die Pressung der Luft, oder, nach Befinden, des Dampfes, in DE.

Beispiele. Wenn der Kolben im 12 Zoll weiten Cylinder oder Stiefel einer Feuerspritze mit 3000 Pfund Kraft niedergedrückt wird und Hindernisse in den Röhren und Schläuchen nicht vorkämen, so würde das Wasser mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}} = \sqrt{2g\frac{P_1}{G\gamma}} = 7{,}906\sqrt{\frac{3000}{\frac{\pi}{4}\cdot 66}}$$

$$= 7{,}906\,.\sqrt{\frac{2000}{11\,\pi}} = 60{,}14 \text{ Fuß}$$

durch das Mundstück am Schlauche ausströmen und, vertical gerichtet, auf die Höhe

$$h = 0{,}016\,.\,v^2 = 57{,}9 \text{ Fuß}$$

steigen.

2) Wenn das Wasser in einen luftverdünnten Raum einströmt, z. B. in den Condensator einer Dampfmaschine, während es von oben oder an seiner freien Oberfläche von der Atmosphäre gedrückt wird, so ist die letzte Formel

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit in Anwendung zu bringen. Ist die Druckhöhe des Wassers $h = 3$ Fuß, der äußere Barometerstand 27 und der innere 4 Pariser Zoll, so hat man:

$$\frac{p_1 - p}{\gamma} = 27 - 4 = 23 \text{ Pariser Zoll} = \frac{23}{12}\cdot 1{,}035 = 1{,}9837 \text{ preuß. Fuß},$$

oder als Wassersäule

$$= 13{,}6\,.\,1{,}9837 = 26{,}98 \text{ Fuß},$$

und es folgt die Geschwindigkeit des in den inneren oder luftverdünnten Raum einströmenden Wassers:

$$v = 7{,}906\sqrt{3 + 26{,}98} = 7{,}906\sqrt{29{,}98} = 43{,}29 \text{ Fuß.}$$

3) Steht das Wasser in der Speiseröhre eines Dampfkessels 12 Fuß über der Oberfläche des Wassers im Kessel, und ist der Dampfdruck 20 Pfund, der Luftdruck aber nur 15 Pfund auf den Quadratzoll, so beträgt die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in den Kessel eintritt:

$$v = 7{,}906\sqrt{12 + \frac{(15-20)\,.\,144}{66}} = 7{,}906\sqrt{12 - \frac{5\,.\,144}{66}}$$
$$= 7{,}906\sqrt{1{,}0909} = 8{,}25 \text{ Fuß.}$$

400 **Hydraulischer Druck.** Wenn das in einem Gefäße eingeschlossene Wasser in Bewegung ist, so drückt es gegen die Gefäßwände schwächer, als wenn es in Ruhe bleibt. Man hat daher den hydrodynamischen oder hydraulischen Wasserdruck von dem hydrostatischen Drucke des Wassers zu unterscheiden. Ist p_1 der Druck auf jede Einheit des Wasserspiegels $H_1 R_1 = G_1$, Fig. 677, p der Druck außerhalb der Mündung F und h die Druckhöhe $F G_1$, so hat man für die Ausflußgeschwindigkeit:

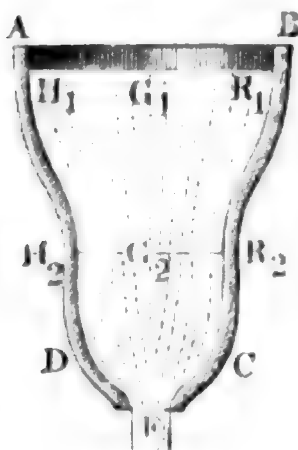
$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)} : \sqrt{1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2},$$

oder:

$$h + \frac{p_1 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g};$$

ist ferner in einem anderen Querschnitte $H_2 R_2 = G_2$, welcher um die Höhe $F G_2 = h_1$ über der Mündung steht, der Druck $= p_2$, so hat man ebenso:

Fig. 677.



$$h_1 + \frac{p_2 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_2}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Subtrahirt man beide Ausdrücke von einander, so folgt:

$$h - h_1 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

oder, wenn man die Druckhöhe $\overline{G_1 G_2}$ der Schicht $\overline{H_2 R_2} = G_2$, durch h_2 bezeichnet, das Maß des hydraulischen Wasserdrucks in $\overline{H_2 R_2}$:

$$\frac{p_2}{\gamma} = h_2 + \frac{p_1}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{G_2}\right)^2 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Nun ist aber noch $\frac{Fv}{G_1}$ die Geschwindigkeit v_1 des Wassers in der Oberfläche G_1, und $\frac{Fv}{G_2}$ die Geschwindigkeit v_2 des Wassers im Querschnitte G_2, daher läßt sich einfacher

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) \text{ setzen.}$$

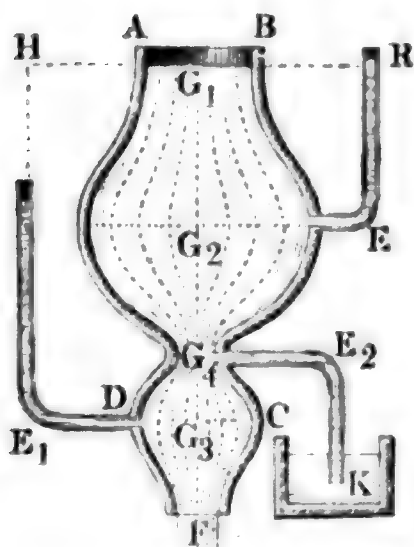
Es ist also hiernach die hydraulische Druckhöhe $\frac{p_2}{\gamma}$ an irgend einer Stelle im Gefäße gleich der hydrostatischen Druckhöhe $\frac{p_1}{\gamma} + h_2$ vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen des Wassers an dieser und an der Eintrittsstelle. Ist die freie Oberfläche G_1 des Wassers groß, so kann man die Zuflußgeschwindigkeit außer Acht lassen, und daher

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + h_2 - \frac{v_2^2}{2g}$$

setzen, und es ist hiernach die hydraulische Druckhöhe um die Geschwindigkeitshöhe kleiner, als die hydrostatische Druckhöhe. Je schneller also das Wasser in einer Röhrenleitung fließt, je schwächer drückt dasselbe gegen die Röhrenwand. Aus diesem Grunde zerspringen die Röhren oft dann erst, oder lassen erst dann Wasser durch, wenn die Bewegung des Wassers in denselben gehemmt wird, wenn sich die Röhren verstopfen u. s. w.

Durch einen in Fig. 678 abgebildeten Ausflußapparat $ABCD$ kann man die Verschiedenheit zwischen dem hydraulischen und dem hydrostatischen Drucke vor Augen führen. Führt man von dem Querschnitte G_2 ein Röhrchen ER in die Höhe, so füllt sich dasselbe mit Wasser, und dieses steigt in demselben über das Niveau des Wasserspiegels, wenn $G_2 > G_1$, also $v_2 < v_1$ ist, denn da der Druck p_1 auf den Wasserspiegel durch den Luftdruck an der Röhrenmündung aufgehoben wird, so läßt sich die den Druck in G_2 messende Höhe

Fig. 678.



$$x = \frac{p_2}{\gamma} = h_2 - \left(\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

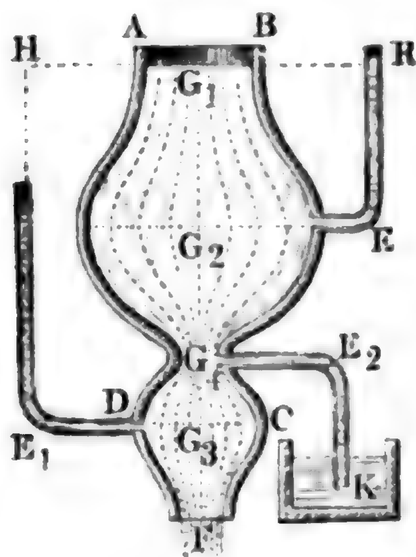
setzen, und es fällt also $x > h_2$ aus, wenn $\frac{v_2^2}{2g} < \frac{v_1^2}{2g}$ ist. Ist dagegen der Querschnitt $G_3 < G_1$, fließt also das Wasser durch G_3 schneller als durch G_1, so hat man die Höhe der Wassersäule in dem bei G_3 einmündenden Röhrchen E_1:

$$y = h_3 - \left(\frac{v_3^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

kleiner als h_3, und es reicht sonach dieselbe nicht bis zum Niveau HR von G_1. Ist endlich G_4 sehr klein, und also die entsprechende Geschwindigkeit

v_4 sehr groß, so kann sogar $\frac{v_4^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} > h_4$, und daher die entsprechende hydraulische Druckhöhe z negativ sein, d. h. die Luft von außen mehr drücken als das Wasser von innen. Dann wird also in einem nach unten geführten und unter Wasser ausmündenden Röhrchen $E_2 K$ eine Wassersäule emporsteigen, welche in Vereinigung mit dem Wasserdrucke dem äußeren Atmosphärendrucke das Gleichgewicht hält. Ist dieses Röhrchen kurz, so steigt sogar das zu diesem Zwecke vielleicht gefärbte Wasser aus dem untergesetzten Gefäße K durch das Röhrchen empor, tritt in das Ausflußreservoir und gelangt bei F mit zum Ausflusse.

Fig. 679.

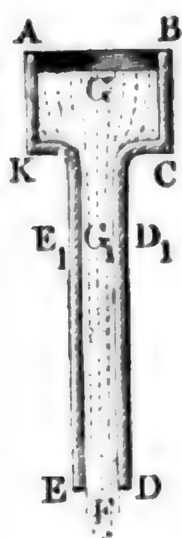


Anmerkung. Besteht das Ausflußgefäß ACE, Fig. 680, aus einem weiten Reservoir AC und aus einer engeren vertical stehenden Röhre CE, so ist der hydraulische Druck an allen Stellen dieser Röhre negativ. Läßt man den Atmosphärendruck p_1 unberücksichtigt, so ist der Druck des Wassers in der Nähe der Ausmündung F, = Null zu setzen, weil hier die ganze Druckhöhe $GF = h$ auf die Erzeugung der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ verwendet wird, dagegen ist an einer Stelle $D_1 E_1$, welche um die Höhe $G_1 G = h_1$ unter dem Wasserspiegel steht, die hydraulische Druckhöhe

$$= h_1 - h = -(h - h_1)$$

negativ; wenn also ein Loch in diese Röhre gebohrt wird, so fließt hier kein Wasser heraus, es wird vielmehr Luft eingesaugt, die bei F mit zum Ausflusse gelangt. Dieser negative Druck ist unmittelbar unter dem Gefäße am größten, weil hier h_2 am kleinsten ausfällt.

Fig. 680.



401 **Rectanguläre Seitenöffnung.** Mit Hülfe der Formel

$$Q = Fv = F\sqrt{2gh}$$

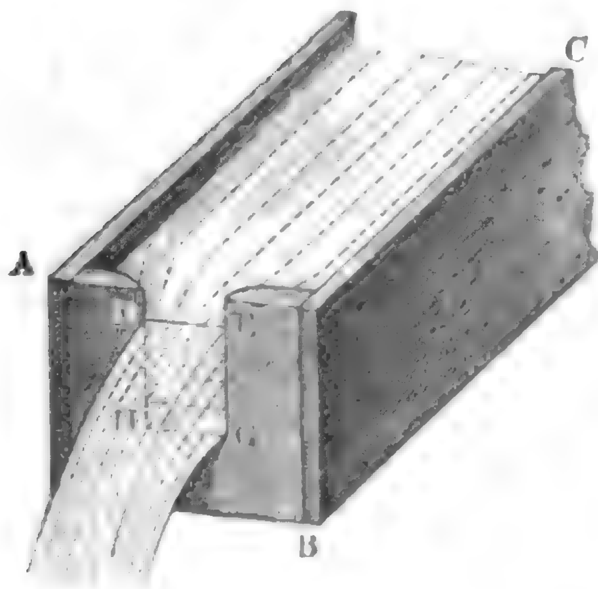
läßt sich die in einer Secunde ausfließende Wassermenge nur dann unmittelbar berechnen, wenn die Mündung horizontal ist, weil nur hier im ganzen Querschnitte F einerlei Geschwindigkeit vorkommt; hat aber der Querschnitt der Mündung eine Neigung gegen den Horizont, befindet sich z. B. die Oeffnung in einer Seitenwand des Gefäßes, so fließen die in verschiedenen Tiefen befindlichen Wasserelemente mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus, und es kann die Wassermenge Q nicht als ein Prisma angesehen werden, und daher auch die Formel $Q = Fv = F\sqrt{2gh}$ nicht unmittelbar zur Anwendung kommen. Es ist allgemein

$$Q = F_1\sqrt{2gh_1} + F_2\sqrt{2gh_2} + F_3\sqrt{2gh_3} + \cdots$$
$$= \sqrt{2g}(F_1\sqrt{h_1} + F_2\sqrt{h_2} + F_3\sqrt{h_3} + \cdots)$$

zu setzen, wobei $F_1, F_2, F_3 \ldots$ die Inhalte und $h_1, h_2, h_3 \ldots$ die Druckhöhen der Theile der Mündung bezeichnen.

Den einfachsten Fall bietet der Ausfluß durch einen Wandeinschnitt oder der sogenannte Ueberfall, Fig. 681, dar. Dieser Wandeinschnitt bildet eine rectanguläre Ausflußöffnung $DEGH$, deren Breite $DE = GH$ durch b und Höhe $DH = EG$ durch h bezeichnet werden möge. Zerlegen wir diese Fläche bh durch Horizontallinien in eine sehr große Anzahl n gleich breiter Streifen, so können wir innerhalb eines jeden einerlei Geschwindigkeit voraussetzen. Da, von oben nach unten gegangen, die Druckhöhen dieser Streifen

Fig. 681.



$$\frac{h}{n},\ \frac{2h}{n},\ \frac{3h}{n} \text{ u. s. w.}$$

sind, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten:

$$\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}},\ \sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}},\ \sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}},$$

und da ferner der Inhalt eines Streifens $= b\cdot\frac{h}{n} = \frac{bh}{n}$ ist, so hat man die zugehörigen Wassermengen:

$$\frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}},\ \frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}},\ \frac{bh}{n}\sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}} \text{ u. s. w.};$$

und folglich das Wasserquantum durch den ganzen Querschnitt:

$$Q = \frac{bh}{n}\left(\sqrt{2g\cdot\frac{h}{n}} + \sqrt{2g\cdot\frac{2h}{n}} + \sqrt{2g\cdot\frac{3h}{n}} + \cdots\right)$$
$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}).$$

Nun ist aber, wie im „Ingenieur“, Seite 88, angegeben wird,

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n},$$

oder:

$$1^{1/2} + 2^{1/2} + 3^{1/2} + \cdots + n^{1/2}, = \frac{n^{1+1/2}}{1+1/2} = {}^2/_3\, n^{3/2} = {}^2/_3\, n\sqrt{n};$$

daher folgt die in Frage stehende Wassermenge:

$$Q = \frac{b h \sqrt{2 g h}}{n \sqrt{n}} \cdot {}^2/_3\, n \sqrt{n} = {}^2/_3 b h \sqrt{2 g h} = {}^2/_3\, b \sqrt{2 g h^3}.$$

Versteht man unter der mittleren Geschwindigkeit v diejenige, welche an allen Stellen vorhanden sein müßte, damit ebenso viel Wasser ausfließt, als bei den verschiedenen Ausflußgeschwindigkeiten innerhalb des ganzen Querprofiles, so läßt sich setzen:

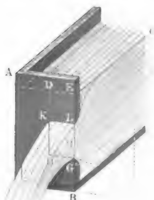
$Q = b h . v$, und es folgt sonach:

$$v = {}^2/_3 \sqrt{2 g h},$$

d. h. es ist die mittlere Geschwindigkeit des durch einen rectangulären Wandeinschnitt ausfließenden Wassers zwei Drittel von der Geschwindigkeit an der Schwelle oder unteren Kante des Einschnittes.

Reicht die rectanguläre Ausflußöffnung KG, Fig. 682, mit horizontaler Schwelle GH nicht bis zum Wasserspiegel CE, so findet man die Ausflußmenge, wenn man dieselbe als die Differenz zweier Wandeinschnitte $DEGH$ und $DELK$ ansieht. Ist h_1 die Tiefe EG der unteren und $h_2 = EL$ die der oberen Kante, so hat man die Ausflußmenge dieser Einschnitte:

Fig. 682.



$${}^2/_3\, b \sqrt{2 g h_1^3},$$

und

$${}^2/_3\, b \sqrt{2 g h_2^3},$$

daher das Wasserquantum für die rectanguläre Oeffnung $GHKL$:

$$Q = {}^2/_3\, b \sqrt{2 g h_1^3} - {}^2/_3\, b \sqrt{2 g h_2^3} = {}^2/_3\, b \sqrt{2 g}\, (h_1^{3/2} - h_2^{3/2}),$$

und die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{b (h_1 - h_2)} = {}^2/_3\, b \sqrt{2 g} \cdot \frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2}.$$

Ist h die mittlere Druckhöhe $EM = \frac{h_1 + h_2}{2}$, oder die Tiefe des Mittelpunktes der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und a die Oeffnungshöhe $KH = LG = h_1 - h_2$, so kann man setzen:

$$v = {}^2/_3 \sqrt{2 g} \cdot \frac{\left(h + \frac{a}{2}\right)^{3/2} - \left(h - \frac{a}{2}\right)^{3/2}}{a}, \text{ oder annähernd:}$$

$$= \left[1 - {}^1/_{96} \left(\frac{a}{h}\right)^2\right] \sqrt{2 g h}.$$

Beispiel. Wenn eine rectanguläre Ausflußöffnung 3 Fuß breit und $1\frac{1}{4}$ Fuß hoch ist, und die untere Kante um $2\frac{3}{4}$ Fuß unter dem Wasserspiegel liegt, so ist die entsprechende Ausflußmenge:

$$Q = \frac{2}{3} \,.\, 7{,}906 \,.\, 3\,(2{,}75^{3/2} - 1{,}5^{3/2}) = 15{,}812\,(4{,}560 - 1{,}837)$$
$$= 15{,}812 \,.\, 2{,}723 = 43{,}06 \text{ Cubikfuß.}$$

Nach der Näherungsformel beträgt die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \left[1 - \frac{1}{96}\left(\frac{1{,}25}{2{,}125}\right)^2\right] \cdot 7{,}906\,\sqrt{2{,}125} = (1 - 0{,}0036) \,.\, 11{,}525$$
$$= 11{,}525 - 0{,}042 = 11{,}483 \text{ Fuß,}$$

und daher die Ausflußmenge:

$$Q = 3 \,.\, \frac{5}{4} \,.\, 11{,}483 = 43{,}06 \text{ Cubikfuß.}$$

Anmerkung. Wenn der Wandeinschnitt unter dem Winkel δ gegen den Horizont geneigt ist, so hat man die Mündungshöhe $\frac{h_1 - h_2}{sin.\,\delta}$ statt ihrer Verticalprojection $(h_1 - h_2)$ einzuführen, weshalb

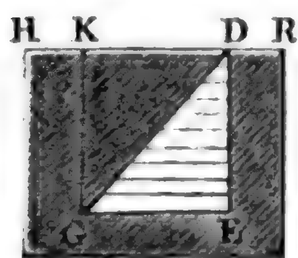
$$Q = \frac{2}{3}\,\frac{b\sqrt{2g}}{sin.\,\delta}\,(\sqrt{h_1^3} - \sqrt{h_2^3})$$

zu setzen ist. Ist der Querschnitt des Ausflußreservoirs parallel zur Mündung nicht bedeutend größer als der Querschnitt der Mündung, so hat man noch die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{F}{G}v$ des ankommenden Wassers zu berücksichtigen, und deshalb zu setzen:

$$Q = \frac{2}{3}\, b\sqrt{2g}\left[\left(h + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_2 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{3/2}\right].$$

Trianguläre Seitenöffnung. Außer rectangulären Seitenöffnungen §. 4
kommen noch trianguläre und kreisförmige Mündungen in der Praxis vor. Handeln wir zunächst von dem Ausflusse durch eine trianguläre Mündung DEG, Fig. 683, mit horizontaler Basis EG und der im Wasserspiegel HR befindlichen Spitze D. Setzen wir die Basis $EG = b$ und die Höhe $DE = h$, theilen wir die letztere in n gleiche Theile und führen wir durch die Theilpunkte Parallellinien zur Basis, so zerlegen wir die ganze Fläche in schmale Elemente von den Inhalten $\frac{b}{n} \cdot \frac{h}{n}$, $\frac{2b}{n} \cdot \frac{h}{n}$, $\frac{3b}{n} \cdot \frac{h}{n}$ u. s. w., und den Druckhöhen $\frac{h}{n}$, $\frac{2h}{n}$, $\frac{3h}{n}$ u. s. w. Für diese folgen die Ausflußmengen:

Fig. 683.



$$\frac{bh}{n}\sqrt{2g \cdot \frac{h}{n}},\ \frac{2bh}{n^2}\sqrt{2g \cdot \frac{2h}{n}},\ \frac{3bh}{n^2}\sqrt{2g \cdot \frac{3h}{n}} \text{ u. s. w.}$$

und es ergiebt sich durch Summation derselben die Ausflußmenge für die ganze trianguläre Mündung:

$$Q = \frac{bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{h}{n}}\,(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n})$$
$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n^2\sqrt{n}}\,(1^{3/2} + 2^{3/2} + 3^{3/2} + \cdots + n^{3/2}),$$

oder da die Reihe in der Parenthese, $= \frac{n^{3/2+1}}{3/2 + 1} = {}^2/_5\, n^{5/2}$ giebt,

$$Q = {}^2/_5\, bh\sqrt{2gh} = {}^2/_5\, b\sqrt{2gh^3}.$$

Liegt die Basis DK der Mündung DGK im Wasserspiegel und die Spitze G um h tiefer, so hat man, da durch das Rechteck $DEGK$, ${}^2/_3\, bh\sqrt{2gh}$ ausfließt, die entsprechende Wassermenge:

$$Q = {}^2/_3\, bh\sqrt{2gh} - {}^2/_5\, bh\sqrt{2gh} = {}^4/_{15}\, bh\sqrt{2gh}.$$

Durch das Trapez $ABCD$, Fig. 684, dessen obere im Wasserspiegel liegende Basis $AB = b_1$ und dessen untere Basis $CD = b_2$ und Höhe $DE = h$ ist, findet man die Wassermenge durch Zusammensetzung aus einem Rechtecke und zwei Dreiecken, nämlich:

$$Q = {}^2/_3\, b_2 h\sqrt{2gh} + {}^4/_{15}\,(b_1 - b_2)\, h\sqrt{2gh}$$
$$= {}^2/_{15}\,(2b_1 + 3b_2)\, h\sqrt{2gh}.$$

Fig. 684.

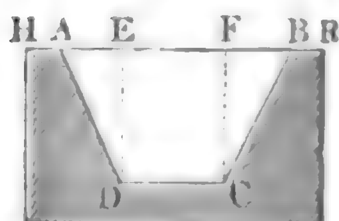
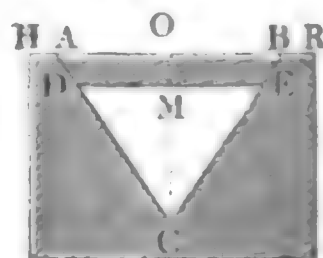


Fig. 685.

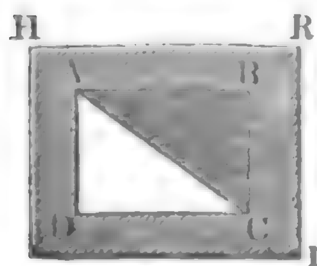


Ferner folgt noch die Ausflußmenge für ein Dreieck CDE, Fig. 685, dessen Basis $DE = b_1$ um die Höhe $OM = h_1$ und dessen Spitze C um $OC = h$ von dem Wasserspiegel HR absteht:

$$Q = \text{Wassermenge durch } ABC \text{ minus Wassermenge durch } AE$$
$$= {}^4/_{15}\, bh\sqrt{2gh} - {}^2/_{15}\,(2b + 3b_1)\, h_1\sqrt{2gh_1}$$
$$= {}^2/_{15}\sqrt{2g}\,[2b\,(h^{3/2} - h_1^{3/2}) - 3b_1 h_1^{3/2}].$$

Da sich die Breite $AB = b$ durch die Proportion $b : b_1 = h : (h - h_1)$ bestimmen läßt, so folgt:

Fig. 686.



$$Q = \frac{2\sqrt{2g}\,.\,b_1}{15}\left(\frac{2h\,(h^{3/2} - h_1^{3/2})}{h - h_1} - 3h_1^{3/2}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{2g}\,.\,b_1}{15}\left(\frac{2h^{5/2} - 5hh_1^{3/2} + 3h_1^{5/2}}{h - h_1}\right).$$

Endlich ergiebt sich noch für ein Dreieck ACD, Fig. 686, dessen Spitze A über der Basis liegt, die Ausflußmenge:

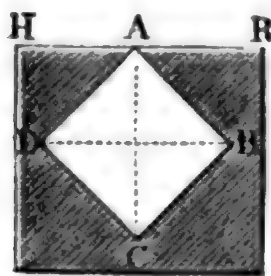
$$Q = {}^2/_3 \sqrt{2g} \cdot b_1 (h^{3/2} - h_1{}^{3/2}) - \frac{2\sqrt{2g} \cdot b_1}{15} \left(\frac{2 h^{5/2} - 5 h h_1{}^{3/2} + 3 h_1{}^{5/2}}{h - h_1} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2g} \cdot b_1}{15} \left(\frac{3 h^{5/2} - 5 h_1 h^{3/2} + 2 h_1{}^{5/2}}{h - h_1} \right).$$

Beispiel. Welche Wassermasse fließt durch das Quadrat $ABCD$, Fig 687, mit verticaler Diagonale AC von 1 Fuß Länge, wenn der Eckpunkt A bis zum Wasserspiegel reicht? Die obere Hälfte dieses Quadrates giebt die Ausflußmenge:

$Q = {}^2/_5\, b \sqrt{2 g h^3} = {}^2/_5 \cdot 1 \cdot 7{,}906 \sqrt{1/_8} = 1{,}581 \cdot 0{,}7071 = 1{,}118$ Cubikfuß,
und die untere die Wassermenge:

Fig. 687.



$$Q_1 = \frac{2 b \sqrt{2g}}{15} \left(\frac{2 h^{5/2} - 5 h h_1{}^{3/2} + 3 h_1{}^{5/2}}{h - h_1} \right)$$

$$= \frac{2 \cdot 7{,}906}{15} \left(\frac{2 - 5\,(1/_2)^{3/2} + 3\,(1/_2)^{5/2}}{1 - 1/_2} \right)$$

$$= \frac{31{,}624}{15} (2 - 1{,}7678 + 0{,}5303)$$

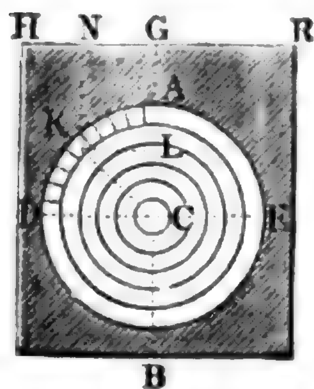
$$= \frac{31{,}624 \cdot 0{,}7625}{15} = 1{,}608 \text{ Cubikfuß,}$$

olglich fließt durch die ganze Mündung die Wassermenge:

$$Q = 1{,}118 + 1{,}608 = 2{,}726 \text{ Cubikfuß.}$$

Kreisförmige Seitenöffnung. Für eine kreisförmige Mündung §. 40 AB, Fig. 688, bestimmt sich die Ausflußmenge nur durch eine auf folgende Weise zu ermittelnde Näherungsformel. Zerlegen wir den Kreis durch concentrische Kreise in gleich schmale Ringe, und jeden Ring in lauter gleiche, als Parallelogramme anzusehende Elemente. Ist nun r der Halbmesser eines solchen Ringes, b dessen Breite und n die Anzahl seiner Elemente, folglich $\frac{2\pi r}{n}$ die Länge eines Ringelementes, so hat man die Größe desselben:

Fig. 688.



$$K = \frac{2\pi r b}{n}.$$

Ist ferner h die Tiefe CG des Mittelpunktes C unter dem Wasserspiegel HR, und φ der Winkel ACK, um welchen ein Element K vom höchsten Punkte A des Ringes absteht, so hat man die Druckhöhe dieses Elementes:

$$KN = CG - CL = h - r \cos.\, \varphi,$$

und daher die Ausflußmenge dieses Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n} \sqrt{2g\,(h - r \cos.\, \varphi)}.$$

Nun ist aber:

$$\sqrt{h - r\cos.\varphi}$$
$$= \sqrt{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{8}\left(\frac{r}{h}\right)^2 \cos.\varphi^2 + \cdots\right]$$
$$= \sqrt{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 (1 + \cos.2\,\varphi) + \cdots\right],$$

daher folgt die Ausflußmenge eines Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 (1 + \cos.2\,\varphi) + \cdots\right].$$

Die Ausflußmenge des ganzen Ringes ergiebt sich, wenn man in der Parenthese statt 1, $n.1 = n$, statt $\cos.\varphi$ die Summe aller Cosinus φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, und statt $\cos.2\,\varphi$ die Summe aller Cosinus $2\,\varphi$ von $2\,\varphi = 0$ bis $2\,\varphi = 4\pi$ nimmt. Da aber die Summe aller Cosinus eines Vollkreises = Null ist, so fallen diese Cosinus ganz aus, und es folgt die Ausflußmenge für den Ring:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[n - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2\cdot n - \cdots\right]$$
$$= 2\pi r b\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right].$$

Setzt man man jetzt statt b, $= \frac{r}{m}$ und statt r, $\frac{r}{m}$, $\frac{2r}{m}$, $\frac{3r}{m}$ bis $\frac{mr}{m}$, so erhält man die Ausflußmenge aller die ganze Kreisfläche ausmachenden Ringe, und es folgt zuletzt das Ausflußquantum des ganzen Kreises:

$$Q = 2\pi r\sqrt{2gh}\left(\frac{r}{m^2}(1+2+3+\cdots+m) - \tfrac{1}{16}\frac{r^3}{m^4 h^2}(1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3)\right)$$
$$= 2\pi r\sqrt{2gh}.\left(\frac{r}{m^2}\cdot\frac{m^2}{2} - \tfrac{1}{16}\cdot\frac{r^3}{m^4 h^2}\cdot\frac{m^4}{4}\right)$$
$$= \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right],$$

oder genauer:

$$Q = \pi r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \tfrac{5}{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4 - \cdots\right].$$

Reicht der Kreis bis zum Wasserspiegel, so ist

$$Q = \tfrac{987}{1024}\pi r^2\sqrt{2gh} = 0{,}964\,F\sqrt{2gh},$$

wenn $F = \pi r^2$, den Inhalt der ganzen Kreisfläche bezeichnet.

Uebrigens ist leicht zu erachten, daß man in allen den Fällen, wenn die Druckhöhe im Mittelpunkte gleich oder größer ist als der Durchmesser der Mündung, den Werth der ganzen Reihe = 1 setzen und

$$Q = F\sqrt{2gh}$$

annehmen kann. Auch läßt sich diese Regel auf andere Mündungen anwenden, und also in allen den Fällen, wenn der Schwerpunkt einer Mündung

mindestens ebenso tief unter dem Wasserspiegel liegt, als die Mündung hoch ist, die Tiefe h dieses Punktes als Druckhöhe ansehen und

$$Q = F\sqrt{2gh} \text{ setzen.}$$

Wenn man in Betracht zieht, daß das Mittel aller Cosinus des ersten Quadranten $= \frac{2}{\pi}$ und das Mittel aller Cosinus des zweiten Quadranten $= -\frac{2}{\pi}$, also das Mittel aller Cosinus des ersten und zweiten Quadranten = Null ist, so bestimmt sich auf dem oben eingeschlagenen Wege die Ausflußmenge des oberen Halbkreises:

$$Q_1 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]$$
$$= F\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right],$$

und die durch den unteren Halbkreis:

$$Q_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 + \cdots\right]$$
$$= F\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\left(\frac{r}{h}\right) - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 + \cdots\right],$$

wobei F den Inhalt der Mündung bezeichnet.

Uebrigens gelten diese Formeln für Q, Q_1 und Q_2 auch bei elliptischen Mündungen mit horizontaler Axe, da die Ausflußmengen, unter übrigens gleichen Verhältnissen, den Breiten der Mündungen proportional sind, und die Breiten einer Ellipse mit den Breiten eines gleichhohen Kreises proportional wachsen (s. analyt. Hülfslehren, Art. 12).

Beispiel. Welche Wassermenge fließt stündlich durch eine kreisförmige Oeffnung von 1 Zoll Durchmesser, über welcher der Wasserspiegel eine Linie hoch steht? Es ist hier:

$$\frac{r}{h} = {}^6/_7, \text{ daher } \left(\frac{r}{h}\right)^2 = {}^{36}/_{49} = 0{,}735,$$

ferner:

$$1 - {}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 = 1 - 0{,}023 = 0{,}977,$$

und folglich die Ausflußmenge pr. Secunde:

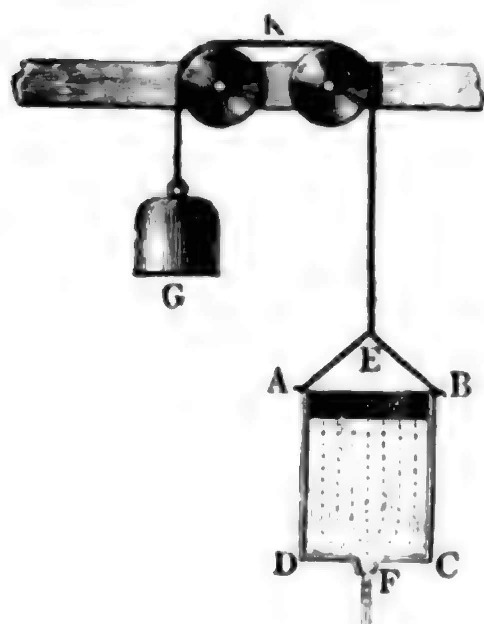
$$Q = \frac{\pi \,.\, 1^2}{4} \cdot 12 \cdot 7{,}906\sqrt{\frac{7}{144}} \cdot 0{,}977 = \frac{\pi}{4} \cdot 7{,}906 \,.\, 0{,}977\sqrt{7} = 16{,}05 \text{ Cubikzoll,}$$

pr. Minute = 963 Cubikzoll, und pr. Stunde = $33^1/_2$ Cubikfuß.

Bewegte Ausflussgefässe Die Ausflußgeschwindigkeit ändert §. 404 sich, wenn ein vorher in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindliches Gefäß in Bewegung übergeht, oder seinen Bewegungszustand ändert, weil in diesem Falle jedes Wassertheilchen außer seinem Gewichte auch noch durch seine Trägheit gegen die Umgebung wirkt.

Bewegt man das Gefäß AC, Fig. 689, beschleunigt vertical aufwärts, während das Wasser durch die Bodenöffnung F abfließt, so findet eine Vergrößerung, und bewegt man es beschleunigt vertical abwärts, so findet eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit statt. Ist die Acceleration p, so drückt jedes Wassermassenelement M nicht bloß durch sein Gewicht Mg, sondern auch durch seine Trägheit Mp, es ist folglich die Kraft eines jeden Elementes in einem Falle $(g + p) M$ und im zweiten $(g - p) M$, also statt g, $g \pm p$ zu setzen. Hiernach folgt

Fig. 689.



$$\frac{v^2}{2} = (g \pm p) h$$

und sonach für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2 (g \pm p) h}.$$

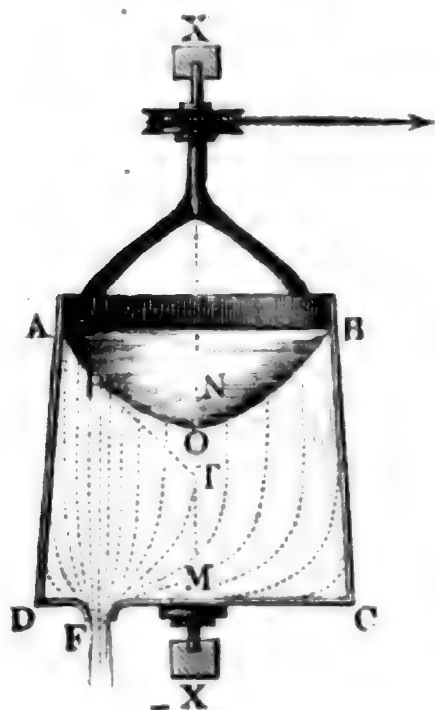
Steigt das Gefäß mit der Acceleration g empor, so ist

$$v = \sqrt{2 . 2 g h} = 2 \sqrt{g h},$$

also die Ausflußgeschwindigkeit 1,414 mal so groß als beim stillstehenden Gefäße. Fällt das Gefäß durch sein eigenes Gewicht, also mit der Acceleration g, so ist $v = \sqrt{0} = 0$, dann fließt also kein Wasser aus. Bewegt sich das Gefäß gleichförmig auf- oder abwärts, so bleibt $v = \sqrt{2 g h}$, steigt es aber verzögert, so wird $v = \sqrt{2 (g - p) h}$, und fällt es verzögert, so fällt $v = \sqrt{2 (g + p) h}$ aus.

Bewegt man das Ausflußgefäß horizontal oder unter einem schiefen Winkel gegen den Horizont, so stellt sich (s. §. 354) der Wasserspiegel schief gegen den Horizont und es findet daher auch eine Veränderung der Ausflußgeschwindigkeit statt.

Fig. 690.



Bei Umdrehung eines Gefäßes AC, Fig. 690, um seine verticale Axe $X\overline{X}$ bildet nach §. 354 der Wasserspiegel einen parabolischen Trichter AOB, es steht daher über der Mitte M des Bodens eine kleinere Druckhöhe MO, als nahe am Rande desselben, und es fließt daher auch durch eine Mündung in der Axe das Wasser langsamer, als durch jede andere gleich große Bodenöffnung F. Bezeichnet h die Druckhöhe MO in der Mitte M, so wäre die Ausflußgeschwindigkeit durch eine Mündung

daselbst, $= \sqrt{2gh}$; bezeichnet aber y die Entfernung $MF = NP$ einer Mündung F von der Axe $X\overline{X}$, und ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat man, da die Subtangente TN des Parabelbogens OP der doppelten Absciſſe ON gleich ist, die entsprechende Erhebung des Wassers über der Mitte O:

$$ON = \frac{1}{2}\, TN = \frac{1}{2}\, PN \,.\, tang.\, NPT,$$

folglich, wenn man noch $tang.\, NPT = tang.\, \varphi = \frac{\omega^2 y}{g}$ (s. §. 354) einführt, und die Umdrehungsgeschwindigkeit von F, d. i. ωy, durch w bezeichnet,

$$ON = x = \frac{1}{2}\, y \cdot \frac{\omega^2 y}{g} = \frac{\omega^2 y^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}.$$

Hiernach ist denn die Ausflußgeschwindigkeit für die Mündung F:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{w^2}{2g}\right)} = \sqrt{2gh + w^2}.$$

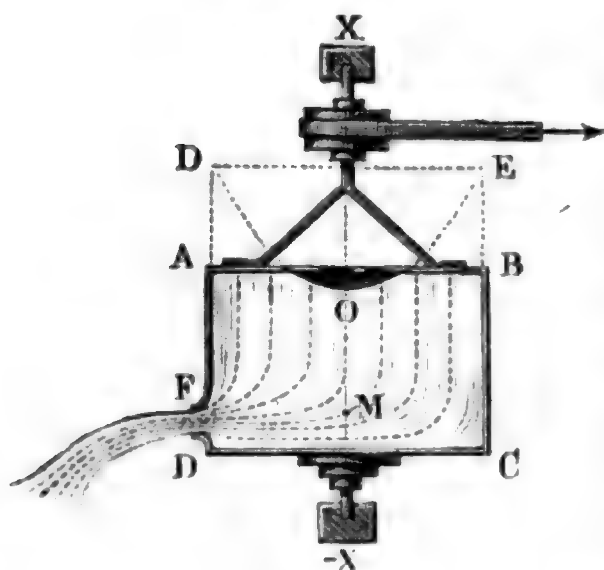


Fig. 691.

Diese Formel gilt für jedes beliebig gestaltete Gefäß, und auch dann noch, wenn es oben verschlossen ist, wie z. B. für AC, Fig. 691, so daß sich der Trichter DOE gar nicht vollständig bilden kann. Es ist auch hier h die Tiefe MO der Mündung unter dem Scheitel O des Trichters, und v die Umdrehungsgeschwindigkeit von der Mündung. Sie findet bei den Reactionsrädern und Turbinen in der Folge ihre Anwendung.

Beispiele. 1) Wenn das mit Wasser angefüllte Gefäß AC, Fig. 689, 350 Pfund wiegt und mittels eines über Leitrollen K gehenden Seiles durch ein Gewicht G von 450 Pfund aufgezogen wird, so steigt es mit einer Acceleration:

$$p = \frac{450 - 350}{450 + 350} \cdot g = \frac{100}{800}\, g = \frac{1}{8}\, g,$$

und es ist deshalb die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2\,(g + p)\, h} = \sqrt{2 \,.\, \frac{9}{8} \,.\, g h} = \sqrt{\frac{9}{4}\, g h}.$$

Wäre die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, so würde folglich die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{9 \,.\, g} = 3\sqrt{31{,}25} = 16{,}77 \text{ Fuß betragen.}$$

2) Wenn sich das mit Wasser angefüllte Gefäß AC, Fig. 691, so umdreht, daß es in der Minute 100 Umdrehungen macht, während die Tiefe der Mündung F unter dem Wasserspiegel in der Mitte 2 Fuß und die Entfernung von der Axe $X\overline{X}$, 3 Fuß beträgt, so ist die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gh + w^2} = \sqrt{62{,}5 \,.\, 2 + \left(\frac{3 \,.\, \pi \,.\, 100}{30}\right)^2} = \sqrt{125 + 100 \,.\, \pi^2}$$

$$= \sqrt{125 + 987} = \sqrt{1112} = 33{,}35 \text{ Fuß.}$$

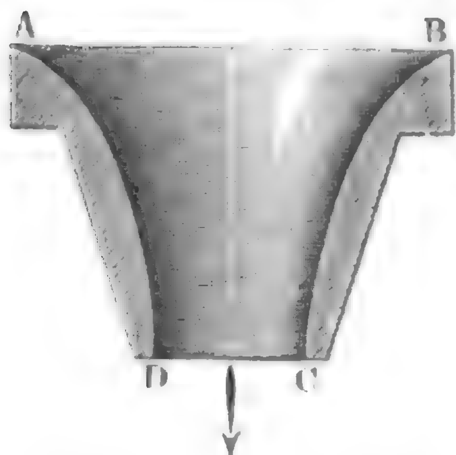
Steht das Gefäß still, so ist $v = \sqrt{125} = 11{,}18$ Fuß.

Zweites Capitel.

Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

405 **Geschwindigkeitscoefficient.** Die in dem vorstehenden Capitel entwickelten Ausflußgesetze stimmen mit den Erfahrungen fast ganz überein, so lange die Druckhöhe in Ansehung der Mündungsweite nicht sehr klein ist, und so lange sich die Ausflußöffnung nach innen allmälig erweitert und sich, ohne Ecken und Kanten zu biden, an der Boden- oder Seitenfläche des Gefäßes anschließt. Die hierüber an glattpolirten metallenen Mundstücken angestellten Versuche von Michelotti, Eytelwein und Anderen, sowie auch die Versuche des Verfassers haben nachgewiesen, daß die effective oder wirklich ausfließende Wassermenge 96 bis 99 Procent von dem theoretisch bestimmten Wasserquantum ist. Das in der halben natürlichen Größe abgebildete Mundstück AD, Fig. 692, gab die effective Ausflußmenge, bei einer Druckhöhe von 10 Fuß, 98 Procent, bei 5 Fuß, 97 Procent und bei 1 Fuß, 96 Procent des theoretisch bestimmten Ausflußquantums (Versuche mit größeren Mündungen s. Untersuchungen in dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik, zweite Abtheil.). Damit der Ausfluß durch ein solches Mundstück möglichst ungestört erfolge, muß die Abrundung desselben nicht nach einem Kreise, sondern nach einer Curve $AD = BC$ erfolgen, deren Krümmung von innen nach außen (von A nach D) allmälig abnimmt. Da ferner bei diesem Ausflusse der Strahl mit der Mündung gleichen Querschnitt F hat, so ist anzunehmen, daß diese Verminderung der Wassermenge aus einem Verluste an Geschwindigkeit hervorgeht, der in der Reibung oder Adhäsion des Wassers an dem inneren Umfange der Mündung und in der Klebrigkeit des Wassers seinen Grund hat. Wir nennen in der Folge das Verhältniß der effectiven Ausflußgeschwindigkeit zur theoretischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ den Geschwindigkeitscoefficienten (franz. coefficient de vitesse; engl. coefficient of velocity) und bezeichnen denselben durch φ. Hiernach ist also die effective Ausflußgeschwindigkeit im einfachsten Falle:

Fig. 692.



$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh},$$

und die effective **Ausflußmenge**:

$$Q = F v_1 = \varphi F v = \varphi F \sqrt{2 g h}.$$

Führen wir für φ den mittleren Werth 0,975 ein, so erhalten wir für das Fußmaß:

$$Q = 0{,}975 \,.\, F\sqrt{2gh} = 0{,}975 \,.\, 7{,}906\, F\sqrt{h} = 7{,}708\, F\sqrt{h}.$$

Einer mit der Geschwindigkeit v_1 ausfließenden Wassermenge Q wohnt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} \cdot v_1^2$ inne, vermöge welcher sie die mechanische Arbeit $Q\gamma \cdot \frac{v_1^2}{2g}$ zu leisten vermag. Da aber beim Niedersinken von der Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ das Gewicht $Q\gamma$ die Arbeit $Q\gamma . h = Q\gamma \frac{v^2}{2g}$ verrichtet, so folgt, daß durch den Ausfluß das Wasser den **Arbeitsverlust**

$$L = Q\gamma\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) = (1 - \varphi^2)\, Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = (1 - 0{,}975^2)\, Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g},$$

d. i.

$$L = 0{,}049\, Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ oder } 4{,}9 \text{ Procent}$$

erleidet. Es wird also das ausfließende Wasser durch seine lebendige Kraft 4,9 Procent weniger Arbeit verrichten, als durch sein Gewicht beim Herabsinken von der Höhe h.

Anmerkung. Der Verfasser hat das durch die Formel $v = \sqrt{2gh}$ ausgedrückte Ausflußgesetz auch unter sehr verschiedenem, namentlich unter sehr **hohem Druck** von 100 Metern und unter sehr **kleinem Druck** von 0,02 Meter geprüft. Ein innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Weite gab bei den Druckhöhen:

h_2 = 0,02 Meter	0,50 Meter	3,5 Meter	17 Meter	103 Meter
φ = 0,959	0,967	0,975	0,994	0,994

s. Civilingenieur, Neue Folge, Band V, erstes und zweites Heft.

Contractionscoefficient. Fließt das Wasser durch eine **Mündung in der dünnen Wand** (franz. orifice en mince paroi; engl. orifice in a thin plate), so tritt unter übrigens gleichen Umständen eine bedeutende Verminderung der Ausflußmenge ein, indem die Wasserelemente in convergenten Richtungen durch die Mündung hindurch gehen und dadurch einen **zusammengezogenen oder contrahirten Wasserstrahl** (franz. veine contractée; engl. contracted stream) hervorbringen. Die von Mehreren, §. 406

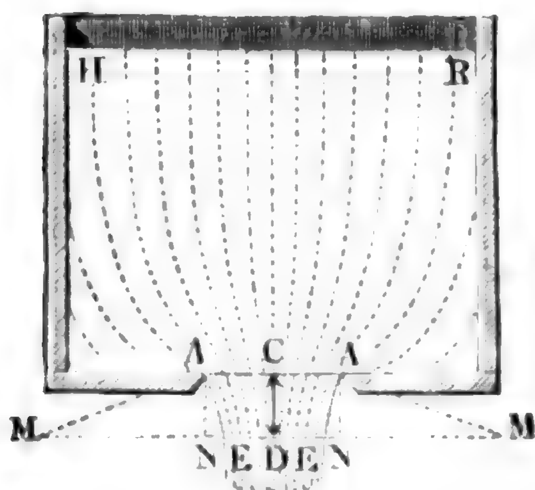
namentlich auch die in der neuesten Zeit von dem Verfasser angestellten Strahlenmessungen haben ergeben, daß der Strahl in einer Entfernung, die ungefähr der halben Mündungsweite gleich kommt, die stärkste Zusammenziehung und eine Dicke hat, die 0,8 des Durchmessers der Mündung gleichkommt. Ist F_1 der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles, sowie F der Querschnitt der Mündung, so hat man hiernach:

$$F_1 = (0,8)^2\, F = 0,64\, F.$$

Man nennt das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ dieser Querschnitte den **Contractionscoefficienten**, (franz. coefficient de contraction; engl. coefficient of contraction) und bezeichnet ihn mit α, und es ist sonach der mittlere Werth für den Ausfluß des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand $\alpha = 0,64$ zu setzen.

So lange man keine nähere Kenntniß über das Gesetz der Contraction der Wasserstrahlen hat, kann man annehmen, daß der durch eine kreisrunde Oeffnung AB, Fig. 693, fließende Strahl einen Rotationskörper $AEEA$ bilde, dessen Umfläche durch Umdrehung eines Kreisbogens AE um die Axe CD des Strahles entsteht. Setzen wir den Durchmesser AA der Mündung, $= d$, und die Entfernung CD des contrahirten Querschnittes EE von der Mündung $= \frac{1}{2} d$, so erhalten wir für den Halbmesser

Fig. 693.



$$MA = ME = r$$

des Erzeugungsbogens AE mittels der Gleichung

$$\overline{AN}^2 = EN\,(2\,ME - EN)$$

oder

$$\frac{d^2}{4} = \frac{d}{10}\left(2\,r - \frac{d}{10}\right),$$

und hiernach

$$r = 1,3\, d.$$

Mündungen, nach dieser Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformt, geben so ziemlich die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v_1 = 0,97\,.\,v.$$

Die Contraction des Wasserstrahles hat ihren Grund darin, daß nicht allein das Wasser, welches unmittelbar über der Mündung befindlich ist, ausfließt, sondern auch das zur Seite befindliche Wasser herbeiströmt und mit zum Ausflusse gelangt. Es findet also schon im Inneren des Gefäßes eine Convergenz der Wasserfäden, ähnlich wie sie die Figur andeutet, statt, und es besteht die Contraction des Wasserstrahles in einer bloßen Fortsetzung dieser Convergenz. Von dieser Bewegung des Wassers in der Nähe der Mündung kann man sich mit Hülfe eines gläsernen Ausflußapparates

überzeugen, wenn man kleine Körper, welche wenig leichter oder schwerer als Wasser sind, wie z. B. Sägespäne von Eichenholz, Stücke von Siegellack u. s. w., in das Wasser bringt und mit zum Ausflusse gelangen läßt.

§. 40 **Contrahirte Wasserstrahlen.** Fließt das Wasser durch dreiseitige, vierseitige Mündungen u. s. w. im dünnen Bleche, so nimmt der Wasserstrahl besondere Gestalten an. In die Augen fallend ist zumal die Umkehrung des Strahles, oder die veränderte Stellung seines Querschnittes in Hinsicht auf den Querschnitt der Mündung, vermöge welcher ein Eck dieses Querschnittes mit der Mitte einer Seite der Mündung gleichzuliegen kommt. Hiernach bildet bei einer dreiseitigen Mündung *ABC*, Fig. 694, der Querschnitt des Strahles in einem gewissen Abstande von der Mündung einen dreistrahligen Stern *DEF*, bei einer vierseitigen Mündung *ABCD*, Fig. 695, einen vierstrahligen Stern *EFGH*, ebenso bei einer fünfseitigen

Fig. 694.

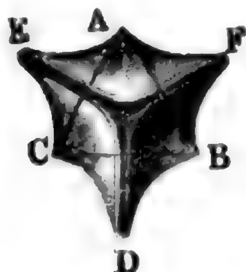


Fig. 695.

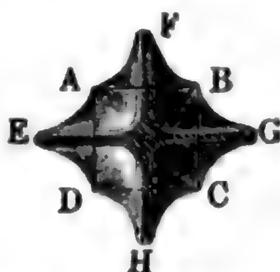
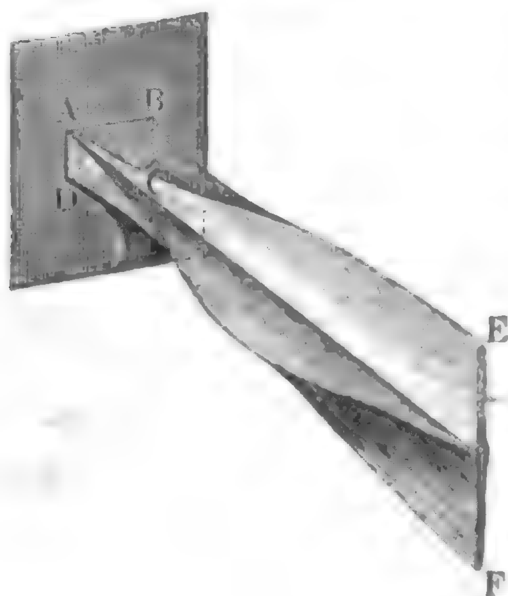


Fig. 696.

Mündung *ABCDE*, Fig. 696, einen Stern *EGHKL* mit fünf Strahlen u. s. w. Diese Querschnitte sind aber in verschiedenen Abständen von der Mündung sehr verschieden, sie nehmen auf einer gewissen Distanz ab und auf einer folgenden wieder zu u. s. w.; es besteht daher der Strahl aus Blättern oder Rippen von veränderlicher Breite und bildet dadurch, was namentlich beim Ausflusse unter sehr großem Drucke zu beobachten ist, Bäuche und Knoten, ähnlich wie die Cacteen. Ist die Mündung *ABCD*, Fig. 697, rectangulär, so bildet in kleinerer Entfernung von der Mündung der Querschnitt zwar ebenfalls ein Kreuz oder einen Stern, allein in größerer Entfernung nimmt derselbe wieder mehr die Gestalt eines verwendeten Rechteckes *EF* an.

Fig. 697.



Den Ausfluß bei den verschiedenartigsten Mündungen hat Bidone beobachtet; genaue Strahlenmessungen bei quadratischen Mündungen sind aber nur von Poncelet und Lesbros angestellt worden (s. Allgemeine Maschinenencyklopädie, Artikel „Ausfluß"). Die letzten

Messungen haben auf einen kleinen Contractionscoefficienten 0,563 geführt. Wassermessungen beim Ausflusse durch kleinere Mündungen führen aber auf größere Contractionscoefficienten, sie weisen sogar nach, daß dieselben bei langgezogenen Rechtecken größer sind als bei Rechtecken, die sich mehr den Quadraten nähern.

408 **Ausflusscoefficient.** Wäre beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand die effective Geschwindigkeit gleich der theoretischen $v = \sqrt{2gh}$, so hätte man die effective Ausflußmenge

$$Q = \alpha F . v = \alpha F \sqrt{2gh},$$

weil αF den Querschnitt des Strahles an der Stelle der größten Zusammenziehung, wo sich die Wasserelemente in parallelen Richtungen bewegen, bezeichnet. Diesem ist aber keineswegs so, es zeigt sich vielmehr in der Erfahrung, daß Q noch kleiner als $\alpha F \sqrt{2gh}$ ist, daß man also die theoretische Wassermenge $F\sqrt{2gh}$ durch einen Coefficienten multipliciren muß, der kleiner als der Contractionscoefficient ist, um die effective Ausflußmenge zu erhalten. Wir müssen daher annehmen, daß beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand noch ein gewisser Geschwindigkeitsverlust eintrete, deshalb auch einen Geschwindigkeitscoefficienten φ einführen und daher die effective Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$$

setzen. Hiernach ist also die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = F_1 . v_1 = \alpha F . \varphi v = \alpha \varphi F v = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}.$$

Nennen wir endlich noch das Verhältniß der effectiven Ausflußmenge Q_1 zum theoretischen oder hypothetischen Ausflußquantum Q den Ausflußcoefficienten (franz. coefficient de dépense; engl. coefficient of effluxion) und bezeichnen wir ihn in der Folge durch μ, so haben wir:

$$Q_1 = \mu Q = \mu F v = \mu F \sqrt{2gh},$$

und daher

$$\mu = \alpha \varphi,$$

d. h. der Ausflußcoefficient ist das Product aus dem Contractions- und dem Geschwindigkeitscoefficienten.

Vielfältige Beobachtungen, namentlich aber auch die Messungen des Verfassers, haben darauf geführt, daß der Ausflußcoefficient für Mündungen in der dünnen Wand nicht constant ist, daß er bei kleinen Mündungen und kleinen Ausflußgeschwindigkeiten größer ist, als bei großen Mündungen und bei großen Geschwindigkeiten, daß er auch bei langen und schmalen Mündungen bedeutend größer ausfällt als bei Mündungen, die sich einer regelmäßigen Form oder dem Kreise nähern.

Für quadratische Mündungen von 1 bis 9 Quadratzoll Inhalt bei 7 bis

21 Fuß Druckhöhe ist, nach den Versuchen von Bossut und Michelotti, der mittlere Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}610$, für kreisförmige von $^1/_2$ bis 6 Zoll Durchmesser bei 4 bis 21 Fuß Druckhöhe aber fällt derselbe $\mu = 0{,}615$ oder ungefähr $^8/_{13}$ aus. Die einzelnen Beobachtungswerthe von Bossut und Michelotti weichen unter einander nicht unbedeutend ab, doch läßt sich aus ihnen eine Abhängigkeit von der Größe der Mündung und der Größe der Druckhöhe nicht entnehmen. Nach den Versuchen des Verfassers ist bei einem Drucke von 0,6 Meter der Ausflußcoefficient für eine kreisrunde Mündung

von 1 Centimeter Durchmesser . . . $\mu = 0{,}628$
„ 2 „ „ . . . $= 0{,}621$
„ 3 „ „ . . . $= 0{,}614$
„ 4 „ „ . . . $= 0{,}607$.

Dagegen bei einem Drucke von $^1/_4$ Meter für dieselbe Mündung

von 1 Centimeter Durchmesser . . . $\mu = 0{,}637$
„ 2 „ „ . . . $= 0{,}629$
„ 3 „ „ . . . $= 0{,}622$
„ 4 „ „ . . . $= 0{,}614$.

Man sieht aus diesen Versuchsresultaten deutlich, daß der Ausflußcoefficient zunimmt, wenn die Mündungsgröße und die Druckhöhe abnehmen.

Nehmen wir für μ den mittleren Werth $= 0{,}62$, und für $\alpha = 0{,}64$ an, so bekommen wir den Geschwindigkeitscoefficienten beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand:

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha} = 0{,}97,$$

also ziemlich so groß wie beim Ausflusse durch abgerundete oder conoidische Mündungen.

Anmerkungen. 1) Versuche von Buff (s. Poggendorff's Annalen, Bd. XLVI.) zeigen, daß die Ausflußcoefficienten bei kleinen Mündungen und kleinen Druckhöhen oder Geschwindigkeiten bedeutend größer sind als bei großen und mittleren Mündungen und Geschwindigkeiten. Eine Mündung von 2,084 Linien Durchmesser gab bei $1^1/_2$ Zoll Druck, $\mu = 0{,}692$, bei 35 Zoll aber $\mu = 0{,}644$; dagegen eine Mündung von 4,848 Linien Weite bei $4^1/_2$ Zoll Druck, $\mu = 0{,}682$ und bei 29 Zoll, $\mu = 0{,}653$. Aehnliches hat auch der Verfasser gefunden.

2) Beim Ausflusse unter Wasser fallen, nach den Versuchen des Verfassers, die Ausflußcoefficienten nahe um $1^1/_3$ Procent kleiner aus als beim Ausflusse in die Luft.

Versuche. Es läßt sich der Ausflußcoefficient μ, welcher einer gewissen Ausflußmündung entspricht, finden, wenn man das Wasserquantum V kennt, welches in einer gewissen Zeit t bei einer bekannten Druckhöhe h durch den bekannten Querschnitt F der Mündung ausströmt; es ist nämlich: §. 4

$$V = \mu . F . \sqrt{2gh} . t,$$

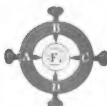
also umgekehrt,

$$\mu = \frac{V}{Ft.\sqrt{2gh}}.$$

Um aber die beiden Factoren desselben, nämlich den Contractions- und den Geschwindigkeitscoefficienten zu ermitteln, bedarf es entweder noch einer Ausmessung des Strahlenquerschnittes $F_1 = \alpha F$, oder einer Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ mittels der Sprungweite des Strahles. Beide Messungen lassen sich jedoch nur bei dünnen Strahlen mit kreisförmigen Querschnitten erträglich genau bewerkstelligen.

Der kreisförmige Querschnitt F_1 eines Strahles bestimmt sich sehr sicher mit Hülfe eines in Fig. 698 abgebildeten, aus einem Ringe und vier spitz zulaufenden Schrauben A, B, C, D bestehenden Apparates. Die Schrauben sind nach dem Mittelpunkte des Strahlenquerschnittes gerichtet, und werden so lange gestellt, bis ihre Spitzen die Oberfläche des Strahles berühren. Nach diesem wird der Ring von dem Strahle abgezogen und es werden die Abstände der gegenüberstehenden Schraubenspitzen von einander gemessen; zuletzt wird das Mittel d_1 dieser Abstände als Durchmesser des Strahles angenommen. Ist noch d der Durchmesser des Mündungsquerschnittes, so hat man nun:

Fig. 698.



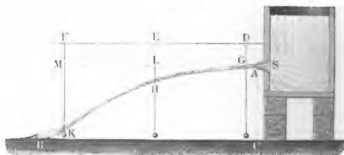
$$\alpha = \frac{F_1}{F} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2,$$

und dann:

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Mißt man die Sprungweite $BC = b$ eines aus dem Mundstücke SA horizontal ausfließenden Strahles AB, Fig. 699, welche einer gewissen Höhe $AC = a$ zukommt, so hat man nach §. 36 die Ausflußgeschwindigkeit:

Fig. 699.



$$v_1 = \sqrt{\frac{g\,b^2}{2\,a}},$$

und da nun $v_1 = \varphi\, v = \varphi \sqrt{2gh}$ ist, so erhält man dann:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{b^2}{4\,a\,h}} = \frac{b}{2\sqrt{a\,h}},$$

und hieraus: $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{2\sqrt{a\,h}}{\mu\, b}$.

Die Bestimmung von v ist jedoch noch sicherer, wenn man statt a und b die horizontalen und verticalen Coordinaten dreier Punkte der parabolischen Axe AB des Strahles ausmißt, weil dann auch die Axe des Mundstückes eine unbekannte Neigung gegen den Horizont haben kann. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man eine horizontale Schnur DF über dem Strahle ausspannt, von drei gleichweit von einander abstehenden Punkten D, E, F derselben Lothe herabläßt, und an diesen die Abstände DG, EH und FK der Axe des Strahles von DF abmißt. Ist $DF = x$ die horizontale Entfernung der äußersten Punkte von einander, sind ferner die Verticalabstände DG, EH und FK, $= z$, z_1 und z_2, und nimmt man G als Coordinatenanfangspunkt an, so hat man die Coordinaten für den Punkt H:

$$x_1 = GL = DE = \tfrac{1}{2}\, DF = \frac{x}{2} \text{ und } y_1 = LH = EH - DG = z_1 - z,$$

und die für den Punkt K:

$$x_2 = GM = DF = x \text{ und } y_2 = MK = FK - DG = z_2 - z.$$

Nach §. 39 ist nun, wenn α den Neigungswinkel der Strahlenaxe in G bezeichnet:

$$y_1 = x_1\, tang.\,\alpha + \frac{g\, x_1^2}{2\, v_1^2\, cos.\,\alpha^2} \text{ und auch}$$

$$y_2 = x_2\, tang.\,\alpha + \frac{g\, x_2^2}{2\, v_1^2\, cos.\,\alpha^2}, \text{ oder}$$

$$y_1 - x_1\, tang.\,\alpha = \frac{g\, x_1^2}{2\, v_1^2\, cos.\,\alpha^2} \text{ und}$$

$$y_2 - x_2\, tang.\,\alpha = \frac{g\, x_2^2}{2\, v_1^2\, cos.\,\alpha^2};$$

es folgt durch Division, da $x_2 = 2\, x_1$ ist,

$$\frac{y_1 - x_1\, tang.\,\alpha}{y_2 - x_2\, tang.\,\alpha} = \tfrac{1}{4}; \text{ hieraus aber } tang.\,\alpha = \frac{4\, y_1 - y_2}{x}.$$

Setzt man in eine der vorigen Formeln statt $\frac{1}{cos.\,\alpha^2} = 1 + tang.\,\alpha^2$, und führt man statt $tang.\,\alpha$ den letzten Ausdruck ein, so erhält man für die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit die Formel:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g x^2}{2 (y_2 - x\, tang.\, \alpha) \cos.\, \alpha^2}} = \sqrt{\frac{(1 + tang.\, \alpha^2)\, g x^2}{2 (2 y_1 - 4 y_1)}}$$
$$= \sqrt{\frac{g [x^2 + (4 y_1 - y_2)^2]}{4 (y_2 - 2 y_1)}}.$$

Der Geschwindigkeitscoefficient ist hiernach:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2 g h}} = \sqrt{\frac{x^2 + (4 y_1 - y_2)^2}{8 h (y_2 - 2 y_1)}}.$$

Beispiele. 1) Bei einem Strahle, welcher aus einem gut abgerundeten Mundstücke von 1 Centimeter Weite ohne Contraction ausfloß, wurden folgende Messungsresultate gefunden:

$x = 2{,}480$ Meter,
$y_1 = z_1 - z = 0{,}267 - 0{,}1135 = 0{,}1535$ Meter,
$y_2 = z_2 - z = 0{,}669 - 0{,}1135 = 0{,}5555$ „

und die Druckhöhe $h = 3{,}359$ Meter. Hiernach ist der Geschwindigkeitscoefficient:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}48^2 + 0{,}059^2}{8 \,.\, 3{,}359 \,.\, 0{,}2485}} = \sqrt{\frac{6{,}185}{26{,}872 \,.\, 0{,}2485}} = 0{,}963.$$

Da keine Contraction statt fand, so ist $\alpha = 1$ und daher $\mu = \varphi$. Hiermit stimmen die in der Anmerkung zu §. 405 mitgetheilten Messungsresultate ganz gut überein.

2) Messungen an einem vollständig contrahirten Strahle, welcher durch eine 1 Centimeter weite kreisrunde Mündung in der ebenen dünnen Wand floß, gaben bei der Druckhöhe $h = 3{,}396$ Meter Folgendes:

$x = 2{,}70$ Meter,
$y_1 = z_1 - z = 0{,}2465 - 0{,}1115 = 0{,}1350$ Meter, und
$y_2 = z_2 - z = 0{,}6620 - 0{,}1115 = 0{,}5505$ „

und es folgt hieraus:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}70^2 + 0{,}01^2}{8 \,.\, 3{,}396 \,.\, 0{,}2805}} = \sqrt{\frac{7{,}2901}{27{,}168 \,.\, 0{,}2805}} = 0{,}978.$$

Aus der gemessenen Ausflußmenge berechnete sich aber $\mu = 0{,}617$, daher ist der Contractionscoefficient $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = 0{,}631$, womit auch die Strahlenquerschnittsmessungen gut übereinstimmen.

410 **Rectanguläre Seitenöffnungen.** Die genauesten Versuche über den Ausfluß durch größere rectanguläre Seitenmündungen sind in Metz von Poncelet und Lesbros angestellt worden. Die Weiten dieser Mündungen waren 2, und in einigen Fällen 6 Decimeter und die Höhen derselben sehr verschieden, nämlich 1 Centimeter bis 2 Decimeter. Um eine vollständige Contraction herbeizuführen, wurden zur Herstellung dieser Mündungen 4 Millimeter dicke Messingbleche verwendet. Aus den Ergebnissen dieser Versuche haben diese Experimentatoren mit Hülfe des Interpolirens die am Ende des Paragraphen folgenden Tabellen für die Ausflußcoefficienten berechnet, die man zur Messung oder Berechnung der Ausflußmenge benutzen kann.

Ist b die Breite der Ausflußöffnung KL, Fig. 700, und sind h_1 und h_2 die Wasserstände BG und EL über der untersten und über der obersten horizontalen Kante der Mündung, so hat man nach §. 401 die Ausflußmenge:

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}\right).$$

Führt man aber die Oeffnungshöhe $GL = a = h_1 - h_2$, und die mittlere Druckhöhe $EM = h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ ein, so hat man annähernd:

$$Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) a b \sqrt{2gh},$$

und daher die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = \mu Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) \mu a b \sqrt{2gh}.$$

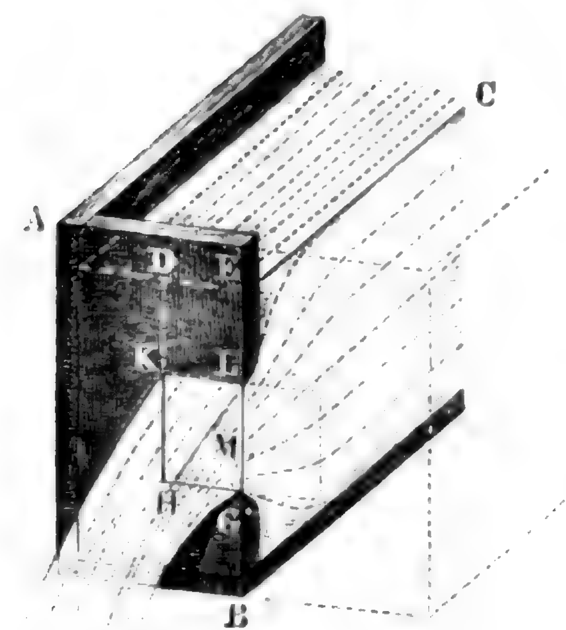


Fig. 700.

Setzt man noch

$$\left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) \mu = \mu_1,$$

so erhält man einfach:

$$Q_1 = \mu_1 a b \sqrt{2gh},$$

und um mit dieser einfachen oder gewöhnlichen Ausflußformel rechnen zu können, sind in den folgenden Tabellen nicht erst die Werthe für μ, sondern die für μ_1 angegeben.

Da das Wasser in der Nähe der Oeffnung in Bewegung ist, so steht es unmittelbar vor der Oeffnung tiefer als in größerer Entfernung vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet; es sind deshalb auch zwei Tabellen zusammengestellt worden, die eine für die in größerer Entfernung von der Mündung und die andere für die unmittelbar an der Mündungswand gemessenen Druckhöhen. Man ersieht übrigens aus beiden Tabellen, daß, wenn auch mit einigen Schwankungen, die Ausflußcoefficienten wachsen, wenn die Oeffnung niedriger und die Druckhöhe kleiner wird.

Haben die Mündungen andere Breiten, so bleibt, so lange man keine anderen Versuche zu Grunde legen kann, nichts übrig, als die Coefficienten dieser Tabellen ebenfalls anzuwenden, um die Ausflußmenge zu berechnen. Daß man hierbei nicht auf große Differenzen stößt, geht aus der Vergleichung der Coefficienten für die Mündungen 0,6 Meter mit denen für die Mündungen 0,2 Meter Breite, bei gleicher Druckhöhe u. s. w. hervor. Sind ferner die Oeffnungen nicht rectangulär, so bestimme man ihre mittlere Breite und mittlere Höhe und führe die diesen Dimensionen entsprechenden Coefficienten

in der Rechnung ein. Endlich ist es immer vorzuziehen, die Druckhöhe in einer größeren Entfernung vor der Mündungswand zu messen und die erste Tabelle anzuwenden, als unmittelbar an der Mündung, wo der Wasserspiegel gekrümmt und weniger ruhig ist als mehr oberhalb der Mündung.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt durch eine rectanguläre Oeffnung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn der Wasserspiegel $1\frac{1}{2}$ Meter über der oberen Kante steht? Hier ist:

$$b = 0{,}2,\ a = 0{,}1,\ h = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{1{,}6 + 1{,}5}{2} = 1{,}55 \text{ Meter},$$

daher die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \sqrt{2g}\ \sqrt{1{,}55} = 0{,}02 \,.\, 4{,}429 \,.\, 1{,}245 = 0{,}1103 \text{ Cubikmeter.}$$

Nun giebt aber die Tabelle I. für $a = 0{,}1$ und $h_2 = 1{,}5$, $\mu_1 = 0{,}611$, daher ist die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}611 \,.\, 0{,}1103 = 0{,}0674 \text{ Cubikmeter.}$$

2) Welche Ausflußmenge entspricht einer rectangulären Mündung in der dünnen Wand von 8 Zoll Breite und 2 Zoll Höhe bei 15 Zoll Wasserhöhe über der oberen Kante? Die theoretische Ausflußmenge ist:

$$Q = \tfrac{2}{3} \,.\, \tfrac{1}{6}\ 7{,}906 \sqrt{\tfrac{4}{3}} = 0{,}8784 \,.\, 1{,}1547 = 1{,}014 \text{ Cubikfuß.}$$

Nun ist aber 2 Zoll ungefähr 0,05 Meter und 15 Zoll ungefähr 0,4 Meter, daher kann man nach der Tabelle für $a = 0{,}05$ und $h_2 = 0{,}4$, den entsprechenden Coefficient $\mu_1 = 0{,}628$ annehmen und das gesuchte Wasserquantum

$$Q_1 = 0{,}628 \,.\, 1{,}014 = 0{,}637 \text{ Cubikfuß setzen.}$$

3) Wenn die Breite 0,25, die Höhe 0,15 und der Wasserstand $h_2 = 0{,}045$ Meter beträgt, so ist

$$Q = 0{,}25 \,.\, 0{,}15 \,.\, 4{,}429 \,.\, \sqrt{0{,}12} = 0{,}166 \,.\, 0{,}3464 = 0{,}0575 \text{ Cubikmeter.}$$

Der Höhe 0,15 entspricht für $h_2 = 0{,}04$ der Mittelwerth:

$$\mu_1 = \frac{0{,}582 + 0{,}603}{2} = 0{,}5925$$

und für $h_2 = 0{,}05$:

$$\mu_1 = \frac{0{,}585 + 0{,}605}{2} = 0{,}595;$$

da nun aber $h_2 = 0{,}045$ gegeben ist, so setzen wir das neue Mittel:

$$\frac{0{,}5925 + 0{,}5950}{2} = 0{,}594$$

als Ausflußcoefficient ein, und erhalten so die gesuchte Wassermenge:

$$Q_1 = 0{,}594 \,.\, 0{,}0575 = 0{,}03415 \text{ Cubikmeter.}$$

Anmerkung. Die Ausflußcoefficienten ändern sich nicht wesentlich, wenn man bei einer rectangulären Mündung die Breite mit der Höhe derselben verwechselt, wie aus folgenden Versuchen des Herrn Lesbros (s. dessen Expériences hydrauliques, Paris 1851) hervorgeht.

Eine Mündung von 0,60 Meter Breite und 0,02 Meter Höhe gab für die Druckhöhe $h = 0{,}30$ bis 1,50 Meter,

$$\mu_1 = \mu = 0{,}635 \text{ bis } 0{,}622,$$

und dagegen, wenn man sie aufs Hohe stellte, also die Breite 0,60 Meter zur Höhe, und die Höhe 0,02 Meter zur Breite machte:

$$\mu_1 = 0{,}610 \text{ bis } 0{,}626, \text{ und}$$

$$\mu = 0{,}638 \text{ bis } 0{,}627.$$

Tabelle I.

Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer dünnen verticalen Wand, nach Poncelet und Lesbros.

(Die Druckhöhen sind oberhalb der Mündung an einer Stelle gemessen, wo das Wasser als stillstehend angesehen werden kann. — Die Zahlenwerthe unterhalb der Sterne (*) sind nur durch Interpolation bestimmt worden.)

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern.	Mündungshöhen in Metern.							
	Mündungsbreite = 0,2 Meter.						Mündungsbreite = 0,6 Meter.	
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	0,20	0,02
0,000	"	"	"	"	"	"	"	"
0,005	"	"	"	"	"	0,705	"	"
0,010	"	"	0,607	0,630	0,660	0,701	"	0,644
0,015	"	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697	"	0,644
0,020	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694	"	0,643
0,030	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688	0,593	0,642
0,040	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683	0,595	0,642
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679	0,597	0,641
0,060	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676	0,599	0,641
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673	0,600	0,640
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670	0,601	0,640
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668	0,601	0,639
0,100	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666	0,602	0,639
0,120	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663	0,603	0,638
0,140	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660	0,603	0,637
0,160	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658	0,604	0,637
0,180	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657	0,605	0,636
0,200	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655	0,605	0,635
0,250	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,606	0,634
0,300	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650	0,607	0,633
0,400	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647	0,607	0,631
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,607	0,630
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642	0,607	0,629
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640	0,607	0,628
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,606	0,628
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635	0,606	0,627
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,605	0,626
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,604	0,626
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,604	0,625
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,603	0,624
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603	0,624
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620*	0,619*	0,615*	0,602	0,623
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602*	0,623
1,700	0,602*	0,610*	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,622
1,800	0,601	0,609	0,615*	0,615	0,614	0,612	0,602	0,621*
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611	0,602	0,621
2,000	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,602	0,620
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601	0,615

Anmerkung. Tabellen dieser Art für das preuß. Fußmaß theilt der „Ingenieur“ Seite 432 mit.

Tabelle II.

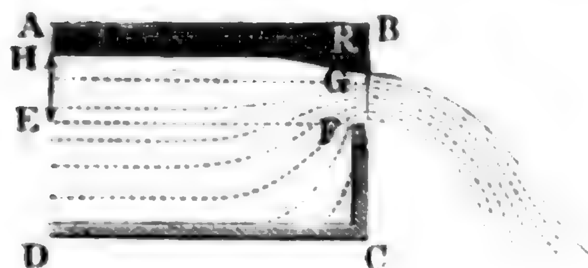
Die Ausflußcoefficienten für den Ausfluß des Wassers durch rectangulare Mündungen in einer verticalen dünnen Wand, nach Poncelet und Lesbros.

(Die Druckhöhen sind unmittelbar an der Mündung gemessen. — Die Werthe außerhalb der Sterne (*) sind nur durch Interpolation bestimmt worden.)

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern.	Mündungshöhen in Metern.						
	Mündungsweite = 0,2 Meter.						Mündungsweite = 0,6 Meter.
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	0,20
0,000	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795	0,586
0,005	0,597	0,630*	0,668*	0,725*	0,750*	0,778*	0,587
0,010	0,595	0,618	0,642	0 687	0,720	0,762	0,589
0,015	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745	0,590
0,020	0,594*	0,614	0,638	0,668	6,697	0,729	0,591
0,030	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708	0,592
0,040	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695	0,594*
0,050	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686	0,595
0,060	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681	0,596
0,070	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677	0,597
0,080	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675	0,598
0,090	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672	0,599
0,100	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669	0,600
0,120	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665	0,601
0,140	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661	0,602
0,160	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659	0,602
0,180	0,598	0,615	0,631	0,634	0,650	0,657	0,603
0,200	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656	0,603
0,250	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,604
0,300	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651	0,605
0,400	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647	0,606
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645	0,607
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643	0,607
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640	0,607
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,607
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635	0,607
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,606
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,606
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,605
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0.625	0,622	0,604
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620*	0,619*	0,615*	0,603
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602
1,700	0,602*	0,610*	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602
1,800	0,601	0,609	0,615*	0,615	0,614	0,612	0,602
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611	0,602
2,000	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611	0,602
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601

Ueberfälle. Fließt das Wasser durch Ueberfälle (franz. déversoirs; engl. overfalls, notches) oder Einschnitte in einer dünnen Wand, wie z. B. FB, Fig. 701, so erleidet der Strahl an drei Seiten eine Contraction, wodurch ebenfalls eine Verminderung der Ausflußmenge herbeigeführt wird. Es ist daher das Ausflußquantum für diese Mündungen: §. 411

Fig. 701.



$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}$$

zu setzen. Hier ist aber die Druckhöhe $EH = h$, oder der Wasserstand über der Ueberfallsschwelle F nicht unmittelbar an der Schwelle, sondern mindestens 3 Fuß vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet, zu messen, weil der Wasserspiegel vor der Mündung eine Senkung erleidet, die nach der Mündung zu immer größer und größer wird, und in der Mündungsebene selbst eine Größe GR von 0,1 bis 0,25 der Druckhöhe FR beträgt, so daß die Dicke FG des Wasserstrahles in dieser Ebene nur 0,9 bis 0,75 der Druckhöhe oder des Wasserstandes beträgt.

Ueber den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle in dünnen Wänden sind von Vielen Versuche angestellt worden, und es bieten deren Resultate eine große Mannigfaltigkeit, aber nicht überall die gewünschte Uebereinstimmung dar. Die Ergebnisse der Versuche von Poncelet und Lesbros an Ueberfällen von 2 und 6 Decimeter Breite enthalten folgende Tabellen.

1. Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 2 Decimeter Breite, nach Poncelet und Lesbros.

Druckhöhe h in Metern.	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,22
Ausfluß-coefficient $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu$.	0,424	0,417	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390	0,385

2. Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 6 Decimeter Breite.

Druckhöhe h in Metern.	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
Ausfluß-coefficient $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu$.	0,412	0,409	0,406	0,403	0,400	0,395	0,391	0,391	0,391	0,390

Bei ungefähren Bestimmungen kann man hiernach $\mu_1 = 0,4$ setzen. Versuche an Ueberfällen mit größeren Breiten gaben Eytelwein im Mittel $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu = 0,42$ und Bidone, $\mu_1 = \frac{2}{3} . 0,62 = 0,41$ u. s. w. Die ausgedehntesten Versuche sind von d'Aubuisson und Castel ausgeführt worden. Aus ihnen folgert d'Aubuisson, daß für Ueberfälle, deren Breite nicht mehr als den dritten Theil der Breite des Canales oder der Wand beträgt, worin sich der Ueberfall befindet, μ im Mittel 0,60, also $\frac{2}{3}\mu = 0,40$ zu setzen sei, daß dagegen für Ueberfälle, welche über die ganze Wand weggehen, oder mit dem Canale einerlei Breite haben, $\mu = 0,665$, also $\mu_1 = 0,444$ angenommen werden müsse, daß endlich bei anderen Verhältnissen zwischen der Ueberfall- und Canalbreite die Ausflußcoefficienten sehr verschieden, und zwar zwischen 0,58 und 0,66 liegend, ausfallen. Die 1853 und 1854 in Hanswyk an Ueberfällen von 3 bis 6 Meter Breite und 0,1 bis 1,0 Meter Druckhöhe angestellten Versuche gaben $\mu = 0,64$ bis 0,65, also $\frac{2}{3}\mu = 0,427$ bis 0,433. S. die Zeitschrift des Archit.- und Ingen.-Vereins für Hannover 1857. Die vom Verfasser angestellten Untersuchungen über den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle bringen weiter unten (§. 417) die Veränderlichkeit dieser Ausflußcoefficienten auf Gesetze zurück.

Beispiele. 1) Ein Ueberfall von 0,25 Meter Breite und 0,15 Meter Wasserstand oder Druckhöhe giebt in der Secunde die Wassermenge:

$$Q = 0,393 . b\, h \sqrt{2\, g\, h} = 0,393 . 4,429 . 0,25 . (0,15)^{3/2} = 0,435 . 0,0581$$
$$= 0,02527 \text{ Cubikmeter.}$$

2) Welche Breite hat man einem Ueberfalle zu geben, der bei einem Wasserstande von 8 Zoll eine Wassermenge von 6 Cubikfuß pro Secunde durchlassen soll? Es ist:

$$b = \frac{Q_1}{\mu_1 \sqrt{2\, g\, h^3}} = \frac{6}{0,4 . 7,906 \sqrt{(\frac{2}{3})^3}} = \frac{6}{3,1624 . 0,5443} = 3,486 \text{ Fuß.}$$

Nimmt man nach Eytelwein $\mu_1 = 0,42$ an, so folgt:

$$b = \frac{6}{3,32 . 0,5443} = 3,320 \text{ Fuß.}$$

§. 412 **Maximum und Minimum der Contraction.** Bei dem Ausflusse des Wassers durch Mündungen in einer ebenen Wand steht die Axe des Strahles rechtwinkelig auf der Wandfläche und es ist deshalb die Größe der Contraction eine mittlere; bildet aber die Axe der Mündung oder des Strahles einen spitzen Winkel mit dem die Mündung enthaltenden Theile der Wand, so fällt die Contraction kleiner aus, und ist der Winkel zwischen dieser Axe und den inneren Randflächen der Oeffnung ein stumpfer, so stellt sich eine noch größere Contraction heraus. Den einen Fall repräsentirt Fig. 702, und den anderen Fig. 703. Jedenfalls hat diese Verschiedenheit der Contraction darin ihren Grund, daß dort die von den Seiten

zufließenden Wasserelemente weniger, hier aber mehr von ihrer Richtung abgelenkt werden, wenn sie durch die Mündung gehen und zu einem Strahle sich vereinigen.

Die Contraction ist ein Minimum, d. h. Null, wenn durch allmälige Zusammenziehung der die Mündung umfassenden Wand das Zufließen von der Seite ganz verhindert wird, und dagegen ein Maximum, wenn die Wand der Richtung des Strahles entgegen gerichtet ist, so daß gewisse Wasserelemente sich um 180° wenden müssen, um in die Mündung zu gelangen. Beide

Fig. 702.

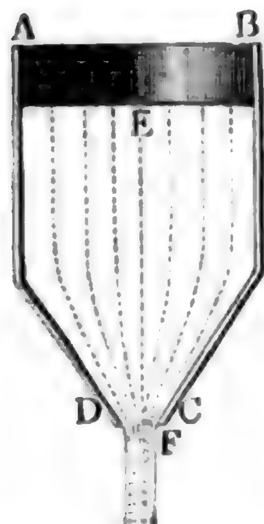


Fig. 703.

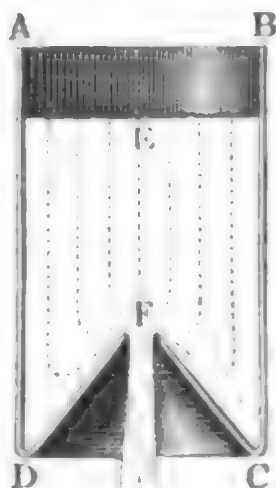


Fig. 704.

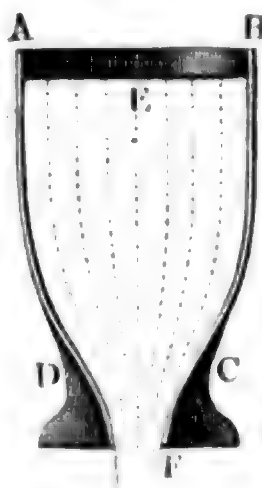
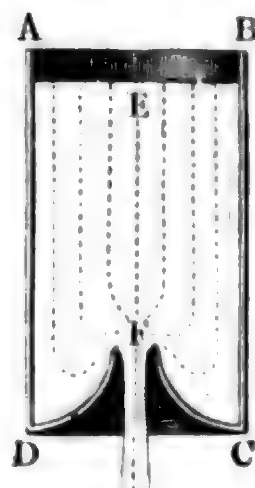


Fig. 705.



Fälle sind in den Figuren 704 und 705 abgebildet. In dem ersten Falle ist der Ausflußcoefficient beinahe 1, nämlich 0,96 bis 0,98, und im zweiten hat er sich bei den Messungen von Borda, Bidone und von dem Verfasser im Mittel = 0,53 herausgestellt.

In der Praxis kommen, durch convergente Wände herbeigeführt, Veränderungen der Ausflußcoefficienten sehr oft vor, namentlich tritt der Fall bei Schützen ein, wenn diese gegen den Horizont geneigt sind, wie z. B. Fig. 706 vor Augen führt. Poncelet fand für eine derartige Schutzöffnung den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,80$, wenn das Schutzbret 45° geneigt war,

Fig. 706.

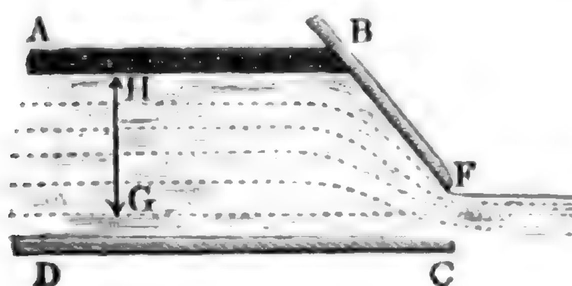
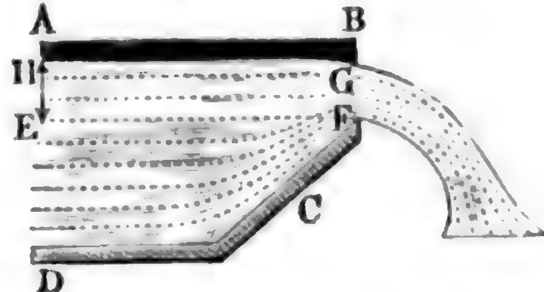


Fig. 707.



und dagegen μ nur $= 0,74$ bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad, d. h. bei einer Böschung von $\frac{1}{2}$. Für derartige Ueberfälle, Fig. 707, wo ebenfalls wie bei der Poncelet'schen Schütze nur an einer Seite Contraction eintritt, fand der Verfasser $\mu = 0,70$, also $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu = 0,467$ bei einer Neigung von 45°; und $\mu = 0,67$, also $\mu_1 = 0,447$, bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad.

Nach M. Boileau (s. dessen Traité de la mesure des eaux courants) läßt sich für einen Ueberfall, welcher aufwärts und zwar so geneigt ist, daß das Verhältniß seiner Verticalprojection zur Horizontalprojection $= 3$, also der Neigungswinkel $71\frac{1}{2}$ Grad beträgt, der Ausflußcoefficient $= 0,973$mal dem Ausflußcoefficienten für einen senkrechten Ueberfall setzen. Ferner folgert Boileau aus seinen Versuchen für senkrechte, gegen den Strom schräg gestellte Ueberfälle, daß bei der Schräge von 45 Grad der Ausflußcoefficient 0,942, und bei der von 65 Grad gar nur 0,911 von dem Werthe des Ausflußcoefficienten des normalen Ueberfalles zu setzen ist, wobei natürlich die Länge der ganzen Ueberfallkante als Mündungslänge angesehen wird.

Beispiel. Wenn das unter dem Winkel von 50 Grad geneigte Schutzbrett, welches quer über ein $2\frac{1}{4}$ Fuß breites Gerinne weggeht, $\frac{1}{2}$ Fuß hoch gezogen wird, und sich hierauf der Wasserspiegel um 4 Fuß über den Gerinnboden stellt, so läßt sich die Oeffnungshöhe:

$$a = \frac{1}{2} \sin. 50^0 = 0,3830 \text{ Fuß},$$

die Druckhöhe:

$$h = 4 - \frac{1}{2} . 0,3830 = 3,8085 \text{ Fuß},$$

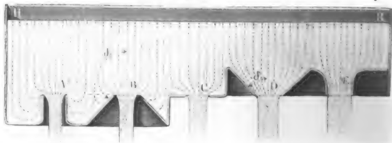
und der Ausflußcoefficient $\mu = 0,78$, daher die Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0,78 . 2,25 . 0,3830 . 7,906 \sqrt{3,8085} = 10,36 \text{ Cubikfuß}$$

setzen.

413 **Contractionsscala.** Die Contraction eines Wasserstrahles ist um so größer, je mehr die Richtung des von der Seite zuströmenden Wassers von der Bewegungsrichtung des Strahles abweicht. Bei dem Ausflusse durch die Mündung C, Fig. 708, in der ebenen dünnen Wand beträgt der Winkel δ, um welchen die Bewegungsrichtung der von

Fig. 708.



der Seite zuströmenden Wasserelemente von der Axen- oder Bewegungsrichtung des Strahles abweicht, den Rechtwinkel $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, bei der Mündung A, welche von einer dünnen Röhrenwand gebildet wird, mißt dieser Winkel δ, 2 Rechte (π); bei dem Ausflusse durch ein conisch divergentes Mundstück B ist δ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, ferner bei dem Ausflusse durch ein conisch convergentes Ansatz-

stück D ist δ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und bei dem cylindrischen Mundstücke E mit innerer Abrundung ist er $= 0$ Grad zu setzen.

Um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchem die Contraction mit dem Winkel δ abnimmt, hat der Verfasser an einer größeren Anzahl von Mundstücken von 2 Centimeter Mündungsweite unter verschiedenem Drucke (von 1 bis 10 Fuß) eine ganze Reihe von Versuchen angestellt, und die Ergebnisse derselben in folgender Tabelle zusammengestellt:

δ	180°	157½°	135°	112½°	90°	67½°	45°	22½°	11¼°	5¾°	0°
μ	0,541	0,546	0,577	0,606	0,632	0,684	0,753	0,882	0,924	0,949	0,966

Diese Tabelle giebt allerdings nur die Ausflußcoefficienten (μ) an, welche den verschiedenen Abweichungswinkeln δ zukommen; die Contractionscoefficienten sind noch ein bis zwei Procent größer, da bei jedem Ausflusse auch ein kleiner Verlust an Geschwindigkeit eintritt. Um bei dem Eintritte des Wassers in die Ansatzstücke D und E keinen Verlust an lebendiger Kraft zu erleiden, wurden diese Stücke bei der Einmündung abgerundet. Die Reibung, welche das Wasser bei der Bewegung an den Wänden dieser Mundstücke zu überwinden hat, wird im folgenden Capitel bestimmt werden.

Anmerkung. Nach den Berechnungen des Herrn Prof. Zeuner (s. „Civilingenieur", Band II., Seite 55) läßt sich, den angegebenen Versuchen zufolge,

$$\mu_\delta = \mu_{\frac{1}{2}\pi} \left(1 + 0{,}33214\, (\cos. \delta)^3 + 0{,}16672\, (\cos. \delta)^4\right)$$

setzen, wenn $\mu_{\frac{1}{2}\pi}$ den Ausflußcoefficienten für die Mündung in der dünnen ebenen Wand bezeichnet, wo die größte Ablenkung der Wasserfäden beim Ausfluß $= \frac{1}{2}\pi = 90^0$ ist, und dagegen μ_δ den Ausflußcoefficienten für eine Mündung in der conischen dünnen Wand ausdrückt, wo die größte Ablenkung der Wasserfäden beim Eintritt in die Mündung $= \delta$ mißt.

Partielle Contraction. Wir haben seither nur den Fall kennen §. 4 gelernt, wo das Wasser von allen Seiten her der Oeffnung zufließt und einen ringsherum contrahirten Strahl bildet, und müssen nun noch auch die Fälle, wenn das Wasser nur von einer oder einigen Seiten her gegen die Oeffnung strömt und deshalb einen nur theilweise contrahirten Strahl hervorbringt, in Untersuchung ziehen. Um diese Contractionsverhältnisse von einander zu unterscheiden, wollen wir den Fall, wenn der Strahl auf allen Seiten contrahirt, die vollständige, und den Fall, wenn der Strahl nur auf einen Theil seines Umfanges zusammengezogen ist, die unvollständige oder partielle Contraction (franz. contraction incomplète; engl. incomplete contraction) nennen. Die unvollständige Contraction wird

herbeigeführt, wenn eine Mündung in der ebenen dünnen Wand durch andere Wände in der Richtung des Strahles auf einer oder mehreren Seiten eingefaßt ist. In Fig. 709 sind vier gleich große Mündungen *a*, *b*, *c*, *d* im Boden *AC* eines Gefäßes abgebildet. Die Contraction beim Ausflusse durch die Mündung *a* in der Mitte des Bodens ist vollständig, weil bei ihr das Wasser von allen Seiten zuströmen kann; die Contraction beim Ausflusse durch *b*, *c* und *d* ist aber unvollständig, weil bei diesen das Wasser nur von drei, zwei oder einer Seite zuströmen kann. Ebenso, wenn eine rectanguläre Seitenöffnung bis zum Boden des Gefäßes geht, so ist die Contraction partiell, weil dann dieselbe auf der Seite im Boden wegfällt; wenn ferner die Schutzöffnung bis zum Boden und bis an die Seitenwände des Gerinnes reicht, so bleibt nur noch an einer Seite Contraction übrig.

Die partielle Contraction macht sich auf zweierlei Weise bemerklich. Erstens giebt sie dem Strahl eine schiefe Richtung, und zweitens bewirkt sie einen stärkeren Ausfluß.

Fig. 709.

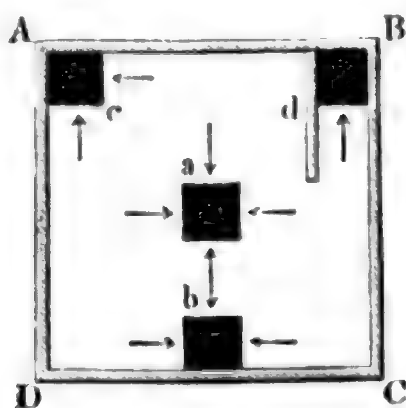
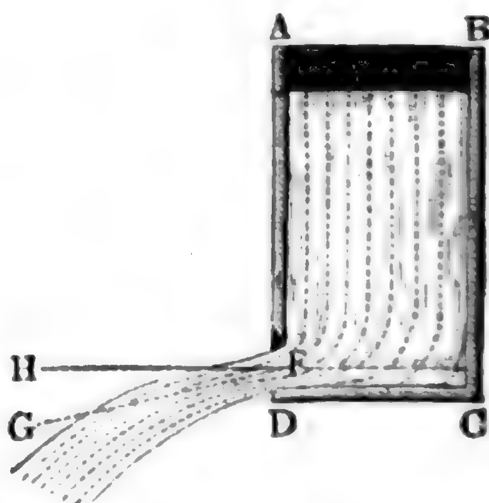


Fig. 710.



Reicht z. B. die Seitenöffnung *F*, Fig. 710, bis an den Boden *CD*, so daß daselbst eine Contraction nicht eintreten kann, so weicht die Axe *FG* des Strahles um einen Winkel *HFG* von ungefähr 9 Grad von der Normalen *FH* der Mündungsebene ab. Viel größer stellt sich aber noch die Schiefe des Strahles heraus, wenn zwei benachbarte Seiten der Mündung eingefaßt sind. Ist die Mündung an zwei gegenüber liegenden Seiten eingefaßt, und die Contraction an denselben aufgehoben, so tritt natürlich eine solche Abweichung nicht ein, wohl aber nimmt der Strahl auf den nicht eingefaßten Seiten in einiger Entfernung außerhalb der Mündung noch mehr Ausbreitung an, als wenn diese Einfassung nicht vorhanden wäre. Wenn auch durch die partielle Contraction eine größere Ausflußmenge erzielt wird, so muß man sie doch in der Regel zu vermeiden suchen, weil durch sie der Strahl eine abweichende Richtung und eine große Ausbreitung erleidet.

Versuche über den Ausfluß des Wassers bei partieller Contraction sind von Bidone und von dem Verfasser angestellt worden. Sie haben gezeigt, daß die Ausflußcoefficienten mit dem Verhältnisse des eingefaßten Theiles

zum ganzen Umfange fast gleichmäßig zunehmen; doch ist leicht zu ermessen, daß diese Beziehung eine andere wird, wenn der Umfang beinahe oder ganz eingefaßt und die Contraction beinahe oder ganz aufgehoben ist. Setzen wir das Verhältniß der Einfassung zum ganzen Umfange, $= n$, und verstehen wir unter $\varkappa$ eine Erfahrungszahl, so können wir, wenn auch nur annähernd, das Verhältniß des entsprechenden Ausflußcoefficienten μ_n der partiellen Contraction zum Ausflußcoefficienten μ_0 bei vollständiger Contraction:

$$\frac{\mu_n}{\mu_0} = 1 + \varkappa n, \text{ und folglich } \mu_n = (1 + \varkappa n)\mu_0 \text{ setzen.}$$

Die Versuche Bidone's geben für kleine kreisförmige Mündungen $\varkappa = 0,128$ und für quadratische, $\varkappa = 0,152$; die des Verfassers haben für kleine rectanguläre Mündungen, $\varkappa = 0,134$, für größere (Ponceletmündungen), bei 0,2 Meter Breite und 0,1 Meter Höhe aber, $\varkappa = 0,157$ geliefert (s. die Zeitschrift: „der Ingenieur", Bd. 2). In der Anwendung kommen fast nur rectanguläre Mündungen mit Einfassungen vor; wir werden für sie den mittleren Werth $\varkappa = 0,155$ annehmen und hiernach

$$\mu_n = (1 + 0,155 \,.\, n)\mu_0$$

setzen. Bei einer rectangulären Seitenöffnung von der Höhe a und Breite b ist $n = \frac{b}{2(a+b)}$, wenn die Contraction an einer Seite b wegfällt, wenn z. B. diese Seite in der Ebene des Bodens liegt, ferner $n = {}^1/_2$, wenn eine Seite a und eine Seite b eingefaßt sind, und $n = \frac{2a+b}{2(a+b)}$, wenn auf einer Seite b und auf beiden Seiten a die Contraction verhindert wird, wenn z. B. die Mündung die ganze Breite des Reservoirs einnimmt und bis zur Bodenebene reicht.

Beispiel. Welches Wasserquantum liefert der Ausfluß des Wassers durch eine 3 Fuß breite und 10 Zoll hohe verticale Schutzöffnung, bei einem Drucke von $1^1/_2$ Fuß über der oberen Mündungsseite, wenn die untere Mündungsseite in den Gerinnboden fällt, und daher die Contraction am Boden wegfällt. Die theoretische Ausflußmenge ist:

$$Q = {}^{10}/_{12} \,.\, 3 \,.\, 7,906 \sqrt{1,5 + {}^5/_{12}} = {}^5/_2 \,.\, 7,906 \sqrt{1,9166} = 27,35 \text{ Cubikfuß.}$$

Nach der Poncelet'schen Tabelle ist bei vollständiger Contraction, $\mu = 0,604$ zu setzen, nun hat man aber:

$$n = \frac{3}{2\,(3 + {}^{10}/_{12})} = \frac{9}{18+5} = {}^9/_{23},$$

daher ist für den vorliegenden Fall der partiellen Contraction:

$$\mu_n = (1 + 0,155 \,.\, {}^9/_{23}) \,.\, 0,604 = 1,060 \,.\, 0,604 = 0,640$$

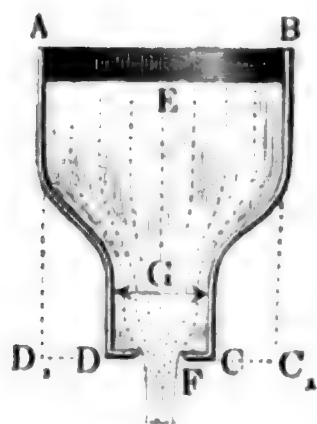
und das effective Ausflußquantum:

$$Q_1 = 0,640\ Q = 0,640 \,.\, 27,35 = 17,50 \text{ Cubikfuß.}$$

Unvollkommene Contraction. Die Contraction des Wasserstrahles §. 416 ist auch noch davon abhängig, ob das Wasser vor der Mündung ziem-

lich in Ruhe steht, oder ob es mit einer gewissen Geschwindigkeit vor derselben ankommt; je schneller das Wasser der Ausflußöffnung zuströmt, je weniger ist auch der Strahl zusammengezogen, desto größer fällt auch die Ausflußmenge aus. Die oben angegebenen und untersuchten Contractions- und Ausflußverhältnisse beziehen sich nur auf den Fall, wenn sich die Mündung in einer großen Wand befindet, und nun angenommen werden kann, daß das Wasser nur mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit der Mündung zufließt; wir müssen daher auch die Contractions- und Ausflußverhältnisse kennen lernen, wenn der Mündungsquerschnitt nicht viel kleiner ist als der Querschnitt des zufließenden Wassers, wenn folglich das Wasser schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit an der Mündung ankommt. Um diese beiden Fälle von einander zu unterscheiden, wollen wir die Contraction bei stillstehendem Oberwasser die vollkommene und die bei bewegtem Oberwasser die unvollkommene Contraction (franz. contraction imparfaite; engl. imperfect contraction) nennen. Unvollkommen ist z. B. die Contraction beim Ausfluß aus dem Gefäße $A\,C$, Fig. 711, weil der Querschnitt F der Mündung nicht viel kleiner ist als der Querschnitt G des ankommenden Wassers oder der Inhalt der Wand CD, in welcher sich diese Mündung befindet. Hätte dagegen das Gefäß die Form $A\,B\,C_1\,D_1$, wäre also der Inhalt der Bodenfläche $C_1\,D_1$ viel größer als der Mündungsquerschnitt F, so würde der Ausfluß mit vollkommener Contraction vor sich gehen. Uebrigens unterscheidet sich der unvollkommen contrahirte Wasserstrahl nicht bloß durch seine größere Stärke, sondern auch dadurch von dem vollkommen contrahirten Wasserstrahle, daß er nicht so durchsichtig und krystallähnlich ist wie dieser.

Fig. 711.



Setzt man das Verhältniß zwischen den Flächenräumen der Mündung F und der Mündungswand G, also $\frac{F}{G}$, $= n$, den Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction, $= \mu_0$ und den bei unvollkommener Contraction $= \mu_n$, so kann man mit großer Genauigkeit, den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen und Rechnungen zufolge, setzen:

1) für kreisförmige Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0\,[1 + 0{,}04564\,(14{,}821^n - 1)],\text{ und}$$

2) für rectanguläre Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0\,[1 + 0{,}0760\,(9^n - 1)]\ ^{*)}.$$

Zur Erleichterung der Rechnung in Fällen der Anwendung sind die Cor-

*) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers u. s. w. Leipzig 1843.

rectionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ der Ausflußcoefficienten wegen Unvollkommenheit der Contraction in folgenden kleinen Tabellen zusammengestellt.

Tabelle I.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kreisrunde Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092	0,112	0,134

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,161	0,189	0,223	0,260	0,303	0,351	0,408	0,471	0,546	0,631

Tabelle II.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107	0,128	0,152

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,178	0,208	0,241	0,278	0,319	0,365	0,416	0,473	0,537	0,608

Bei diesen Tabellen stehen oben verschiedene Werthe von den Querschnittsverhältnissen $n = \frac{F}{G}$, und unmittelbar darunter die entsprechenden Zusätze der Ausflußcoefficienten wegen der Unvollkommenheit der Contraction. Z. B. für das Querschnittsverhältniß $n = 0,35$, d. i. für den Fall, wenn der Inhalt der Mündung 35 Hundertel vom Inhalte der ganzen Mündungswand ist, hat man bei kreisförmigen Mündungen

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,075,$$

und bei rectangulären Mündungen $= 0,088$; es ist also der Ausflußcoef-

ficient bei vollkommener Contraction im ersten Falle um 75 Tausendtel und im zweiten um 88 Tausendtel größer zu machen, um den entsprechenden Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction zu erhalten. Wäre der Ausflußcoefficient $\mu_0 = 0{,}615$, so hätte man daher im ersten Falle:

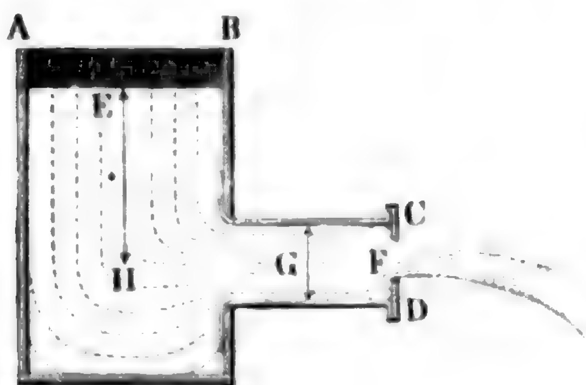
$$\mu_{0.35} = 1{,}075 \,.\, 0{,}615 = 0{,}661,$$

und im zweiten Falle:

$$\mu_{0.35} = 1{,}088 \,.\, 0{,}615 = 0{,}669.$$

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt die rectanguläre $1\frac{1}{4}$ Fuß breite und $\frac{1}{2}$ Fuß hohe Seitenmündung F, wenn dieselbe in einer rectangulären Wand CD, Fig. 712, von 2 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe ausgeschnitten ist, und die Druckhöhe $EH = h$ im stillstehenden Wasser 2 Fuß beträgt? Die theoretische Wassermenge ist:

Fig. 712.



$$Q = 1{,}25 \,.\, 0{,}5 \,.\, 7{,}906 \sqrt{2}$$
$$= 4{,}941 \,.\, 1{,}414 = 6{,}987 \text{ Cubikfuß},$$

und der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction ist nach Poncelet:

$$\mu_0 = 0{,}610;$$

nun ist aber das Querschnittsverhältniß

$$n = \frac{F}{G} = \frac{1{,}25 \,.\, 0{,}5}{2 \,.\, 1} = 0{,}312,$$

und für $n = 0{,}312$, nach Tabelle II., Seite 807,

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}071 + {}^{12}/_{50}\,(0{,}088 - 0{,}071) = 0{,}071 + 0{,}004 = 0{,}075$$

zu setzen, daher folgt der Ausflußcoefficient für den vorliegenden Fall:

$$\mu_{0{,}312} = 1{,}075 \,.\, \mu_0 = 1{,}075 \,.\, 0{,}610 = 0{,}6557$$

und die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}6557 \,.\, Q = 0{,}6557 \,.\, 6{,}987 = 4{,}581 \text{ Cubikfuß}.$$

416 **Ausfluss des bewegten Wassers.** Wir haben seither angenommen, daß die Druckhöhe im stillstehenden Wasser gemessen worden ist, und müssen nun noch den Fall abhandeln, wenn nur der Wasserstand des bewegten, der Mündung mit einer gewissen Geschwindigkeit zufließenden Wassers gemessen werden kann. Setzen wir eine rectanguläre Seitenöffnung voraus, bezeichnen wir deren Breite durch b und die Wasserstände in Hinsicht auf die beiden horizontalen Kanten durch h_1 und h_2, die der Geschwindigkeit c des zufließenden Wassers entsprechende Höhe aber durch k, so haben wir die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = {}^2/_3\, b \sqrt{2g}\, [(h_1 + k)^{3/2} - (h_2 + k)^{3/2}].$$

Diese Formel läßt sich aber nicht unmittelbar anwenden zur Bestimmung der Wassermenge, weil die Geschwindigkeitshöhe

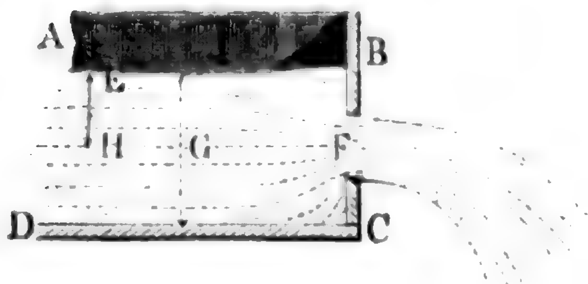
$$k = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{G}\right)^2$$

wieder von Q abhängt, und die weitere Umformung auf eine complicirte höhere Gleichung führt; es ist daher weit einfacher, wenn man die effective Wassermenge

$$Q_1 = \mu_1\, a\, b \sqrt{2 g h}$$

setzt, und unter μ_1 nicht den bloßen Ausfluß-, sondern einen vorzüglich vom Querschnittsverhältnisse abhängigen Coefficienten versteht. Am häufigsten kommt dieser Fall vor, wenn es darauf abgesehen ist, das in Gerinnen und Canälen fließende Wasser zu messen, weil es hier nur selten möglich ist, das Wasser durch eine die Ausflußöffnung enthaltende Querwand BC, Fig 713, so hoch aufzustauen, daß die Mündungsfläche F nur einen kleinen Theil von dem Querschnitt des zufließenden Wasserstromes ausmacht und daher die Geschwindigkeit des letzteren sehr klein gegen die mittlere Geschwindigkeit ausfällt.

Fig. 713.



Aus den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen mit den Poncelet'schen Mündungen, wobei die Druckhöhe ein Meter oberhalb der Mündungsebene gemessen wurde, hat sich ziemlich genau

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}641 \left(\frac{F}{G}\right)^2 = 0{,}641\,.\,n^2$$

ergeben, wobei $n = \frac{F}{G}$ das Querschnittsverhältniß, welches jedoch nicht viel über $\frac{1}{2}$ sein soll, ferner μ_0 den aus der Poncelet'schen Tabelle genommenen Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction, und μ_n den derselben Mündung im vorliegenden Falle entsprechenden Ausflußcoefficienten bezeichnet. Ist b die Breite, a die Höhe der Mündung, b_1 die Breite und a_1 die Höhe des Wasserstromes und bezeichnet h die Tiefe der oberen Mündungsseite unter dem Wasserspiegel, so hat man hiernach die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = \mu_0\,.\,a\,b \left[1 + 0{,}641 \left(\frac{a\,b}{a_1\,b_1}\right)^2\right] \sqrt{2 g \left(h + \frac{a}{2}\right)}.$$

Folgende Tabelle dient zur Abkürzung der Rechnung in Fällen der Anwendung.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,002	0,006	0,014	0,026	0,040	0,058	0,079	0,103	0,130	0,160

Beispiel. Um das durch ein 3 Fuß breites Gerinne zugeführte Wasserquantum zu finden hat man eine Spundwand mit einer 2 Fuß weiten und 1 Fuß hohen

rectangulären Mündung eingesetzt, und dadurch das Wasser endlich so aufgestaut, daß es beim Eintritt des Beharrungszustandes um eine Höhe von $2\frac{1}{4}$ Fuß über der Sohle und $1\frac{3}{4}$ Fuß über der unteren Kante der Mündung stand. Die entsprechende theoretische Wassermenge ist:

$$Q = a\, b\, \sqrt{2 g h} = 1 . 2 . 7{,}906 \sqrt{1{,}25} = 15{,}812 . 1{,}118$$
$$= 17{,}68 \text{ Cubikfuß},$$

der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction läßt sich 0,602 setzen, und das Querschnittsverhältniß:

$$n = \frac{F}{G} = \frac{a\, b}{a\, b_1} = \frac{1 . 2}{2{,}25 . 3} = 0{,}296,$$

daher folgt der Ausflußcoefficient für das vorstehende Ausflußverhältniß

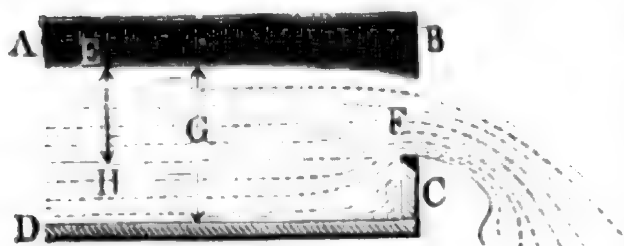
$$\mu_n = (1 + 0{,}641 . 0{,}296^2)\, \mu_0 = 1{,}056 . 0{,}602 = 0{,}6357$$

und das effective Ausflußquantum

$$Q_1 = 17{,}68 . 0{,}6357 = 11{,}24 \text{ Cubikfuß}.$$

417 Die unvollkommene Contraction kommt auch beim Ausflusse durch Ueberfälle, wie Fig. 714, vor, wenn der Querschnitt F des über der Schwelle bei C wegfließenden Wassers ein ansehnlicher Theil vom Querschnittte G des zufließenden Wassers ist. Die Ueberfälle können aber entweder nur einen Theil der Breite des Reservoirs oder Canales einnehmen, oder sie können über die ganze Breite des Gerinnes weggehen. In dem letzten Falle ist auch die Contraction an den Seiten der Mündung Null, und es fließt also aus diesem Grunde mehr Wasser durch, als bei den Ueberfällen der ersten Art. Auch über diese Ausflußverhältnisse hat der Verfasser Versuche angestellt, und aus den Ergebnissen derselben Formeln abgeleitet, wodurch sich mit ziemlicher Sicherheit mit Hülfe des Querschnittsverhältnisses $n = \frac{F}{G}$ der entsprechende Ausflußcoefficient berechnen läßt.

Fig. 714.



Ist h die Druckhöhe EH über der Ueberfallschwelle, a_1 die ganze Wasserhöhe, b die Breite des Ueberfalles und b_1 die des zufließenden Wassers, so haben wir hier:

$$n = \frac{F}{G} = \frac{h\, b}{a_1\, b_1},$$

und 1) für die Poncelet'schen Ueberfälle:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 1{,}718 \left(\frac{F}{G}\right)^4 = 1{,}718 . n^4,$$

dagegen 2) für die die ganze Gerinnbreite einnehmenden Ueberfälle:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}041 + 0{,}3693\, n^2;$$

es ist daher im ersten Falle die Ausflußmenge:

$$Q_1 = {}^2/_3 \mu_0 . b \left[1 + 1{,}718 \left(\frac{h b}{a_1 b_1}\right)^4\right] \sqrt{2 g h^3},$$

und im zweiten Falle:

$$Q_1 = {}^2/_3 \mu_0 . b \left[1{,}041 + 0{,}3693 \left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right] \sqrt{2 g h^3},$$

wo h den etwa 1 Meter vor dem Ueberfall gemessenen Wasserstand EH über der Ueberfallschwelle F bezeichnet.

In folgenden Tabellen sind die Correctionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ für die einfachsten Werthe von n zusammengestellt.

Tabelle I.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für die Poncelet'schen Ueberfälle.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,000	0,000	0,001	0,003	0,007	0,014	0,026	0,044	0,070	0,107

Tabelle II.

Correctionen für Ueberfälle über die ganze Wand, oder ohne Seitencontraction.

n	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,041	0,042	0,045	0,049	0,056	0,064	0,074	0,086	0,100	0,116	0,133

Beispiel. Um das in einem 5 Fuß breiten Canale fortgeführte Wasserquantum zu bestimmen, hat man eine Spundwand mit einer nach außen abgeschrägten Kante eingezogen, und das Wasser über diese wegfließen lassen. Nachdem das Steigen des Oberwassers aufgehört hatte, ergab sich der Wasserstand über dem Gerinnboden $3\frac{1}{2}$ Fuß, und über der Schwelle $1\frac{1}{2}$ Fuß; es war daher die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = {}^2/_3 . 5 . 7{,}906 . \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = 48{,}41 \text{ Cubikfuß.}$$

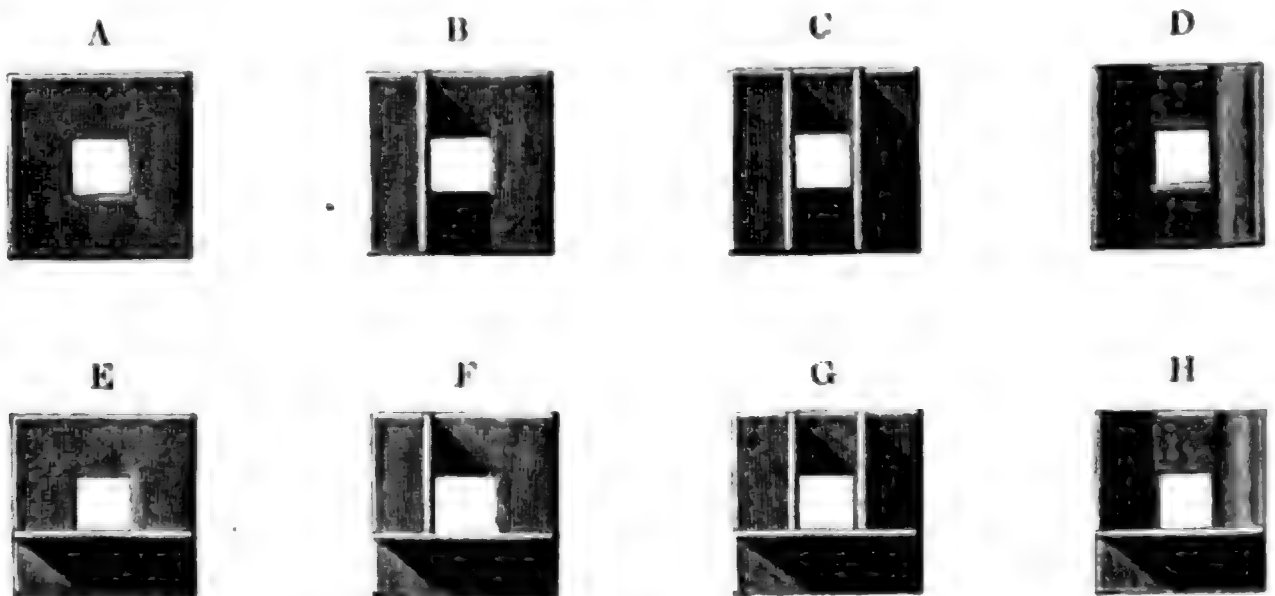
Der Ausflußcoefficient fällt hier, da $\frac{h}{a_1} = \frac{1{,}5}{3{,}5} = {}^3/_7$ und $\mu_0 = 0{,}577$ ist,

$\mu_{3/7} = [1{,}041 + 0{,}3693 . ({}^3/_7)^2] . 0{,}577 = 1{,}110 . 0{,}577 = 0{,}64$ aus,
daher die effective Wassermenge:

$Q_1 = 0{,}64 . Q = 0{,}64 . 48{,}41 = 31$ Cubikfuß.

418 **Versuche von Lesbros.** Eine große Anzahl von Versuchen über den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in der dünnen Wand mit verschiedenartigen inneren und äußeren Einfassungswänden (bei partieller und unvollkommener Contraction des Wasserstrahles) sind von dem Herrn Lesbros (s. dessen Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau) ausgeführt worden. Wir theilen hiervon im Folgenden nur die Hauptresultate der an einer rectangulären Mündung von 2 Decimeter Weite angestellten Versuche mit. Die so verschieden eingefaßten Mündungen sind in der Fig. 715 durch die Buchstaben *A*, *B*, *C* u. s. w. von einander unterschieden, und zwar bezeichnet:

Fig. 715



A eine gewöhnliche Mündung ohne alle Einfassung (wie in §. 410);

B eine solche Mündung innen an einer Seite mit einer verticalen Wand bekleidet, welche 2 Centimeter von der einen Seitenkante der Mündung absteht, und rechtwinkelig gegen die Mündungsebene gerichtet ist;

C die erste Mündung auf jeder Seite mit einer solchen Wand eingefaßt:

D die Mündung *A* innen auf beiden Seiten mit verticalen Wänden eingefaßt, welche unter einem Winkel von 90 Grad gegen einander convergiren, und hierbei unter einem Winkel von 45 Grad, und zwar in dem Abstande = 2 Centimeter von den Seitenkanten der Mündung, an die Mündungsebene anstoßen;

E die Mündung *A* mit einer horizontalen Wand, welche quer über dem Ausflußreservoir weggeht und genau bis an die untere Mündungskante reicht;

F die Mündung *B*,

G die Mündung *C*, und

H die Mündung *D* mit einer horizontalen Wand wie in *E*, welche die Contraction an der unteren Mündungskante ganz aufhebt.

I.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für den freien Ausfluß durch die Mündungen *A*, *B*, *C* u. s. w.

Druckhöhe über der oberen Mündungskante, oberhalb der Mündungsebene gemessen.	Mündungshöhe.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:							
		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Meter.	Meter.								
0,020	0,200	0,572	0,587	—	0,589	0,599	—	—	—
0,050	0,200	0,585	0,593	0,631	0,595	0,608	0,622	—	0,636
0,100	0,200	0,592	0,600	0,631	0,601	0,615	0,628	—	0,639
0,200	0,200	0,598	0,606	0,632	0,607	0,621	0,633	0,708	0,643
0,500	0,200	0,603	0,610	0,631	0,611	0,623	0,636	0,680	0,644
1,000	0,200	0,605	0,611	0,628	0,612	0,624	0,637	0,676	0,642
1,500	0,200	0,602	0,611	0,627	0,611	0,624	0,637	0,672	0,641
2,000	0,200	0,601	0,610	0,626	0,611	0,619	0,636	0,668	0,640
3,000	0,200	0,601	0,609	0,624	0,610	0,614	0,634	0,665	0,638
0,020	0,050	0,616	0,627	0,647	0,631	0,664	0,663	—	0,678
0,050	0,050	0,625	0,630	0,646	0,632	0,667	0,669	0,690	0,677
0,100	0,050	0,630	0,633	0,645	0,633	0,669	0,674	0,688	0,677
0,200	0,050	0,631	0,635	0,642	0,633	0,670	0,676	0,687	0,675
0,500	0,050	0,628	0,634	0,637	0,632	0,668	0,676	0,682	0,671
1,000	0,050	0,625	0,628	0,635	0,627	0,666	0,672	0,680	0,670
1,500	0,050	0,619	0,622	0,634	0,621	0,665	0,670	0,678	0,670
2,000	0,050	0,613	0,616	0,634	0,615	0,664	0,670	0,674	0,669
3,000	0,050	0,606	0,609	0,632	0,608	0,662	0,669	0,673	0,668

II.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für den Ausfluß durch die Mündungen *A*, *B*, *C* u. s. w. mit äußeren Ansatzgerinnen.

Die Gerinne schlossen sich genau an die Mündung an, die dadurch ihre Abschrägungen an den Seiten und am Boden verloren. Sie waren entweder horizontal und 3 Meter lang oder, und zwar bei den mit * bezeichneten Versuchen, um $^1/_{10}$ ihrer nur 2,5 Meter betragenden Länge geneigt.

Druckhöhe über der oberen Mündungskante, oberhalb der Mündungsebene gemessen.	Mündungshöhe.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:									
		A	*B*	*C*	*E*	*E**	*F*	*F**	*G*	*G**	*H*
Meter.	Meter.										
0,020	0,200	0,480	0,489	0,496	0,480	0,527	—	—	—	—	0,488
0,050	0,200	0,511	0,517	0,531	0,510	0,553	0,509	0,546	0,528	—	0,520
0,100	0,200	0,542	0,545	0,563	0,538	0,574	0,534	0,569	0,560	0,593	0,552
0,200	0,200	0,574	0,576	0,591	0,566	0,592	0,562	0,589	0,589	0,617	0,582
0,500	0,200	0,599	0,602	0,621	0,592	0,607	0,591	0,608	0,591	0,632	0,613
1,000	0,200	0,601	0,609	0,628	0,600	0,610	0,601	0,615	0,601	0,638	0,625
1,500	0,200	0,601	0,610	0,627	0,602	0,610	0,604	0,617	0,604	0,641	0,624
2,000	0,200	0,601	0,610	0,626	0,602	0,609	0,604	0,617	0,604	0,642	0,624
3,000	0,200	0,601	0,609	0,624	0,601	0,608	0,602	0,616	0,602	0,641	0,622
0,020	0,050	0,488	0,555	0,557	0,487	0,585	0,483	0,579	0,512	—	0,494
0,050	0,050	0,577	0,600	0,603	0,571	0,614	0,570	0,611	0,582	0,625	0,577
0,100	0,050	0,624	0,625	0,628	0,605	0,632	0,609	0,628	0,621	0,639	0,616
0,200	0,050	0,631	0,633	0,637	0,617	0,645	0,623	0,643	0,637	0,649	0,629
0,500	0,050	0,625	0,630	0,635	0,626	0,652	0,630	0,650	0,647	0,656	0,636
1,000	0,050	0,624	0,627	0,635	0,628	0,651	0,633	0,651	0,649	0,656	0,638
1,500	0,050	0,619	0,622	0,634	0,627	0,650	0,632	0,651	0,647	0,656	0,637
2,000	0,050	0,613	0,616	0,634	0,623	0,650	0,631	0,651	0,644	0,656	0,635
3,000	0,050	0,606	0,609	0,632	0,618	0,649	0,628	0,651	0,639	0,656	0,632

Beispiel. Welches Ausflußquantum giebt eine rectanguläre Mündung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn die untere Kante derselben 0,35 Meter unter dem Wasserspiegel und mit dem Boden des Ausflußgefäßes in einerlei Höhe steht, und zwar 1) beim freien Ausfluß, und 2) beim Ausfluß durch ein kurzes horizontales Ansatzgerinne? Man hat es hier mit der Mündung E zu thun, wobei die Druckhöhe über der oberen Kante, $= 0,35 - 0,10 = 0,25$ Meter ist. Die Tabelle I. giebt für den Werth 0,20 Meter dieser Höhe bei der Mündungshöhe $= 0,20$ Meter, den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,621$, und dagegen bei der Mündungshöhe $= 0,05$ Meter, $\mu = 0,670$; daher möchte für den ersten Fall der Aufgabe

$$\mu_1 = \frac{0,621 + 0,670}{2} = 0,645 \text{ zu setzen sein.}$$

Die Tabelle II. giebt dagegen bei der Wasserhöhe 0,25 Meter über der oberen Mündungskante durch Interpolation für μ die Werthe:

$$0,566 + \tfrac{5}{30}\,(0,592 - 0,566) = 0,570, \text{ und}$$
$$0,617 + \tfrac{5}{30}\,(0,626 - 0,617) = 0,619,$$

folglich ist für den zweiten Fall

$$\mu_2 = \frac{0,570 + 0,619}{2} = 0,594 \text{ zu setzen.}$$

Der Querschnitt der Mündung ist:

$$F = a\,b = 0,20 \,.\, 0,10 = 0,020 \text{ Quadratmeter,}$$

und die mittlere Druckhöhe ist:

$$h = 0,350 - 0,050 = 0,300 \text{ Meter,}$$

folglich die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = F\sqrt{2\,g\,h} = 0,02\,\sqrt{2 \,.\, 9,81 \,.\, 0,3} = 0,02\,\sqrt{5,886}$$
$$= 0,02 \,.\, 2,425 = 0,0485 \text{ Cubikmeter;}$$

sowie die effective Ausflußmenge, im ersten Falle:

$$Q_1 = \mu_1\,Q = 0,645 \,.\, 0,0485 = 0,0313 \text{ Cubikmeter,}$$

und dagegen im zweiten Falle, d. i. bei einem Ansatzgerinne:

$$Q_2 = \mu_2\,Q = 0,594 \,.\, 0,0485 = 0,0288 \text{ Cubikmeter.}$$

Nach der Formel $\mu_n = (1 + 0,155\,n)\,\mu_0$ in §. 414 für den Ausfluß bei partieller Contraction läßt sich, da hier vom ganzen Mündungsumfang $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ eingefaßt ist, $\mu_n = \mu_{1/3} = (1 + 0,052)\,\mu_0 = 1,052\,\mu_0$ setzen. Nun ist aber für eine solche Mündung bei vollständiger Contraction nach Tabelle I., Seite 797, $\mu_0 = 0,616$, daher folgt hiernach:

$$\mu_{1/3} = 1,052 \,.\, 0,616 = 0,648, \text{ und}$$
$$Q_1 = \mu_{1/3}\,Q = 0,648 \,.\, 0,0485 = 0,0314 \text{ Cubikmeter,}$$

also wenig größer als nach der Lesbros'schen Tabelle.

Herr Lesbros hat auch noch mittels der Mündungen A, B, C u. s. w. Versuche über den Ausfluß bei Ueberfällen, wobei der Wasserspiegel die obere Kante der Mündung nicht erreicht, angestellt, und es sind die Hauptergebnisse derselben in folgenden Tabellen zusammengestellt worden. §. 419

I. Tabelle der Ausflußcoefficienten ($^2/_3\,\mu$) für den freien Ausfluß durch Ueberfälle oder Wandeinschnitte.

Druckhöhe über der Schwelle im stillstehenden Wasser gemessen.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:						
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Meter.							
0,015	0,421	0,450	0,450	0,441	0,395	0,371	0,305
0,020	0,417	0,446	0,444	0,437	0,402	0,379	0,318
0,030	0,412	0,437	0,435	0,430	0,410	0,388	0,337
0,040	0,407	0,430	0,429	0,424	0,411	0,394	0,352
0,050	0,404	0,425	0,426	0,419	0,411	0,398	0,362
0,070	0,398	0,416	0,422	0,412	0,409	0,402	0,375
0,100	0,395	0,409	0,420	0,405	0,408	0,405	0,382
0,150	0,393	0,406	0,423	0,403	0,407	0,407	0,383
0,200	0,390	0,402	0,424	0,403	0,405	0,408	0,383
0,250	0,379	0,396	0,422	0,401	0,404	0,407	0,381
0,300	0,371	0,390	0,418	0,398	0,403	0,406	0,378

II. Tabelle der Ausflußcoefficienten ($^2/_3\,\mu$) für den Ausfluß durch Ueberfälle mit kurzen Ansatzgerinnen.

Druckhöhe über der Schwelle, im stillstehenden Wasser gemessen.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:							
	A	*B*	*C*	*C**	*E*	*F*	*G*	*H*
Meter.								
0,015	—	0,375	0,388	0,400	—	—	—	—
0,020	0,196	0,368	0,383	0,395	0,208	0,201	0,175	0,190
0,030	0,234	0,358	0,373	0,385	0,232	0,228	0,205	0,222
0,040	0,263	0,351	0,365	0,379	0,251	0,250	0,234	0,250
0,050	0,278	0,346	0,360	0,375	0,268	0,267	0,260	0,272
0,070	0,292	0,343	0,352	0,371	0,288	0,289	0,285	0,296
0,100	0,304	0,340	0,345	0,369	0,302	0,304	0,299	0,313
0,150	0,315	0,335	0,340	0,367	0,314	0,316	0,313	0,327
0,200	0,319	0,331	0,338	0,366	0,323	0,322	0,322	0,335
0,250	0,321	0,328	0,336	0,364	0,329	0,326	0,329	0,341
0,300	0,324	0,326	0,334	0,361	0,332	0,329	0,332	0,345

Die Vergleichung der Coefficienten in Tabelle I. und Tabelle II. zeigt, daß durch die kurzen Ansatzgerinne die Ausflußmenge bei Mündungen mit dem kurzen Gerinne kleiner ausfällt als bei Mündungen ohne dieses Gerinne, und zwar um so kleiner, je kleiner die Druckhöhe ist; auch ist aus der Vergleichung zwischen den Columnen unter C und C^*, sowie unter E, E^*, F, F^* und G, G^* in den Tabellen des vorigen Paragraphen zu ersehen, daß die geneigten Ansatzgerinne den Ausfluß weniger stören als die horizontalen.

Anmerkung 1. Eine abweichende Theorie über den Ausfluß entwickelt G. Boileau in seinen Traité sur la mesure des eaux courantes. Hiernach ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers an allen Stellen des Querschnittes eine und dieselbe, und zwar entsprechend der Tiefe der oberen Begrenzungslinie des Strahles in der Ebene der Mündung unter dem Wasserspiegel im Ausflußreservoir. Dieselbe Formel wendet Boileau auch auf Ueberfälle an; wobei er natürlich stets die Kenntniß der Strahlhöhe in der Mündungsebene nöthig hat. Später, im 12. Bande der 5. Reihe von den Annales des mines, 1857, hat Herr Clarinval eine andere Formel für den Ausfluß durch Ueberfälle entwickelt, in welcher gar keine Erfahrungszahl μ vorkommt, sondern statt $\frac{2}{3}\mu$ der Factor $\frac{a\sqrt{1-\frac{a}{h}}}{\sqrt{2(h^2-a^2)}}$, worin h die Druckhöhe und a die Strahldicke über der Ueberfallschwelle bezeichnen, einzusetzen ist. S. den „Civilingenieur" Band V. Ich halte die Begründung dieser Formel nicht für richtig.

Anmerkung 2. Herr J. Francis giebt in seinem Werke: „The Lowell Hydraulic Experiments, Boston 1855", für den Ausfluß durch breite Ueberfälle folgende Formel an:

$$Q = 3{,}33\,(l - 0{,}1\,n\,h)\,h^{3/2} \text{ Cubikfuß engl.,}$$

worin h die Druckhöhe über der Schwelle, l die Länge der letzteren und n entweder 0 oder 1 oder 2 ist, je nachdem die Contraction des Wasserstrahles an beiden, an einer, oder an keiner Seite aufgehoben ist. Da für das englische Maß

$$\sqrt{2g} = 8{,}025$$

ist, so hat man folglich hiernach:

$$\tfrac{2}{3}\mu = \frac{3{,}33}{8{,}025} = 0{,}415.$$

Die Versuche, worauf sich diese Formel gründet, sind an 10 Fuß breiten Ueberfällen und bei 0,6 bis 1,6 Fuß Druckhöhe angestellt worden. Die Ueberfallkante wurde durch eine stromabwärts abgeschrägte eiserne Platte gebildet, das Reservoir hatte eine Breite von 13,96 Fuß, und die Schwelle stand 4,6 Fuß über dem Boden desselben. Siehe den „Civilingenieur", Band II., 1856.

Bakewell's Versuche über den Ausfluß durch Ueberfälle (s. polytechn. Centralblatt 18. Jahrgang 1852) liefern zum Theil ziemlich abweichende Resultate.

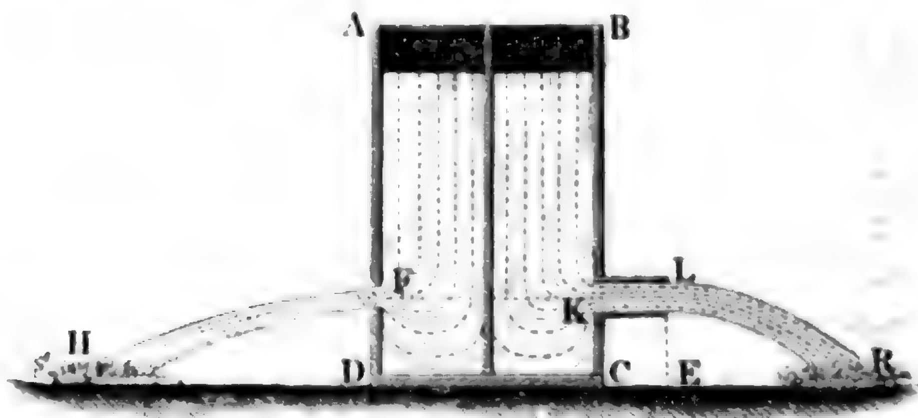
Anmerkung 3. An den Schützen der Hammerräder zu Remscheid hat Herr Röntchen $\mu = 0{,}90$ bis $0{,}93$ gefunden. S. Dingler's Journal, Bd. 158.

Drittes Capitel.

Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren.

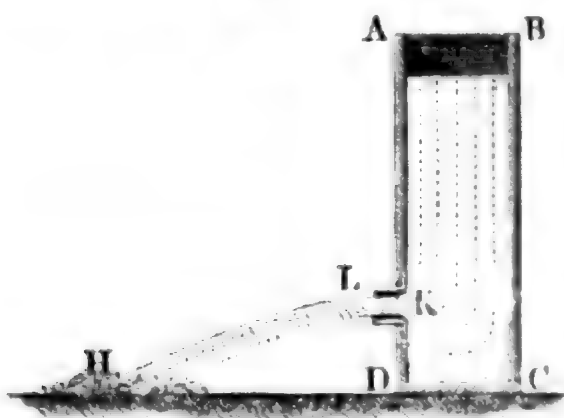
420 **Kurze Ansatzröhren.** Läßt man das Wasser durch eine kurze Ansatzröhre (franz. tuyau additionel; engl. short pipe) ausfließen, so treten ganz andere Verhältnisse ein, als wenn es durch Mündungen in der dünnen, oder durch nach außen abgeschrägte Mündungen in der dicken Wand ausfließt. Ist die Ansatzröhre prismatisch, und ihre Länge $2^1/_2$ bis 3 mal so groß als ihre Weite, so giebt sie einen uncontrahirten und undurchsichtigen Strahl, welcher eine kleinere Sprungweite und daher auch eine kleinere Geschwindigkeit hat, als der durch eine Mündung in der dünnen Wand unter übrigens gleichen Umständen ausfließende Strahl. Hat also die Röhre KL mit der Mündung F, Fig. 716, gleichen Querschnitt und ist auch die Druckhöhe von

Fig. 716.



beiden eine und dieselbe, so erhält man in LR einen trüben und uncontrahirten, also dickeren, und in FH einen klaren und contrahirten, also schwächeren Strahl, und es läßt sich auch wahrnehmen, daß die Sprungweite ER kleiner ist als die Sprungweite DH. Dieses Ausflußverhältniß tritt aber nur dann ein, wenn die Röhre die angegebene Länge hat; ist die Röhre kürzer, vielleicht nur so lang als weit, so legt sich der Strahl KR, Fig. 717, gar nicht an die Röhrenwand an, es bleibt die Röhre ganz ohne Einwirkung auf den Ausfluß, und der Strahl fällt wie beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand aus.

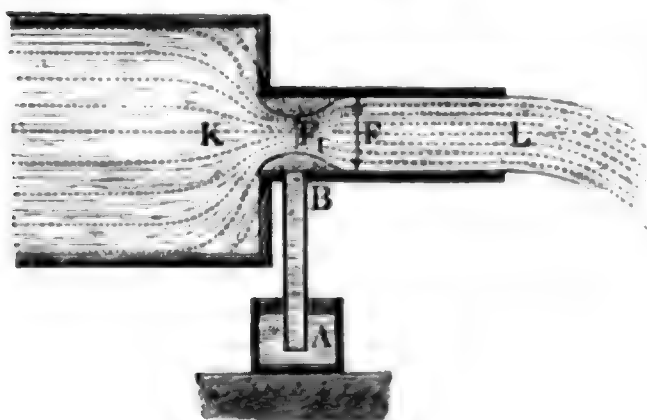
Fig. 717.



Zuweilen findet auch bei Röhren von größerer Länge ein Ausfüllen der Röhre durch den Strahl nicht statt, nämlich dann, wenn dem Wasser keine

Gelegenheit gegeben worden ist, mit der Röhrenwand in Berührung zu kommen; verschließt man aber in diesem Falle die äußere Mündung durch die Hand oder durch ein Brett auf einige Augenblicke, so bildet sich nachher ein die Röhre vollkommen füllender Strahl, und es findet ein sogenannter voller Ausfluß (franz à gueule bée; engl. of filled tube) statt. Die Contraction des Wasserstrahles findet auch beim Ausfluß durch Röhren statt, nur fällt hier der contrahirte Theil in das Innere der Röhre. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man sich gläserner Ansatzröhren, wie KL Fig. 718, bedient, und kleine Körper im Wasser schwimmen läßt, denn man bemerkt in diesem Falle, daß nur in der Mitte des Querschnittes F_1 nahe hinter der Eintrittsstelle K, nicht aber am Umfange desselben progressive Bewegung vorhanden ist, daß hier vielmehr nur eine wirbelnde Bewegung stattfindet. Es ist aber die Capillarität oder die Adhäsion des Wassers an der Röhrenwand, welche macht, daß das Wasser das Ende FL der Röhre ganz ausfüllt. Das aus der Röhre fließende Wasser hat nur den der Atmosphäre gleichen Druck, nun ist aber der contrahirte Querschnitt F_1 nur α mal so groß als der Querschnitt F der Röhre, und deshalb die Geschwindigkeit v_1 in ihm $\frac{1}{\alpha}$ mal so groß als die Ausflußgeschwindigkeit v, daher ist auch der Druck des Wassers in der Nähe von F_1 kleiner als beim Austritte, oder als der Atmosphärendruck. Bohrt man bei F_1 ein enges Loch in die Röhre, so findet auch wirklich kein Ausfluß durch dasselbe, sondern vielmehr ein Einsaugen von Luft statt, auch hört endlich der volle Ausfluß und die Einwirkung der Ansatzröhre ganz auf, wenn man das Loch weiter macht, oder mehrere Löcher anbringt. Ebenso kann man auch das Wasser in der Röhre AB zum Steigen und zum Ausfluß durch die Röhre KL bringen, wenn man dieselbe bei F_1 in die letztere einmünden läßt. Der volle Ausfluß hört bei der einfachen cylindrischen Röhre ganz auf, wenn die Druckhöhe ein gewisse Größe erreicht, siehe §. 439, Capitel IV.

Fig. 718.



Cylindrische Ansatzröhren. Ueber den Ausfluß des Wassers durch kurze cylindrische Ansatzröhren sind von Vielen Versuche angestellt worden, doch weichen die Resultate derselben ziemlich viel von einander ab. Namentlich sind es die Bossut'schen Ausflußcoefficienten, welche durch ihre Kleinheit (0,785) von den von Anderen gefundenen bedeutend abweichen. §. 4

Aus den Versuchen von Michelotti mit $1^1/_2$ bis 3 Zoll weiten Röhren und bei 3 bis 20 Fuß Druckhöhe folgt im Mittel dieser Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}813$. Die Versuche von Bidone, Eytelwein und d'Aubuisson weichen hiervon nur wenig ab. Im Mittel läßt sich aber, namentlich auch den Versuchen des Verfassers entsprechend, der Ausflußcoefficient für kurze cylindrische Ansatzröhren $\mu = 0{,}815$ setzen. Da wir denselben für runde Mündungen in der dünnen Wand 0,615 gefunden haben, so folgt, daß unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen durch kurze Ansatzröhren $^{815}/_{615} = 1{,}325$ mal so viel Wasser ausfließt als durch runde Mündungen in der dünnen Wand. Uebrigens wachsen diese Ausflußcoefficienten, wenn die Röhrenweite kleiner wird, und nehmen auch wenig zu bei Abnahme der Druckhöhe oder Ausflußgeschwindigkeit. Nach den bei einem Drucke von 0,23 bis 0,60 Meter angestellten Versuchen des Verfassers ist für Röhren, welche 3 mal so lang als weit sind:

bei	1	2	3	4 Centimeter Weite
$\mu =$	0,843	0,832	0,821	0,810

Dieser Tabelle zufolge nehmen also die Ausflußcoefficienten merklich zu, wenn die Röhrenweite kleiner wird. Ebenso fand Buff bei einer 2,79 Linien weiten und 4,3 Linien langen Röhre die Ausflußcoefficienten allmälig von 0,825 bis 0,855 zunehmend, wenn die Druckhöhe von 33 bis $1^1/_2$ Zoll nach und nach herabsank.

Beim Ausflusse des Wassers durch kurze parallelepipedische Ansatzröhren fand der Verfasser einen Ausflußcoefficienten von 0,819.

Sind die Ansatzröhren KL, Fig. 719, inwendig theilweise eingefaßt, stoßen sie z. B. mit der einen Seite an den Boden CD des Gefäßes an, und wird dadurch eine partielle Contraction herbeigeführt, so steigt, nach den Versuchen des Verfassers, der Ausflußcoefficient nicht ansehnlich, wohl aber fließt das Wasser an verschiedenen Stellen des Querschnittes mit verschiedenen Ge-

Fig. 719.

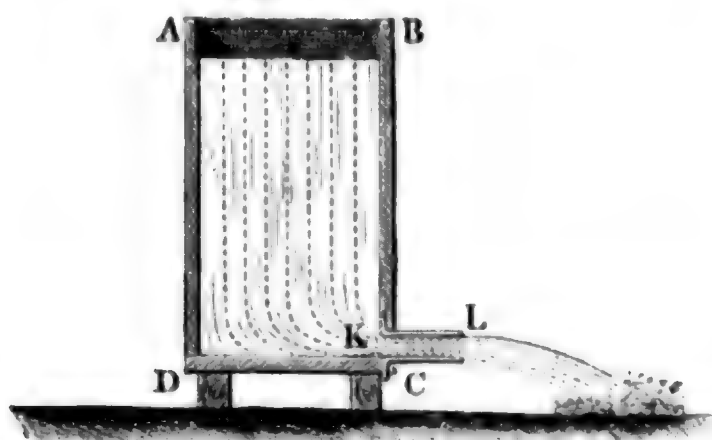
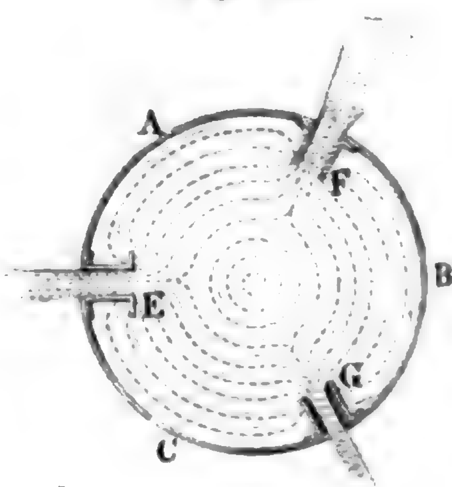


Fig. 720.



schwindigkeiten, und zwar auf der Seite C schneller aus, als auf der gegenüberliegenden.

Wenn die innere Stirnfläche einer Ansatzröhre nicht in die Wandfläche fällt, sondern vorsteht, wie E, F, G, Fig. 720, so nennt man diese Röhre eine innere Ansatzröhre. Ist die Stirnfläche dieser Röhre mindestens $^1/_5$mal so breit als die Röhre weit, wie z. B. E, so bleibt der Ausflußcoefficient derselbe, als wenn die Stirnfläche in der Ebene der Wand läge, ist aber die Stirnfläche schmaler, wie z. B. F und G, so fällt der Ausflußcoefficient kleiner aus. Bei einer sehr schmalen fast verschwindenden Stirnfläche wird derselbe den Versuchen Bidone's und des Verfassers zufolge 0,71, wenn der Strahl die Röhre ausfüllt; dagegen 0,53 (vergl. §. 412), wenn er sich gar nicht an die innere Röhrenwand anlegt. Im ersten Falle (F) ist der Strahl ganz zerrissen und besenförmig divergirend, im zweiten (G) aber stark zusammengezogen und ganz krystallrein.

Widerstandscoefficient. Da das Wasser ohne Contraction aus der prismatischen Ansatzröhre tritt, so folgt, daß bei dem Ausflusse durch diese Mundstücke der Contractionscoefficient α = Eins und der Geschwindigkeitscoefficient φ = dem Ausflußcoefficienten μ ist. Eine mit der Geschwindigkeit v ausströmende Wassermenge Q besitzt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g}\, v^2$ und kann dadurch die mechanische Arbeit $\frac{v^2}{2g}\, Q\gamma$ (s. §. 74) verrichten. Nun ist aber bei dem Ausflusse die theoretische Geschwindigkeit $= \frac{v}{\varphi}$, daher entspricht der ausfließenden Wassermasse die Leistung $\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q\gamma$, und es verliert sonach die Wassermenge Q durch den Ausfluß die mechanische Arbeit: §. 4[?]

$$\left(\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma.$$

Beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand ist φ im Mittel $= 0,975$, daher beträgt hier der Arbeitsverlust:

$$\left[\left(\frac{1}{0,975}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma = 0,052\, \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma;$$

beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansätze ist dagegen $\varphi = 0,815$ und es stellt sich der entsprechende Verlust an Arbeit

$$= \left[\left(\frac{1}{0,815}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma = 0,505\, \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma,$$

d. i. nahe 10mal so groß heraus, als beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand. Bei Benutzung der lebendigen Kraft des ausfließenden Wassers ist es folglich besser, das Wasser durch Mündungen in der dünnen

Wand als durch prismatische Ansatzröhren ausfließen zu lassen. Wenn man aber die inneren Kanten, womit die Röhre an die Gefäßwand stößt, abrundet und dadurch einen allmäligen Uebergang aus dem Gefäße in die Röhre hervorbringt, so wird der Ausflußcoefficient auf 0,96 gesteigert und zugleich der Arbeitsverlust auf $8^1/_2$ Procent herabgezogen. Bei kürzeren, genau abgerundeten oder nach der Form des contrahirten Wasserstrahles gebildeten Mundstücken ist $\mu = \varphi = 0{,}975$ und daher der Arbeitsverlust wie bei Mündungen in der dünnen Wand 5 Procent.

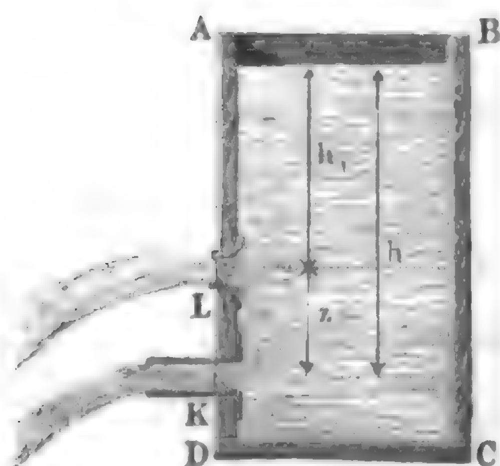
Dem Arbeitsverluste $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g} Q \gamma$ entspricht eine Druckhöhe $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$; man kann sich daher auch vorstellen, daß durch die Hindernisse des Ausflusses die Druckhöhe den Verlust $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ erleide, und annehmen, daß nach Abzug dieses Verlustes der übrigbleibende Theil der Druckhöhe auf die Erzeugung der Geschwindigkeit verwendet werde. Diesen mit dem Quadrate der Ausflußgeschwindigkeit proportional wachsenden Verlust $z = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ kann man Widerstandshöhe (franz. hauteur de résistance; engl. height of resistance) und den Coefficienten $\frac{1}{\varphi^2} - 1$, womit die Geschwindigkeitshöhe zu multipliciren ist, um die Widerstandshöhe zu erhalten, den Widerstandscoefficienten nennen. Wir werden in der Folge diesen, auch das Verhältniß der Widerstandshöhe zur Druckhöhe ausdrückenden Coefficienten durch den Buchstaben ζ bezeichnen, also die Widerstandshöhe selbst durch $z = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$ ausdrücken. Durch die Formeln

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \text{ und}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}$$

läßt sich aus dem Geschwindigkeitscoefficienten der Widerstandscoefficient, und aus diesem wieder jener berechnen.

Fig. 721.



Bei derselben Ausflußgeschwindigkeit v ist die Druckhöhe für eine Mündung K, Fig. 721, welcher der Geschwindigkeitscoefficient φ entspricht, $h = \frac{v^2}{2g\varphi^2}$, und die

Druckhöhe der Mündung L, durch welche das Wasser mit der theoretischen Geschwindigkeit ausfließt, $h_1 = \frac{v^2}{2g}$, folglich muß die erste Mündung um die Größe $KL = z = h - h_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}$, welche wir die Widerstandshöhe genannt haben, tiefer liegen als die letztere. Wenn beide einen gleichen Querschnitt F haben, und das Wasser durch beide ohne Contraction ausfließt, so ist auch die Ausflußmenge $Q = Fv$ für beide Mündungen eine und dieselbe.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt unter einer Druckhöhe von 3 Fuß durch eine 2 Zoll weite Röhre aus, welcher der Widerstandscoefficient $\zeta = 0,4$ entspricht? Es ist

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1,4}} = 0,845, \text{ daher:}$$

$$v = 0,845 \,.\, 7,906 \sqrt{3} = 11,574 \text{ Fuß, ferner:}$$

$$F = (1/_{12})^2 \, \pi = 0,02182 \text{ Quadratfuß,}$$

folglich das gesuchte Wasserquantum:

$$Q = 0,02182 \,.\, 11,574 = 0,253 \text{ Cubikfuß.}$$

2) Wenn eine Röhre von 2 Zoll Weite unter einem Drucke von 2 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Wasser liefert, so ist ihr Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient:

$$\varphi = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} = \frac{10}{60 \,.\, 0,02182 \,.\, 7,906 \,.\, \sqrt{2}} = \frac{1}{1,035\sqrt{2}} = 0,683,$$

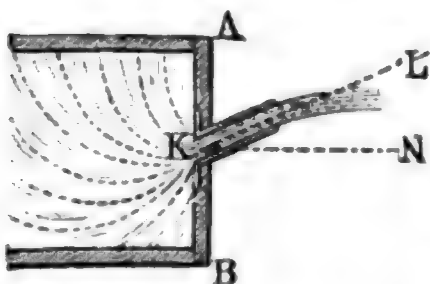
der Widerstandscoefficient: $\zeta = \left(\frac{1}{0,683}\right)^2 - 1 = 1,143$,

und endlich der durch die Hindernisse der Röhre bewirkte Verlust an Druckhöhe:

$$z = \zeta \frac{v^2}{2g} = 1,143 \,.\, \frac{v^2}{2g} = 1,143 \,.\, 0,016 \left(\frac{Q}{F}\right)^2 = 0,0183 \,.\, \frac{1}{0,1309^2}$$
$$= 1,066 \text{ Fuß.}$$

Schiefe Ansatzröhren. Schief angesetzte oder schief abgeschnittene Ansatzröhren geben ein kleineres Wasserquantum als rechtwinkelig angesetzte oder rechtwinkelig abgeschnittene Ansatzröhren, weil die Richtung des Wassers in denselben eine Aenderung erleidet. Die hierüber in nicht unbedeutender Ausdehnung angestellten Versuche haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Ist δ der Winkel LKN, welchen die Röhrenaxe KL, Fig. 722, mit der Normale KN zur Ebene AB der Einmündung einschließt, und bezeichnet ζ den Widerstandscoefficienten für die winkelrecht abgeschnittene Röhre, so hat man den Widerstandscoefficienten der schiefen Ansatzröhre: §. 42

Fig. 722.



$$\zeta_1 = \zeta + 0,303 \; sin. \, \delta + 0,226 \; sin. \, \delta^2.$$

Nehmen wir für ζ den mittleren Werth 0,505 an, so erhalten wir:

bei $\delta^0 =$	0	10	20	30	40	50	60 Grad.
den Widerstandscoefficienten $\zeta_1 =$	0,505	0,565	0,635	0,713	0,794	0,870	0,937
den Ausflußcoefficienten $\mu_1 =$	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Hiernach ist z. B. der Widerstandscoefficient einer kurzen Ansatzröhre bei 20 Grad Axenabweichung, $\zeta_1 = 0,635$ und der Ausflußcoefficient

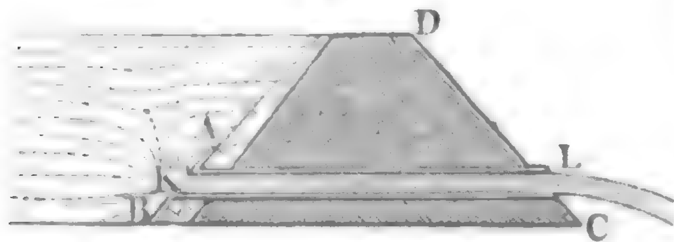
$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1,635}} = 0,782,$$

dagegen bei 35° Axenabweichung, der erstere = 0,753 und der letztere = 0,755.

In der Regel sind diese schiefen Ansatzröhren länger, als wir seither angenommen haben, auch müssen dieselben länger sein, wenn sie vom Wasser vollkommen ausgefüllt werden sollen. Die vorstehende Formel giebt nur denjenigen Theil des Widerstandes an, welcher dem Röhrenstück an der Einmündung entspricht, das dreimal so lang als die ganze Röhre weit ist. Der Widerstand, welchen das übrige Röhrenstück der Bewegung des Wassers entgegensetzt, wird in der Folge angegeben.

Beispiel. Wenn die Einmündungsebene AB eines horizontal liegenden Teichgerinnes KL, Fig. 723, sowie die Innenfläche des Teichdammes 40 Grad gegen den Horizont geneigt ist, so schließt die Röhrenaxe mit der Normale dieser Ebene einen Winkel von 50 Grad ein, und es ist daher der Widerstandscoefficient für den Ausfluß durch das Einmündungsstück dieser Röhre, $\zeta_1 = 0,870$, und wenn nun dem übrigen und längeren Röhrenstücke der Widerstandscoefficient 0,650 entspräche, so wäre der Widerstandscoefficient für die ganze Röhre

Fig. 723.



$$\zeta = 0,870 + 0,650 = 1,520,$$

und daher der Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,520}} = \frac{1}{\sqrt{2,520}} = 0,630.$$

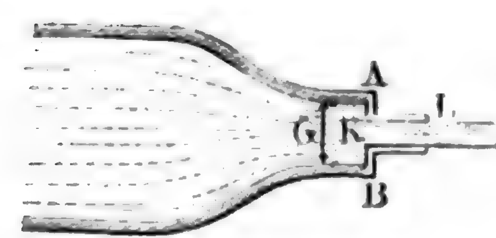
Bei 10 Fuß Druckhöhe und 1 Fuß Röhrenweite ergäbe sich folglich die Ausflußmenge:

$$Q = 0,630 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 7,906 \sqrt{10} = 12,37 \text{ Cubikfuß.}$$

§. 424 **Unvollkommene Contraction.** Mündet eine kurze cylindrische Ansatzröhre KL, Fig. 724, in einer ebenen Wand AB ein, deren Inhalt G den Querschnitt F der Röhre nicht vielmal übertrifft, so kommt

das Wasser mit einer nicht zu vernachlässigenden Geschwindigkeit an der Einmündungsstelle an, und es tritt deshalb nur mit unvollkommener Contraction in das Rohr, weshalb wieder die Ausflußgeschwindigkeit eine größere ist, als wenn das Wasser als stillstehend vor dem Eintritt in die Röhre angenommen werden kann. Ist wieder $\frac{F}{G} = n$ das Verhältniß des Röhrenquerschnittes zum Inhalte der Wandfläche, ferner μ_0 der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction, wo $\frac{F}{G}$ der Null gleich gesetzt werden kann, so hat man, den Versuchen des Verfassers zufolge, den Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction oder dem Querschnittsverhältnisse n zu setzen:

Fig. 724.



$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3, \text{ oder}$$

$$\mu_n = \mu_0\,(1 + 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3).$$

Nimmt z. B. der Röhrenquerschnitt den sechsten Theil der ganzen Wandfläche ein, so ist:

$$\mu_{1/6} = \mu_0\,(1 + 0{,}102\,.\,{}^1/_6 + 0{,}067\,.\,{}^1/_{36} + 0{,}046\,.\,{}^1/_{216})$$
$$= \mu_0\,(1 + 0{,}017 + 0{,}0019 + 0{,}0002) = 1{,}019\,\mu_0,$$

oder $\mu_0 = 0{,}815$ gesetzt:

$$\mu_{1/6} = 0{,}815\,.\,1{,}019 = 0{,}830.$$

Etwas genauer giebt die Correctionswerthe $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ folgende, zum Gebrauch bequeme Tabelle an.

Tabelle

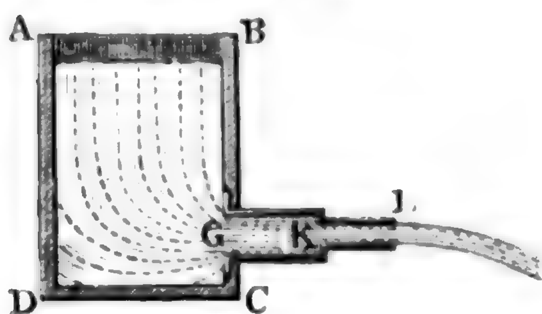
der Correctionen der Ausflußcoefficienten wegen der unvollkommenen Contraction, beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansatzröhren.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,006	0,013	0,020	0,027	0,035	0,043	0,052	0,060	0,070	0,080
n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,090	0,102	0,114	0,127	0,138	0,152	0,166	0,181	0,198	0,227

Beim Ausflusse durch kurze parallelepipedische Röhren sind diese Correctionen ziemlich die nämlichen.

Diese Coefficienten finden ihre Anwendung vorzüglich beim Ausflusse des Wassers durch zusammengesetzte Röhren, wie z. B. in dem durch die Fig. 725 dargestellten Falle, wo die kurze Ansatzröhre KL in einer weiteren kurzen Ansatzröhre GK und diese wieder in dem Gefäße AC einmündet. Hier ist beim Eintritt des Wassers aus der weiteren Röhre in die engere unvollkommene Contraction vorhanden und daher der Ausflußcoefficient nach der letzten Regel zu bestimmen.

Fig. 725.



Setzen wir den diesem Ausflußcoefficienten entsprechenden Widerstandscoefficienten $= \zeta_1$, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt aus dem Gefäße in die weitere Röhre, $= \zeta$, die Druckhöhe $= h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$ und das Verhältniß $\frac{F}{G}$ der Röhrenquerschnitte, $= n$, also die Geschwindigkeit des Wassers in der weiteren Röhre, $= nv$, so gilt die Formel:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{(nv)^2}{2g} + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ d. i.}$$

$$h = (1 + n^2\zeta + \zeta_1)\frac{v^2}{2g}, \text{ und es ist daher:}$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + n^2\zeta + \zeta_1}}.$$

Beispiel. Welche Wassermenge liefert der in Fig. 725 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $h = 4$ Fuß, die Weite der engeren Röhre 2 Zoll und die der weiteren 3 Zoll beträgt? Es ist:

$$n = (2/3)^2 = 4/9, \text{ daher } \mu_{4/9} = 1{,}069 \cdot 0{,}815 = 0{,}871$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{0{,}871}\right)^2 - 1 = 0{,}318; \text{ nun hat man aber:}$$

$$\zeta = 0{,}505 \text{ und } n^2 . \zeta = 16/81 . 0{,}505 = 0{,}099, \text{ daher folgt:}$$

$$1 + n^2\zeta + \zeta_1 = 1 + 0{,}099 + 0{,}318 = 1{,}417,$$

und die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906 . \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}417}} = \frac{15{,}812}{\sqrt{1{,}417}} = 13{,}29 \text{ Fuß.}$$

Da endlich der Röhrenquerschnitt $F = \frac{\pi}{144} = 0{,}02182$ Quadratfuß ist, so folgt die Ausflußmenge:

$$Q = 13{,}29 . 0{,}02182 = 0{,}290 \text{ Cubikfuß.}$$

Conische Ansatzröhren. Conische Ansatzröhren geben andere Ausflußmengen als prismatische oder cylindrische Ansatzröhren. Sie sind entweder conisch convergent oder conisch divergent; im ersten Falle ist die Ausmündung kleiner, im zweiten Falle aber ist sie größer als die Einmündung. Die Ausflußcoefficienten bei den ersteren Röhren sind größer und die bei den letzteren kleiner, als bei den cylindrischen Röhren. Eine und dieselbe conische Röhre giebt allerdings mehr Wasser, wenn man die weitere Mündung zur Ausmündung macht, wie *K* in Fig. 726, als wenn man sie nach innen richtet wie *L* in derselben Figur; allein sie giebt nicht in demselben Verhältniß mehr, als die weitere Mündung die engere übertrifft. Wenn Manche, wie z. B. Venturi und Eytelwein, für conisch divergente Röhren größere Ausflußcoefficienten angeben, als für conisch convergente, so ist zu berücksichtigen, daß sie immer den engeren Querschnitt als Mündung behandeln. Den Einfluß der Conicität der Röhren auf die Ausflußmenge führen folgende, unter Druckhöhen von 0,25 bis 3,3 Meter angestellte Versuche mit einer 9 Centimeter langen Röhre *AD*, Fig. 727, vor Augen. Die Weite dieser Röhre betrug an einem Ende *DE*, = 2,468, am anderen Ende *AB*, = 3,228 Centimeter, und der Convergenzwinkel, d. i. der Winkel *AOB*, unter den die gegenüberliegenden Seiten *AE* und *BD* eines Längenaxenschnittes zusammenlaufen, = 40° 50′. Beim Ausflusse durch die engere Mündung war der Ausflußcoefficient = 0,920; bei dem Ausflusse durch die weitere Mündung aber = 0,553; und wenn man die engere Einmündung als Querschnitt in die Rechnung einführt, ergab er sich = 0,946. Der Strahl war im ersten Falle, wo die Röhre als conisch convergentes Mundstück gebraucht wurde, wenig contrahirt, dicht und glatt, im zweiten Falle aber, wo er als conisch divergentes Mundstück diente, war er stark divergent, zerrissen und stark pulsirend. Ueber den Ausfluß durch conisch divergente Röhren haben noch Venturi und Eytelwein experimentirt. Beide Hydrauliker haben noch diese conischen Röhren an cylindrische und conoidische, nach der Form des contrahirten Wasserstrahles geformte Mundstücke angesetzt. Durch eine solche Verbindung, wie Fig. 728 (a. f. S.) darstellt, wo das divergente Ausmündungsstück *KL* innen 12 und außen $21\frac{1}{2}$ Linien weit, und $8\frac{13}{16}$ Zoll lang war, wobei Convergenzwinkel 5° 9′ maß, fand Eytelwein $\mu = 1{,}5526$, wenn er das

Fig. 726.

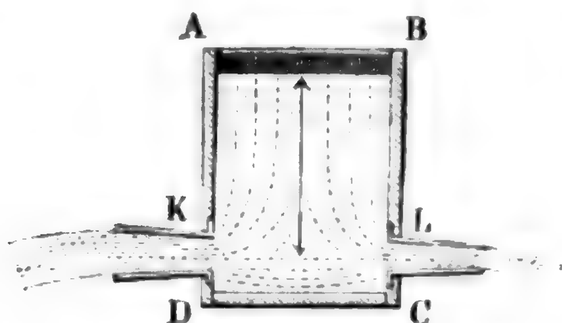
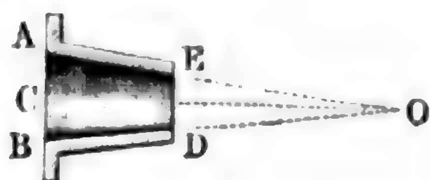
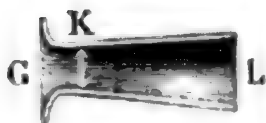


Fig 727.



engere Ende als Mündung behandelte, und dagegen μ nur $= 0{,}483$, wenn er, wie recht, das weitere Ende als Mündung ansah. Allerdings fließt durch dieses combinirte Mundstück $\frac{1{,}5526}{0{,}615} = 2{,}5$ mal so viel, als durch die einfache Mündung in der dünnen Wand, und $\frac{1{,}5526}{0{,}815} = 1{,}9$ mal so viel als durch die kurze cylindrische Ansatzröhre. Bei großen Geschwindigkeiten und bei größerer Divergenz ist es übrigens gar nicht möglich, selbst durch vorhergegangenes Zuhalten der Röhren, den vollen Ausfluß herbeizuführen.

Fig. 728.



Auch fand der Verfasser für eine kurze conisch divergente Ansatzröhre von 4 Centimeter Länge, 1 Centimeter innere und 1,54 Centimeter äußere Weite, wobei der Divergenzwinkel 8 Grad 4 Minuten maß, bei 0,4 Meter Druckhöhe, je nach dieselbe innen abgerundet war oder nicht, entweder

$$\mu = 0{,}738 \text{ oder } \mu = 0{,}395.$$

426 Die ausführlichsten Versuche über den Ausfluß durch conisch convergente Ansatzröhren sind von d'Aubuisson und Castel angestellt worden. Die hierzu in Anwendung gekommenen Röhren waren von großer Mannigfaltigkeit, verschieden in den Längen, Weiten und in den Convergenzwinkeln. Am ausgedehntesten waren die Versuche mit Röhren von 1,55 Centimeter Weite in der Ausmündung und von 2,6 mal so großer, d. i. von 4 Centimeter Länge, weswegen wir ihre Ergebnisse auch in folgender Tabelle hier mittheilen. Die Druckhöhe war durchgängig 3 Meter. Die Ausflußmengen wurden durch ein besonderes Aichgefäß gemessen, um aber außer den Ausflußcoefficienten auch noch die Geschwindigkeits- und Contractionscoefficienten zu erhalten, wurden die gegebenen Höhen entsprechenden Sprungweiten der Wasserstrahlen gemessen und hieraus die Ausflußgeschwindigkeiten (s. §. 408) berechnet.

Das Verhältniß $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ der effectiven Geschwindigkeit v zur theoretischen Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ gab den Geschwindigkeitscoefficienten φ, sowie das Verhältniß $\frac{Q}{F\sqrt{2gh}}$ der effectiven Ausflußmenge Q zur theoretischen Ausflußmenge $F\sqrt{2gh}$ auf den Ausflußcoefficienten μ führte und das Verhältniß zwischen beiden Coefficienten, d. i. $\frac{\mu}{\varphi}$, endlich den Contractionscoefficienten α bestimmte.

Diese Bestimmung ist aber bei großen Ausflußgeschwindigkeiten nicht hinreichend genau, weil hier der Widerstand der Luft zu groß ausfällt.

Tabelle
der Ausfluß- und Geschwindigkeitscoefficienten für den Ausfluß durch conisch convergente Röhren.

Convergenz-winkel.	Ausfluß-coefficienten.	Geschwin-digkeitscoef-ficienten.	Convergenz-winkel.	Ausfluß-coefficienten.	Geschwin-digkeitscoef-ficienten.
0° 0′	0,829	0,829	13° 24′	0,946	0,963
1° 36′	0,866	0,867	14° 28′	0,941	0,966
3° 10′	0,895	0,894	16° 36′	0,938	0,971
4° 10′	0,912	0,910	19° 28′	0,924	0,970
5° 26′	0,924	0,919	21° 0′	0,919	0,972
7° 52′	0,930	0,932	23° 0′	0,914	0,974
8° 58′	0,934	0,942	29° 58′	0,895	0,975
10° 20′	0,938	0,951	40° 20′	0,870	0,980
12° 4′	0,942	0,955	48° 50′	0,847	0,984

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß die Ausflußcoefficienten bei einer Röhre von $13^1/_2{}^0$ Seitenconvergenz ihr Maximum 0,946 erreicht haben, daß dagegen die Geschwindigkeitscoefficienten immer größer und größer ausfallen, je größer der Convergenzwinkel ist. Wie in vorkommenden Fällen der Praxis diese Tabelle zu gebrauchen ist, mag folgendes Beispiel lehren.

Beispiel. Welche Wassermenge liefert eine kurze conische Ansatzröhre von $1^1/_2$ Zoll Weite in der Ausmündung und von 10 Grad Convergenz bei einem Drucke von 16 Fuß? Nach des Verfassers Versuchen giebt eine cylindrische Röhre von dieser Weite, $\mu = 0{,}810$, die Röhre von d'Aubuisson aber gab $\mu = 0{,}829$, also um $0{,}829 - 0{,}810 = 0{,}019$ mehr; nun ist aber der Tabelle zufolge, für die Röhre von 10^0 Convergenz, $\mu = 0{,}937$, daher möchte es angemessen sein, für die gegebene Röhre, $\mu = 0{,}937 - 0{,}019 = 0{,}918$ zu setzen, wonach dann die Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}918 \cdot \frac{\pi}{4 \, . \, 8^2} \cdot 7{,}906 \sqrt{16} = \frac{0{,}918 \, . \, 7{,}906 \, . \, \pi}{64} = 0{,}3563 \text{ Cubikfuß}$$

folgt.

Reibungswiderstand. Lange prismatische oder cylindrische Ansatzröhren verzögern den Ausfluß um so mehr, je länger dieselben sind; es ist daher anzunehmen, daß die Röhrenwände durch Reibung, Adhäsion oder Klebrigkeit des Wassers an denselben der Bewegung des Wassers in den Röhren ein Hinderniß entgegensetzen. Vernunftgründen und vielfachen Beobachtungen und Messungen zufolge läßt sich annehmen, daß dieser Reibungswiderstand ganz unabhängig ist vom Drucke, daß er aber direct wie die Länge l und §. 427

umgekehrt wie die Weite d derselben wächst, daß er also dem Verhältnisse $\frac{l}{d}$ proportional ist. Außerdem hat sich auch noch herausgestellt, daß dieses Hinderniß größer ist bei größeren und kleiner bei kleineren Geschwindigkeiten des Wassers, und daß es beinahe mit dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers selbst wächst. Messen wir dieses Hinderniß durch die Höhe einer Wassersäule, die nachher von der ganzen Druckhöhe h abzuziehen ist, um die zur Erzeugung der Geschwindigkeit nöthige Höhe zu erhalten, so können wir diese Höhe, die wir in der Folge Reibungswiderstandshöhe nennen wollen, setzen:

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es ist hierbei unter ζ eine Erfahrungszahl, welche wir den Reibungscoefficienten nennen können, zu verstehen. Man verliert also hiernach durch die Reibung des Wassers in der Röhre um so mehr an Druck oder Druckhöhe, je größer das Verhältniß $\frac{l}{d}$ der Länge zur Weite und je größer die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ ist. Aus der Wassermenge Q und dem Röhrenquerschnitte

$$F = \frac{\pi d^2}{4}$$

folgt die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

und daher die Reibungshöhe:

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 = \zeta \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{l Q^2}{d^5}.$$

Um durch das Fortleiten einer gewissen Wassermenge Q in einer Röhre möglichst wenig Verlust an Druckhöhe oder Gefälle zu erhalten, soll man die Röhre möglichst weit und nicht unnöthig lang machen. Die doppelte Weite beansprucht z. B. zur Ueberwindung der Reibung nur $(1/2)^5 = 1/32$ mal so viel Gefälle als die einfache Weite.

Ist der Querschnitt einer Röhre ein Rechteck von der Höhe a und der Breite b, so hat man statt

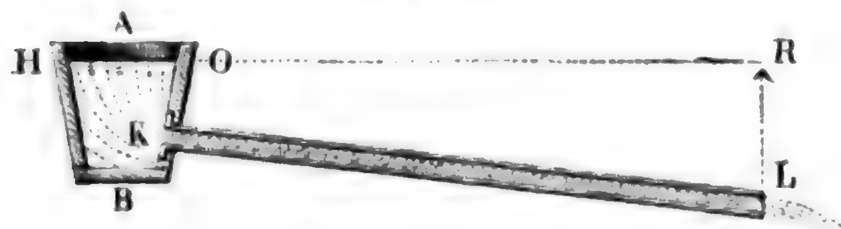
$$\frac{1}{d} = 1/4 \cdot \frac{\pi d}{1/4\, \pi d^2} = 1/4 \cdot \frac{\text{Umfang}}{\text{Inhalt}} = 1/4 \cdot \frac{2(a+b)}{ab} = \frac{a+b}{2ab}$$

einzusetzen, weshalb folgt:

$$h = \zeta \cdot \frac{l(a+b)}{2ab} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Mit Hülfe dieser Formel für den Röhrenreibungswiderstand lassen sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und das Ausflußquantum finden, welches eine Röhre von einer gegebenen Länge und Weite unter einem gegebenen Drucke fortleitet. Uebrigens ist es vollkommen gleich, ob die Röhre KL, Fig. 729, horizontal ist, fällt, oder aufsteigt, wenn nur unter der Druckhöhe die Tiefe RL des Mittelpunktes L der Röhrenmündung unter dem Wasserspiegel HO des Ausflußreservoirs verstanden wird.

Fig. 729.



Ist h die Druckhöhe, h_1 die Widerstandshöhe für das Einmündungsstück und h_2 die Widerstandshöhe für den übrigen Theil der Röhre, so hat man:

$$h - (h_1 + h_2) = \frac{v^2}{2g}, \text{ oder } h = \frac{v^2}{2g} + h_1 + h_2.$$

Bezeichnet ζ_0 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück, und ζ den Coefficienten des Reibungswiderstandes der übrigen Röhre, so ist zu setzen:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta_0 \cdot \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

oder:

$$1)\ h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\,\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g},$$

und:

$$2)\ v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}.$$

Aus der letzteren Formel ergiebt sich die Wassermenge $Q = Fv$.

Bei sehr langen Röhren fällt $1 + \zeta_0$ sehr klein gegen $\zeta\,\frac{l}{d}$ aus, weshalb dann einfach

$$h = \zeta\,\frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ sowie umgekehrt,}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d}{l} \cdot 2gh} \text{ folgt.}$$

Der **Reibungscoefficient** ist, wie die Ausflußcoefficienten, nicht ganz constant, er ist bei kleinen Geschwindigkeiten größer und bei großen Geschwindigkeiten kleiner, d. h. der Reibungswiderstand des Wassers in den Röhren wächst nicht genau mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, sondern auch noch mit einer anderen Potenz der Geschwindigkeit. **Prony** und §. 4

Eytelwein haben angenommen, daß die durch den Reibungswiderstand verlorene Druckhöhe wie die einfache Geschwindigkeit und wie das Quadrat derselben wachse, und für sie den Ausdruck:

$$h = (\alpha v + \beta v^2) \frac{l}{d},$$

wo α und β Erfahrungscoefficienten bezeichnen, festgesetzt. Um diese Coefficienten zu bestimmen, haben die genannten Hydrauliker 51 Versuche benutzt, welche zu verschiedenen Zeiten von Couplet, Bossut und du Buat über die Bewegung des Wassers durch lange Röhren angestellt worden sind. Prony fand hieraus:

$$h = (0{,}0000693\, v + 0{,}0013932\, v^2) \frac{l}{d},$$

Eytelwein:

$$h = (0{,}0000894\, v + 0{,}0011213\, v^2) \frac{l}{d},$$

d'Aubuisson nimmt an:

$$h = (0{,}0000753\, v + 0{,}001370\, v^2) \frac{l}{d} \text{ Meter.}$$

Noch genauer an die Beobachtungen schließt sich eine von dem Verfasser aufgefundene Formel an, welche die Form

$$h = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

hat und sich auf die Voraussetzung gründet, daß der Reibungswiderstand wie das Quadrat und wie die Quadratwurzel aus dem Cubus der Geschwindigkeit zugleich wächst. Man hat also hiernach den Widerstandscoefficienten

$$\zeta = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}$$

und die Reibungswiderstandshöhe einfach

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ zu setzen.}$$

Zur Ermittelung des Widerstandscoefficienten ζ oder der Hülfsconstanten α und β sind aber von dem Verfasser nicht nur die schon bei den Prony'schen und Eytelwein'schen Bestimmungen zu Grunde gelegten 51 Versuche von Couplet, Bossut und du Buat, sondern auch noch 11 Versuche vom Verfasser und 1 Versuch von einem Herrn Gueymard in Grenoble benutzt worden. Die älteren Versuche erstrecken sich nur auf Geschwindigkeiten von 0,043 bis 1,930 Meter, durch die Versuche des Verfassers ist aber die letzte Grenze der Geschwindigkeiten bis auf 4,648 Meter hinausgerückt worden. Die Weiten der Röhren waren bei den älteren Versuchen 27, 36, 54, 135 und 490 Millimeter, und die neuen Versuche wurden an

Röhren von 33, 71 und 275 Millimetern angestellt. Mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate ist nun aus den zum Grunde gelegten 63 Versuchen gefunden worden:

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}},$$

oder:

$$h = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter},$$

oder für das preußische Maß:

$$h = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}016921}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Bei Berücksichtigung anderer Versuche von Herrn Prof. Zeuner, angestellt an einer Zinkröhre von $2^1/_2$ Centimeter Weite bei 0,1356 bis 0,4287 Meter Geschwindigkeit, ist

$$\zeta = 0{,}014312 + \frac{0{,}010327}{\sqrt{v}}$$

zu setzen, wenn v in Metern gegeben ist. (Siehe „Civilingenieur“, Bd. I, 1854.)

Anmerkung 2. Neuere Versuche über die Bewegung des Wassers in Röhren unter großen und sehr großen Geschwindigkeiten sind 1856 und 1858 vom Verfasser angestellt worden. Siehe „Civilingenieur“, Band V, Heft 1 und 3, sowie Band IX, Heft 1. Die Ergebnisse dieser Versuche enthält folgende Tabelle.

Bezeichnung der Röhren.	Weite der Röhre (d)	Mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre (v)	Reibungscoefficient ζ
Engere Glasröhre	1,03 Ctm.	8,51 Meter.	0,01815
Weitere Glasröhre	1,43 „	10,18 „	0,01865
Engere Messingröhre . . .	1,04 „	8,64 „	0,01869
Desgl., kürzer gemacht . . .	1,04 „	12,32 „	0,01784
Desgl., unter sehr hohem Drucke	1,04 „	20,99 „	0,01690
Weitere Messingröhre . . .	1,43 „	8,66 „	0,01719
Desgl., abgekürzt	1,43 „	12,40 „	0,01736
Desgl., unter sehr hohem Drucke	1,43 „	21,59 „	0,01478
Weitere Zinkröhre	2,47 „	3,19 „	0,01962
Desgl., kürzer	2,47 „	4,73 „	0,01838
noch kürzer	2,47 „	6,24 „	0,01790
noch kürzer	2,47 „	9,18 „	0,01670

Die Werthe in der letzten Columne weisen von Neuem nach, daß der Widerstandscoefficient ζ für die Reibung des Wassers in Röhren abnimmt, sowohl wenn die Geschwindigkeit (v), als auch, jedoch weit langsamer, wenn die Röhrenweite (d) eine größere wird. Uebrigens ist bei großen Geschwindigkeiten die Uebereinstimmung der Formel

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}},$$

mit diesen neuen Erfahrungsgrößen noch eine leidliche, z. B. $v = 9$ Meter, giebt

$$\zeta = 0{,}01439 + 0{,}00316 = 0{,}01755,$$

und $v = 16$ Meter,

$$\zeta = 0{,}01439 + 0{,}00237 = 0{,}01676,$$

was mit den nahe entsprechenden Werthen in der letzten Tabelle recht gut übereinstimmt.

Anmerkung 3. Herr de Saint-Venant findet, daß die bekannte Formel für den Widerstand des Wassers in Röhren sich noch mehr an die Erfahrungen anschließt, wenn man die Reibungshöhe nicht v^2 oder $\frac{v^2}{2g}$, sondern $v^{12/7}$ proportional wachsend annimmt. (Siehe dessen „Mémoire sur des formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes".) Es ist hiernach:

$$h = \frac{4l}{d} \cdot 0{,}00029557\, v^{12/7} = 0{,}00118228\, \frac{l}{d} \cdot v^{12/7} = 0{,}023197\, v^{-2/7} \cdot \frac{l}{d}\, \frac{v^2}{2g}$$

zu setzen. Die Annahme eines gebrochenen Exponenten der Potenz von v ist gar nicht neu; schon Woltmann setzte $v^{7/4}$ statt v^2, und Eytelwein brachte $v^{\frac{17}{9}}$ statt v^2 in Vorschlag (siehe den vom Verfasser bearbeiteten Artikel „Ausfluß", Band I., Seite 554, der allgemeinen Maschinenencyclopädie von Hülsse).

Anmerkung 4. Neue und sehr ausführliche Versuche über die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen sind vom Herrn H. Darcy angestellt worden. (S. den Rapport der Akademie der Wissenschaften zu Paris in den „Comptes rendus etc.", Tom. 38, 1854, sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux.) Herr Darcy folgert für die Fälle, wo die Geschwindigkeit v des Wassers nicht unter 2 Decimeter ist, aus diesen Versuchen die Formel:

$$h = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{r}\right) \frac{l}{r} \cdot v^2$$

$$= \left(0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}\right) \frac{l}{d}\, \frac{v^2}{2g} \text{ Meter},$$

wonach der Widerstandscoefficient

$$\zeta = 0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d} \text{ zu setzen wäre.}$$

Jedenfalls kann diese Formel bei kleinen Geschwindigkeiten nicht ausreichend genau sein.

429 Zur Erleichterung der Rechnung ist folgende Tabelle der Widerstandscoefficienten zusammengestellt worden. Man ersieht aus ihr, daß allerdings die Veränderlichkeit dieser Coefficienten nicht unbedeutend ist, da dieser Coefficient für 0,1 Meter Geschwindigkeit, $= 0{,}0443$, für 1 Meter, $= 0{,}0239$ und für 5 Meter, $= 0{,}0186$ ausfällt.

Tabelle der Reibungscoefficienten des Wassers.

		Zehntel Meter.									
	v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ganze Meter.	0	∞	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0266	0,0257	0,0250	0,0244
	1	0,0239	0,0234	0,0230	0,0227	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213
	2	0,0211	0,0209	0,0208	0,0206	0,0205	0,0204	0,0203	0,0202	0,0201	0,0200
	3	0,0199	0,0198	0,0197	0,0196	0,0195	0,0195	0,0194	0,0193	0,0193	0,0192
	4	0,0191	0,0191	0,0190	0,0190	0,0189	0,0189	0,0188	0,0188	0,0187	0,0187

Man findet in dieser Tabelle die einer gewissen Geschwindigkeit entsprechenden Widerstandscoefficienten, wenn man die ganzen Meter in der ersten Vertical- und die Zehntel in der ersten Horizontalcolumne aufsucht, von der ersten Zahl horizontal und von der letzten vertical fortgeht bis zur Stelle, wo sich beide Bewegungen begegnen. Z. B. für $v = 1{,}3$ Meter ist $\zeta = 0{,}0227$, für $v = 2{,}8$, $\zeta = 0{,}0201$.

Für das preußische Fußmaß läßt sich setzen:

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9 Fuß.
ζ	0,0679	0,0522	0,0453	0,0411	0,0383	0,0362	0,0346	0,0333	0,0322

v	1	$1^1/_4$	$1^1/_2$	2	3	4	6	8	12	20 Fuß.
ζ	0,0313	0,0296	0,0282	0,0263	0,0242	0,0229	0,0213	0,0204	0,0192	0,0182

Anmerkung. Eine ausgedehntere und bequemere Tafel giebt der „Ingenieur", Seite 442 und 443.

Lange Röhren. In Ansehung der Bewegung des Wassers in langen Röhren oder Röhrenleitungen können folgende drei Hauptaufgaben zur Lösung vorkommen. §. 431

1) Es ist die Länge l und Weite d der Röhre und das fortzuführende Wasserquantum Q gegeben, und man sucht die entsprechende Druckhöhe. Hier hat man zunächst die Geschwindigkeit

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{4\,Q}{\pi\, d^2} = 1{,}2732 \cdot \frac{Q}{d^2}$$

zu berechnen, dann den diesem Werthe entsprechenden Reibungscoefficienten ζ

in einer der letzten Tafeln aufzusuchen, und zuletzt die Werthe d, l, r, ζ und ζ_0, wo ζ_0 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück bezeichnet, in der ersten Hauptformel

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$$

zu substituiren.

2) Es ist die Länge und Weite der Röhre, sowie die Druckhöhe oder das Gefälle gegeben, und die Wassermenge zu bestimmen. Hier ist zunächst die Geschwindigkeit durch die Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}$$

zu finden; da aber der Widerstandscoefficient nicht ganz constant ist, sondern sich mit v etwas ändert, so muß man v vorher schon annähernd kennen, um darnach ζ ermitteln zu können.

Aus v folgt dann:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = 0{,}7854\, d^2 v.$$

3) Es ist die Wassermenge, die Druckhöhe und die Länge der Röhre gegeben, und die nöthige Weite der Röhre zu bestimmen.

Da $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$, also $v^2 = \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}$, so hat man:

$$2gh = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}, \text{ oder:}$$

$$2gh . \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 = (1 + \zeta_0) \frac{1}{d^4} + \zeta \frac{l}{d^5}, \text{ oder:}$$

$$2gh . \left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 d^5 = (1 + \zeta_0)\, d + \zeta l;$$

daher ist die Röhrenweite:

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_0)\, d + \zeta l}{2gh} . \left(\frac{4Q}{\pi}\right)^2}.$$

Nun ist aber $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1{,}6212$; $1 + \zeta_0$ im Mittel $= 1{,}505$ und für das preuß. Maß, $\frac{1}{2g} = 0{,}016$, daher läßt sich setzen:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{(1{,}505 \,.\, d + \zeta l) \frac{Q^2}{h}} \text{ Fuß.}$$

Auch diese Formel ist nur als Näherungsformel zu gebrauchen, weil in

ihr die Unbekannte d und auch der von der Geschwindigkeit $v = \frac{4\,Q}{\pi d^2}$ abhängige Coefficient ζ mit vorkommen.

Beispiele. 1) Welche Druckhöhe beansprucht eine Röhrenleitung von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, wenn dieselbe in der Minute 25 Cubikfuß Wasser fortleiten soll? Hier ist:

$$v = 1{,}2732 \cdot \frac{25\,.\,12^2}{60\,.\,5^2} = 3{,}056 \text{ Fuß},$$

daher läßt sich $\zeta = 0{,}0242$ setzen, und es folgt nun die Druckhöhe oder das totale Röhrengefälle:

$$h = \left(1{,}505 + 0{,}0242 \cdot \frac{150\,.\,12}{5}\right) \cdot 0{,}016\,.\,3{,}056^2$$
$$= (1{,}505 + 8{,}712)\; 0{,}016\,.\,9{,}330 = 1{,}525 \text{ Fuß}.$$

2) Welche Wassermenge wird eine Röhrenleitung von 48 Fuß Länge und 2 Zoll Weite bei 5 Fuß Druckhöhe liefern? Es ist:

$$v = \frac{7{,}906\,\sqrt{5}}{\sqrt{1{,}505 + \zeta \cdot \frac{48\,.\,12}{2}}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{1{,}505 + 288\,.\,\zeta}}.$$

Vorläufig $\zeta = 0{,}020$ angenommen, erhält man:

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}26}} = \frac{17{,}678}{2{,}7} = 6{,}5,$$

aber $v = 6{,}5$ giebt richtiger $\zeta = 0{,}0211$, daher hat man genauer:

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{1{,}505 + 288\,.\,0{,}0211}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582}} = 6{,}42 \text{ Fuß},$$

und das Wasserquantum:

$$Q = 0{,}7854 \cdot \left(\frac{2}{12}\right)^2 . \, 6{,}42 = 0{,}140 \text{ Cubikfuß} = 242 \text{ Cubikzoll}.$$

3) Welche Weite muß man einer 100 Fuß langen Röhrenleitung geben, die bei 5 Fuß Druckhöhe in jeder Secunde einen halben Cubikfuß Wasser liefert? Es ist:

$$d = 0{,}4817\,\sqrt[5]{(1{,}505\,d + 100\,\zeta)\,.\,{}^1\!/_5\,({}^1\!/_2)^2} = 0{,}4817\,\sqrt[5]{0{,}075\,d + 5\,\zeta}.$$

Setze ich vorläufig $\zeta = 0{,}02$, so erhalte ich:

$$d = 0{,}4817\,\sqrt[5]{0{,}075\,d + 0{,}100}, \text{ oder annähernd:}$$
$$d = 0{,}4817\,\sqrt[5]{0{,}100} = 0{,}30, \text{ also genauer:}$$
$$d = 0{,}4817\,\sqrt[5]{0{,}0225 + 0{,}100} = 0{,}4817\,\sqrt[5]{0{,}1225} = 0{,}3165 \text{ Fuß} = 3{,}8 \text{ Zoll}.$$

Dieser Weite entspricht der Querschnitt:

$$F = 0{,}7854\,.\,0{,}3165^2 = 0{,}0787 \text{ Quadratfuß, die Geschwindigkeit:}$$
$$v = \frac{Q}{F} = \frac{0{,}5}{0{,}0787} = 6{,}35 \text{ Fuß},$$

und letzterer wieder der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0211$. Führt man den letzteren genaueren Werth ein, so erhält man:

$$d = 0{,}4817\,\sqrt[5]{0{,}1280} = 0{,}319 \text{ Fuß} = 3{,}83.$$

Anmerkung 1. Versuche mit $2^1\!/_2$ und $4^1\!/_2$ Zoll weiten ordinären Holzröhren haben dem Verfasser den Widerstandscoefficienten 1,75 mal so groß gegeben, als

bei den Metallröhren, auf die sich die in den Tabellen des vorigen Paragraphen aufgeführten Werthe beziehen. Während also z. B. für die Geschwindigkeit von 3 Fuß bei Metallröhren, $\zeta = 0{,}0242$ ist, müssen wir ihn bei Holzröhren, $= 0{,}0242 \,.\, 1{,}75 = 0{,}04235$ setzen; während wir im Beispiel 1. die Druckhöhe in einer 150 Fuß langen Metallröhre 1,527 Fuß gefunden haben, wird sie bei einer gleich weiten Holzröhre unter denselben Umständen

$h = (1{,}505 + 0{,}04235 \,.\, 360) \,.\, 0{,}016 \,.\, 9{,}339 = 16{,}75 \,.\, 0{,}1494 = 2{,}50$ Fuß

gesetzt werden müssen.

Nach den Versuchen Darcy's wächst der Widerstandscoefficient ζ überhaupt sehr bedeutend mit der Rauhigkeit der Röhrenwand und steigt bei sehr rauhen Wänden auf das Zwei- bis Dreifache. Dieselbe Erfahrung hat in der neuesten Zeit auch der Verfasser gemacht.

Anmerkung 2. Einen nicht unbedeutenden Einfluß übt noch die Temperatur auf den Widerstand des Wassers in Röhren aus. Hierauf Bezug habende Versuche sind von Gerstner (s. dessen „Handbuch der Mechanik", Bd. II.) und in der neuesten Zeit von Herrn Geh. Rath Hagen (s. dessen „Abhandlungen über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren", Berlin, 1854) angestellt worden. Durch die allerdings nur an sehr engen Röhren ($d = 0{,}108$ bis $0{,}227$ Zoll) angestellten Versuche des Letzteren hat sich ergeben, daß unter übrigens gleichen Verhältnissen die Geschwindigkeit des Wassers in Röhren nicht ohne Grenze mit der Temperatur desselben zunimmt, sondern daß es für jede Röhre eine gewisse Temperatur giebt, wo diese Geschwindigkeit im Maximum ist. Für die Versuche außerhalb dieses Maximums findet Hagen folgende Formel:

$$h = m\, l\, r^{-1{,}25} \,.\, v^{1{,}75}, \text{ und}$$

$$m = 0{,}000038941 - 0{,}0000017185 \sqrt{t},$$

wo die Temperatur t in R.-Graden, und die Druckhöhe h, die Länge l, der Röhrenhalbmesser r und die Geschwindigkeit v in Zollen auszudrücken sind.

431) **Conische Röhren.** Bei einer conischen Röhre AD, Fig. 730, läßt sich der Reibungswiderstand auf folgende Weise finden. Es sei der halbe Convergenzwinkel der Röhrenwand $ACL = BCL = \delta$, der Durchmesser AB der Einmündung, $= d_1$, der Durchmesser DE der Ausmündung $= d$, ferner die Länge KL der Röhre, $= l$, und die Ausflußgeschwindigkeit (bei DE) $= v$.

Fig. 730.

In einem Abstande $KM = x$ von der Ausmündung ist der Durchmesser der Röhre:

$$NO = y = DE + 2\, KM \,tang.\, \delta$$
$$= d + 2\, x \,tang.\, \delta,$$

und daher die Geschwindigkeit w daselbst, da sich

$$\frac{w}{v} = \frac{d^2}{y^2} \text{ setzen läßt:}$$

$$w = \frac{d^2}{y^2} v = \frac{v}{\left(1 + \frac{2x}{d} tang.\, \delta\right)^2}.$$

Für ein Element $NOPR$ des Röhrenstückes von der Länge

$$OP = NR = \frac{MQ}{cos.\,\delta} = \frac{\partial x}{cos.\,\delta}$$

ist daher die Widerstandshöhe der Reibung:

$$\partial h = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y\,cos.\,\delta} \cdot \frac{w^2}{2g} = \zeta \cdot \frac{\partial x}{y\,cos.\,\delta \left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^4} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$= \zeta \cdot \frac{\partial x}{d\,cos.\,\delta \left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^5} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es folgt die Reibungswiderstandshöhe für die ganze Röhre:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \int_0^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}.$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}$$

$$= \frac{d}{2\,sin.\,\delta} \int \left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^{-5} \partial \left(\frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)$$

$$= -\frac{d}{8\,sin.\,\delta}\left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^{-4},$$ daher ergiebt sich:

$$\int_0^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}$$

$$= \frac{d}{8\,sin.\,\delta}\left[1 - \left(1 + \frac{2l}{d}\,tang.\,\delta\right)^{-4}\right],$$ oder:

$$= \frac{d}{8\,sin.\,\delta}\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^{-4}\right] = \frac{d}{8\,sin.\,\delta}\left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right],$$

da $d + 2l\,tang.\,\delta$ den Durchmesser d_1 der Einmündung ausdrückt.

Es ist folglich die gesuchte Widerstandshöhe:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2gd} \cdot \frac{d}{8\,sin.\,\delta}\left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]$$

$$= {}^1/_8\,\frac{\zeta}{sin.\,\delta}\left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] \cdot \frac{v^2}{2g} = {}^1/_8\,\zeta\,cosec.\,\delta\left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Ist die Einmündung viel weiter als die Ausmündung, so kann man $\left(\frac{d}{d_1}\right)^4$ = Null setzen, und erhält hiernach:

$$h = {}^1/_8\,\frac{\zeta}{sin.\,\delta} \cdot \frac{v^2}{2g} = {}^1/_8\,\zeta\,cosec.\,\delta \cdot \frac{v^2}{2g};$$

es hängt also in diesem Falle der Reibungswiderstand gar nicht von der Länge der Röhre ab.

Beispiel. Bei einem Feuerspritzenmundstück AK, Fig. 731, ist der Convergenzwinkel des Ausmündungsstückes BK, $2\delta = 5^0$, und der des Einmündungsstückes AB, $2\delta_1 = 18^0$, ferner die Weite der Ausmündung, $d = 7$ Linien, die Weite der Einmündung, $d_1 = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= 18$ Linien, und die ganze Länge des Gußstückes $AK = l = 6$ Zoll $= 72$ Linien, welche Größe hat der Widerstandscoefficient desselben? Setzen wir die Länge des Ausmündungsstückes $BK = l_1$, und die des Einmündungsstückes $AB = l_2$, so haben wir:

$$l_1 + l_2 = l \text{ und } l_1 \, tang.\, \delta + l_2 \, tang.\, \delta_1 = \frac{d_1 - d}{2},$$

in Zahlen:

$$l_1 + l_2 = 72 \text{ und } l_1 \, tang.\, 2\frac{1}{2}^0 + l_2 \, tang.\, 9^0 = \frac{11}{2}, \text{ oder:}$$
$$0{,}04362 \, l_1 + 0{,}15838 \, l_2 = 5{,}5.$$

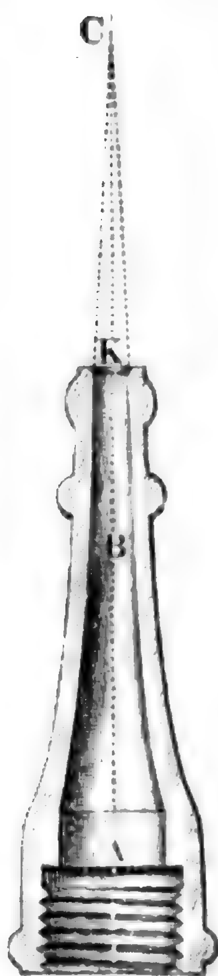


Fig. 731.

Hieraus folgt: $l_1 = 51{,}54$ und $l_2 = 20{,}46$ Linien, und die Weite bei B, wo die Kegelflächen zusammenstoßen:

$d_2 = d + 2 l_1 \, tang.\, \delta = 7 + 2 \,.\, 51{,}54 \,.\, 0{,}04362 = 11{,}53$ Linien.

Da diese Stelle abzurunden ist, möge aber $d_2 = 13$ Linien gesetzt werden. Nun folgt für das Ausmündungsstück:

$$\left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{sin.\, \delta} = [1 - (7/_{13})^4] \,.\, cosec.\, 2\frac{1}{2}^0$$
$$= 0{,}9159 \,.\, 22{,}926 = 21{,}08,$$

und für das Einmündungsstück:

$$\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right] cosec.\, \delta_1 = [1 - (13/_{18})^4] \,.\, cosec.\, 9^0$$
$$= 0{,}7795 \,.\, 6{,}392 = 4{,}98,$$

daher ist für das ganze Gußstück die Widerstandshöhe:

$$h = \frac{\zeta}{8}\left[21{,}08 + 4{,}98 \cdot \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= \frac{\zeta}{8}\left[21{,}08 + 4{,}98 \cdot \left(\frac{7}{13}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g} = 21{,}5 \cdot \frac{\zeta}{8} \cdot \frac{v^2}{2g}$$
$$= 2{,}7 \; \zeta \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und wenn man $\frac{1}{2g} = 0{,}016$ einführt, so wie $\zeta = 0{,}02$ annimmt:

$$h = 0{,}054 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

d. i. beinahe $5\frac{1}{2}$ Procent der Geschwindigkeitshöhe, womit auch die angestellten Versuche übereinstimmen.

432 **Röhrenleitungen.** Eine Röhrenleitung mündet entweder unter Wasser oder in freier Luft aus. Beide Fälle sind in den Figuren 732 und 733 abgebildet. Im ersten Falle ist als Druckhöhe h der Niveauabstand RC beider Wasserspiegel von einander, im zweiten aber die senkrechte Tiefe RO der Ausmündung O unter dem Wasserspiegel H des Zuflußapparates anzunehmen. Behält nun die Röhre überall eine und dieselbe Weite d, so finden in beiden Fällen die im §. 430 entwickelten Formeln ihre unmittelbare An-

wendung, verengert oder erweitert sich aber die Röhre an einer Stelle, so hat man es mit verschiedenen Röhrengeschwindigkeiten zu thun, und es ist daher

Fig. 732.

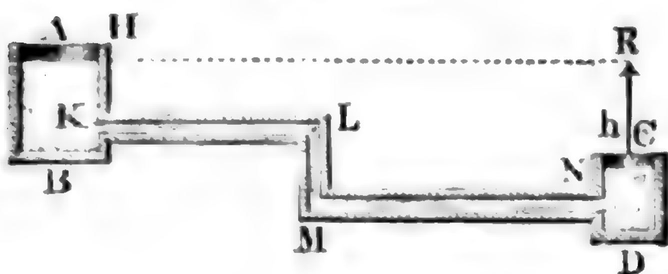
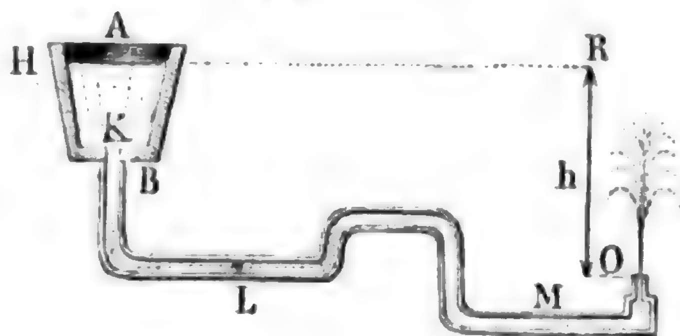


Fig. 733.



der Reibungswiderstand für jede Röhre besonders zu berechnen. Einen solchen Fall bietet z. B. die Wasserleitung in Fig. 733 mit einem springenden Strahle dar, wo das Mundstück O enger ist als die Zuleitungsröhre BLM. Setzen wir, wie gewöhnlich, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, die Weite der Ausmündung $O, = d$, die Weite der Röhre aber $= d_1$, so haben wir die Geschwindigkeit des Wassers in derselben:

$$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v,$$

und bezeichnet nun noch l_1 die Länge der Röhre BLM und ζ_1 den Reibungscoefficienten, so folgt die entsprechende Reibungshöhe:

$$h_1 = \zeta_1 \frac{l_1 v_1^2}{d_1 2g} = \zeta_1 \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Ist nun noch ζ_0 der Widerstandscoefficient für das Einmündungsstück K und ζ der für das Ausmündungsstück O, so folgt der Druckhöhenverlust, welchen das erstere verursacht,

$$h_0 = \zeta_0 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_0 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

dagegen der, welcher aus der Bewegung durch das zweite entspringt,

$$h_2 = \zeta \frac{v^2}{2g};$$

und hiernach hat man nun das ganze Gefälle:

$$h = \frac{v^2}{2g} + h_0 + h_1 + h_2 = \left[1 + \zeta_0 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta\right] \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt, die Ausflußgeschwindigkeit:

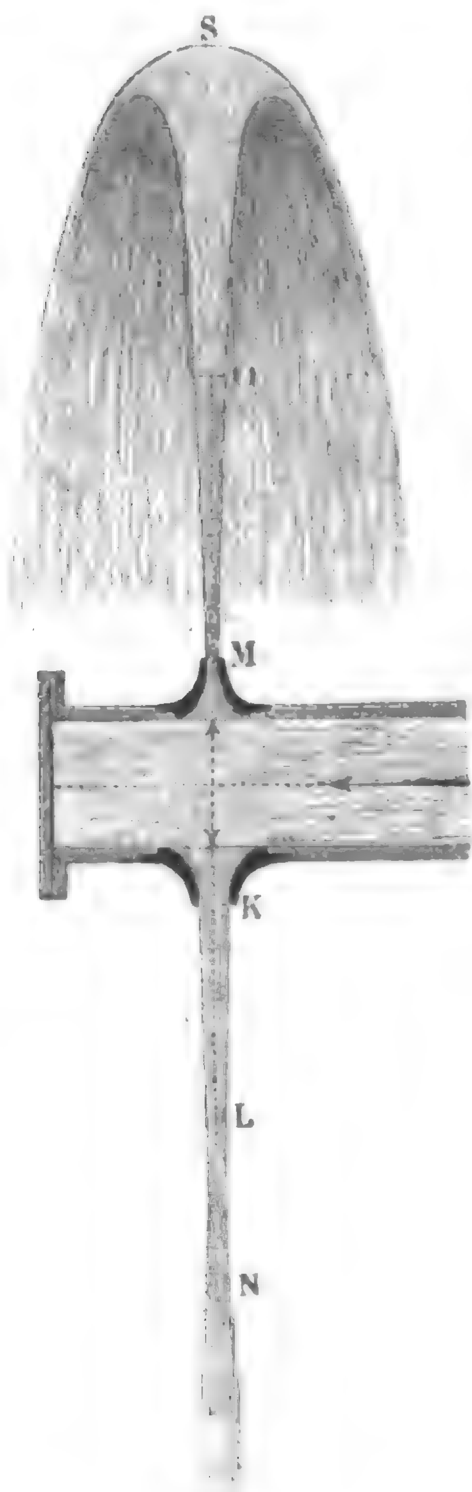
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta}}.$$

Die Mund- oder Ausgußstücke müssen zur Erzielung einer großen Steighöhe nicht bloß dem Wasser einen möglichst kleinen Widerstand darbieten, sondern auch das Ausströmen in möglichst parallelen Fäden bewirken, damit dieselben beim Aufsteigen einen lang zusammenhängenden Strahl bilden, der

durch die Luft weniger gestört wird als ein gleich anfangs zerrissener Strahl. Aus diesem Grunde zieht man die kurzen cylindrischen oder wenig conischen Mundstücke mit abgerundeter Einmündung den Ausmündungen in der dünnen Wand oder den nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformten Mundstücken vor, obgleich sie einen etwas größeren Geschwindigkeitsverlust verursachen als diese. Die Knoten und Bäuche, welche der aus den letzteren Mündungen kommende Strahl bildet oder zu bilden sucht, geben der äußeren Luft mehr Gelegenheit zum Eindringen als ein cylindrischer Strahl.

433 **Springende Strahlen.** So lange der aus einer horizontalen Mündung K, Fig. 734, senkrecht abwärts fließende Strahl KLN noch ein Continuum bildet, und nicht von der Luft zerrissen wird, nimmt dessen Querschnitt L immer mehr und mehr ab, wenn der Abstand $KL = x$ von der Mündung wächst. Ist c die Ausflußgeschwindigkeit, und v die Geschwindigkeit in L, so hat man:

Fig. 734.



$$v^2 = 2gx + c^2;$$

und bezeichnet F die Querschnittsfläche der Ausmündung, sowie Y die Querschnittsfläche des Strahles in L, so gilt auch die Gleichung:

$$Fc = Yv, \text{ oder } F^2c^2 = Y^2v^2,$$

und es folgt schließlich die Gleichung:

$$Y^2(c^2 + 2gx) = Fc^2, \text{ oder:}$$

$$Y^2 = \frac{F^2c^2}{c^2 + 2gx}$$

für die Gestalt des die sogenannte Newton'sche Cataracte bildenden Wasserstrahles KN (siehe Newtoni Principia Philosophiae, Tom. II, Sect. VII). Ist der Querschnitt der Mündung K ein Kreis vom Durchmesser d, so bildet der Querschnitt L einen Kreis vom Durchmesser y, für welchen hiernach

$$y^4 = \frac{c^2d^4}{c^2 + 2gx}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gx}{c^2}}} \text{ ist.}$$

Ueber die innere Beschaffenheit der fallenden Wasserstrahlen sind von Savart

Versuche angestellt worden, siehe Poggendorff's Annalen der Physik, Bd. 33.

Bei dem aus einer horizontalen Mündung M senkrecht aufsteigenden Strahl MS nimmt dagegen der Querschnitt O mit der Entfernung $MO = x$ von der Mündung M allmälig zu; denn es ist hier die Geschwindigkeit des Wassers in O,

$$v = \sqrt{c^2 - 2gx}, \text{ und daher}$$

$$Y^2 = \frac{F^2 c^2}{c^2 - 2gx},$$

folglich für den Querschnittsdurchmesser y in O,

$$y^4 = \frac{c^2 d^4}{c^2 - 2gx}, \text{ oder } y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - \frac{2gx}{c^2}}}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ durch h, so ist einfach und allgemein:

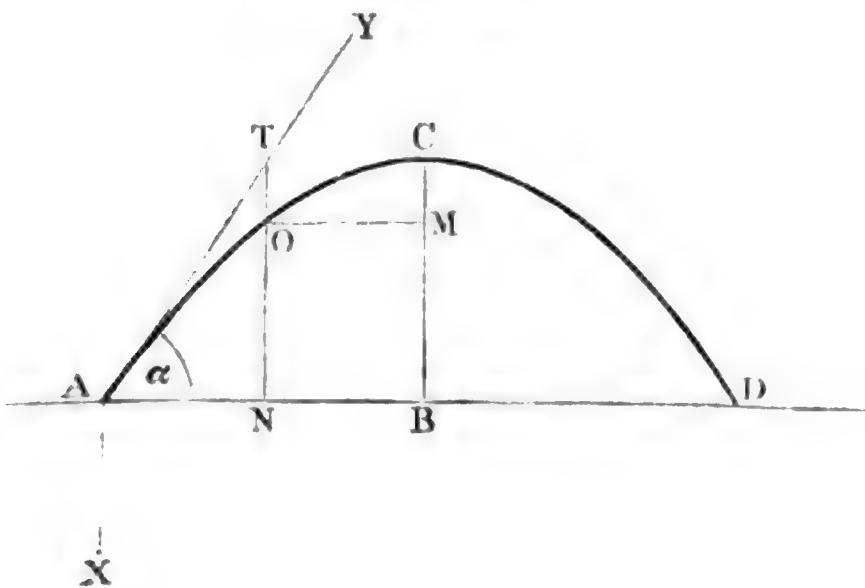
$$y_1 = \frac{d}{\sqrt[4]{1 \pm \frac{x}{h}}}.$$

Diese Formel verliert jedoch in ihren Grenzen ihre Richtigkeit; ihr zu Folge wäre z. B. beim steigenden Strahle für $x = h$, also im Scheitel S, der Durchmesser des Strahles

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1-1}} = \frac{d}{0} = \infty.$$

Dies ist jedoch nicht der Fall, weil die einzelnen Wasserfäden, aus welchen der Strahl besteht, an der höchsten Stelle nicht ganz in Ruhe sind, sondern daselbst in Richtung radial-auswärts eine kleine Geschwindigkeit haben. Wenn der Wasserstrahl AOC, Fig. 735, in einer gegen den Horizont geneigten Richtung ausströmt, so bleibt die Formel

Fig. 735.



$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 \pm \frac{x}{h}}}$$

noch anwendbar, wenn man nur darin statt x die Verticalprojection NO des Strahles AO

einsetzt. Tritt der Strahl unter dem Neigungswinkel ν aus der Mündung, so ist die größte Steighöhe BC:

$$a = \frac{c^2 (sin.\, \nu)^2}{2g} = h\, (sin.\, \nu)^2 \text{ (s. §. 39)},$$

daher der Durchmesser desselben (im Scheitel C):

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - \frac{a}{h}}} = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - (sin.\, \nu)^2}} = \frac{d}{\sqrt{cos.\, \nu}}.$$

Im niedergehenden Strahltheile CD wird y wieder allmälig kleiner und kleiner, und beim Auffallen auf die Horizontalebene AD, von der er ausgegangen ist, würde y wieder $= d$ sein, wenn die Luft keine Störungen in der Bewegung des Strahles hervorbrächte.

§. 434 Die **Steighöhe** s eines vertical springenden Wasserstrahles ist nur bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten (c) nahe gleich der Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$; bei größeren Ausflußgeschwindigkeiten fällt dagegen in Folge des Widerstandes der Luft die Steighöhe s namhaft kleiner aus als die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$. Aus den vom Verfasser angestellten Versuchen (s. die Versuche über die Steighöhe springender Wasserstrahlen bei verschiedenen Mundstücken im 5. Bande der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure) sind folgende Thatsachen über springende Wasserstrahlen hervorgegangen:

1) Der Widerstand der Luft ist bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten von 5 bis 20 Fuß, oder bei Steighöhen von 1 bis 6 Fuß so klein, daß hier die Sprunghöhe s ohne merklichen Fehler der Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ des ausströmenden Wassers gleichgesetzt werden kann.

2) Wenn die Geschwindigkeitshöhe nicht über 75 Fuß, oder die Ausflußgeschwindigkeit nicht über 56 Fuß ist, so läßt sich das Verhältniß der Steighöhe s zur Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ setzen:

$$\frac{s}{h} = \frac{1}{\alpha + \beta h + \gamma h^2},$$

wobei α, β und γ für jede Mündung besonders zu bestimmende Erfahrungscoefficienten bezeichnen.

3) Bei Wasserstrahlen, welche aus Mündungen in der dünnen Wand emporspringen, läßt sich die Constante $\alpha =$ Eins setzen, folglich auch annehmen, daß der Widerstand beim Durchgang durch die Mündung bei einer kleinen Geschwindigkeit ziemlich Null ist, und erst bei größeren Ausfluß-

geschwindigkeiten meßbar wird. Hiernach ist also auch der Widerstandscoefficient ζ für diese Mündungen nicht constant, sondern wächst von Null an allmälig mit der Geschwindigkeit und der §. 408 angegebene Werth $\zeta = 0{,}97$ kann nur als ein mittlerer angesehen werden.

4) Bei gleicher Ausflußgeschwindigkeit wächst die Steighöhe mit der Dicke des Strahles oder der Weite der Ausflußmündung; es ist folglich der Widerstand der Luft bei dicken Strahlen kleiner als bei schwachen. Die Steighöhe ist deshalb nicht allein bei großen Druckhöhen, sondern auch bei starken Strahlen größer als bei kleinen Druckhöhen und bei schwachen Strahlen.

5) Unter übrigens gleichen Verhältnissen springen die Wasserstrahlen aus kreisförmigen Mündungen höher als die aus quadratischen oder anders geformten Mündungen.

6) Bei gleicher Ausflußgeschwindigkeit und gleicher Mündungsweite springen die ohne Contraction ausfließenden Wasserstrahlen höher als die contrahirten Wasserstrahlen, und zwar nicht allein, weil diese Strahlen im Ganzen dünner sind als jene, sondern auch weil sie durch ihre abwechselnden Zusammenziehungen und Anschwellungen dem Eindringen der Luft weniger Widerstand entgegensetzen.

Unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen und bei nicht sehr kleinen Ausflußgeschwindigkeiten erreichen die durch kurze conoidische und längere conische Ansatzröhren mit innerer Abrundung ausfließenden Strahlen die größten Steighöhen.

Mariotte folgert aus seinen Versuchen über die Steighöhe springender Strahlen (s. die Meining'sche Uebersetzung von Mariotte's Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik), an Mündungen in der dünnen Wand von 4 und 6 Linien Durchmesser und bei Druckhöhen von $5^1/_2$ bis 35 Fuß, daß die zur Erlangung der Steighöhe s nöthige Druck- oder Geschwindigkeitshöhe

$$h = s + \frac{s^2}{300} \text{ Pariser Fuß}$$

sein müsse, wonach folglich

$$\frac{h}{s} = 1 + \frac{s}{300} = 1 + 0{,}0033335 \text{ zu setzen wäre.}$$

Die weit ausgedehnteren und sehr mannigfaltigen Versuche des Verfassers, welche derselbe bei Druckhöhen von 3 bis 70 Fuß angestellt hat, geben dagegen für Kreismündungen in der dünnen Wand,

1) von 1 Centimeter Durchmesser:

$$\frac{h}{s} = 1 + 0{,}0036354\,h + 0{,}00005732\,h^2, \text{ und}$$

2) von 1,41 Centimeter Durchmesser:

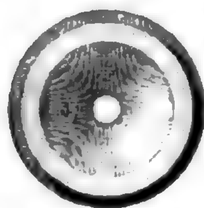
$$\frac{h}{s} = 1 + 0{,}0024424\, h + 0{,}000059475\, h^2,$$

wobei h in preuß. Fußen zu geben ist.

Für ein conisches Mundstück ABC, Fig. 736, von 15 Centimeter Länge und 1 Centimeter Weite in der Ausmündung C und 3 Centimeter in der übrigens gut abgerundeten Einmündung A, ist gefunden worden:

Fig. 736.

Fig. 737.



$$3)\quad \frac{h}{s} = 1{,}0453 + 0{,}0001171\, h + 0{,}00008462\, h^2,$$

und dagegen für das abgekürzte Mundstück AB, Fig. 737, von 1,41 Weite in der Ausmündung B:

$$4)\quad \frac{h}{s} = 1{,}0216 + 0{,}0007511\, h + 0{,}00003219\, h^2.$$

Mit Hülfe dieser Formeln ist folgende Tabelle der Steighöhen springender Wasserstrahlen berechnet worden.

Geschwindigkeitshöhe h =	10	20	30	40	50	60	70 Fuß.
Sprunghöhe s, ad (1)	9,60	18,26	25,85	32,33	37,74	42,12	45,60
" " " (2)	9,71	18,65	26,62	33,53	39,35	44,10	47,87
" " " (3)	9,48	18,49	26,67	33,75	38,60	44,22	47,63
" " " (4)	9,69	19,06	27,96	36,26	43,87	50,74	56,82

Beispiel. Wenn an einem Springbrunnen die Leitungsröhre 350 Fuß lang und 2 Zoll weit und das conische Mundstück desselben $\frac{1}{2}$ Zoll weit ist, wie hoch wird bei einer Druckhöhe h_0 von 40 Fuß der Strahl springen, vorausgesetzt, daß außer der Reibung alle übrigen Röhrenwiderstände klein genug sind, um sie vernachlässigen zu können. Es ist hier, wenn man

$$\zeta_1 = 0{,}025,\ \zeta_0 = 0{,}5 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = (\tfrac{1}{4})^4 = \tfrac{1}{256} \text{ und } \frac{l_1}{d_1} = \frac{350}{\tfrac{2}{12}} = 2100 \text{ setzt,}$$

die Höhe, welche der Ausflußgeschwindigkeit entspricht:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{h_0}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4} = \frac{40}{1 + (0{,}5 + 0{,}025 \cdot 2100) \cdot \tfrac{1}{256}}$$

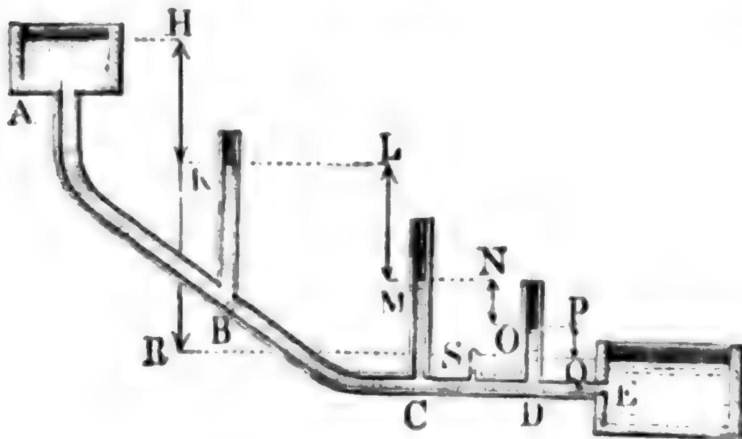
$$= \frac{40}{1{,}207} = 33{,}14 \text{ Fuß.}$$

und daher die zu erwartende Steighöhe, bei ruhiger Luft, nach Formel (4):

$$s = \frac{h}{1,0216 + 0,0007511\, h + 0,00003219\, h^2} = \frac{33,14}{1,0216 + 0,0249 + 0,0354}$$
$$= \frac{33,14}{1,0515} = 30,63 \text{ Fuß}.$$

Piëzometer. Die Druckverluste, welche das Wasser in einer Röhrenleitung $ABCDE$, Fig. 738, durch Verengungen, Reibung u. s. w. erleidet, kann man durch die Wassersäulen messen, welche sich in senkrecht aufgesetzten Röhren BK, CM, DO erhalten, die man, wenn sie lediglich zu diesem Zwecke dienen, Piëzometer nennt. (S. §. 386.) §. 435

Fig. 738.



Ist v die Geschwindigkeit des Wassers an der Stelle B, Fig. 738, wo ein Piëzometer einmündet, l die Länge, d die Weite des Röhrenstückes AB, h die Druckhöhe oder die Tiefe des Punktes B unter dem Wasserspiegel, ist ferner ζ_0 der Widerstandscoefficient für den Eintritt aus dem Reservoir in die Röhre, und ζ der Reibungscoefficient, so hat man für den, den Druck in B messenden Piëzometerstand:

$$z = h - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Dagegen ist bei der Länge l_1 und dem Gefälle h_1 des Röhrenstückes BC, der Piëzometerstand in C:

$$z_1 = h + h_1 - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Es folgt daher die Differenz der Piëzometerstände:

$$z_1 - z = h_1 - \zeta \frac{l_1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt, die Widerstandshöhe des Röhrenstückes BC

$$\zeta \frac{l_1}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = h_1 + z - z_1 = \text{Gefälle des Röhrenstückes}$$

plus Differenz der Piëzometerstände.

Man ersieht hieraus, daß die Piëzometer dazu dienen können, die Widerstände, welche das Wasser in den Röhrenleitungen zu überwinden hat, zu messen. Befindet sich in der Röhre ein besonderes Hinderniß, hat sich z. B. ein kleiner Körper in derselben festgesetzt, so wird dieses sogleich durch das Sinken des Piëzometerstandes angezeigt und die Größe des erzeugten Widerstandes ausgedrückt werden. Die Widerstände, welche durch Regulirungs-

apparate, wie Hähne, Schieber u. s. w., von welchen im folgenden Capitel die Rede ist, erzeugt werden, lassen sich ebenfalls durch Piëzometerstände ausdrücken. So steht z. B. das Piëzometer in D tiefer als das in C, nicht allein wegen der Reibung des Wassers in dem Röhrenstücke CD, sondern auch wegen der Verengung, welche der Schieber S in der Röhre hervorbringt. Ist bei völlig geöffnetem Schieber die Differenz NO der Piëzometerstände $= h_1$, bei eingestelltem Schieber aber $= h_2$, so giebt die neue Differenz oder Senkung $h_2 - h_1$ die Widerstandshöhe, welche dem Durchgange des Wassers durch den Schieber entspricht.

Endlich läßt sich auch aus dem Piëzometerstande die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers berechnen. Ist der Piëzometerstand $PQ = z$, die Länge des letzten Röhrenstückes $DE = l$ und die Weite desselben $= d$, so hat man:

$$z = \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gz}{\zeta \frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{d}{l} \cdot \frac{2gz}{\zeta}}.$$

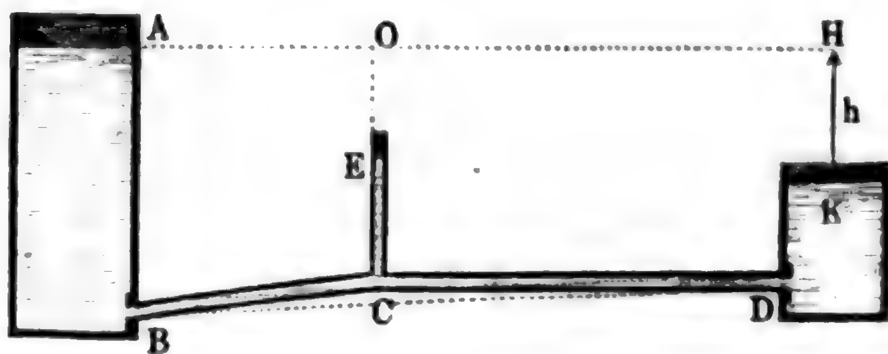
Beispiel. Ist bei der Leitung in Fig. 738, der Piëzometerstand $PQ = z = \frac{3}{4}$ Fuß, die Länge der Röhre DE, vom Piëzometer bis zur Ausmündung gemessen, $l = 150$ Fuß, und die Röhrenweite $3\frac{1}{2}$ Zoll, so folgt bei dem Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}025$ die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = 7{,}906 \sqrt{\frac{3{,}5}{150 \,.\, 12} \cdot \frac{0{,}75}{0{,}025}} = 7{,}906 \,.\, 0{,}2415 = 1{,}91 \text{ Fuß},$$

und die Ausflußmenge: $Q = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{3{,}5}{12}\right)^2 \cdot 1{,}91 = 0{,}127$ Cubikfuß.

Anmerkung. Die Bewegung des Wassers in einer Röhrenleitung BCD, Fig. 739, kann sehr leicht durch Luft gestört werden, welche sich entweder aus dem

Fig. 739.



Wasser entwickelt, oder von außen in die Röhre eindringt. Damit keins von beiden eintrete, muß bei der Anlage der Röhrenleitung dafür gesorgt werden, daß der Druck an jeder Stelle C derselben positiv bleibe, oder vielmehr den Atmosphärendruck übertreffe, also in jedem Piëzometer eine Wassersäule CE stehe. Die Höhe dieser Wassersäule ist:

$$z = h_1 - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g},$$

wenn h_1 die Druckhöhe CO in C, l_1 die Länge des Röhrenstückes BC, und v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre bezeichnet. Es ist also nöthig, daß

$$h_1 > \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$$

sei, daß z. B. der Wasserstand im Zuflußreservoir mindestens die Geschwindigkeitshöhe des Wassers in der Röhre übertreffe. Außerdem ist zu befürchten, daß die Röhre in einem Wirbel Luft nachsauge.

Auch läßt sich $h_1 > \dfrac{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}}{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}} h$ setzen, wenn h das ganze Röhrengefälle HK und l die ganze Röhrenlänge BCD bezeichnet.

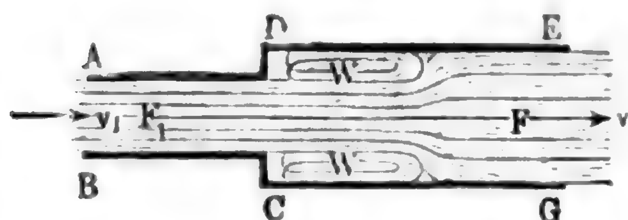
Um das Ansammeln von Luft in der Röhre mit Sicherheit zu verhindern, ist es sehr zweckmäßig, dieselbe steigend zu legen, weil dann die Luftblasen vom fließenden Wasser mit fortgenommen werden.

Viertes Capitel.

Von den Hindernissen in der Bewegung des Wassers bei Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen.

Plötzliche Erweiterung. Veränderungen in dem Querschnitte einer Röhre oder eines anderen Ausflußreservoirs geben auch Veränderungen in der Geschwindigkeit des Wassers. Die Geschwindigkeit ist dem Querschnitte des Wasserstromes umgekehrt proportional; je weiter das Gefäß ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeit, und je enger das Gefäß, desto größer die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers. Aendert sich der Querschnitt eines Gefäßes plötzlich, wie z. B. bei der Röhre ACE, Fig. 740, so tritt auch eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein, und hiermit ist wieder ein Verlust an lebendiger Kraft und eine entsprechende Abnahme an Druck verbunden. Dieser Verlust läßt sich genau so berechnen, wie der Arbeitsverlust beim Stoße unelastischer Körper (s. §. 335). Jedes Wasserelement, welches aus der engeren Röhre BD in §. 4[...]

Fig. 740.



die weitere Röhre DG tritt, stößt gegen die langsamer gehende Wassermasse in dieser Röhre und geht nach dem Stoße mit dieser vereinigt fort. Genau so ist es aber auch bei dem Zusammentreffen fester und unelastischer Körper, auch diese Körper gehen nach dem Stoße mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit fort. Wenn wir nun gefunden haben, daß der Arbeitsverlust beim Stoße dieser Körper

$$L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$$

ist, so können wir hier, da das stoßende Wasserelement G_1 unendlich klein ist gegen die gestoßene Wassermasse G_2, setzen:

$$L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} G_1,$$

und folglich den entsprechenden Verlust an Druckhöhe:

$$h = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}.$$

Es entsteht also durch die plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein Druckhöhenverlust, welcher durch die dieser Veränderung entsprechende Geschwindigkeitshöhe gemessen wird.

Ist nun der Querschnitt der einen Röhre AC, $= F_1$, und der Querschnitt der anderen Röhre CE, welche mit der ersteren ein Ganzes bildet, $= F$, die Geschwindigkeit des Wassers in der ersten Röhre, $= v_1$ und die in der anderen, $= v$, so hat man:

$$v_1 = \frac{Fv}{F_1},$$

daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus einer Röhre in die andere:

$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und den entsprechenden, schon von Borda gefundenen Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Die gefundene Druckhöhe

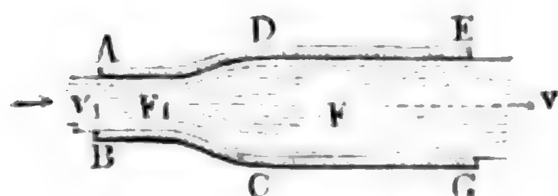
$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

kann natürlich nicht spurlos verloren gehen, man muß vielmehr annehmen, daß die ihr entsprechende mechanische Arbeit auf die Zertheilung und die schwingende Bewegung der vorher ein Continuum bildenden Wassertheile, zumal auf die Wirbelbewegung in W, W verwendet wird.

Die hierüber angestellten Versuche des Verfassers stimmen mit der Theorie

gut überein. Damit die Röhre DG vom Wasser ausgefüllt werde, ist es nöthig, daß sie nicht sehr kurz und nicht sehr viel weiter sei als die Röhre AC. Dieser Verlust verschwindet, wenn, wie Fig. 741 repräsentirt, durch Abrundung der Kanten ein allmäliger Uebergang aus der einen Röhre in die andere herbeigeführt wird.

Fig. 741.



Beispiel. Wenn der Durchmesser der einen Röhre in der Zusammensetzung von Fig. 740 noch einmal so groß ist als der der anderen Röhre, so ist $\frac{F}{F_1} = (^2/_1)^2 = 4$, daher der Widerstandscoefficient $\zeta = (4 - 1)^2 = 9$ und die entsprechende Widerstandshöhe für den Uebergang aus der engeren Röhre in die weitere, $= 9 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Ist die Geschwindigkeit des Wassers in der letzteren Röhre, $= 10$ Fuß, so folgt die Widerstandshöhe $= 9 . 0{,}016 . 10^2 = 14{,}4$ Fuß.

Verengung. Eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung tritt auch dann ein, wenn das Wasser aus einem Gefäße AB, Fig. 742, in eine engere Röhre DG tritt, zumal wenn an der Eintrittsstelle CD ein Diaphragma sitzt, dessen Oeffnung noch kleiner ist als der Querschnitt des Rohres DG. Ist der Inhalt der Verengung, $= F_1$, und α der Contractionscoefficient, so hat man den Querschnitt F_2 des contrahirten Wasserstrahles, $= \alpha F_1$, und ist dagegen F der Querschnitt des Rohres und v die Ausflußgeschwindigkeit, so findet man die Geschwindigkeit des Wassers im contrahirten Querschnitte F_2 durch die Formel §. 43

$$v_2 = \frac{F}{\alpha F_1} v,$$

daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus F_2 in F oder aus v_2 in v:

$$h = \frac{(v_2 - v)^2}{2g} = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

und den entsprechenden Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2.$$

Fig. 742.

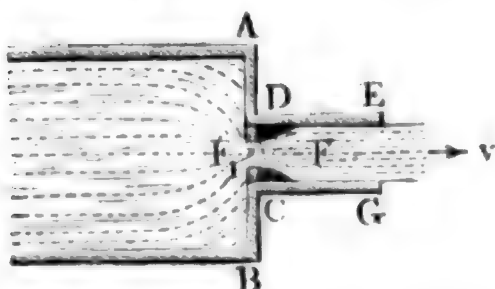
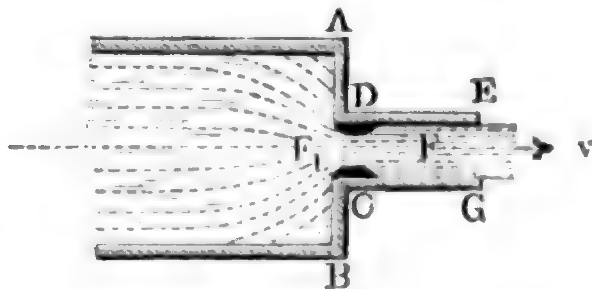


Fig. 743.



Ohne Diaphragma erhält man eine bloße Ansatzröhre, Fig. 743, daher ist hier $F = F_1$ und

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2,$$

sowie umgekehrt,

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\zeta}}.$$

Nimmt man $\alpha = 0{,}64$ an, so erhält man:

$$\zeta = \left(\frac{1 - 0{,}64}{0{,}64}\right)^2 = (9/_{16})^2 = 0{,}316.$$

Durch den Widerstand beim Eintritt in die Röhre und durch die Reibung des Wassers im äußeren Röhrenstücke steigert sich aber ζ auf 0,505 (§. 422).

Versuche über den Ausfluß des Wassers durch eine Ansatzröhre mit verengtem Eintritte, wie Fig. 742 vorstellt, haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch ein Diaphragma und für den Anschluß an die weitere Röhre kann durch die Formel

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$$

ausgedrückt werden; es ist aber zu setzen:

Für $\frac{F_1}{F} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\alpha =$	0,616	0,614	0,612	0,610	0,607	0,605	0,603	0,601	0,598	0,596
und folgt:										
$\zeta =$	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

Hiernach ist z. B. in dem Falle, wenn der verengte Querschnitt halb so groß ist als der Querschnitt der Röhre, der Widerstandscoefficient $\zeta = 5{,}256$, d. h. der Durchgang durch diese Verengung nimmt eine Druckhöhe in Anspruch, welche $5^1/_4$ mal so groß ist als die Geschwindigkeitshöhe.

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt der in Fig. 742 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $1^1/_2$ Fuß, die Weite der kreisförmigen Verengung $1^1/_2$ und die der Röhre CE, = 2 Zoll ist? Hier hat man:

$$\frac{F_1}{F} = \left(\frac{1^1/_2}{2}\right)^2 = (3/_4)^2 = 9/_{16} = 0{,}56, \text{ daher } \alpha = 0{,}606, \text{ und}$$

$$\zeta = \left(\frac{16}{9 \,.\, 0{,}606} - 1\right)^2 = \left(\frac{16 - 5{,}454}{5{,}454}\right)^2 = \left(\frac{10{,}546}{5{,}454}\right)^2 = 3{,}74.$$

Setzt man nun $h = (1 + \zeta)\,\frac{v^2}{2g}$, so erhält man die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{7{,}906\,\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{4{,}74}} = 4{,}45 \text{ Fuß},$$

und folglich das Ausflußquantum:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\,v = \frac{\pi}{4}\cdot 4\,.\,12\,.\,4{,}45 = 53{,}4\,.\,\pi = 168 \text{ Cubikzoll.}$$

Einfluss der unvollkommenen Contraction. Bei dem im letzten Paragraphen betrachteten Falle, wo das Wasser aus einem großen Gefäße kommt, konnte die Contraction als eine vollkommene angesehen werden; ist aber der Querschnitt des Gefäßes oder des an einer Verengung ankommenden Wasserstromes nicht sehr groß in Ansehung auf den Querschnitt F_1, Fig. 744, der Verengung, so ist die Contraction eine unvollkommene und daher auch der entsprechende Widerstandscoefficient kleiner als in dem oben untersuchten Falle. Gelten wieder die vorigen Bezeichnungen, so hat man auch hier die Widerstandshöhe oder die durch den Durchgang durch F_1 verzehrte Druckhöhe: §. 4

$$h = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

nur sind für α_1 veränderliche, und zwar um so größere Zahlen einzusetzen, je größer das Verhältniß $\frac{F_1}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Verengung und dem Querschnitt G der Zuleitungsröhre AB ist. Befindet sich das Dia-

Fig. 744.

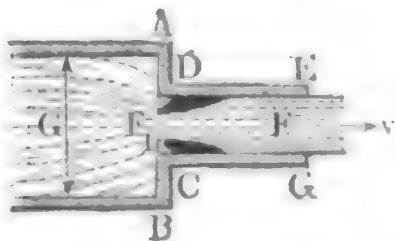
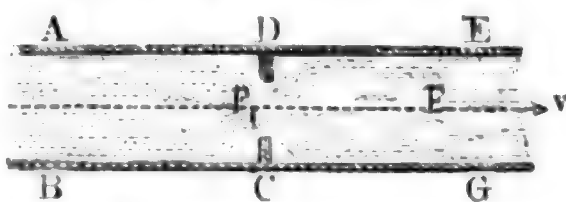


Fig 745.



phragma CD in einer gleichweiten Röhre AG, Fig. 745, so findet ganz dieselbe Bestimmung statt, nur hängt hier der Coefficient α von $\frac{F_1}{F}$ ab.

Nach den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen hat man in der Formel

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2$$

für die Widerstandscoefficienten zu setzen:

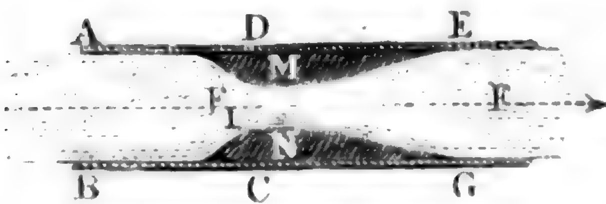
bei $\frac{F_1}{F}$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α_1 =	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,000

und es folgt:

ζ =	225,9	47,77	30,83	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

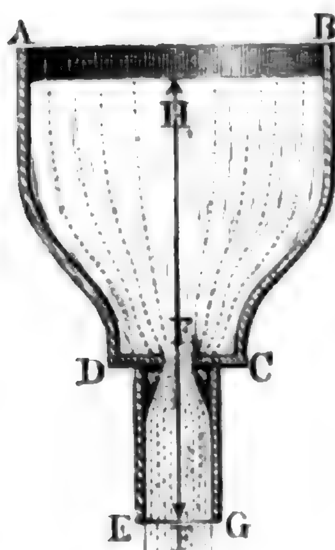
Diese Verluste werden kleiner, wenn man durch Abrundung der Kanten die Contraction vermindert oder aufhebt, und sie lassen sich fast ganz beseitigen, wenn man, wie Fig. 746 repräsentirt, ein sich allmälig erweiterndes Durchgangsstück MN einsetzt.

Fig. 746.



Beispiel. Welche Druckhöhe wird erfordert, damit der in Fig. 747 abgebildete Apparat in der Minute 8 Cubikfuß Wasser liefere? Ist die Weite des Diaphragma F_1, $= 1^1/_2$, die Weite der Ausflußröhre DG, $= 2$ Zoll und die untere Weite des Gefäßes AC, $= 3$ Zoll, so hat man:

Fig. 747.



$$\frac{F_1}{G} = \left(\frac{1^1/_2}{3}\right)^2 = {}^1/_4, \text{ daher } \alpha = 0{,}637,$$

ferner:

$$\frac{F}{F_1} = \left(\frac{2}{1^1/_2}\right)^2 = ({}^4/_3)^2 = {}^{16}/_9,$$

und den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{16}{9\,.\,0{,}637} - 1\right)^2 = \left(\frac{10{,}267}{5{,}733}\right)^2 = 3{,}207.$$

Nun folgt die Ausflußgeschwindigkeit:

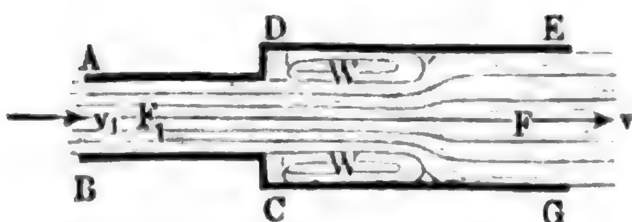
$$v = \frac{4\,Q}{\pi\, d^2} = \frac{4\,.\,8}{60\,.\,\pi\,({}^1/_6)^2} = \frac{19{,}2}{\pi} = 6{,}112 \text{ Fuß},$$

und daher die in Frage stehende Druckhöhe:

$$h = (1 + \zeta)\,\frac{v^2}{2g} = 4{,}207\,.\,0{,}016\,.\,6{,}112^2 = 2{,}51 \text{ Fuß}.$$

439 **Druckverhältnisse in cylindrischen Röhren.** Mit Hülfe der Borda'schen Formel lassen sich nun auch die Druckverhältnisse in einer Ausflußröhre mit verschiedenen Weiten, wie z. B. ACE Fig. 748, ermitteln. Ist p_1 der Druck und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in F_1, sowie p der Druck und v die Geschwindigkeit desselben in F, so hat man:

Fig. 748.



$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}, \text{ und daher}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_1^2 + (v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \frac{(v_1 - v)\,v}{g}, \text{ oder}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)\frac{v^2}{g}.$$

Nun ist aber die ganze Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \left[1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

daher hat man auch

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \frac{2\,(v_1 - v)\,v}{v^2 + (v_1 - v)^2}\,h,$$

$$= \frac{p}{\gamma} - \frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}.$$

In dem Falle, wo das Wasser mit dem Querschnitte F in die freie Luft strömt, ist $\frac{p}{\gamma}$ = dem Wasserbarometerstande b, daher die Piëzometerhöhe in F_1,

$$z_1 = \frac{p_1}{\gamma} = b - \frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}.$$

So lange nun p_1 positiv ausfällt, fließt auch das Wasser mit gefülltem Querschnitt F bei EG aus; stellt sich hingegen p_1 negativ heraus, so hört das vorausgesetzte Ausflußverhältniß ganz auf, und es fließt das Wasser durch die äußere Röhre CE so aus, als wenn dieselbe gar nicht vorhanden wäre, und zwar mit der theoretischen Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$.

Damit der volle Ausfluß bei EG eintrete, ist folglich nöthig, daß

$$\frac{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)h}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2} < b, \text{ oder daß}$$

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)} \text{ sei.}$$

Wenn also die durch diese Formel angegebene Grenze von der Druckhöhe h übertroffen wird, hört der Ausfluß mit gefülltem Querschnitte auf.

Diese Formel findet auch ihre Anwendung bei der Röhre CE, Fig. 742, mit Diaphragma; hier ist nur statt F_1, $\alpha_1 F_1$ einzusetzen, daher für den vollen Ausfluß

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{\alpha_1 F_1} - 1\right)} \text{ zu fordern.}$$

Läßt man das Diaphragma weg, hat man es also bloß mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre CE, Fig. 743, zu thun, so ist $F_1 = F$ und daher

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} \text{ zu setzen.}$$

Führt man $\alpha = 0{,}64$, also $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}5625$ ein, so ergiebt sich für diese Röhren die Grenze des Ausflusses mit gefülltem Querschnitt:

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + 0{,}3164}{2 \,.\, 0{,}5625}, \text{ d. i. } \frac{h}{b} < 1{,}17.$$

Nimmt man $b = 33$ Fuß an, so folgt, daß bei Druckhöhen über $1{,}17 \,.\, 33 = 38{,}6$ Fuß der volle Ausfluß durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre aufhört.

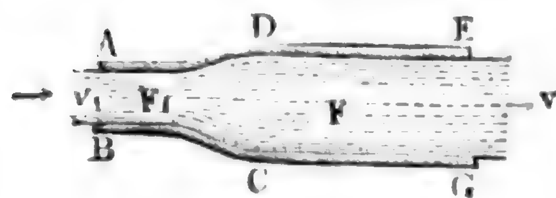
Hiermit stimmen auch die Ergebnisse der Versuche des Verfassers vollkommen überein (s. den betreffenden Aufsatz im 9. Bande des Civilingenieur, über den Ausfluß des Wassers unter hohem Drucke).

Beim Ausfluß des Wassers in einen luftverdünnten Raum tritt diese Grenze noch eher ein, da dann b kleiner als 33 Fuß ist; wäre z. B. der Wasserbarometerstand in diesem Raume nur 3 Fuß, so würde der volle Ausfluß durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre bei der Druckhöhe $h = 1{,}17 \,.\, 3 = 3{,}51$ Fuß aufhören.

Wenn das Wasser durch eine sich allmälig erweiternde Röhre ACE Fig. 749, fließt, so ist der Piëzometerstand im Einmündungsstück AB:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right]\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] h,$$

Fig. 749.



folglich wenn man $\frac{p}{\gamma} = b$ setzt

$$z_1 = \frac{p_1}{\gamma} = b - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] h.$$

Es ist daher hier

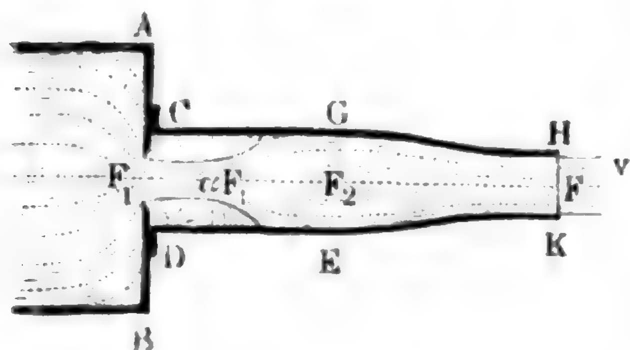
$$\frac{h}{b} < \frac{1}{\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1}$$

zu fordern, damit der Ausfluß mit gefülltem Querschnitte erfolge. Setzt man $\frac{h}{b} = 1{,}17$, also $\frac{b}{h} = 0{,}8547$, so erhält man das Querschnittsverhältniß, bei welchem unter der Druckhöhe $h = 38{,}6$ Fuß der volle Ausfluß aufhört:

$$\frac{F}{F_1} = \sqrt{1 + 0{,}8547} = 1{,}362,$$

Druckverhältnisse in conischen Röhren. Das Ausfluß- und Druckverhältniß bei einer cylindrischen Röhre CE mit oder ohne Diaphragma erleidet folgende Modificationen, wenn noch ein besonderes Mundstück oder eine andere Röhre $EGHK$, Fig. 750, an diese Röhre angeschlossen ist. Es bezeichne F den Querschnitt, v die Geschwindigkeit und p den Druck des Wassers an der Ausmündung HK, ferner F_1 den Querschnitt der Einmündung, αF_1 den Querschnitt des contrahirten Wasserstrahles, sowie v_1 die Geschwindigkeit und p_1 den Druck des Wassers in demselben; ebenso sei F_2 der Röhrenquerschnitt an der Stelle, wo sich der Wasserstrahl wieder an die Röhre anlegt, endlich bezeichne v_2 die Geschwindigkeit und p_2 den Druck des Wassers an eben dieser Stelle. §. 4

Fig. 750.



Dann hat man

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_2^2}{2g} \text{ und daher}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_2^2}{2g} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g}$$

$$= \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 + v_2^2}{2g} - \frac{v_1 v_2}{g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2}{2g},$$

oder, da $\alpha F_1 v_1 = F_2 v_2 = F v$ ist, also

$$v_1 = \frac{Fv}{\alpha F_1} \text{ und } v_2 = \frac{Fv}{F_2} \text{ gesetzt werden kann,}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \left[1 - \frac{2F^2}{\alpha F_1 F_2} + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Nun ist aber hier die zur Erzeugung der Ausflußgeschwindigkeit nöthige Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left[1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

daher folgt auch

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{1 - \frac{2F^2}{\alpha F_1 F_2} + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2} h = \frac{p}{\gamma} + \frac{\frac{1}{F^2} - \frac{2}{\alpha F_1 F_2} + \frac{1}{F_2^2}}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h,$$

$$\text{d. i. } z_1 = \frac{p}{\gamma} - \frac{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_2^2}\right)}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h,$$

oder beim Ausflusse in die freie Luft,

$$z_1 = b - \frac{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2^2}\right)}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h.$$

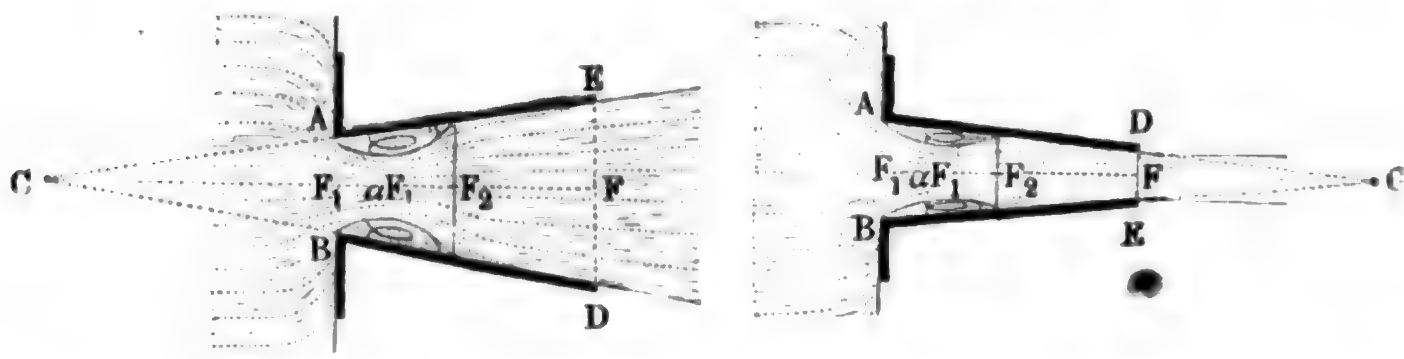
Damit ein voller Ausfluß erfolge, muß hiernach

$$\frac{h}{b} < \frac{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2}{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F_2^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{1 + \frac{h}{b}}{F^2} > \left(\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \frac{1}{F_2^2}\right)\frac{h}{b} - \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2 \text{ sein.}$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich nun auch die Ausflußverhältnisse der conischen Röhren $ABDE$, Fig. 751 und Fig. 752, angeben:

Fig. 751. Fig. 752.



wenn man in denselben statt F_2 den Querschnitt der Röhre an der Stelle, wo sich der Strahl anlegt, einführt. Bezeichnet δ die Hälfte des Divergenzwinkels ACB der einen oder des Convergenzwinkels der anderen Röhre, und setzt man voraus, daß die Länge $F_1 F_2$ des Wirbels gleich der Mündungsweite $AB = d$ sei, so läßt sich die Weite der Röhren an der Stelle, wo sich das Wasser an die Röhrenwand anlegt, setzen:

$$d_2 = d_1 \pm 2\, d_1\, tang.\, \delta = (1 \pm 2\, tang.\, \delta)\, d_1,$$

und daher das Querschnittsverhältniß

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = (1 \pm 2\, tang.\, \delta)^2,$$

wobei das Pluszeichen für die divergente Röhre in Fig. 751 und das Minuszeichen für die convergente Röhre in Fig. 752 in Anwendung zu bringen ist. Z. B. für $\delta = 2^1/_2$ Grad, ist $2\, tang.\, \delta = 0{,}0875$, und

$$\frac{F_2}{F_1} = (1 \pm 0{,}0875)^2 \text{ entweder } = 1{,}1827 \text{ oder } 0{,}8327;$$

daher die Ausflußgeschwindigkeit im ersten Falle:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1{,}1827}\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}514\left(\frac{F}{F_1}\right)^2}},$$

und dagegen im zweiten:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{0{,}8327}\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}1308\left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}.$$

Der entsprechende Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}514\left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

der divergenten Röhre ist natürlich ansehnlich kleiner als der Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}1308\left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

der convergenten Röhre.

Wären z. B. die Röhren drei Mal so lang als in der Einmündung weit, so hätte man im ersten Falle:

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = (1 + 6\, tang.\, \delta)^4 = 1{,}2625^4 = 2{,}5405, \text{ und}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}306}} = 0{,}659, \text{ dagegen im zweiten Falle:}$$

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = (1 - 6\, tang.\, \delta)^4 = 0{,}7375^4 = 0{,}2958, \text{ und}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}0387}} = 0{,}981 \text{ (vergl. §. 425).}$$

Damit der Ausfluß durch diese Röhren mit gefülltem Querschnitte erfolge, muß

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2}{\frac{2F}{\alpha F_1}\frac{F}{F_2} - \left[1 + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right]}$$ sein, also im ersten Falle, wo

$$\frac{F}{\alpha F_1} = \frac{1,5939}{0,64} = 2,4906, \text{ und } \frac{F}{F_2} = \frac{1,5939}{1,1827} = 1,3477 \text{ ist,}$$

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + 1,1429^2}{6,7112 - 2,8163} = \frac{2,3062}{3,8949} = 0,592,$$

darf also die Druckhöhe h noch nicht $33 . 0,592 = 19,5$ Fuß erreichen.

441 **Knieröhren.** Besondere Hindernisse stellen sich der Bewegung des Wassers in Röhren entgegen, wenn dieselben gekrümmt sind oder gar Kniee bilden. Diese Widerstände lassen sich nicht mit Sicherheit theoretisch bestimmen, und mußten daher, wie so viele andere Ausflußverhältnisse, auf dem Wege der Erfahrung untersucht werden.

Bildet eine Röhre ACB, Fig. 753, ein Knie, so trennt sich der Strahl in Folge der Centrifugalkraft des Wassers von der inneren Fläche des zweiten Röhrenstückes: es hört, wenn dieses Stück kurz ist, der volle Ausfluß auf, und es fällt deshalb auch die Ausflußmenge kleiner aus als bei einer gleich langen geraden Röhre. Ist aber das äußere Stück CB der Knieröhre ACB,

Fig. 753.

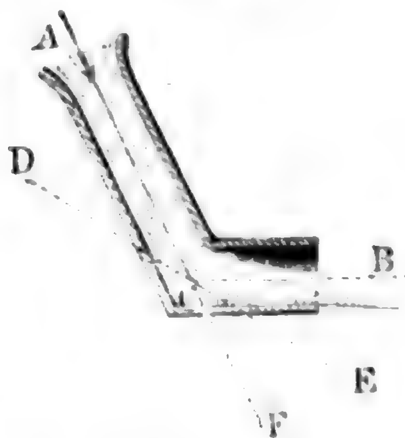


Fig. 754.

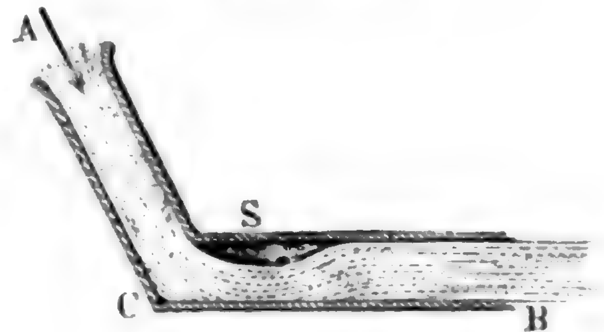


Fig. 754, länger, so bildet sich hinter dem Knie C ein Wirbel S, und es tritt bei wieder gefülltem Querschnitte eine verminderte Ausflußgeschwindigkeit v ein. Diese Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ist genau so zu beurtheilen wie der Widerstand, welchen Verengungen in Röhren bewirken. Ist F der Querschnitt der Röhre und F_1 der Querschnitt des contrahirten Strahles bei S, so hat man den Contractionscoefficienten desselben:

$$\alpha = \frac{F}{F_1},$$

und daher den entsprechenden Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient α und folglich auch der entsprechende Widerstandscoefficient ζ, hängt von dem Bricol- oder halben Ablenkungswinkel $\delta = ACD = BCE = \frac{1}{2} BCF$, Fig. 753, ab, und es ist nach den Versuchen, welche der Verfasser an einer Röhre von 3 Centimeter Weite hierüber angestellt hat:

$$\zeta = 0{,}9457\, sin.\, \delta^2 + 2{,}047\, sin.\, \delta^4$$

zu setzen.

Folgende kleine Tabelle enthält eine Reihe von nach dieser Formel berechneten Widerstandscoefficienten für verschiedene Bricolwinkel:

$\delta^0 =$	10	20	30	40	45	50	55	60	65	70
$\zeta =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

Man ersieht hieraus, daß durch die Kniee in Röhren der lebendigen Kraft des Wassers in Röhren bedeutende Verluste erwachsen. Ist z. B. das Knie ein rechtwinkeliges, also $\delta = 45^0$, so hat man hiernach den durch dasselbe herbeigeführten Druckhöhenverlust:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}984 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

also ziemlich gleich der Geschwindigkeitshöhe.

Bei engeren Röhren fällt ζ namhaft größer aus, z. B. für eine Knieröhre von 1 Centimeter Weite und 90 Grad Ablenkung ist $\zeta = 1{,}536$ gefunden worden. S. des Verfassers Experimentalhydraulik.

Stoßen an ein Knie ACB, Fig. 755, noch andere Kniee ohne längere Zwischenröhre, wie z. B. aus Fig. 756 und Fig. 757 zu ersehen ist, so tre-

Fig. 755.

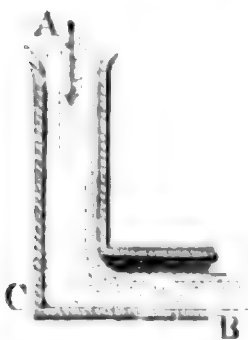


Fig. 756.

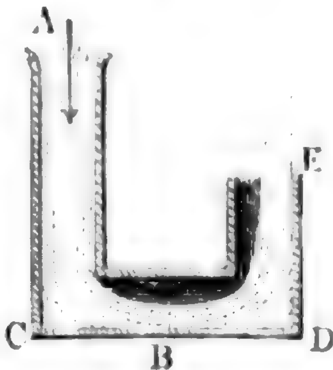
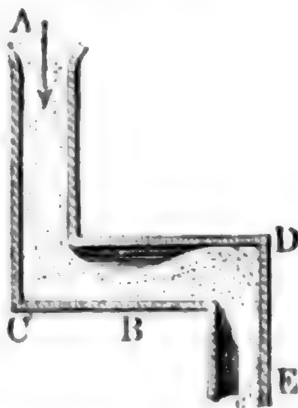


Fig. 757.

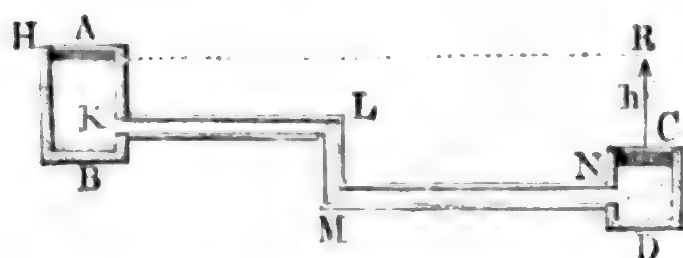


ten ganz besondere, jedoch leicht erklärliche Ausflußverhältnisse ein. Das zweite Knie BDE, Fig. 756, welches den Strahl nach derselben Seite hin ablenkt, wie das erste ACB, bringt keine weitere Contraction des Strahles hervor, es ist daher auch bei vollem Ausflusse hier ζ nicht größer als für ein einfaches Knie ACB. Lenkt aber das Knie BDE, Fig. 757,

den Strahl auf die entgegengesetzte Seite, so ist die Contraction eine doppelte, und daher auch der Widerstandscoefficient doppelt so groß als bei einfachem Knie. Wird endlich BDE so an ACB gesetzt, daß DE rechtwinkelig auf die Ebene ABD zu stehen kommt, so stellt sich ζ ungefähr $1^1/_2$ mal so groß heraus als bei dem Knie ACB allein.

Beispiel. Wenn eine Röhrenleitung KLN, Fig. 758, von 150 Fuß Länge und 5 Zoll Weite, welche in der Minute 25 Cubikfuß Wasser liefern soll, zwei rechtwinkelige Kniee enthält, so hat man die nöthige Druckhöhe:

Fig. 758.



$$h = (1{,}505 + 8{,}712 + 2 \,.\, 0{,}984) \cdot \frac{v^2}{2g}$$

$$= 12{,}185 \,.\, 0{,}1494 = 1{,}82 \text{ Fuß.}$$

(Vergl. Beispiel 1 zu §. 430.)

§. 442 **Kropfröhren.** Gekrümmte Röhren geben unter übrigens gleichen Verhältnissen viel kleinere Widerstände als unabgerundete Knieröhren. Auch sie veranlassen in Folge der Centrifugalkraft des Wassers eine partielle Contraction des Wasserstrahles ABD, Fig. 759, so daß, wenn sich an die krumme Röhre keine längere gerade Röhre anschließt, der Querschnitt F_1 des Strahles bei seinem Austritte kleiner ist als der Querschnitt F der Röhre. Endigt sich aber der Kropf ABD, Fig. 760, in einer längeren geraden Röhre DE, so bildet sich wieder ein Wirbel F, und es findet auf Unkosten

Fig. 759.

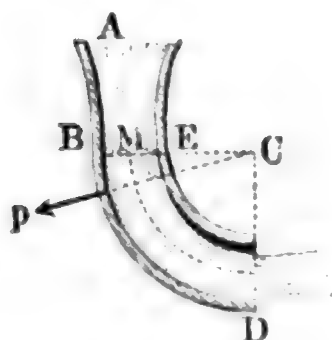
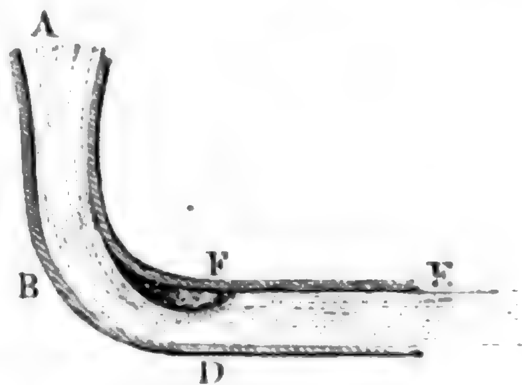


Fig. 760.



der lebendigen Kraft des Wassers wieder ein voller Ausfluß des Wassers statt. Ist der Contractionscoefficient $\frac{F_1}{F} = \alpha$, so haben wir auch den Coefficienten des Krümmungswiderstandes:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient α hängt von dem Verhältnisse $\frac{a}{r}$ der halben Röhrenweite $BM = EM = a$, Fig. 759, und dem Krümmungshalbmesser

$CM = r$ der Röhrenaxe ab und läßt sich annähernd auf folgende Weise theoretisch bestimmen. Ist v die Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in den Kropf und v_1 die des zusammengezogenen Wasserstrahles, so hat man $v_1 F_1 = v F$, daher $v_1 = \frac{F}{F_1} v$, und demnach die den Druck in BE messende Druckhöhe:

$$h = \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Diese Höhe mit 1 und γ multiplicirt, ergiebt sich der Druck des Wasserstrahles bei E auf die Flächeneinheit nach allen Richtungen hin:

$$p = h\gamma = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\gamma = \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\gamma.$$

Da nun die Centrifugalkraft des Wassers an der convexen Seite dem Drucke p entgegenwirkt, so ist es möglich, daß sie denselben hier ganz aufheben kann. In diesem Falle wird aber auch die äußere Luft eindringen und sich der Strahl ganz von der convexen Seite losziehen, wie aus den Fig. 759 und 760 zu ersehen ist. Die Centrifugalkraft eines Wasserprismas von der Länge $BE = 2a$ und dem Querschnitte 1 ist bei dem Krümmungshalbmesser $CM = r$,

$$q = \frac{v^2}{gr} \cdot 2a\gamma,$$

setzt man daher $p = q$, so folgt die Bedingung des Losreißens:

$$\frac{1}{\alpha^2} - 1 = \frac{4a}{r},$$

daher der Contractionscoefficient:

$$\alpha = \sqrt{\frac{r}{r + 4a}},$$

und der Widerstandscoefficient bei vollem Ausflusse:

$$\zeta = \left(\sqrt{\frac{r + 4a}{r}} - 1\right)^2.$$

Da bei dieser Entwickelung nur eine mittlere Geschwindigkeit und ein mittlerer Krümmungshalbmesser zu Grunde gelegt wurde, so kann sie natürlich auch nur auf eine annähernde Bestimmung von α und ζ führen.

Aus den Versuchen des Verfassers und aus eigenen Beobachtungsresultaten Du Buat's hat aber der Verfasser für den Widerstandscoefficienten beim Durchgange des Wassers durch Kröpfe folgende empirische Formeln abgeleitet:

1) Für Kröpfe mit kreisförmigem Querschnitte:

$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2};$$

2) für Kropfröhren mit rectangulären Querschnitten:

$$\zeta = 0,124 + 3,104 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}.$$

Nach diesen Formeln sind folgende Tabellen berechnet worden:

Tabelle I.

Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit kreisförmigen Querschnitten.

$\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Tabelle II.

Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit rectangulären Querschnitten.

$\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta =$	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Hiernach sieht man, daß bei einer runden Röhre, deren Krümmungshalbmesser zweimal so groß ist als der Röhrenhalbmesser, der Widerstandscoefficient $= 0,294$, und bei einer Röhre, deren Krümmungshalbmesser mindestens zehnmal so groß ist als der Halbmesser des Querschnittes, dieser Coefficient $= 0,131$ ausfällt.

Um die Contraction des Wassers in einer krummen Röhre ABD, Fig. 761, zu verhindern, ist der Querschnitt der Röhre allmälig so zu verengern, daß der Querschnitt $DH = F_1$ der Ausmündung zum Querschnitte $BE = F$ der Einmündung im Verhältnisse $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}$ zu stehen kommt.

Fig. 761.

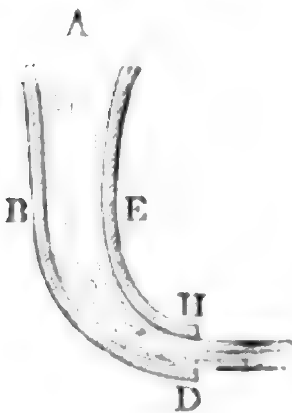


Fig. 762.

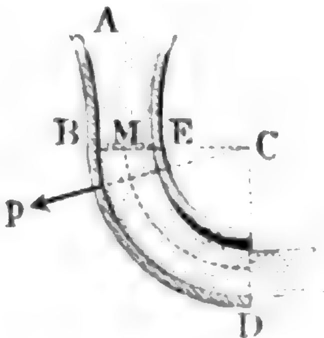
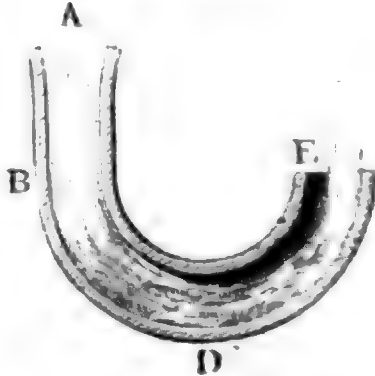


Fig. 763.



Stößt an den Kropf BD, Fig. 762, noch ein anderer an, welcher den Strahl nach derselben Seite noch weiter ablenkt, bildet z. B. die Röhrenaxe einen Halbkreis wie BDE, Fig. 763, so ändert sich die Contraction nicht, es behalten also auch α und ζ nahe denselben Werth wie bei der Röhre in Fig. 762, welche nur einen Quadranten einnimmt; schließt sich dagegen ein Kropf DE, Fig. 764, an, welcher nach der entgegengesetzten Seite ablenkt, so bildet sich vor diesem ein Wirbel F und es tritt in demselben eine zweite Zusammenziehung des Strahles ein, wodurch der Widerstand (ζ) nahe verdoppelt wird.

Fig. 764.

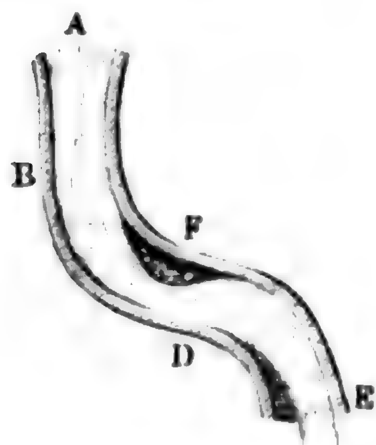


Fig. 765.

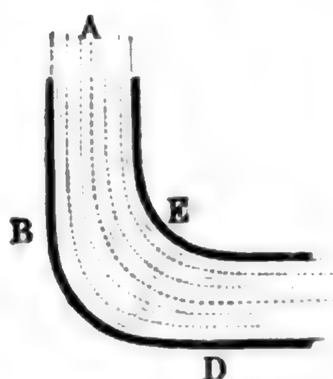
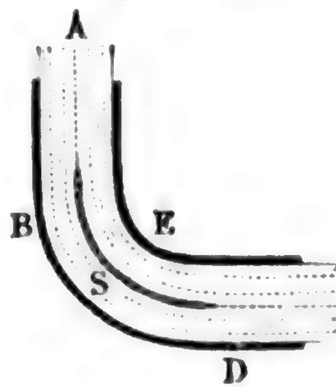


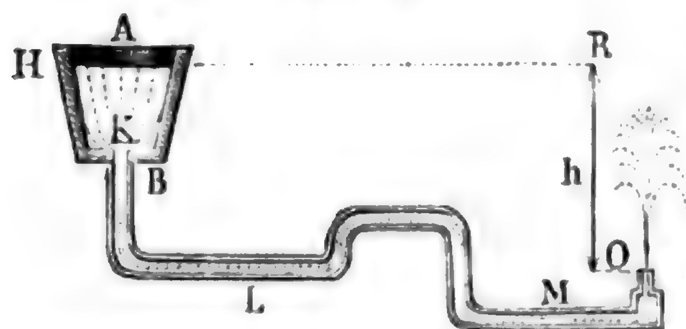
Fig. 766.



Der Widerstand des fließenden Wassers in Kropfröhren läßt sich durch Erweiterung der Kröpfe wie BDE, Fig. 765, sowie durch dünne Scheidewände in denselben wie S in BDE, Fig. 766, vermindern, denn im ersten Falle wird die Geschwindigkeit v und im zweiten das Verhältniß $\frac{a}{r}$, und folglich auch der Widerstandscoefficient ζ kleiner.

Beispiel. Wenn die Röhrenleitung BLM, Fig. 767, im zweiten Beispiele des §. 430 noch fünf Kröpfe zu je 90° enthält, und der Krümmungshalbmesser eines jeden 2 Zoll beträgt, so hat man:

Fig. 767.



$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$$

und nach der ersten der obigen Tabellen, den entsprechenden Widerstandscoefficienten: $\zeta = 0{,}294$; folglich für alle fünf Kröpfe, $5\zeta = 1{,}47$, und daher die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers statt

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582}} = 6{,}42 \text{ Fuß},$$

$$v = \frac{17{,}678}{\sqrt{7{,}582 + 1{,}47}} = \frac{17{,}678}{\sqrt{9{,}052}} = 5{,}876 \text{ Fuß},$$

so daß nun die Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = 0{,}7854 \cdot \tfrac{1}{36} \cdot 5{,}876 = 0{,}1282 \text{ Cubikfuß} = 221 \text{ Cubikzoll folgt.}$$

§. 443 **Schieber, Hähne, Klappen.** Um den Ausfluß des Wassers aus Röhren und Gefäßen zu reguliren, werden sogenannte Obturatoren, und zwar Schieber, Hähne, Klappen und Ventile angewendet, wodurch sich Verengungen erzeugen lassen, welche dem Durchgange des Wassers Widerstände entgegensetzen, die sich auf ähnliche Weise wie die in den letzten Paragraphen abgehandelten Verluste bestimmen lassen. Da aber hier das Wasser noch besondere Richtungsänderungen, Zertheilungen u. s. w. erleidet, so lassen sich die Coefficienten α und ζ nicht unmittelbar bestimmen, sondern es war zu deren Ermittelung die Ausführung besonderer Versuche nöthig. Solche Versuche sind von dem Verfasser ebenfalls angestellt worden*), und die Hauptergebnisse derselben enthalten folgende Tabellen:

Tabelle I.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber oder Schubventile (franz. tiroirs; engl. slide-valves) im parallelepipedischen Rohre.

Querschnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$ =	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Widerstandscoefficient ζ =	0,00	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

Tabelle II.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber im cylindrischen Rohre.

Relative Stellhöhe s =	0	$^1/_8$	$^2/_8$	$^3/_8$	$^4/_8$	$^5/_8$	$^6/_8$	$^7/_8$
Querschnittsverhältniß =	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Widerstandscoefficient ζ =	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

*) Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet von Jul. Weisbach, oder unter dem Titel „Untersuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik" u. s. w., Leipzig 1842.

Tabelle III.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn (franz. robinet; engl. cock) im parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	66[illegible]
Querschnittsverhältniß =	0,926	0,849	0,769	0,687	0,604	0,520	0,436	0,352	0,269	0,188	0,110	0
Widerstandscoefficient =	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞

Tabelle IV.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,926	0,850	0,772	0,692	0,613	0,535	0,458
Widerstandscoefficient =	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68
Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	$82\frac{1}{8}$°
Querschnittsverhältniß =	0,385	0,315	0,250	0,190	0,137	0,091	0
Widerstandscoefficient =	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞

Tabelle V.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen oder Drosselventile (franz. valves; engl. throttlevalves) im parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstandscoefficient =	0,28	0,45	0,77	1,34	2,16	3,54	5,7

Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnittsverhältniß =	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandscoefficient =	9,27	15,07	24,9	42,7	77,4	158	368	∞

Tabelle VI.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstandscoefficient =	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22

Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnittsverhältniß =	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandscoefficient =	10,8	18,7	32,6	58,8	118	256	751	∞

§. 444 Mit Hülfe der in den vorstehenden Tabellen aufgeführten Widerstandscoefficienten kann man nicht nur den einer gewissen Schieber-, Hahn- oder Klappenstellung entsprechenden Druckhöhenverlust angeben, sondern auch bestimmen, welche Stellung diesen Apparaten zu geben ist, damit die Ausflußgeschwindigkeit oder der Widerstand ein gewisser werde. Allerdings wird aber eine solche Bestimmung um so sicherer, je mehr diese regulirenden Vorrichtungen den bei den Versuchen angewendeten gleichen. Uebrigens gelten die in den Tabellen angegebenen Zahlenwerthe nur für den Fall, wenn das Wasser nach dem Durchgange durch die mittels dieser Apparate hervorgebrachten Verengungen das Rohr wieder ausfüllt. Damit dieser volle Ausfluß bei starken Verengungen noch eintrete, muß das Rohr eine beträchtliche Länge haben. Die Querschnitte der parallelepipedischen Röhren waren 5 Centimeter breit und $2\frac{1}{2}$ Centimeter hoch, und die Querschnitte von den

cylindrischen Röhren hatten eine Weite von 4 Centimetern. Bei dem Schieber, Fig. 768, entsteht eine einfache Verengung, deren Querschnitt bei dem

Fig. 768.

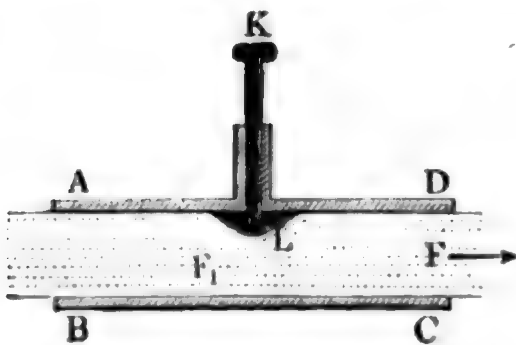


Fig. 769.

Fig. 770.

einen Rohre ein bloßes Rechteck F_1, Fig. 769, bei dem zweiten aber ein Mondchen F_1, Fig. 770, bildet. Bei den Hähnen, Fig. 771, stellen sich zwei Verengungen und auch zwei Richtungsabänderungen heraus, deshalb

Fig. 771.

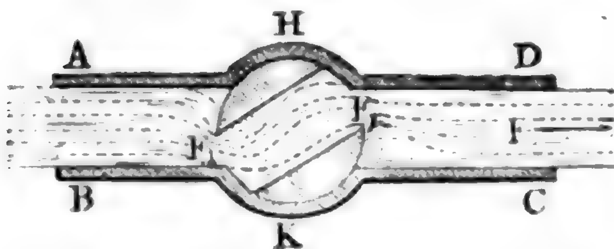
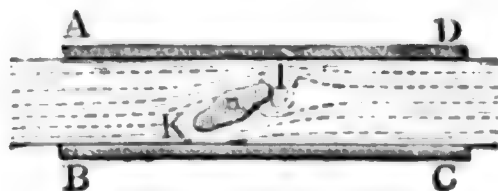


Fig. 772.



sind auch hier die Widerstände sehr groß. Die Querschnitte der größten Verengungen haben ganz eigenthümliche Gestalten. Bei den Drehklappen, Fig. 772, theilt sich der Strom in zwei Theile, wovon jeder durch eine Verengung hindurchgeht. Die Querschnitte dieser Verengungen sind bei der Drehklappe im parallelepipedischen Rohre rectangulär und im cylindrischen mondförmig. — Zur Anwendung der oben mitgetheilten Tabellen wird durch folgende Beispiele hinreichende Anleitung gegeben werden.

Beispiele. 1) Wenn in einer cylindrischen Röhrenleitung von 3 Zoll Weite und 500 Fuß Länge ein Schubventil angebracht ist, und dieses $^3/_8$ der ganzen Höhe gezogen wird, also $^5/_8$ derselben verschließt, welche Wassermenge liefert dieselbe unter einem Drucke von 4 Fuß? Der Widerstandscoefficient für den Eintritt in die Röhre läßt sich nach dem Früheren, $\zeta_0 = 0{,}505$, und der Widerstandscoefficient ζ_1 für den Schieber nach Tabelle II., §. 443, $= 5{,}52$ setzen, es folgt daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{7{,}906 \,.\, \sqrt{4}}{\sqrt{1{,}505 + 5{,}52 + \zeta \dfrac{l}{d}}} = \frac{7{,}906 \,.\, 2}{\sqrt{7{,}025 + 500 \,.\, 4\,\zeta}} = \frac{15{,}812}{\sqrt{7{,}025 + 2000\,\zeta}}.$$

Setzen wir den Reibungscoefficienten $\zeta = 0{,}025$, so erhalten wir:

$$v = \frac{15{,}812}{\sqrt{57{,}025}} = 2{,}09 \text{ Fuß}.$$

Nun entspricht aber der Geschwindigkeit $v = 2{,}1$ Fuß genauer $\zeta = 0{,}026$, daher ist richtiger:

$$v = \frac{15{,}812}{\sqrt{59{,}025}} = 2{,}06 \text{ Fuß},$$

und die Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = \frac{\pi}{4} \cdot 9 \,.\, 12 \,.\, 2{,}06 = 55{,}62 \,.\, \pi = 175 \text{ Cubikzoll}.$$

2) Eine Röhrenleitung von 4 Zoll Weite liefert bei einer Druckhöhe von 5 Fuß in der Minute 10 Cubikfuß Wasser, welche Stellung hat man dem in derselben angebrachten Drosselventile zu geben, damit sie nachher nur 8 Cubikfuß liefert? Die Geschwindigkeit ist anfangs

$$= \frac{10 \,.\, 4}{60 \,.\, \pi \, (1/3)^2} = \frac{6}{\pi} = 1{,}91 \text{ Fuß},$$

und nach der Klappenstellung,

$$= 8/10 \cdot 1{,}91 = 1{,}528 \text{ Fuß}.$$

Der Ausflußcoefficient für den ersten Fall des Ausflusses ist

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \frac{1{,}91}{7{,}906\sqrt{5}} = 0{,}108,$$

daher der Widerstandscoefficient

$$= \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{0{,}108^2} - 1 = 84{,}7;$$

der Ausflußcoefficient für den zweiten Fall ist

$$= 8/10 \cdot 0{,}108 = 0{,}0864,$$

daher der Widerstandscoefficient

$$= \frac{1}{0{,}0864^2} - 1 = 133{,}0,$$

und demnach der Coefficient für den vom Drosselventile zu erzeugenden Widerstand:

$$\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 = 48{,}3.$$

Nun giebt aber nach Tabelle VI., §. 443, der Stellwinkel $\delta = 50^0$, $\zeta = 32{,}6$ und der Stellwinkel $\delta = 55^0$, $\zeta = 58{,}8$; es läßt sich daher annehmen, daß bei einer Stellung von $50^0 + \frac{15{,}7}{26{,}2} \cdot 5^0 = 53^0$ das gewünschte Ausflußquantum erhalten werde. Berücksichtigt man noch, daß bei dem Geschwindigkeitswechsel von 1,91 Fuß auf 1,528 Fuß der Reibungscoefficient von 0,0266 in 0,0281 übergeht, so ist noch genauer:

$$\zeta = 133{,}0 - 84{,}7 \cdot \frac{281}{266} = 133{,}0 - 89{,}5 = 43{,}5,$$

und sonach der Stellwinkel

$$\delta = 50^0 + \frac{10{,}9}{26{,}2} \cdot 5^0 = 52^0.$$

§. 445 **Ventile.** Von besonderer Wichtigkeit ist die Kenntniß der durch Ventile (franz. soupapes; engl. valves) hervorgebrachten Widerstände. Auch über diese sind vom Verfasser Versuche angestellt worden. Am häufigsten kommen die sogenannten Kegel- und nächstdem die Klappenventile,

wie in den Figuren 773 und 774 abgebildet sind, zur Anwendung. Bei beiden geht das Wasser durch die von einem Ringe RG gebildete Apertur;

Fig. 773.

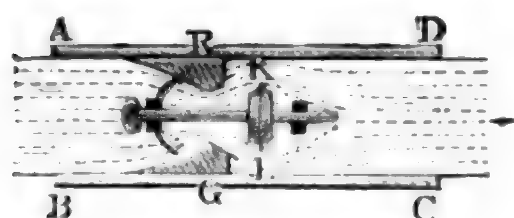
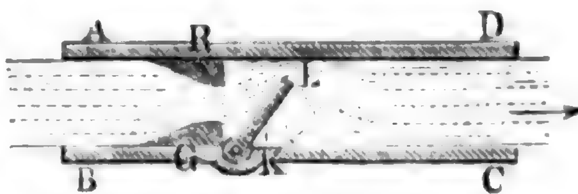


Fig. 774.



das Kegelventil KL, Fig. 773, hat einen Stiel, womit es in einer Führung liegt, die ihm nur einen Ausschub in der Axenrichtung gestattet; das Klappenventil oder die Ventilklappe KL, Fig. 774, hingegen öffnet sich drehend wie eine Thür. Man sieht leicht ein, daß bei beiden Apparaten dem Wasser nicht nur durch den Ventilring, sondern auch durch die Ventilklappe ein Hinderniß entgegengesetzt wird.

Bei dem Kegelventile, womit die Versuche angestellt wurden, war das Verhältniß zwischen der Apertur im Ventilringe zum Querschnitte der ganzen Röhre: 0,356, und dagegen das Verhältniß zwischen der Ringfläche um das geöffnete Ventil herum, zu dem Röhrenquerschnitte, = 0,406; es läßt sich daher im Mittel $\frac{F_1}{F} = 0,381$ setzen. Indem man den Ausfluß bei verschiedenen Ventilstellungen beobachtete, ergab sich, daß der Widerstandscoefficient zwar abnahm, wenn der Ventilschub größer wurde, daß aber diese Abnahme schon höchst unbedeutend ausfiel, wenn der Ventilschub die halbe Weite der Apertur übertraf. Seine Größe war für diesen Stand, = 11, also die Widerstandshöhe oder der Druckhöhenverlust

$$z = \zeta \frac{v^2}{2g} = 11 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wenn v die Geschwindigkeit des Wassers in der vollen Röhre bezeichnet. Diese Zahl kann man auch benutzen, um die anderen Querschnittsverhältnissen entsprechenden Widerstandscoefficienten zu bestimmen. Setzen wir allgemein

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2,$$

so erhalten wir für den beobachteten Fall:

$$\frac{F_1}{F} = 0,381, \text{ und } \zeta = \left(\frac{1}{0,381\,\alpha} - 1\right)^2 = 11,$$

daher

$$\alpha = \frac{1}{0,381\,(1 + \sqrt{11})} = \frac{1}{4,317 \, . \, 0,381} = 0,608$$

und endlich allgemein der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \left(\frac{F}{0,608\, F_1} - 1\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Ist z. B. der Querschnitt der Apertur die Hälfte von dem der Röhre, so fällt hiernach der Widerstandscoefficient

$$= (1,645 \,.\, 2 - 1)^2 = 2,29^2 = 5,24$$

aus.

Bei dem Klappenventile war das Querschnittsverhältniß zwischen der Apertur und der Röhre, d. i. $\frac{F_1}{F}$, $= 0,535$; wie aber die Widerstandscoefficienten mit der Größe der Eröffnung abnehmen, führt folgende Tabelle vor Augen.

Tabelle
der Widerstandscoefficienten für die Ventilklappe.

Oeffnungswinkel	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
Widerstandscoefficient	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	4,6	3,2	2,3	1,7

Mit Hülfe dieser Tabelle lassen sich die Widerstandscoefficienten für Klappen auch dann noch annähernd berechnen, wenn das Querschnittsverhältniß ein anderes sein sollte. Es ist derselbe Weg zu betreten, welchen man bei den Kegelventilen verfolgt hat.

Beispiel. Eine Druckpumpe liefert bei jedem Niedergange des Kolbens in 4 Secunden 5 Cubikfuß Wasser, die Weite des Steigrohres, worin das kegelförmige Steigventil sitzt, beträgt 6 Zoll, die innere Weite des Ventilringes, 3½ Zoll und der größte Ventildurchmesser 4½ Zoll, welchen Widerstand hat das Wasser beim Durchgange durch dieses Ventil zu überwinden? Das Querschnittsverhältniß für die Apertur ist

$$\left(\frac{3,5}{6}\right)^2 = (7/_{12})^2 = 0,34,$$

und das Verhältniß der ringförmigen Verengung zum Querschnitte des Rohres ist

$$= 1 - \left(\frac{4,5}{6}\right)^2 = 1 - (3/_4)^2 = 0,44,$$

daher das mittlere Querschnittsverhältniß

$$\frac{F_1}{F} = \frac{0,34 + 0,44}{2} = 0,39$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient

$$\zeta = \left(\frac{1,645}{0,39} - 1\right)^2 = 3,22^2 = 10,4.$$

Die Geschwindigkeit des Wassers beträgt

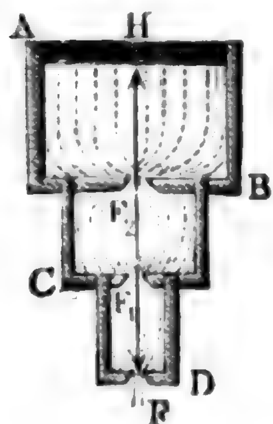
$$v = \frac{5}{4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (1/_2)^2} = \frac{20}{\pi} = 6,37 \text{ Fuß},$$

die Geschwindigkeitshöhe = 0,649 Fuß, und folglich die Widerstandshöhe = 10,4 . 0,649 = 6,75 Fuß. Die in der Secunde gehobene Wassermenge wiegt $^5/_4$. 61,75 = 77,2 Pfund; daher ist die mechanische Arbeit, welche der Durchgang des Wassers durch das Ventil in eben dieser Zeit consumirt:

$$= 6{,}75 . 77{,}2 = 521 \text{ Fußpfund.}$$

Zusammengesetzte Gefässe. Die vorstehenden Lehren über den Widerstand des Wassers beim Durchgange desselben durch Verengungen finden ihre Anwendung auch noch bei dem Ausflusse durch zusammengesetzte Gefäße. Der in Fig. 775 abgebildete Apparat AD ist durch zwei, die Mündungen F_1 und F_2 enthaltende Scheidewände abgetheilt und bildet deshalb drei communicirende Gefäße. Wären die Scheidewände nicht vorhanden und die Kanten bei den Uebergängen aus einem Gefäße in das andere abgerundet, so hätte man, wie bei einem einfachen Gefäße, die Ausflußgeschwindigkeit durch F: §. 4

Fig. 775.



$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\zeta_0}},$$

insofern h die Tiefe FH der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und ζ_0 den Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch die Ausflußöffnung F bezeichnen.

Da aber nach dem Durchgange des Wassers durch die Mündungen F_1 und F_2 die Querschnitte αF_1 und αF_2 plötzlich in die Querschnitte G und G_1 der Gefäße CD und BC übergehen, und nach §. 437 die daraus erwachsenden Widerstände

$$\zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{G}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

und

$$\zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{G_1}{\alpha F_2} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

betragen, so hat man

$$(1+\zeta_0)\frac{v^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \left[1 + \zeta_0 + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2}}$$

zu setzen.

Bei dem zusammengesetzten Ausflußapparate, welchen Fig. 776 repräsentirt, findet ganz dasselbe Verhältniß statt, nur ist hier vielleicht noch die Reibung des Wassers in dem Communicationsrohre CE zu berücksichtigen. Ist l die Länge und d die Weite dieses Rohres, ferner ζ der Reibungscoefficient, und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in demselben, so hat man die Höhe, welche das Wasser beim Uebergange von AC nach GL verliert:

Fig. 776.

$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \frac{v_1^2}{2g},$$

oder, da die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{\alpha F}{F_1} v$ zu setzen ist,

$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Zieht man nun diese Höhe von der ganzen Druckhöhe h ab, so bleibt die Druckhöhe im zweiten Gefäße, $h_2 = h - h_1$ und daher die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{1+\zeta_0}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2}}.$$

Diese Bestimmung wird bei dem Apparate, welchen Fig. 777 repräsentirt, sehr einfach, weil man die Querschnitte G, G_1, G_2 der Gefäße unendlich groß setzen kann in Ansehung der Mündungsquerschnitte F, F_1, F_2. Es ist daher die erste Niveaudifferenz OH oder Widerstandshöhe für den Durchgang durch F_1:

Fig. 777.

$$h = \frac{1}{2g}\left(\frac{v_1}{\alpha_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und ebenso die zweite Niveaudifferenz $O_1 H_1$ oder die Widerstandshöhe für den Durchgang durch F_2:

$$h_2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wofern nur α, α_1 und α_2 die Contractionscoefficienten für die Mündungen F, F_1 und F_2 bezeichnen. Hiernach folgt:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$$

und das Ausflußquantum:

$$Q = \frac{\alpha F \sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha F}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}.$$

Es ist leicht zu ermessen, daß zusammengesetzte Ausflußbehälter weniger Wasser liefern, als einfache unter übrigens gleichen Verhältnissen.

Beispiel. Wenn bei dem Apparate in Fig. 776 die totale Druckhöhe oder die Tiefe des Mittelpunktes der Mündung F unter dem Wasserspiegel des ersten Gefäßes, $= 6$ Fuß beträgt, die Mündung 8 Zoll breit und 4 Zoll hoch, der die beiden Reservoirs verbindende Lutten aber 10 Fuß lang, 12 Zoll breit und 6 Zoll hoch ist, welches Ausflußquantum wird dieses Reservoir geben?

Die mittlere Weite des Luttens ist

$$d = \frac{4 \cdot 1 \cdot 0,5}{2 \cdot 1,5} = \tfrac{2}{3} \text{ Fuß, daher } \frac{l}{d} = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15,$$

setzen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\zeta = 0,025$, so folgt:

$$\zeta \cdot \frac{l}{d} = 0,025 \;\; 15 = 0,375;$$

hierzu den Widerstandscoefficienten $\zeta_0 = 0,505$ für den Eintritt in prismatische Röhren gesetzt, erhält man:

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d} = 1 + 0,505 + 0,375 = 1,88.$$

Da $\frac{\alpha F}{F_1} = \frac{0,64 \cdot 8 \cdot 4}{12 \cdot 6} = 0,2845$, so folgt der Widerstandscoefficient für den ganzen Lutten, $= 1,88 \cdot 0,2845^2 = 0,152$, und den Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch F, $= 0,07$ gesetzt, erhält man die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{7,906 \sqrt{6}}{\sqrt{1,07 + 0,152}} = \frac{7,906 \sqrt{6}}{\sqrt{1,222}} = 17,52 \text{ Fuß}.$$

Der contrahirte Querschnitt ist $0,64 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = 0,32$ Quadratfuß, daher das Ausflußquantum:

$$Q = 0,32 \cdot 17,52 = 5,61 \text{ Cubikfuß}.$$

Fünftes Capitel.

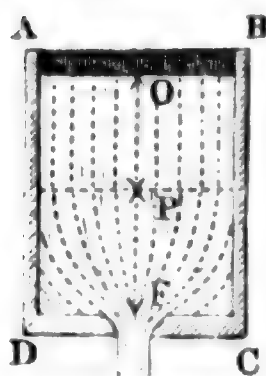
Von dem Ausflusse des Wassers unter veränderlichem Drucke.

447 **Prismatische Gefässe.** Erhält ein Gefäß, aus welchem das Wasser durch eine Seiten- oder Bodenöffnung ausfließt, von einer anderen Seite her keinen Zufluß, so tritt ein allmäliges Sinken des Wasserspiegels und endlich Ausleerung des Gefäßes ein. Wenn ferner die Zuflußmenge Q größer oder kleiner ist als das Ausflußquantum $\mu F \sqrt{2 g h}$, so steigt oder sinkt der Wasserspiegel, bis die Druckhöhe $h = \frac{1}{2 g}\left(\frac{Q}{\mu F}\right)^2$ wird, und nach diesem bleiben Druckhöhe und Ausflußgeschwindigkeit unveränderlich. Unsere Aufgabe ist nun, zu ermitteln, in welcher Abhängigkeit die Zeit, das Steigen oder Sinken des Wassers und, nach Befinden, das Sichleeren von Gefäßen bei gegebener Form und Größe zu einander stehen.

Den einfachsten Fall bietet der Ausfluß aus einem prismatischen Gefäße dar, wenn derselbe durch eine Oeffnung im Boden erfolgt, und wenn dabei kein Zufluß von oben statt hat. Ist x die veränderliche Druckhöhe FP, F der Inhalt der Mündung und G der Querschnitt des Gefäßes AC, Fig. 778, so hat man die theoretische Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 g x},$$

Fig. 778.



die theoretische Geschwindigkeit des sinkenden Wasserspiegels:

$$= \frac{F}{G} v = \frac{F}{G} \sqrt{2 g x}, \text{ und die effective:}$$

$$v_1 = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2 g x}.$$

Anfänglich ist $x = FO = h$, und am Ende des Ausflusses, $x = 0$, also die Anfangsgeschwindigkeit ist:

$$c = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2 g h}$$

und die Endgeschwindigkeit: $c_1 = 0$.

Man ersieht aus der Formel

$$v_1 = \sqrt{2 \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g x},$$

daß die Bewegung des Wasserspiegels gleichförmig verzögert und daß das

Verzögerungsmaß $p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g$ ist; man weiß daher auch (§. 14), daß diese Geschwindigkeit = Null wird und mithin der Ausfluß beendigt ist nach der Zeit

$$t = \frac{v_1}{p} = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2gh} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g = \frac{G}{\mu F}\sqrt{\frac{2gh}{g^2}},$$

d. i.

$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}.$$

Auch kann man

$$t = \frac{2Gh}{\mu F\sqrt{2gh}} = \frac{2Gh}{Q} = \frac{2V}{Q}$$

setzen, und diesemnach annehmen, daß zum Ausflusse der Wassermenge $V = Gh$ durch die Bodenöffnung F bei einer von h bis 0 abnehmenden Druckhöhe doppelt soviel Zeit nothwendig ist als bei unveränderlicher Druckhöhe.

Da der Ausflußcoefficient μ nicht ganz constant ist, sondern bei Abnahme des Druckes größer wird, so muß man bei Berechnungen dieser Art einen mittleren Werth dieses Coefficienten einführen.

Beispiel. In welcher Zeit leert sich ein parallelepipedischer Kasten von 14 Quadratfuß Querschnitt durch eine kreisrunde Bodenöffnung von 2 Zoll Weite, wenn die anfängliche Druckhöhe 4 Fuß beträgt? Theoretisch wäre die Ausflußzeit:

$$t = \frac{2.14\sqrt{4}}{7{,}906\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(1/6)^2} = \frac{2.14.144.2}{7{,}906.\pi} = \frac{8064}{7{,}906.\pi} = 324'',7 = 5 \text{ Min. } 24{,}7 \text{ Sec.}$$

Am Ende der halben Ausflußzeit ist die Druckhöhe $= (1/2)^2 . h = 1/4 . 4 = 1$ Fuß; nun ist der Ausflußcoefficient, welcher der Druckhöhe = 1 Fuß entspricht, für eine Mündung in der dünnen Wand, $\mu = 0{,}613$, daher läßt sich die effective Ausflußzeit $= \frac{324'',7}{0{,}613} = 529'',6 = 8$ Minuten 49,6 Secunden setzen.

Communicirende Gefässe. Da bei einer anfänglichen Druckhöhe h_1 die Ausflußzeit §.

$$t_1 = \frac{2G\sqrt{h_1}}{\mu F\sqrt{2g}}$$

und bei einer anfänglichen Druckhöhe h_2 diese Zeit

$$t_2 = \frac{2G\sqrt{h_2}}{\mu F.\sqrt{2g}}$$

ist, so folgt durch Subtraction die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h_1 und h_2 übergeht, oder der Wasserspiegel um $h_1 - h_2$ sinkt:

$$t = \frac{2G}{\mu F.\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}),$$

oder für Fußmaß:

$$t = 0{,}253 \frac{G}{\mu F} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Es ist umgekehrt die einer gegebenen Ausflußzeit entsprechende Senkung $s = h_1 - h_2$ des Wasserspiegels durch die Formel:

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu \sqrt{2g} . F}{2G} t\right)^2$$

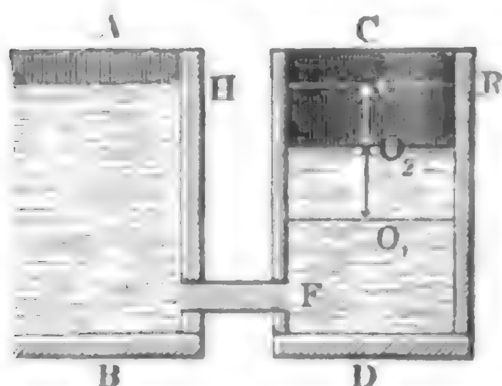
oder

$$s = \frac{\mu \sqrt{2g} . Ft}{G} \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu \sqrt{2g}}{4G} . Ft\right)$$

zu bestimmen.

Dieselben Formeln finden auch dann noch ihre Anwendung, wenn ein Gefäß CD, Fig. 779, durch ein anderes Gefäß AB, in welchem das Wasser einen unveränderlichen Stand hat, gefüllt wird. Ist der Querschnitt der Communicationsröhre oder der Mündung, $= F$, der Querschnitt des zu füllenden Gefäßes, $= G$, und der anfängliche Niveauabstand $O O_1$ zwischen beiden Wasserspiegeln, $= h$, so hat man, da hier der Wasserspiegel G_1 im zweiten Gefäße gleichförmig verzögert steigt, ebenfalls die Zeit zum Füllen oder die Zeit, innerhalb welcher der zweite Wasserspiegel in das Niveau HR des ersten kommt:

Fig. 779.



$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F . \sqrt{2g}},$$

und ebenso die Zeit, in welcher der Niveauabstand $O_1 O = h_1$ in $O_2 O = h_2$ übergeht, also der Wasserspiegel um $O_1 O_2 = s = h_1 - h_2$ steigt:

$$t = \frac{2G}{\mu F . \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Beispiele. 1) Um wie viel sinkt der Wasserspiegel in dem Gefäße des letzten Beispieles (§. 447) binnen 2 Minuten? Es ist

$$h_1 = 4, \; t = 2 . 60 = 120, \; \frac{F}{G} = \frac{\pi}{14 . 144},$$

und nimmt man noch $\mu = 0{,}605$ an, so folgt:

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \mu . \sqrt{2g} . \frac{Ft}{2G}\right)^2 = \left(2 - \frac{0{,}605 . 7{,}906 . \pi . 120}{2 . 14 . 144}\right)^2$$

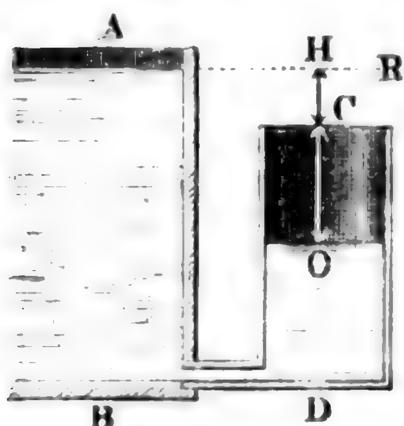
$$= \left(2 - 0{,}605 . 7{,}906 . \frac{5 . \pi}{168}\right)^2 = 1{,}5523^2 = 2{,}412 \text{ Fuß},$$

und die gesuchte Senkung:

$$s = 4 - 2{,}412 = 1{,}588 \text{ Fuß}.$$

2) Welche Zeit braucht das Wasser, um in der 18 Zoll weiten Röhre CD, Fig. 780, zum Ueberlaufen zu gelangen, wenn es mit einem Gefäße AB durch eine kurze, $1\frac{1}{2}$ Zoll weite Röhre communicirt, und der steigende Wasserspiegel G anfänglich um $OH = 6$ Fuß unter dem unveränderlichen Wasserspiegel A, und um $OC = 4\frac{1}{2}$ Fuß unter dem Kopfe C der Röhre steht? Es ist in

Fig. 780.



$$t = \frac{2\,G}{\mu\sqrt{2g}\,.\,F}\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}),$$

$$h_1 = 6,\ h_2 = 6 - 4{,}5 = 1{,}5,$$

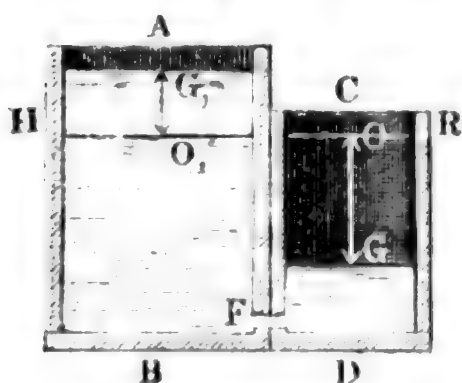
$$\frac{G}{F} = \left(\frac{18}{1{,}5}\right)^2 = 144 \text{ und } \mu = 0{,}81$$

zu setzen, weshalb folgt:

$$t = \frac{2{,}144}{0{,}81\,.\,7{,}906}\,(\sqrt{6} - \sqrt{1{,}5}) = \frac{288\,.\,1{,}2248}{0{,}81\,.\,7{,}906} = 55{,}1 \text{ Secunden.}$$

Wenn das erste Gefäß AB, Fig. 781, aus welchem das Wasser in das andere läuft, keinen Zufluß hat, und sein Querschnitt G_1 auch nicht als unendlich groß angesehen werden kann in Hinsicht auf den Querschnitt G des folgenden Gefäßes CD, so hat man die Bestimmung zu modificiren. Ist der veränderliche Abstand $G_1 O_1$ des ersten Wasserspiegels von dem Niveau HR, in welchem beide Wasserspiegel bei Beendigung des Ausflusses stehen, $= x$, und der Abstand GO des zweiten Wasserspiegels von eben dieser Ebene, $= y$, so hat man die veränderliche Druckhöhe $= x + y$ und die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g\,(x + y)}$, oder, da das Wasserquantum $G_1 x = G y$ ist, §. 4

Fig. 781.



$$v = \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Wasserspiegel im zweiten Gefäße steigt, ist nun:

$$v_1 = \frac{\mu F}{G}\,v = \frac{\mu F}{G}\sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)y},$$

folglich die entsprechende Retardation:

$$p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)g$$

und die Ausflußzeit:

$$t = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) g$$
$$= \frac{2 G \sqrt{y}}{\mu F \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)}}.$$

Führen wir statt x und y den anfänglichen Niveauabstand h ein, setzen wir also $x + y = h$, oder $\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y = h$, so erhalten wir:

$$y = \frac{h}{1 + \frac{G}{G_1}},$$

und die Zeit, binnen welcher die beiden Wasserspiegel in ein Niveau kommen:

$$t = \frac{2 G \sqrt{h}}{\mu F \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) \sqrt{2g}} = \frac{2 G G_1 \sqrt{h}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}}.$$

Die Zeit, innerhalb welcher der Niveauabstand von h auf h_1 sinkt, ist dagegen:

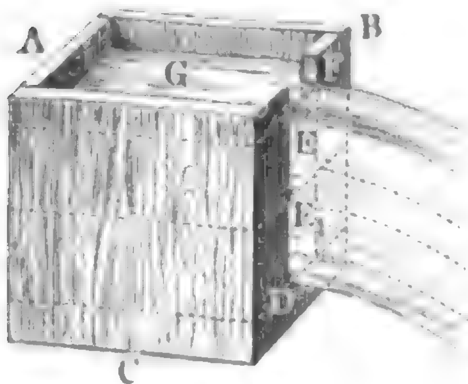
$$t = \frac{2 G G_1 (\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}}.$$

Beispiel. Wenn der Querschnitt G_1 des Kastens, aus welchem das Wasser zufließt, 10 Quadratfuß und der Querschnitt G des Kastens, welcher das Wasser aufnimmt, 4 Quadratfuß mißt, wenn ferner der anfängliche Niveauabstand h zwischen beiden Wasserspiegeln 3 Fuß beträgt und die cylindrische Communicationsröhre 1 Zoll Weite hat, so ist die Zeit, in welcher das Wasser in beiden Gefäßen auf gleiches Niveau kommt:

$$t = \frac{2 . 10 . 4 . \sqrt{3}}{0,82 . 7,906 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{14}{144}} = \frac{320 . 72 . \sqrt{3}}{0,82 . 7,906 . 7 \pi} = 280 \text{ Secunden.}$$

450 **Wandeinschnitt.** Fließt das Wasser durch einen Wandeinschnitt oder Ueberfall DE aus einem prismatischen Gefäße ABC, Fig. 782, welches keinen Zufluß erhält, so ist die Ausflußzeit auf folgende Weise zu ermitteln. Bezeichnen wir den Querschnitt des Gefäßes durch G, die Breite EF des Einschnittes durch b und die Höhe DE desselben durch h, und theilen wir die ganze Ausflußmündung durch Horizontalen in lauter schmale Streifen, jeden von der Breite b und Höhe $\frac{h}{n}$. Bei constantem Drucke ist die Ausflußmenge auf die Secunde bezogen,

Fig. 782.



$$Q = {}^2/_3\, \mu b \sqrt{2 g h^3},$$

dividiren wir diese in den Inhalt $\frac{G h}{n}$ einer Wasserschicht, so erhalten wir die entsprechende Ausflußzeit:

$$\tau = \frac{G h}{{}^2/_3\, \mu n b \sqrt{2 g h^3}},$$

wofür wir $\frac{3\, G h}{2 \mu n b \sqrt{2 g}} \cdot h^{-3/2}$ schreiben wollen.

Um nun die Ausflußzeit t für ein Wasserquantum $G(h - h_1)$ zu erhalten, oder um die Zeit zu bestimmen, innerhalb welcher der Wasserstand über der Schwelle, von $DE = h$ auf $DE_1 = h_1$ herabsinkt, setzen wir $h_1 = \frac{m}{n} h$, lassen also h_1 aus m Theilen bestehen, führen nun in der letzten Gleichung statt $h^{-3/2}$, successiv

$$\left(\frac{m}{n} h\right)^{-3/2}, \left(\frac{m+1}{n} h\right)^{-3/2}, \left(\frac{m+2}{n} h\right)^{-3/2} \cdots \left(\frac{n h}{n}\right)^{-3/2}$$

ein, und addiren endlich die erhaltenen Ergebnisse. Auf diesem Wege bekommen wir die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{3\, G h}{2 \mu n b \sqrt{2 g}} \left[\left(\frac{m h}{n}\right)^{-3/2} + \left(\frac{m+1}{n} h\right)^{-3/2} + \cdots + \left(\frac{n h}{n}\right)^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{3\, G h}{2 \mu n b \sqrt{2 g}} \cdot \frac{h^{-3/2}}{n^{-3/2}} [m^{-3/2} + (m+1)^{-3/2} + \cdots + n^{-3/2}]$$

$$= \frac{3\, G h^{-1/2}}{2 \mu n^{-1/2} b \sqrt{2 g}} [(1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + n^{-3/2})$$

$$- (1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2})],$$

oder nach dem „Ingenieur“, Arithmetik Seite 88:

$$t = \frac{3\, G h^{-1/2}}{2 \mu n^{-1/2} b \sqrt{2 g}} \left(\frac{n^{-3/2+1}}{-3/2+1} - \frac{m^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right)$$

$$= \frac{3\, G n^{1/2}}{2 \mu b \sqrt{2 g h}} \cdot 2\, (m^{-1/2} - n^{-1/2}) = \frac{3\, G}{\mu b \sqrt{2 g h}} \left[\left(\frac{m}{n}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

$$= \frac{3\, G}{\mu b \sqrt{2 g}} \left[\left(\frac{m}{n} h\right)^{-1/2} - h^{-1/2}\right] = \frac{3\, G}{\mu b \sqrt{2 g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Setzt man $h_1 = 0$, so erhält man $\frac{1}{\sqrt{h_1}}$ und also auch $t = \infty$; damit also das Wasser bis zur Schwelle abläuft, ist eine unendliche Zeit nothwendig.

Beispiel. Wenn das Wasser durch einen Wandeinschnitt von 8 Zoll Breite aus einem Reservoir von 110 Fuß Länge und 40 Fuß Breite ausfließt, in wel-

cher Zeit geht der Wasserstand von 15 Zoll über der Ueberfallschwelle in den Wasserstand von 6 Zoll über? Es ist:

$$t = \frac{3 \cdot 110 \cdot 40}{\mu \cdot {}^2/_3 \cdot 7,906}\left(\frac{1}{\sqrt{0,5}} - \frac{1}{\sqrt{1,25}}\right) = \frac{19800}{\mu \cdot 7,906}(\sqrt{2} - \sqrt{{}^4/_5})$$

$$= \frac{19800}{7,906\,\mu}(1,4142 - 0,8944) = \frac{19800 \cdot 0,5198}{7,906\,\mu} = \frac{1302}{\mu} \text{ Secunden.}$$

Nimmt man den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,60$ an, so folgt die effective Ausflußzeit:

$$t = \frac{1302}{0,6} = 2170 \text{ Secunden} = 36 \text{ Minuten } 10 \text{ Secunden.}$$

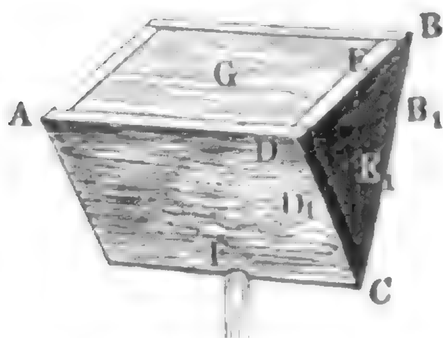
Anmerkung. Für eine rectanguläre Seitenöffnung läßt sich annähernd setzen:

$$t = \frac{2\,G}{\mu\,F\sqrt{2\,g}}\left((\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) - \frac{a^2}{288}(\sqrt{h_1^{-3}} - \sqrt{h_2^{-3}})\right),$$

und es bezeichnen F und G die Querschnitte der Oeffnung und des Gefäßes, a die Oeffnungshöhe, h_1 die Druckhöhe am Anfange, sowie h_2 die am Ende des Ausflusses. Wird $h_2 = \frac{a}{2}$, so geht die Oeffnung in einen Wandeinschnitt über und es ist nun die Formel für diesen anzuwenden.

§. 451 **Keil- und pyramidenförmige Gefässe.** Bildet das Ausflußgefäß ABF, Fig. 783, ein horizontales, dreiseitiges Prisma, so findet man die Ausflußzeit auf folgende Weise. Theilen wir die Höhe $CE = h$ in n gleiche Theile und legen wir durch die Theilpunkte Horizontalebenen, so zerlegen wir das ganze Wasserquantum in lauter gleich dicke Schichten von gleicher Länge $AD = l$ und von oben nach unten zu abnehmenden Breiten. Ist die Breite DB der oberen Schicht, $= b$, so hat man die Breite D_1B_1 einer anderen Schicht, welche um $CE_1 = x$ über der in der unteren Kante liegenden Mündung F steht, $y = \frac{x}{h}b$, und ihr Volumen $= yl \cdot \frac{h}{n} = \frac{b\,l\,x}{n}$. Nun ist aber die Ausflußmenge, auf die Zeiteinheit bezogen:

Fig. 783.



$$Q = \mu\,F\sqrt{2\,g\,x},$$

daher folgt dann die kleine Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um $\frac{h}{n}$ sinkt,

$$\tau = \frac{b\,l}{n}x : \mu\,F\sqrt{2\,g\,x} = \frac{b\,l}{n\,\mu\,F\sqrt{2\,g}} \cdot x^{1/2}.$$

Da endlich die Summe aller $x^{1/2}$, von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{n\,h}{n}$ genommen,

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^{1/2} \cdot \frac{n^{3/2}}{{}^3/_2} = {}^2/_3\,n\,h^{1/2}$$

ist, so hat man die Zeit zum Ausflusse des ganzen Wasserprisma's:

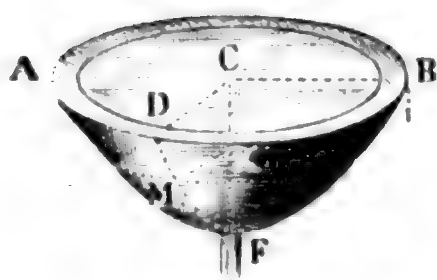
$$= \frac{bl}{n\mu F\sqrt{2g}} \cdot {}^2/_3\, n h^{1/2} = {}^2/_3\, \frac{bl}{\mu F\sqrt{2g}} \cdot h^{1/2} = {}^4/_3\, \frac{{}^1/_2\, blh}{\mu F\sqrt{2gh}}, \text{ d. i.}$$

$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{V}{\mu F c},$$

wenn $V = {}^1/_2\, blh$ das ganze Wasservolumen und $c = \sqrt{2gh}$ die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit ist. Es braucht also hier das Wasser um $^1/_3$ mehr Zeit, als wenn die Ausflußgeschwindigkeit unveränderlich c wäre.

Bildet das Gefäß ABF, Fig. 784, ein aufrechtstehendes Paraboloid, so hat man für das Verhältniß zwischen den Halbmessern $KM = y$ und $CD = b$,

Fig. 784.



$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}},$$

und daher das Verhältniß des Horizontalschnittes G_1 durch K zur Grundfläche $ADB = G$:

$$\frac{G_1}{G} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}, \text{ folglich:}$$

$$G_1 = \frac{Gx}{h},$$

und den Inhalt einer Wasserschicht:

$$= G_1 \cdot \frac{h}{n} = \frac{Gx}{n}.$$

Die vollständige Uebereinstimmung dieses Ausdruckes mit dem für das dreiseitige Prisma gefundenen gestattet daher auch hier

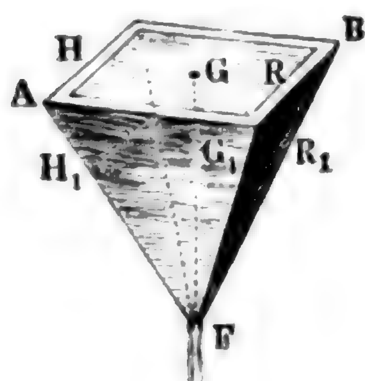
$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{{}^1/_2\, G h}{\mu F\sqrt{2gh}}$$

zu setzen, oder, da hier $V = {}^1/_2\, G h$ ist (§. 124, Beisp.), auch

$$t = {}^4/_3 \cdot \frac{V}{\mu F c}.$$

Diese Formel läßt sich in vielen anderen Fällen zur angenäherten Bestimmung der Ausflußzeit namentlich auf das Ausleeren von Teichen anwenden. Sie gilt überhaupt auch in allen den Fällen, wenn die Horizontalschnitte wie die Abstände von dem Boden wachsen.

Fig. 785.



Hat man es endlich mit einem pyramidenförmigen Gefäße ABF, Fig. 785, zu thun, so ist

$$G_1 : G = x^2 : h^2, \text{ und daher } G_1 = \frac{Gx^2}{h^2},$$

ferner der Inhalt der Schicht $H_1 R_1$:

$$\frac{G_1 h}{n} = \frac{Gx^2}{nh},$$

und die Zeit zum Ausflusse derselben:

$$\tau = \frac{G x^2}{n h} : \mu F \sqrt{2 g x} = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da aber die Summe aller $x^{3/2}$ von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{n h}{n}$ genommen,

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^{3/2} \cdot \frac{n^{5/2}}{5/2} = 2/_5\, n\, h^{3/2}$$

ist, so folgt die Zeit zum Leeren der ganzen Pyramide:

$$t = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} \cdot 2/_5\, n\, h^{3/2} = 2/_5 \cdot \frac{G h^{1/2}}{\mu F \sqrt{2 g}} = 6/_5 \cdot \frac{1/_3\, G h}{\mu F \sqrt{2 g h}},$$

oder $1/_3\, G h = V$ gesetzt,

$$t = 6/_5 \cdot \frac{V}{\mu F c}.$$

Da bei diesem Ausflusse die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit von c allmälig bis Null abnimmt, so ist die Ausflußzeit $1/_5$ größer als wenn die Geschwindigkeit unveränderlich $= c$ bliebe.

Beispiel. In welcher Zeit wird sich ein Teich, dessen Wasserspiegel 765000 Quadratfuß Inhalt hat, leeren, wenn das in der tiefsten Stelle einmündende Fischgerinne 15 Fuß unter dem Wasserspiegel steht und eine Röhre von 15 Zoll Weite und 50 Fuß Länge bildet? Theoretisch ist die Ausflußzeit:

$$t = 4/_3 \cdot \frac{V}{F \sqrt{2 g h}} = 4/_3 \cdot 1/_2 \cdot \frac{765000 \,.\, 15}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 7{,}906 \sqrt{15}} = \frac{19584000}{\pi \,.\, 7{,}906 \sqrt{15}}$$

$= 203586$ Secunden.

Nun ist aber der Widerstandscoefficient für den Eintritt in das innen etwa um den Winkel von 45^0 abgeschrägte Teichgerinne:

$$\zeta = 0{,}505 + 0{,}327 \text{ (s. §. 423)} = 0{,}832,$$

und der Reibungswiderstand für dieses Gerinne:

$$= 0{,}025 \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2 g} = 0{,}025 \cdot \frac{50}{5/_4} \cdot \frac{v^2}{2 g} = \frac{v^2}{2 g};$$

daher folgt der vollständige Ausflußcoefficient für dasselbe:

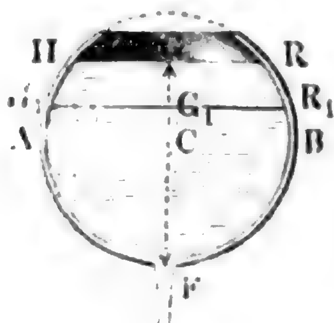
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}832 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2{,}832}} = 0{,}594,$$

und die in Frage stehende Ausflußzeit:

$t = 203586 : 0{,}594 = 342670$ Secunden $= 95$ Stunden 11 Minuten.

§. 452 **Kugel- und obeliskenförmige Gefässe.** Mit Hülfe der im letzten Paragraphen aufgefundenen Formeln kann man nun auch die Ausflußzeiten für viele andere Gefäße, z. B. für kugel-, obelisken-, pyramidenförmigen u. s. w. finden.

Fig. 786.



1) Für das Leeren eines gefüllten Kugelsegmentes AFB, Fig. 786, dessen Halbmesser $CA = CF = r$, und Höhe $FG = h$ ist, erhält man:

$$t = {}^4/_3 \frac{\pi r h^2}{\mu F \sqrt{2gh}} - {}^2/_5 \cdot \frac{\pi h^3}{\mu F \sqrt{2gh}} = {}^2/_{15} \pi \frac{(10r - 3h) h^{3/2}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

also für das Leeren einer vollen Kugel, wo $h = 2r$ ist,

$$t = \frac{16 \pi r^2 \sqrt{2r}}{15 \mu F \sqrt{2g}},$$

und für das einer halben Kugel, wo $h = r$,

$$t = \frac{14 \pi r^2 \sqrt{r}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Es ist nämlich hier die der Tiefe $FG_1 = x$ entsprechende Horizontalschicht $H_1 R_1 = G_1$:

$$= \pi x (2r - x) \cdot \frac{h}{n} = \frac{2 \pi r h x}{n} - \frac{\pi h x^2}{n},$$

folglich bei der Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, die Zeit zum Ausfließen derselben

$$\tau = \frac{2 \pi r h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{1/2} - \frac{\pi h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da der erste Theil dieses Ausdruckes mit der Formel für das Leeren des prismatischen und der zweite Theil mit derjenigen für das Leeren des pyramidalen Gefäßes übereinstimmt, wenn man nur das eine Mal $2 \pi r h$ statt bl und das zweite Mal πh^2 statt G setzt, so erhält man mit Hülfe der Differenz für die im vorigen Paragraphen gefundenen Ausleerungszeiten eines prismatischen und eines pyramidalen Gefäßes:

$$t = {}^2/_3 \cdot \frac{blh}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

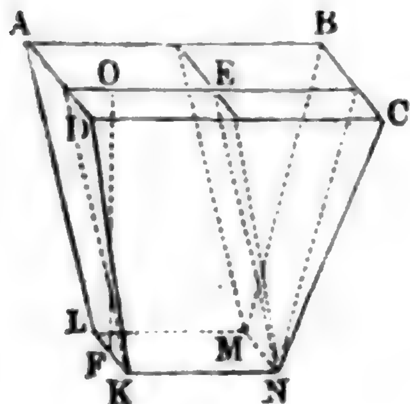
und

$$t = {}^2/_5 \cdot \frac{Gh}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

auch die oben angegebene Ausleerungszeit des Kugelsegmentes.

2) Für das obelisken- oder pontonförmige Gefäß ACK, Fig. 787, lassen sich, da dasselbe aus einem Parallelepipede AEK, aus zwei Prismen BEN und DEN und einer Pyramide CEN (vergl. §. 121) zusammengesetzt ist, die obigen Formeln ebenfalls anwenden. Es sei b die obere Breite AD, b_1 die untere Breite KL, ferner l die obere Länge AB und l_1 die untere Länge KN, und endlich h die Höhe OF des Gefäßes. Dann hat man für die Fläche des Wasserspiegels AC:

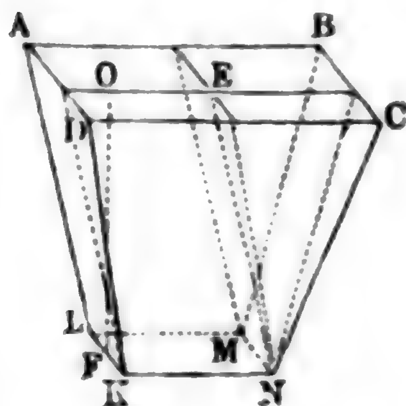
Fig. 787.



$$bl = b_1 l_1 + b_1 (l - l_1) + l_1 (b - b_1) + (l - l_1)(b - b_1),$$

und davon bildet $b_1 l_1$ die Basis des Parallelepipedes AEK; ferner sind $b_1 (l - l_1)$ und $l_1 (b - b_1)$ die Grundflächen der beiden Prismen BEN und DEK und es ist $(l - l_1)(b - b_1)$ die Basis der Pyramide CEN. Nun ist aber die Ausflußzeit für das Parallelepiped:

Fig. 788.



$$t_1 = \frac{2 b_1 l_1 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

ferner die Ausflußzeit für die beiden dreiseitigen Prismen:

$$t_2 = {}^2/_3 \frac{[b_1 (l - l_1) + l_1 (b - b_1)] \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

und endlich die Ausflußzeit für die Pyramide:

$$t_3 = {}^2/_5 \frac{(l - l_1)(b - b_1) \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}};$$

es folgt daher die Ausflußzeit für das ganze Gefäß:

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

$$= [30 b_1 l_1 + 10 b_1 (l - l_1) + 10 l_1 (b - b_1) + 6 (l - l_1)(b - b_1)] \frac{\sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}$$

$$= [3bl + 8 b_1 l_1 + 2 (b l_1 + b_1 l)] \frac{2\sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Ist $\frac{b_1}{l_1} = \frac{b}{l}$, so hat man es mit einer abgekürzten Pyramide zu thun. Setzen wir für diese die Grundfläche $bl = G$ und die Grundfläche $b_1 l_1 = G_1$, so erhalten wir:

$$t = (3G + 8 G_1 + 4 \sqrt{G G_1}) \frac{2\sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Formel auch für jede drei- und vielseitige Pyramide gilt.

Beispiel. Ein obeliskenförmiger Wasserkasten ist oben 5 Fuß lang und 3 Fuß breit, und 4 Fuß tiefer, nämlich im Niveau der 1 Zoll weiten und 3 Zoll langen horizontalen Ansatzröhre, 4 Fuß lang und 2 Fuß breit, wie viel Zeit braucht das den Kasten anfangs ganz füllende Wasser, um $2^1/_2$ Fuß zu sinken? Die Zeit zum Leeren ist, $\mu = 0{,}815$ angenommen:

$$t = [8.4.2 + 3.5.3 + 2(3.4 + 5.2)] \frac{2\sqrt{4}}{15 . 0{,}815 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 . 7{,}906}$$

$$= \frac{153.4.4.144}{15.0{,}815.7{,}906.\pi} = 153 \cdot \frac{2304}{12{,}225.7{,}906\,\pi} = 153.7{,}588 = 1161 \text{ Sec.}$$

Im Niveau $4 - 2^1/_2 = 1^1/_2$ Fuß über der Röhre ist $l = l_1 + {}^3/_8 = 4^3/_8$

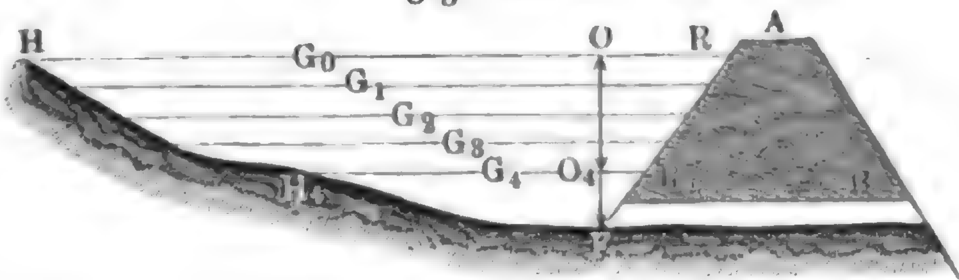
und $b = b_1 + {}^3/_8 = 2^3/_8$ Fuß, daher die Zeit zum Leeren, wenn das Gefäß nur bis zu diesem Niveau gefüllt ist,

$$t_1 = [8 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot {}^{35}/_8 \cdot {}^{19}/_8 + 2\,(2 \cdot {}^{35}/_8 + 4 \cdot {}^{19}/_8)] \cdot \frac{1152\sqrt{1{,}5}}{15 \cdot 0{,}815 \cdot 7906\,\pi}$$
$$= 131{,}672 \cdot 4{,}6465 = 612 \text{ Secunden.}$$

Die Differenz der gefundenen Zeiten giebt die Zeit (549 Secunden), innerhalb welcher der anfänglich bis zum Kopfe des Gefäßes reichende Wasserspiegel um $2^1/_2$ Fuß sinkt.

Ungesetzmässige Gefässe. Ist die Ausflußzeit für ein ungesetzmäßig geformtes Gefäß HFR, Fig. 789, zu finden, so hat man eine §. 453

Fig. 789.



Annäherungsmethode, z. B. die Simpson'sche Regel, anzuwenden. Hat man die ganze Wassermasse in vier gleich hohe Schichten getheilt, und die den Horizontalschnitten G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 entsprechenden Druckhöhen durch h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet, so ergiebt sich die Ausflußzeit durch die Simpson'sche Regel:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12\,\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4}}\right).$$

Bei Annahme von sechs Schichten erhält man:

$$t = \frac{h_0 - h_6}{18\,\mu F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{2\,G_4}{\sqrt{h_4}} + \frac{4\,G_5}{\sqrt{h_5}} + \frac{G_6}{\sqrt{h_6}}\right).$$

Das Ausflußquantum ist im ersten Falle:

$$V = \frac{h_0 - h_4}{12}(G_0 + 4\,G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 + G_4),$$

im zweiten:

$$V = \frac{h_0 - h_6}{18}(G_0 + 4\,G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 + 2\,G_4 + 4\,G_5 + G_6).$$

Ist die Gestalt und Größe des Ausflußgefäßes nicht bekannt, so kann man durch die in gleichen Zeitintervallen beobachteten Wasserstände h_0, h_1 u. s. w. die Ausflußmenge V gleichwohl berechnen. Ist t die ganze Ausflußzeit, so hat man bei Boden- und Seitenöffnungen:

$$V = \frac{\mu F t\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$

und für Ueberfälle oder Wandeinschnitte:

$$V = {}^2/_3\,\frac{\mu b t}{12}\sqrt{2g}\,(\sqrt{h_0^3} + 4\sqrt{h_1^3} + 2\sqrt{h_2^3} + 4\sqrt{h_3^3} + \sqrt{h_4^3}).$$

Beispiel. In welcher Zeit sinkt der Wasserspiegel eines Teiches um 6 Fuß, wenn das Teichgerinne einen halben Cylinder von 18 Zoll Weite, 9 Zoll Tiefe und 60 Fuß Länge bildet, und die Wasserspiegel folgende Inhalte haben:

G_0, bei 20 Fuß Druckhöhe, = 600000 Quadratfuß.
G_1, „ 18,5 „ „ = 495000 „
G_2, „ 17,0 „ „ = 410000 „
G_3, „ 15,5 „ „ = 325000 „
G_4, „ 14,0 „ „ = 265000 „

Es ist $F = \frac{\pi}{8} \cdot (3/2)^2 = \frac{9\pi}{32} = 0{,}8836$ Quadratfuß. Setzen wir, wie im Beispiel zu §. 451, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt, $= 0{,}832$, und den für die Reibung, $= 0{,}025 \cdot \frac{l}{d} = 0{,}025 \,.\, 60 \,.\, 1{,}091 = 1{,}6356$, so ist der Ausflußcoefficient:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}832 + 1{,}6365}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}4685}} = 0{,}537,$$

und

$$\mu F \sqrt{2g} = 0{,}537 \,.\, 0{,}8836 \,.\, 7{,}906 = 3{,}7518.$$

Nun hat man:

$$\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} = \frac{600000}{\sqrt{20}} = 134170, \quad \frac{G_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{495000}{\sqrt{18{,}7}} = 115090,$$

$$\frac{G_2}{\sqrt{h_2}} = \frac{410000}{\sqrt{17}} = 99440, \quad \frac{G_3}{\sqrt{h_3}} = \frac{325000}{\sqrt{15{,}5}} = 82550,$$

$$\frac{G_4}{\sqrt{h_4}} = \frac{265000}{\sqrt{14}} = 70830,$$

daher folgt die Ausflußzeit:

$$t = \frac{6}{12 \,.\, 3{,}7518} (134170 + 4 \,.\, 115090 + 2 \,.\, 99440 + 4 \,.\, 82550 + 70830)$$

$$= \frac{1194440}{7{,}5036} = 159190 \text{ Secunden} = 44 \text{ Stunden } 13 \text{ Minuten.}$$

Das Ausflußquantum ist:

$$V = {}^6/_{12} \,.\, (600000 + 4 \,.\, 495000 + 2 \,.\, 410000 + 4 \,.\, 325000 + 265000)$$

$$= \frac{4965000}{2} = 2482500 \text{ Cubikfuß.}$$

§ 454 **Zu- und Abfluss.** Erhält das Gefäß während des Ausflusses von unten, noch Zufluß von oben, so wird die Bestimmung der Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel auf eine gewisse Höhe steigt oder sinkt, viel verwickelter, so daß man sich meist mit einer angenäherten Bestimmung begnügen muß. Ist das Zuflußquantum pr. Secunde $Q_1 > \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Steigen, und ist $Q_1 < \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Sinken des Wasserspiegels statt. Uebrigens tritt hier alle Mal Beharrungszustand ein, wenn die Druckhöhe entweder auf $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_1}{\mu F}\right)^2$ angewachsen oder dahin herabgesunken ist. Die Zeit τ, innerhalb welcher die veränderliche Druckhöhe x um die kleine Größe ξ wächst, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$G_1 \xi = Q_1 \tau - \mu F \sqrt{2gx} . \tau,$$

und dagegen die Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um ξ sinkt, durch:

$$G_1 \xi = \mu F \sqrt{2gx} . \tau - Q_1 \tau.$$

Man hat daher im ersten Falle:

$$\tau = \frac{G_1 \xi}{Q_1 - \mu F \sqrt{2gx}},$$

und im zweiten:

$$\tau = \frac{G_1 \xi}{\mu F \sqrt{2gx} - Q_1}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel erhält man so die Ausflußzeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel sinkend aus G_0 in G_1, G_2, ... und die Druckhöhe aus h_0 in h_1, h_2, ... übergeht:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12} \left[\frac{G_0}{\mu F \sqrt{2gh_0} - Q_1} + \frac{4\,G_1}{\mu F \sqrt{2gh_1} - Q_1} + \frac{2\,G_2}{\mu F \sqrt{2gh_2} - Q_1} + \frac{4\,G_3}{\mu F \sqrt{2gh_3} - Q_1} + \frac{G_4}{\mu F \sqrt{2gh_4} - Q_1} \right],$$

oder einfacher, wenn man $\frac{Q_1}{\mu F \sqrt{2g}}$ durch $\sqrt{k}$ bezeichnet,

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12 \mu F \sqrt{2g}} \left[\frac{G_0}{\sqrt{h_0} - \sqrt{k}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2} - \sqrt{k}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3} - \sqrt{k}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4} - \sqrt{k}} \right].$$

Ist das Gefäß prismatisch und hat es den unveränderlichen Querschnitt G, so hat man (s. des Verfassers Experimentalhydraulik, §. 9, XII.):

$$t = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2g}} \left[\sqrt{h} - \sqrt{h_1} + \sqrt{k} . \log. nat. \left(\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} \right) \right],$$

für die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h in h_1 übergeht.

Da für $h_1 = k$, $\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{h}} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{0} = \infty$ ausfällt, so folgt, daß der Beharrungszustand erst unendlich spät eintritt.

Bei einem Wandeinschnitte stellt sich folgende Formel heraus:

$$t = \frac{G k}{3 Q_1} \left[\log. nat. \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{k})^2 \, (h_1 + \sqrt{h_1 k} + k)}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2 \, (h_1 + \sqrt{h k} + k)} + \sqrt{12} . arc. \left(tang. = \frac{(\sqrt{h} - \sqrt{h_1}) \sqrt{12 k}}{3k + (2\sqrt{h} + \sqrt{k})(2\sqrt{h_1} + \sqrt{k})} \right) \right],$$

wo $k = \left(\frac{Q_1}{2/3 \, \mu b \sqrt{2g}} \right)^{2/3}$, *log. nat.* den natürlichen Logarithmen und

arc. (*tang.* $= y$) den der Tangente y entsprechenden Kreisbogen bezeichnet. Je nachdem $k \lesseqgtr h$, oder das zufließende Wasserquantum

$$Q_1 \gtrless {}^2/_3\, \mu\, b \sqrt{2 g h^3}$$

ist, findet entweder ein Steigen oder ein Fallen des Wasserspiegels statt. Der Beharrungszustand tritt ein, wenn $h_1 = k$ ist, die entsprechende Zeit t fällt aber ∞ aus.

Beispiel. In welcher Zeit steigt das Wasser in einem 12 Fuß langen und 6 Fuß breiten parallelepipedischen Kasten von Null auf 2 Fuß Höhe über der Schwelle eines ½ Fuß breiten Wandeinschnittes, wenn in der Secunde 5 Cubikfuß Wasser zufließen? Man hat hier $h = 0$, daher einfacher:

$$t = \frac{G k}{3 Q_1}\left[log.\ nat. \frac{h_1 + \sqrt{h_1 k} + k}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2} + \sqrt{12}\ arc.\left(tang. = \frac{-\sqrt{3 h_1}}{2\sqrt{k} + \sqrt{h_1}}\right)\right].$$

Nun ist $G = 12 . 6 = 72$, $Q_1 = 5$, $h_1 = 2$, $b = ½$ und $\mu = 0{,}6$, sowie

$$k = \left(\frac{5}{{}^2/_3 . 0{,}6 . {}^1/_2 . 7{,}906}\right)^{2/3} = 2{,}1544,$$

daher folgt die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{72.2{,}1544}{3 . 5}\left[log. nat. \frac{4{,}1544 + \sqrt{4{,}3088}}{(1{,}4142 - 1{,}4678)^2} - \sqrt{12} arc.\left(tang. = \frac{\sqrt{6}}{1{,}4142 + 2{,}9357}\right)\right]$$

$$= 10{,}341\left[log.\ nat. \frac{6{,}2302}{0{,}002873} - \sqrt{12} . arc.\left(tang. = \frac{\sqrt{6}}{4{,}3499}\right)\right]$$

$$= 10{,}341\,(7{,}682 - 1{,}778) = 10{,}341 . 5{,}90 = 61 \text{ Secunden.}$$

§. 455 **Schleusen.** Eine nützliche Anwendung der oben abgehandelten Lehren läßt sich auf das Füllen und Leeren der Schleusen (franz. écluses; engl. sluices) machen. Man unterscheidet zweierlei Schleusen (Schiffahrtsschleusen), nämlich einfache und doppelte. Die einfache Schleuse, Figur 790, besteht aus einer Kammer B, welche durch das Oberthor HF vom Oberwasser A und durch das Unterthor RS vom Unterwasser C getrennt wird. Die doppelte Schleuse, Fig. 791, hingegen besteht aus zwei Kammern, mit dem Oberthore KL, Mittelthore HF und Unterthore RS.

Fig. 790.

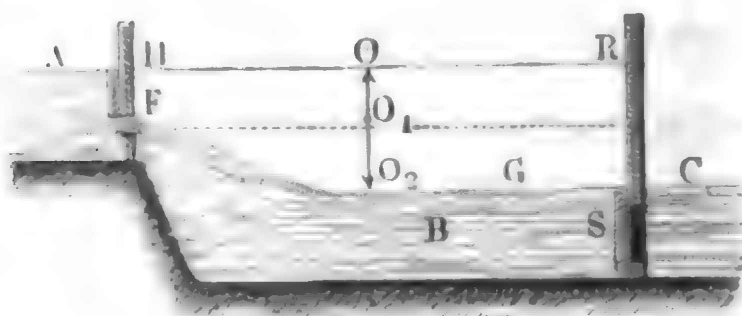
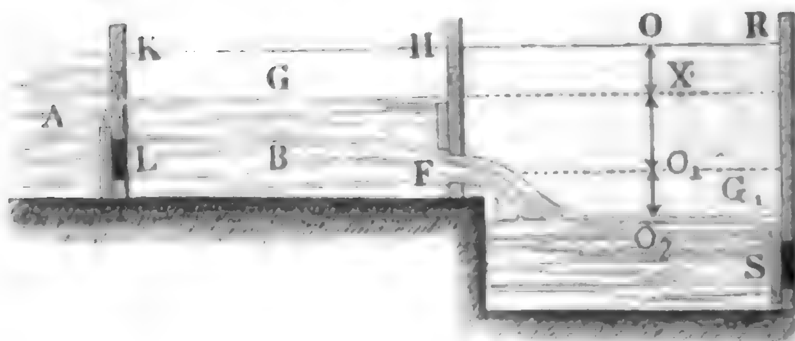


Fig. 791.



1) Setzen wir den mittleren horizontalen Querschnitt einer **einfachen Schleusenkammer**, $= G$, den Abstand $O O_1$ der Mitte der Schutzöffnung im Oberthore von der Oberfläche $H R$ des Oberwassers, $= h_1$ und den Abstand $O_1 O_2$ von der des Unterwassers, $= h_2$, und endlich den Inhalt der Schutzöffnung, $= F$, so erhalten wir die Zeit des Füllens bis zur Mitte der Mündung, wobei die Druckhöhe constant ist:

$$t_1 = \frac{G h_2}{\mu F \sqrt{2 g h_1}},$$

und die Zeit zum Füllen des übrigen Raumes, wobei ein allmäliges Abnehmen der Druckhöhe statt hat:

$$t_2 = \frac{2 G h_1}{\mu F \sqrt{2 g h_1}};$$

es ist folglich die Zeit zum **Füllen der einfachen Schleuse**:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{(2 h_1 + h_2) G}{\mu F \sqrt{2 g h_1}}.$$

Befindet sich die Mündung im Unterthor ganz unter Wasser, so nimmt beim Leeren die Druckhöhe allmälig von $O O_2 = h_1 + h_2$ bis Null ab, es ist daher die Zeit des **Leerens oder Ablassens**:

$$t = \frac{2 G \sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F \sqrt{2g}}.$$

Steht hingegen ein Theil der Mündung aus dem Unterwasser hervor, so hat man zwei Ausflußmengen, eine über und eine unter Wasser ausfließend, zu berücksichtigen. Setzen wir die Höhe des Theiles der Mündung über dem Wasser, $= a_1$ und die Höhe des Theiles unter dem Wasser, $= a_2$, sowie die Breite der Mündung, $= b$, so erhält man die Ausflußzeit durch den Ausdruck:

$$t = \frac{2 G (h_1 + h_2)}{\mu b \sqrt{2g} \left(a_1 \sqrt{h_1 + h_2 - \frac{a_1}{2}} + a_2 \sqrt{h_1 + h_2}\right)}.$$

2) Bei den **doppelten Schleusen** (Fig. 791) nimmt die Druckhöhe in der vom Oberwasser abgeschlossenen Kammer während des Ausflusses in die zweite Kammer immer mehr und mehr ab. Ist G der horizontale Querschnitt der ersten Kammer und sinkt die anfängliche Druckhöhe $O O_1 = h_1$ in dieser Kammer auf $X O_1 = x$ herab, während das Wasser in der zweiten Kammer bis zur Mitte der Schutz- oder Ausflußöffnung, und zwar um $O_2 O_1 = h_2$ steigt, so hat man die entsprechende Zeit:

$$t_1 = \frac{2 G}{\mu F \sqrt{2 g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{x}).$$

Nun ist aber Wasserquantum:

$$G (h_1 - x) = G_1 h_2, \text{ daher:}$$

$$x = h_1 - \frac{G_1}{G} h_2$$

und:

$$t_1 = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - \frac{G_1 h_2}{G}}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{G h_1} - \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}).$$

Die Zeit, in welcher das Wasser in der zweiten Kammer so hoch steigt, wie in der ersten Kammer, nach welcher also das Wasser in beiden in einerlei Niveau kommt, ist nach §. 449:

$$t_2 = \frac{2\,G\,G_1 \sqrt{x}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}} = \frac{2\,G_1 \sqrt{G} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}}{\mu F (G + G_1) \sqrt{2g}},$$

und die ganze Füllungszeit:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{G h_1} - \frac{G}{G + G_1} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}\right).$$

Beispiel. Welche Zeit ist zum Füllen und Ablassen folgender einfachen Schleusenkammern nöthig? Mittlere Schleusenlänge = 200 Fuß, mittlere Breite = 24 Fuß, also $G = 200 . 24 = 4800$ Quadratfuß, Abstand des Mittelpunktes der Schutzöffnung im Oberthore von beiden Wasserspiegeln, = 5 Fuß, Breite beider Oeffnungen, = $2\frac{1}{2}$ Fuß, Höhe der Oeffnung im Oberthore, = 4 Fuß, und Höhe der Oeffnung im Unterthore (ganz unter Wasser), = 5 Fuß. Setzen wir in

$$t = \frac{(2 h_1 + h_2)\, G}{\mu F \sqrt{2 g h_1}},\; h_1 = 5,\; h_2 = 5,\; G = 4800,\; \mu = 0{,}615,$$

$$F = 4 . 2\tfrac{1}{2} = 10 \text{ und } \sqrt{2g} = 7{,}906,$$

so erhalten wir die Zeit zum Füllen:

$$t = \frac{3 . 5 . 4800}{6{,}15 . 7{,}906 \sqrt{5}} = \frac{14400}{1{,}23 . 7{,}906 \sqrt{5}} = 662 \text{ Sec.} = 11 \text{ Min. } 2 \text{ Sec.}$$

Setzen wir in der Formel

$$t = \frac{2\,G \sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F \sqrt{2g}},\; G = 4800,\; h_1 + h_2 = 10,\; F = 5 . 2\tfrac{1}{2} = 12{,}5,$$

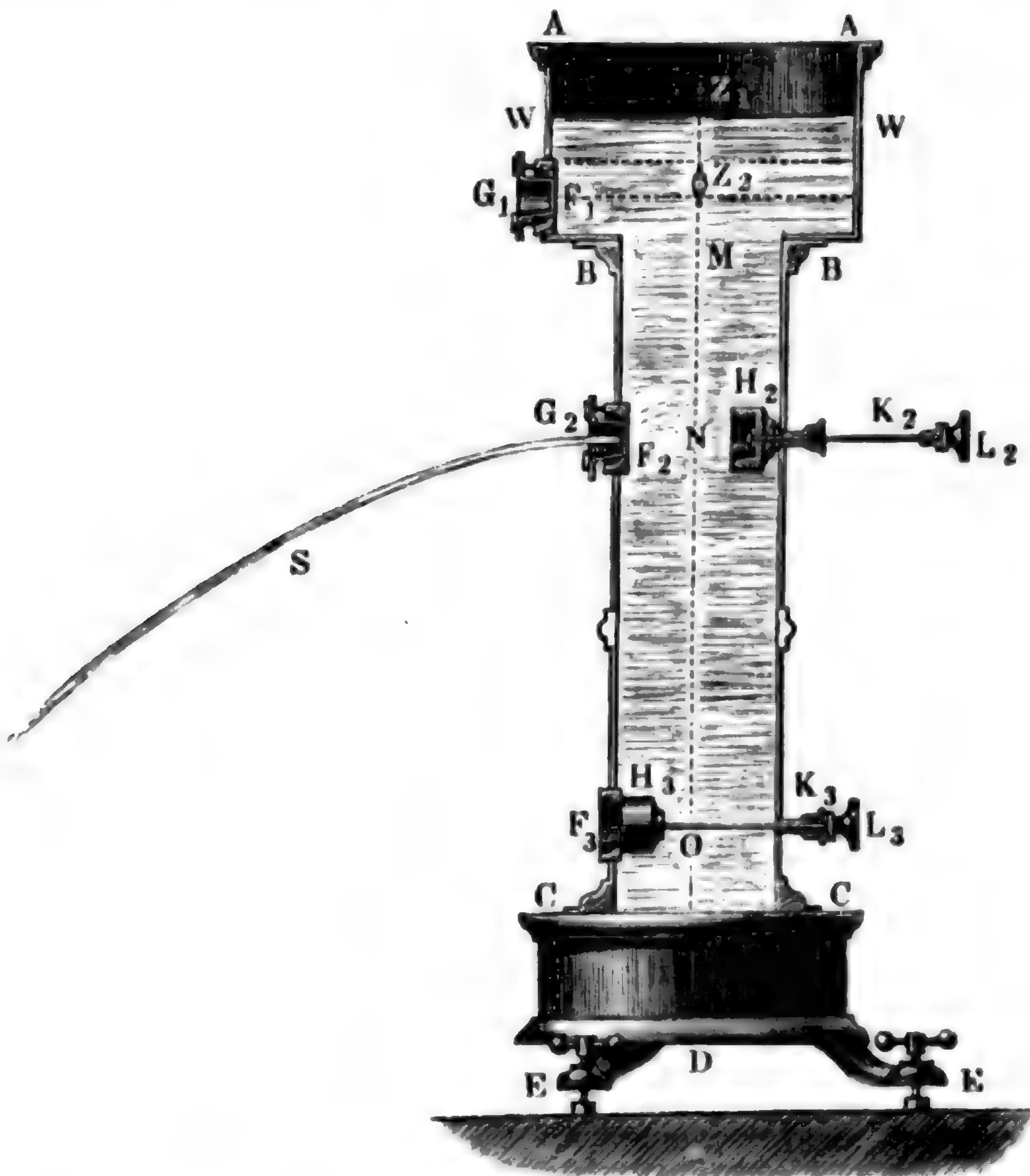
so folgt die Zeit zum Leeren der Schleuse:

$$t = \frac{2 . 4800 \sqrt{10}}{0{,}615 . 12{,}5 . 7{,}905} = 500 \text{ Sec.} = 8 \text{ Min. } 20 \text{ Sec.}$$

§. 456 **Hydraulischer Versuchsapparat.** Mittels eines in Fig. 792 abgebildeten hydraulischen Versuchsapparates kann man nicht allein durch mehr als 100 Versuche die wichtigsten Erscheinungen des Ausflusses vor Augen führen, sondern auch die hauptsächlichsten Gesetze derselben in Zahlen nachweisen. Dieser Apparat besteht in einem Ausflußgefäße ABC mit drei Mündungen F_1, F_2, F_3, deren Mittelpunkte von dem mittleren Wasserspiegel WW um Höhen abstehen, welche sich zu einander wie die Quadratzahlen

1, 4, 9 zu einander verhalten. In diese Mündungen lassen sich die verschiedenartigsten Mundstücke und Röhren einsetzen, und damit dies ohne Störung durch das

Fig. 792.



Wasser geschehen könne, hat man besondere Verschließungsklappen H_2, H_3, deren Stiele K_2, K_3 durch Stopfbüchsen in der Rückwand des Apparates hindurchgehen, angebracht. In dem oberen und weiteren Theile AB des Apparates befinden sich noch zwei zugespitzte und nach oben gerichtete Zeiger Z_1 und Z_2, welche als Anhaltepunkte bei den Versuchen dienen, indem der Durchgang des sinkenden Wasserspiegels durch diese Spitzen den Anfang und das Ende eines jeden Versuches bestimmt. Das ausfließende Wasser fängt man in einem Gefäße auf, das vor dem folgenden Versuche auf das Ausflußreservoir gesetzt wird und durch ein mit einem Stöpsel versehenes Loch seinen Inhalt in das Reservoir zurückführt.

Um mit Hülfe dieses Apparates die Ausflußcoefficienten μ verschiedener Mundstücke und Röhren zu finden, hat man mittels einer guten Secundenuhr die Zeit t zu beobachten, innerhalb welcher während des Ausflusses der Wasserspiegel von der einen Spitze bis zur anderen sinkt, oder die Druckhöhe h_1 in die Druckhöhe h_2 übergeht; ist dann noch F der Querschnitt der

Ausflußmündung und G der Inhalt des sinkenden Wasserspiegels, so hat man den Ausflußcoefficienten (s. §. 448):

$$\mu = \frac{2\,G\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{F\,t\,\sqrt{2\,g}},$$

und die entsprechende mittlere Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2.$$

Zu diesem Apparate gehört noch eine Sammlung von Mundstücken und Röhren, nämlich quadratische, rectanguläre, kreisförmige und trianguläre Mündungen in dünnem Blech, mit oder ohne innere Einfassung, kurze cylindrische und conische Röhren, längere gerade Röhren von verschiedenen Weiten, Kropf- und Knieröhren u. s. w., welche sich in die verschiedenen Ausflußlöcher F_1, F_2, F_3 einsetzen lassen. Mittels dieses so ausgerüsteten Apparates kann man in wenig Stunden fast alle Erscheinungen und Gesetze des Ausflusses vor Augen führen; man kann an demselben nicht nur die vollkommene und unvollkommene, die vollständige und unvollständige, sondern auch die verschiedenen Grade der Contraction der Wasserstrahlen studiren, ferner die Reibungs-, Knie- und Krümmungswiderstände in Röhren, sowie auch den positiven und negativen Druck des Wassers, durch Springen und Ansaugen u. s. w. kennen lernen. Immer wird man auf recht leidliche, zum Theil aber auch auf überraschend gute Uebereinstimmungen mit den mitgetheilten Erfahrungsgrößen (μ, φ, α, ζ) stoßen. Bei unserem Apparate ist $G = 0{,}125$ Quadratmeter, die gewöhnliche Mündungs- und Röhrenweite ungefähr 1 Centimeter, und für die untere Mündung, $h_1 = 0{,}96$ und $h_2 = 0{,}84$ Meter. (Eine ausführliche Beschreibung dieses Apparates und der mit demselben auszuführenden Versuche u. s. w. enthält die Experimentalhydraulik des Verfassers.)

Ein Beispiel, wie gut die Beobachtungen an diesem Apparate mit den bekannten Versuchen im Großen übereinstimmen, ist folgendes. Für eine kurze cylindrische Ansatzröhre im unteren Loche wurde $t = 33$, für eine längere Glasröhre mit dem Längenverhältnisse $\frac{l}{d} = 124$ aber $t = 56$ Secunden gefunden; hieraus berechnet sich für die eine:

$$\mu_1 = 0{,}815 \text{ und } \zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 0{,}504,$$

und für die andere:

$$\mu_2 = 0{,}480 \text{ und } \zeta_2 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 3{,}332,$$

es folgt hiernach:

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 3{,}332 - 0{,}504 = 2{,}828,$$

und daher der Reibungscoefficient der Röhre:

$$\zeta = \frac{d}{l}(\zeta_2 - \zeta_1) = \frac{2,828}{124} = 0,0228.$$

Nach der ersten Tabelle in §. 429 ist für die mittlere Geschwindigkeit v = 1,84 Meter, mit welcher das Wasser aus der Röhre ausfloß, ζ = 0,0215, also die Uebereinstimmung eine ganz gute. Bei diesen Versuchen läßt sich auch auf das Ueberzeugendste nachweisen, daß die Ausflußgeschwindigkeit durch Röhren nicht von der Neigung derselben, sondern nur von der Druckhöhe der Ausmündung abhängt. Es fällt z. B. die Ausflußzeit gleich groß aus, die lange Röhre mag im mittleren oder im unteren Loche stecken, wenn nur die Ausmündung derselben gleich tief unter dem Wasserspiegel im Reservoir steht.

Dieser Ausflußapparat hat neuerer Zeit noch vielfache Ergänzungen erhalten, so daß es möglich ist, mit demselben auch Versuche über den Ausfluß des Wassers unter constantem Druck, sowie auch solche über den Ausfluß der Luft, ferner Versuche über den Druck, Stoß und die Reaction des Wassers u. s. w. anzustellen.

Schlußanmerkung. Die Literatur über den Ausfluß des Wassers und über die Bewegung des Wassers in Röhren wird am vollständigsten mitgetheilt in der „allgemeinen Maschinenencyklopädie, Band 1, Art. Ausfluß". Von den neueren Schriften ist hier nur anzuführen: „Gerstner, Handbuch der Mechanik, Band 2, Prag 1832"; ferner „d'Aubuisson's Traité d'Hydraulique à l'usage des Ingénieurs. II. édit. 1840". Die erste Ausgabe ist auch deutsch erschienen. „Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, dritte Auflage, 1842"; ferner Scheffler's Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Braunschweig 1847". Wegen ihrer praktischen Haltung haben die älteren hydraulischen Schriften von Bossut und du Buat immer einen großen Werth. Für den Unterricht und für das praktische Studium der Hydraulik ist besonders geeignet: „Die Experimentalhydraulik, eine Anleitung zur Ausführung hydraulischer Versuche im Kleinen, von J. Weisbach, Freiberg 1855". Ferner ist zu empfehlen: „Rühlmann's Hydromechanik", Leipzig 1857. Der neueren Werke von Lesbros, Boileau, Francis u. s. w. ist oben (§§. 378, 380 und 387) gedacht worden. Noch ist zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, sowie Cours de Mécanique appliquée II., par Bresse. Von den hydraulischen Versuchen des Verfassers sind bis jetzt erst zwei Hefte erschienen, und zwar:

1) Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, und
2) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers beim Ausflusse u. s. w., Leipzig 1843.

Mehrere neue Abhandlungen des Verfassers über Hydraulik enthält der Civil-Ingenieur, die Zeitschrift des deutschen Ingenieurvereines u. s. w.

Sechstes Capitel.

Von dem Ausflusse der Luft und anderer Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.

§. 457 **Ausfluss vom Quecksilber und Oel.** Die allgemeine Formel

$$v = \sqrt{2gh} \text{ (s. §. 397)}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit v des unter dem durch die Höhe h gemessenen Drucke ausfließenden Wassers gilt (s. §. 399) auch bei anderen Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber, Oel, Alkohol u. s. w., und läßt sich sogar auch auf den Ausfluß der Luft und anderer luftförmigen Flüssigkeiten anwenden, wenn deren Pressung nicht groß ist. Bezeichnet γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit und p den Druck derselben auf die Flächeneinheit, so hat man ebenfalls $h = \frac{p}{\gamma}$, und daher auch

$$v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}.$$

Mißt man den Druck durch ein Piëzometer, dessen Füllung, z. B. Quecksilber, die Dichtigkeit γ_1 hat, so beträgt der Stand desselben, d. i. die Höhe seiner Flüssigkeitssäule:

$$h_1 = \frac{p}{\gamma_1};$$

es ist also $p = h_1 \gamma_1$, und daher auch

$$v = \sqrt{2g\frac{\gamma_1}{\gamma}h_1} = \sqrt{2g\varepsilon_1 h_1},$$

wenn $\varepsilon_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma}$ das Verhältniß der Dichtigkeit der Piëzometerfüllung zur Dichtigkeit der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Die Uebereinstimmung der Ausflußgesetze der verschiedenen Flüssigkeiten erstreckt sich nicht allein auf die Geschwindigkeit, sondern auch auf die Contraction der Flüssigkeitsstrahlen; die Quecksilber-, Oel-, Luftstrahlen u. s. w. beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand sind ebenso und fast in demselben Verhältnisse contrahirt als die Wasserstrahlen. Einige Versuche, welche der Verfasser über den Ausfluß des Quecksilbers, Rüböles und der atmosphärischen Luft angestellt hat, weisen diese Uebereinstimmung vollständig nach (s. Polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1851, Seite 386). Diese Versuche gaben:

1) Für eine kreisrunde Mündung in der dünnen ebenen Wand von

6,5 Millimeter Durchmesser, bei den Druckhöhen 91,5 Millimeter und 329 Millimeter die Ausflußcoefficienten:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl
$\mu = 0{,}709$	0,670	0,674

Es läßt sich hiernach erwarten, daß die Contraction der Quecksilber- und Rübölstrahlen noch wenig stärker ist als die der Wasserstrahlen.

Ferner 2) ein kurzes innen gut abgerundetes conoidisches Mundstück von der Ausmündungsweite $d = 6{,}6$ Millimeter und der doppelten Länge ($l = 2\,d$) gab folgende Ausflußcoefficienten:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
		bei $12\frac{1}{2}^0$ C. Temp.	bei 39^0 C. Temp.
$\mu = 0{,}942$	0,989	0,430	0,665

3) Eine kurze cylindrische Ansatzröhre ohne alle Abrundung von der Weite $d = 6{,}76$ Millimeter, und der dreifachen Länge ($l = 3\,d$) führte auf folgende Werthe:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
		bei $12\frac{1}{2}^0$ C. Temp.	bei 39^0 C. Temp.
$\mu = 0{,}885$	0,900	0,363	0,604

Aus diesen Versuchen ergiebt sich, daß beim Ausflusse durch kurze Mundstücke und Röhren das Quecksilber nur wenig schneller ausfließt als das Wasser, dagegen das Rüböl eine viel kleinere, jedoch mit der Temperatur ansehnlich wachsende Geschwindigkeit hat als das Wasser. Der große Unterschied zwischen der Geschwindigkeit des Rüböles und des Wassers hat jedenfalls in der großen Klebrigkeit des Oeles an der Röhrenwand seinen Grund.

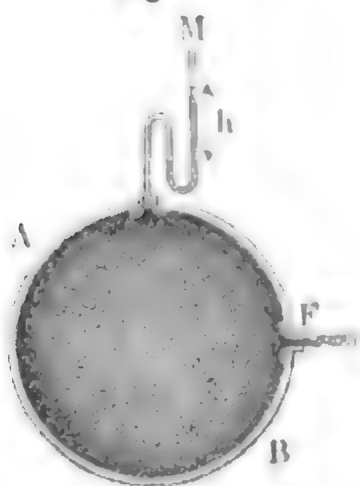
4) Beim Ausflusse durch eine 6,64 Millimeter weite und 86mal so lange Glasröhre (I.) und beim Ausflusse durch eine 6,78 Millimeter weite und 85mal so lange Eisenröhre (II.) ergaben sich folgende Werthe der Widerstandscoefficienten ζ:

	für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
			bei 6° C. Temp.	bei 32° C. Temp.
I.	$\zeta = 0,0271$	0,0277	39,21	2,722
II.	$\zeta = 0,0403$	0,0461	54,90	5,24

Den letzten Versuchen zufolge ist sowohl in einer Glas- als auch in einer Eisenröhre der Widerstandscoefficient des Quecksilbers wenig größer, dagegen aber der Widerstandscoefficient des Rüböles viele Mal größer als der des Wassers. Auch ist aus der letzten Tabelle zu ersehen, daß der Widerstandscoefficient des Rüböles um so mehr abnimmt, je höher die Temperatur oder der Flüssigkeitsgrad desselben ist. Endlich wird auch durch diese Versuche dargethan, daß die Widerstandscoefficienten der Reibung für die Eisenröhre weit größer sind als für die weit glattere Glasröhre.

§. 458 **Ausflussgechwindigkeit der Luft.** Unter der Voraussetzung, daß die Luft während des Ausflusses ihre Dichtigkeit nicht ändert, läßt sich die bekannte Grundformel für den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen auch auf den Ausfluß der Luft anwenden. Ist daher p der Druck der äußeren Luft, sowie p_1 der Druck und γ_1 die Dichtigkeit der Luft im Inneren des Reservoirs AB, Fig. 793, so kann man die Ausflußgeschwindigkeit der letzteren (s. §. 399) setzen:

Fig. 793.



$$v = \sqrt{2g\frac{(p_1 - p)}{\gamma_1}}$$

$$= \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Nun ist aber (nach §. 393), wenn p den Druck in Kilogrammen auf ein Quadratcentimeter Fläche, γ das Gewicht eines Cubikmeters Luft und τ die Temperatur derselben bezeichnen, für atmosphärische Luft:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0,00367\,.\,\tau}{1,2514},$$

oder wenn man p auf ein Quadratmeter Fläche bezieht,

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{10000}{1,2514}\cdot(1 + 0,00367\,\tau) = 7991\,(1 + 0,00367\,\tau),$$

daher folgt:

$$\sqrt{\frac{p_1}{\gamma_1}} = \sqrt{\frac{p}{\gamma}} = \sqrt{7991}\,\sqrt{1 + 0{,}00367\,\tau},$$

oder wenn man noch 0,00367 durch δ ersetzt,

$$\sqrt{\frac{p}{\gamma}} = 89{,}39\,\sqrt{1 + \delta\,\tau}, \text{ und}$$

$$v = 89{,}39\,\sqrt{2g\,(1 + \delta\,\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

$$= 396\,\sqrt{(1 + \delta\,\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \text{ Meter},$$

oder, für preuß. Maß,

$$v = 159{,}6\,\sqrt{2g\,(1 + \delta\,\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

$$= 1261\,\sqrt{(1 + \delta\,\tau)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \text{ Fuß}.$$

Ist b der äußere Barometerstand, und h der Manometerstand (M), so hat man auch:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b + h}, \text{ also } 1 - \frac{p}{p_1} = \frac{h}{b + h},$$

und folglich die Ausströmungsgeschwindigkeit der Luft:

$$v = 396\,\sqrt{(1 + \delta\,\tau)\,\frac{h}{b + h}} \text{ Meter}$$

$$= 1261\,\sqrt{(1 + \delta\,\tau)\,\frac{h}{b + h}} \text{ Fuß},$$

oder annähernd, bei kleinen Manometerständen, indem man

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{b}}} = 1 - \frac{h}{2b} \text{ setzt},$$

$$v = 396\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\sqrt{(1 + \delta\,\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Meter}$$

$$= 1261\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\sqrt{(1 + \delta\,\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Wegen des gewöhnlichen Feuchtigkeitszustandes der atmosphärischen Luft ist es rathsam, in der Praxis $\delta = 0{,}004$ anzunehmen.

Ausflussquantum. Ist F die Größe der Ausströmungsöffnung, so hat man die effective Ausflußmenge, gemessen unter dem inneren Drucke p_1 oder $b + h$: §. 45

$$Q_1 = Fv = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1-\frac{p}{p_1}\right)} = F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}\sqrt{1-\frac{p}{p_1}}$$
$$= F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}\sqrt{\frac{h}{b+h}},$$

z. B. für atmosphärische Luft:

$$Q_1 = 396\,F\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\,h}{b+h}} \text{ Cubikmeter}$$
$$= 1261\,F\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\,h}{b+h}} \text{ Cubikfuß.}$$

Dieses Luftquantum auf den äußeren Luftdruck p oder b reducirt, erhält man:

$$Q = \frac{p_1}{p}\,Q_1 = \frac{b+h}{b}\,Q_1$$
$$= F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}\cdot\frac{p_1}{p}}\sqrt{1-\frac{p}{p_1}}$$
$$= F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}\cdot\frac{b+h}{b}}\sqrt{\frac{h}{b+h}} = F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}}\sqrt{\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}},$$

z. B. für atmosphärische Luft:

$$Q = 396\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$
$$= 1261\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

Beispiel. In einem großen Behälter ist Luft von 120 Grad Wärme eingeschlossen, welcher ein Quecksilbermanometerstand von 5 Zoll entspricht, während der äußere Barometerstand 27,2 Zoll beträgt; welche Windmenge wird aus demselben durch eine $1\frac{1}{2}$ Zoll weite kreisrunde Mündung strömen?

Die theoretische Ausflußgeschwindigkeit ist:

$$v = 1261\sqrt{(1+0{,}00367\,.\,120)\frac{5}{32{,}2}} = 1261\sqrt{\frac{1{,}4404\,.\,5}{32{,}2}} = 596{,}4 \text{ Fuß;}$$

ferner der Querschnitt der Mündung:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{\pi}{256} = 0{,}01227 \text{ Quadratfuß;}$$

folglich die theoretische Ausflußmenge, gemessen unter dem inneren Drucke:

$$Q_1 = Fv = 596{,}4\,.\,0{,}01227 = 7{,}319 \text{ Cubikfuß;}$$

dagegen gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$Q = \frac{b+h}{b}\,Q_1 = \frac{32{,}2}{27{,}2}\cdot 7{,}319 = 8{,}665 \text{ Cubikfuß.}$$

460 **Ausfluss nach dem Mariotte'schen Gesetze.** Unter der Voraussetzung, daß die Luft beim Ausströmen aus Gefäßen keine Tempera-

turveränderung erleidet, läßt sich annehmen, daß sie sich hierbei nach dem Mariotte'schen Gesetze (s. §. 387) ausdehnt, und daher auch voraussetzen, daß das Luftquantum Q beim Uebergange aus der Pressung p_1 in die Pressung p die Arbeit $Q\,p\,Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)$ verrichte (s. §. 388). Setzt man nun diese Arbeit der Arbeit $\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma$ gleich, welche das $Q\gamma$ bei dem Ausflusse in Anspruch nimmt, so erhält man folgende Formel

$$\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma = Log.\,nat.\left(\frac{p_1}{p}\right)\cdot Q\,p, \text{ oder}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma}\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right),$$

wonach die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)} \text{ folgt.}$$

Noch ist, wie oben, für Metermaß $\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + \delta\tau}{1,2514}$, daher hat man auch

$$v = 396\sqrt{(1 + \delta\tau)\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)} = 396\sqrt{(1 + \delta\tau)\,Ln.\left(\frac{b + h}{b}\right)} \text{ Meter,}$$

sowie

$$v = 1261\sqrt{(1 + \delta\tau)\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)} = 1261\sqrt{(1 + \delta\tau)\,Ln.\left(\frac{b + h}{b}\right)} \text{ Fuß,}$$

wobei b den Barometerstand der äußeren und h den Manometerstand der inneren Luft, ferner τ die Temperatur der letzteren und $\delta = 0,00367$, den bekannten Ausdehnungscoefficienten der Luft bezeichnet. Nun folgt die theoretische Ausflußmenge pr. Secunde:

$$Q = Fv = F\sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}\,Ln.\cdot\left(\frac{p_1}{p}\right)}$$
$$= 1261\,F\sqrt{(1 + \delta\tau)\,Ln.\left(\frac{b + h}{b}\right)} \text{ Cubikfuß,}$$

oder reducirt auf den inneren Druck:

$$Q_1 = \frac{p}{p_1}\,Q = \frac{p}{p_1}\,F\sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)}$$
$$= \frac{b}{b + h}\,F\sqrt{2g\,\frac{p}{\gamma}\,Ln.\left(\frac{b + h}{b}\right)}$$
$$= 1261\,F\,\frac{b}{b + h}\sqrt{(1 + \delta\tau)\,Ln\cdot\left(\frac{b + h}{b}\right)}.$$

Ist der Ueberdruck der inneren Luft oder $\frac{h}{b}$ sehr klein, so kann man

$$Ln. \left(\frac{b+h}{b}\right) = Ln. \left(1 + \frac{h}{b}\right) = \frac{h}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}\right)^2$$

(s. Ingenieur, Seite 81), und daher auch annähernd

$$Q = F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma}\left(1 - \frac{h}{2 b}\right) \frac{h}{b}}$$

setzen, während nach der ersteren Ausflußformel (s. §. 459)

$$Q = F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma}\left(1 + \frac{h}{b}\right) \frac{h}{b}} \text{ ist.}$$

Es führt also die Annahme, daß sich die Luft beim Ausströmen nach dem Mariotte'schen Gesetze ausdehne, auf eine kleinere Ausflußmenge, als die Annahme, daß sie sich beim Ausflusse genau so wie Wasser verhalte, also gar nicht ausdehne. Diese Differenz vermindert sich jedoch mit $\frac{h}{b}$, und es ist endlich bei sehr kleinen Werthen von $\frac{h}{b}$, in beiden Fällen:

$$Q = F \sqrt{2 g \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{h}{b}} = 1261 F \sqrt{(1 + \delta \tau) \frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß}$$

zu setzen.

§. 461 **Arbeit der Wärme.** Der in §. 388 gefundene logarithmische Ausdruck für die mechanische Arbeit beim Comprimiren und Ausdehnen der Luft hat nur unter der Voraussetzung seine Gültigkeit, daß sich bei dieser Volumen- oder Dichtigkeitsveränderung die Temperatur der Luft nicht ändere; dies ist jedoch nur dann anzunehmen, wenn diese Veränderung sehr langsam erfolgt, wobei die Wärme hinreichende Zeit hat, sich mit der Wärme der Gefäßwand und der äußeren Luft ins Gleichgewicht zu setzen. Geht aber die Dichtigkeitsveränderung der Luft schnell vor sich, so ist mit derselben auch eine Temperaturveränderung verbunden, und zwar beim Verdichten derselben eine Erhöhung und beim Verdünnen eine Verminderung der Temperatur. Es kann daher sich auch in diesem Falle die Spannung nicht nach dem einfachen Mariotte'schen Gesetze verändern. Sind p und p_1 die Pressungen, γ und γ_1 die Dichtigkeiten, sowie τ und τ_1 die Temperaturen einer und derselben Luft, so gilt nach §. 392 die Formel

$$\frac{p_1}{p} = \frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

Wenn sich nun an der plötzlichen Pressungsveränderung die Temperatur in dem Verhältnisse

$$\frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau_2} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ ändert, so läßt sich}$$

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau}\right)^3 = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{3/2},$$

sowie

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \left(\frac{1 + \delta \tau_1}{1 + \delta \tau}\right)^2 = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{2/3}$$

setzen.

Wenn in dem Cylinder AC, Fig. 794, durch den Kolben EF anfänglich ein Luftprisma von der Höhe $EB = s$, mit der Spannung p und Dichtigkeit γ abgesperrt wird, und diese Luftmenge durch ein schnelles Aufschieben des Kolbens um x plötzlich in die Dichtigkeit y und Spannung z versetzt wird, so ist der letzten Formel zu Folge,

Fig. 794.

$$\frac{z}{p} = \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{3/2} = \left(\frac{s}{s - x}\right)^{3/2},$$

und daher

$$z = \left(\frac{s}{s - x}\right)^{3/2} p.$$

Um daher den Kolben, dessen Fläche der Einfachheit wegen, der Flächeneinheit gleich sein möge, durch das Wegelement σ fortzuschieben, ist die mechanische Arbeit

$$z\sigma = \left(\frac{s}{s - x}\right)^{3/2} p\sigma = p\sigma s^{3/2}(s - x)^{-3/2}$$

nöthig.

Führt man nun statt x, nach und nach $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma \ldots$ ein, setzt man $s = n\sigma$ sowie die Höhe des Luftraumes am Ende des Kolbenweges EE_1, $E_1B = s_1 = m\sigma$, so erhält man die mechanische Arbeit, welche der Kolben bei dem Ausschube EE_1 verrichtet:

$$A_1 = p\sigma s^{3/2}[s^{-3/2} + (s - \sigma)^{-3/2} + (s - 2\sigma)^{-3/2} + \cdots + (s - m\sigma)^{-3/2}]$$
$$= p\sigma s^{3/2}\left\{\begin{matrix}(\sigma)^{-3/2} + (2\sigma)^{-3/2} + (3\sigma)^{-3/2} + \cdots + (n\sigma)^{-3/2} \\ -[(\sigma)^{-3/2} + (2\sigma)^{-3/2} + (3\sigma)^{-3/2} + \cdots + (m\sigma)^{-3/2}]\end{matrix}\right\}$$
$$= \frac{p s^{3/2}}{\sigma^{1/2}}\left\{\begin{matrix}1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2} + \cdots + n^{-3/2} \\ -(1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2})\end{matrix}\right\}.$$

Nun ist aber, wenn m und n unendlich große Zahlen bedeuten, nach Seite 88 des Ingenieur:

$$1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + m^{-3/2} = \frac{m^{-1/2}}{-1/2} = -\frac{2}{m^{1/2}},$$

und

$$1^{-3/2} + 2^{-3/2} + 3^{-3/2} + \cdots + n^{-3/2} = -\frac{2}{n^{-1/2}},$$

daher folgt

$$A_1 = \frac{ps^{3/2}}{\sigma^{1/2}}\left(\frac{2}{m^{1/2}} - \frac{2}{n^{1/2}}\right) = 2ps^{3/2}\left(\frac{1}{s_1^{1/2}} - \frac{1}{s^{1/2}}\right)$$
$$= 2ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right].$$

Um das comprimirte Luftquantum AE_1 durch weiteres Aufschieben des Kolbens auf den Weg s_1 in einen Raum R zu drücken, worin die Pressung

$$p_1 = p\left(\frac{s}{s_1}\right)^{3/2}$$

vorhanden ist, wird noch die Arbeit

$$A_2 = p_1 s_1 = \frac{ps^{3/2}}{s_1^{1/2}}$$

erfordert, wogegen die äußere Luft während des ganzen Kolbenweges mit der Kraft p nachschiebt, und hierbei die Arbeit $A_3 = ps$ auf den Kolben überträgt. Es ist daher schließlich die ganze mechanische Arbeit zum Comprimiren des Luftvolumens $(1 \,.\, s)$ und Hineindrücken in den Raum R:

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$
$$= 2ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right] + \frac{ps^{3/2}}{s_1^{1/2}} - ps = 3ps\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right],$$

und folglich die Arbeit zum Comprimiren des Luftvolumens V, von p auf p_1:

$$A = 3Vp\left[\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/2} - 1\right] = 3Vp\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right] = 3Vp\left(\sqrt[3]{\frac{p_1}{p}} - 1\right),$$

während nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$A = Vp\,Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)$$

und bei vollständiger Incompressibilität des Fluidums,

$$A = V(p_1 - p) = Vp\left(\frac{p_1}{p} - 1\right)$$

zu setzen wäre.

Wird umgekehrt das Luftquantum $V_1\gamma_1$ von der Pressung p_1 durch plötzliche Ausdehnung auf die Pressung p und Dichtigkeit

$$\gamma = \gamma_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3}$$

oder Volumen

$$V = V_1\left(\frac{p_1}{p}\right)^{2/3}$$

zurückgeführt, so verrichtet dasselbe die mechanische Arbeit

$$A = 3Vp\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right] = 3V_1p_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right].$$

Beispiel. Ein Gebläse, welches pro Secunde 10 Cubikfuß Luft von $b = 28$ Zoll Barometerstand in Wind von $b + h = 30$ Zoll Spannung verwandelt, erfordert nach der Formel

$$A = 3\, Vp \left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right],$$

da der Druck der äußeren Luft auf den Quadratfuß

$$p = 144 \,.\, 0{,}5037\, b = 144 \,.\, 0{,}5037 \,.\, 28 = 2031 \text{ Pfd. beträgt,}$$

den Arbeitsaufwand

$$A = 30 \,.\, 2031 \left(\sqrt[3]{\frac{30}{28}} - 1\right) = 6093 \left(\sqrt[3]{\frac{15}{14}} - 1\right) = 6093 \,.\, 0{,}23265$$
$$= 1418 \text{ Fußpfd.}$$

während die logarithmische Formel (siehe Beisp. 1 zu §. 388), $A = 1401$ Fußpfd. gegeben hat und nach der Wasserformel

$$A = Vp \left(\frac{p_1}{p} - 1\right) = 29310 \left(\frac{15}{14} - 1\right) = \frac{20310}{14} = 1451 \text{ Fußpfd.}$$

ist.

Ausfluss der Luft mit Rücksicht der Abkühlung. Das §. 4 Arbeitsquantum $A = 3\, Q_1\, p_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]$, welches bei der plötzlichen Ausdehnung des Luftvolumens Q_1 auf Q frei wird, ist auch gleich zu setzen der Arbeit $Q_1\, \gamma_1 \cdot \frac{v^2}{2g}$, welche die Trägheit der Luftmasse $\frac{Q_1 \gamma_1}{g}$ bei Annahme der Ausflußgeschwindigkeit v in Anspruch nimmt.

Die hiernach aufzustellende Gleichung

$$Q_1 \gamma_1 \frac{v^2}{2g} = 3\, Q_1\, p_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]$$

führt nun auf folgende Ausflußformel

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{3\, p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right], \text{ oder}$$

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{3\, p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]},$$

wonach für französisches Maß

$$v = 154{,}8 \sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}$$

$$= 685{,}8 \sqrt{(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]} \text{ Meter,}$$

und für preußisches Maß

$$v = 276{,}4 \sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}$$

$$= 2185 \sqrt{(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]} \text{ Fuß folgt.}$$

Die ausströmende Luft hat die äußere Pressung p, die Dichtigkeit

$$\gamma_2 = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3}$$

und die Temperatur

$$\tau_2 = \tau_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3} \frac{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3} - 1}{\delta},$$

und das theoretische Luftquantum, welches durch eine Mündung vom Inhalte F strömt, ist

$$Q_2 = Fv = F\sqrt{2g \cdot \frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]},$$

$$= 276{,}4\, F\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]} \text{ Cubikfuß.}$$

wobei p_1, γ_1 und τ_1 Pressung, Dichtigkeit und Temperatur der inneren Luft bezeichnen.

Auf den inneren Druck reducirt, ist das Ausflußquantum

$$Q_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot Q_2 = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3} Q_1 = F\left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3}\sqrt{2g \cdot 3\frac{p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]},$$

und endlich auf den äußeren Luftdruck und die innere Temperatur oder auf die Dichtigkeit $\gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)$ reducirt, ist es

$$Q = \frac{p_1}{p} Q_1 = F\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3}\sqrt{2g\frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{3p_1}{\gamma_1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/3} - 1\right]}.$$

Setzt man $\frac{p_1}{p} = \frac{b + h}{b}$, wo b den äußeren und $b + h$ den inneren Barometerstand bezeichnet, so erhält man

$$Q = F\sqrt{2g\frac{3p_1}{\gamma_1}\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} - 1\right]}$$

$$= 276{,}9\, F\sqrt{2g(1 + \delta\tau)\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} - 1\right]}$$

$$= 2185\, F\sqrt{(1 + \delta\tau)\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} - 1\right]} \text{ Cubikfuß.}$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist $\frac{h}{b}$ klein, so daß sich

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} = \left(1 + \frac{h}{b}\right)^{1/3} = 1 + {}^1/_3\,\frac{h}{b} - {}^1/_9\left(\frac{h}{b}\right)^2 + \cdots,$$

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^{1/3} - 1 = {}^1/_3\,\frac{h}{b} - {}^1/_9\left(\frac{h}{b}\right)^2 + {}^5/_{81}\left(\frac{h}{b}\right)^3$$

$$= \frac{h}{3b}\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{h}{b} + \frac{5}{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]$$

setzen läßt, und nun

$$Q = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}\left[1 + \frac{1}{3}\,\frac{h}{b} - \frac{1}{9}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\,\frac{h}{b} + \frac{5}{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}\left[1 - \frac{1}{27}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]}$$

$$= F\left[1 - \frac{1}{54}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\,\frac{h}{b}} \text{ folgt.}$$

Bei Anwendung auf Gebläse-, Wetter- und Lüftungsmaschinen ist $\frac{h}{b} < \frac{1}{2}$, und daher ganz einfach das theoretische Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke und bei der inneren Temperatur

$$Q = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\,\frac{h}{b}}$$

$$= 89{,}39\,F\sqrt{2g(1+\delta\tau)\frac{h}{b}} = 396\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\frac{h}{b}} \text{ Cubikm.}$$

$$= 159{,}6\,F\sqrt{2g(1+\delta\tau)\frac{h}{b}} = 1261\,F\sqrt{(1+\delta\tau)\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

Beispiel. Für den im Beispiel zu §. 459 behandelten Fall, wo $b = 27{,}2$ und $h = 5$ Zoll, ferner $\tau = 120^0$ und $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}01227$ Quadratfuß ist, hat man nach der letzten Formel die Ausflußmenge, gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$Q = 1261\,F\sqrt{1{,}4404\cdot\frac{5}{27{,}2}} = 1261\,F\sqrt{0{,}2648}$$
$$= 648{,}9\,F = 648{,}9\cdot 0{,}01227 = 7{,}962 \text{ Cubikfuß,}$$

während oben (§. 459) nach der Wasserformel, $Q = 8{,}665$ Cubikfuß gefunden wurde, und die logarithmische Formel in §. 460,

$$Q = 1261\,F\sqrt{1{,}4404\,Ln.\frac{32{,}2}{27{,}2}} = 1261\,F\sqrt{0{,}2431}$$
$$= 621{,}7\,.\,0{,}01227 = 7{,}628 \text{ Cubikfuß giebt.}$$

Ausfluss der bewegten Luft. Die gefundenen Ausflußformeln §. 4 setzen voraus, daß die Pressung p oder der Manometerstand h an einer Stelle gemessen worden sei, wo die Luft in Ruhe befindlich ist, oder eine sehr schwache Bewegung hat; mißt man aber p_1 oder h_1 an einem Orte, wo die Luft in Bewegung ist, communicirt z. B. das Manometer M_1 mit der in einer Leitungsröhre CF, Fig. 795 (a. f. S.), befindlichen Luft, so hat

man bei der Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit auch noch die lebendige Kraft der ankommenden Luft zu berücksichtigen. Ist nun c die Geschwindigkeit der vor der Manometermündung vorbeigehenden Luft, so hat man demnach zu setzen:

$$Q_1 \gamma_1 \cdot \frac{v^2}{2g} = Q_1 \gamma_1 \cdot \frac{c^2}{2g} + 3\, Q_1\, p_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right].$$

Bezeichnet F den Querschnitt der Mündung und G den der Röhre oder des an der Manometermündung vorbeigehenden Stromes, so ist das ausströmende Luftquantum $Q_1 \gamma_1 = G c \gamma_1 = F v \gamma_2$, daher folgt

$$\frac{c}{v} = \frac{F \gamma_2}{G \gamma_1} = \frac{F}{G} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{2/3} \text{ und}$$

$$Q_1 \gamma_1 \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{4/3}\right] \frac{v^2}{2g} = 3\, Q_1 p_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right],$$

und die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2g \dfrac{3p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\dfrac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\dfrac{F}{G}\right)^2 \left(\dfrac{p}{p_1}\right)^{4/3}}},$$

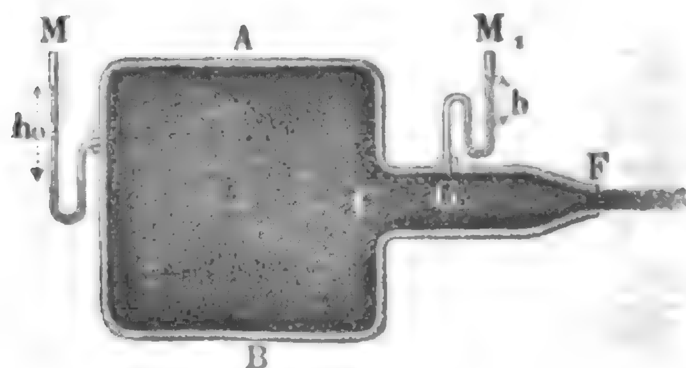
oder annähernd, wenn p_1 nicht viel größer als p ist,

$$v = \sqrt{\frac{2g \dfrac{3p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\dfrac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\dfrac{F}{G}\right)^2}}$$

$$= 2185 \sqrt{\frac{(1 + \delta\tau) \left[1 - \left(\dfrac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right]}{1 - \left(\dfrac{F}{G}\right)^2}} \text{ Fuß.}$$

Es stellt sich also auch hier, genau wie beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen, die Ausflußgeschwindigkeit um so größer heraus, je größer das Verhältniß $\frac{F}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Mündung und dem der Röhre oder des ankommenden Luftstromes ist. Man ersieht auch hieraus, daß unter übrigens gleichen Verhältnissen der Manometerstand p_1 um so kleiner ausfällt, je enger die Leitungsröhre oder je größer die Geschwindigkeit der durch sie fortgeführten Luft ist.

Fig. 795.



Bezeichnet p_0 die Spannung im Windreservoir, wo die Luft noch in Ruhe ist, so hat man auch:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{3p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3}\right]$$

und wenn man aus beiden Gleichungen v eliminirt, so ergiebt sich

$$\frac{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3}} = 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{4/3}, \text{ annähernd } = 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2.$$

Ist b der äußere Barometer- und h der innere Manometerstand, sowie F der Inhalt der Ausflußöffnung, so hat man schließlich das theoretische Ausflußquantum, gemessen unter der Dichtigkeit

$$\gamma = \left(\frac{p}{p_1}\right)\gamma_1 = \frac{b\gamma_1}{b+h}$$

$$Q = F\sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma}\frac{h}{b}}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}} = 159{,}6\,F\sqrt{\frac{2g(1+\delta\tau)\frac{h}{b}}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

$$= 1261\,F\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\frac{h}{b}}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Beispiel. Ein auf einer 3½ Zoll weiten Windleitung sitzendes Quecksilbermanometer steht auf 2½ Zoll, während der Wind am Ende der Röhre durch eine runde, 2 Zoll weite Mündung ausströmt; mit welcher Geschwindigkeit findet dieses Ausströmen statt, vorausgesetzt, daß der äußere Barometerstand 27½ Zoll und die Temperatur der Luft in der Windleitung 10 Grad beträgt?

Es ist hier

$$\sqrt{1+\delta\tau} = \sqrt{1{,}0367} = 1{,}018,\ \sqrt{\frac{h}{b}} = \sqrt{5/55} = \sqrt{1/11} = 0{,}3015,$$

sowie

$$F = \pi r^2 = 3{,}141 : 144 = 0{,}02181 \text{ und}$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2} = \frac{\sqrt{49^2 - 16^2}}{49} = \frac{46{,}314}{49} = 0{,}9452,$$

daher folgt die Ausflußmenge

$$Q = 1261\,F \cdot \frac{1{,}018 \cdot 0{,}3015}{0{,}9452} = 409{,}5\,F = 8{,}931 \text{ Cubikfuß.}$$

Für die entsprechende Spannung p_0 im Luftreservoir ist:

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/3} = \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/3}\right] : \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] = \left(1 - \sqrt[3]{11/12}\right) : 0{,}9452^2$$

$$= \frac{0{,}0287}{0{,}8934} = 0{,}03212, \text{ daher}$$

$$\sqrt[3]{\frac{p}{p_0}} = 0{,}90788 \text{ und } p_0 = 1{,}103\,p, \text{ sowie auch } b + h_0 = 1{,}103\,b,$$

und folglich der Manometerstand im Reservoir:

$$h_0 = 0{,}103\,b = 0{,}103 \,.\, 27{,}5 = 2{,}83 \text{ Zoll.}$$

§. 464 **Ausflusscoefficienten.** Die Contractionserscheinungen, welche wir beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen kennen gelernt haben, finden sich auch beim Ausströmen der Luft aus Gefäßen vor. Ist die Ausflußöffnung in einer dünnen Wand ausgeschnitten, so hat der durch sie gehende Luft- oder Windstrahl einen kleineren Querschnitt als die Mündung selbst, und es ist deshalb auch die effective Ausflußmenge Q_1 kleiner als das theoretische Ausflußquantum Q oder das Product Fv aus Querschnitt F der Mündung und theoretischen Geschwindigkeit v. Diese Verminderung der Ausflußmenge hat, wie man am ausströmenden Rauch beobachten kann, hauptsächlich ihren Grund in der Contraction des Luftstrahles, und wir können daher auch, wie bei den Wasserstrahlen (s. §. 406), das Verhältniß $\alpha = \frac{F_1}{F}$ zwischen dem Querschnitte F_1 des Luftstrahles und dem Querschnitte F der Mündung

den Contractionscoefficienten,

ferner das Verhältniß $\varphi = \frac{v_1}{v}$ zwischen der effectiven Ausströmungsgeschwindigkeit v_1 und der theoretischen Ausflußgeschwindigkeit v (s. §. 408)

den Geschwindigkeitscoefficienten,

und das Verhältniß $\mu = \frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1 v_1}{F v} = \alpha\varphi$ der wirklichen Ausflußmenge Q_1 zur theoretischen Ausflußmenge Q

den Ausflußcoefficienten der ausströmenden Luft

nennen.

Jedenfalls ist bei dem Ausflusse der Luft durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand wie bei dem des Wassers der Geschwindigkeitscoefficient φ nahe = Eins, und daher auch, so lange als besondere Messungen der Luftstrahlen nicht vorgenommen worden sind, der Ausflußcoefficient $\mu = \alpha\varphi$ der Luft dem Contractionscoefficienten α gleich zu setzen. Die älteren Versuche, welche über den Ausfluß der Luft durch Mündungen in der dünnen Wand angestellt worden sind, weichen sehr von einander ab. Die von Buff nach der Wasserformel berechneten Versuche von Koch geben für Kreismündungen von 3 bis 6 Linien Durchmesser, bei 0,2 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0{,}60$ bis $0{,}50$, dagegen liefern die hiernach berechneten Versuche von d'Aubuisson bei 0,027 bis 0,144 Meter Wassermanometerhöhe an Kreismündungen von 1 bis 3 Centimeter Durchmesser, $\mu = 0{,}65$ bis $0{,}64$. Ferner fand

Poncelet durch die Berechnung der Pecqueur'schen Versuche nach derselben Formel für eine Mündung von 1 Centimeter Durchmesser, unter dem Ueberdrucke von 1 Atmosphäre, also 10 Meter Höhe Wassersäule, $\mu = 0{,}563$, und für eine solche von 1,5 Centimeter Weite, $\mu = 0{,}566$. Die in großer Ausdehnung angestellten, und mittels der letzten Ausflußformel

$$Q = F\left[1 - \tfrac{1}{54}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{h}{b}}$$

berechneten Versuche des Verfassers haben folgende Resultate geliefert.

1) bei der Mündungsweite $d = 1$ Centimeter, und dem mittleren Pressungsverhältnisse:

$\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b} =$	1,05	1,09	1,43	1,65	1,89	2,15
$\mu =$	0,555	0,589	0,692	0,724	0,754	0,788

2) bei der Mündungsweite $d = 2{,}14$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,05	1,09	1,36	1,67	2,01
$\mu =$	0,558	0,573	0,634	0,678	0,723

3) bei der Mündungsweite $d = 1{,}725$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,37	1,63
$\mu =$	0,563	0,631	0,665

4) bei der Mündungsweite $d = 2$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,39
$\mu =$	0,578	0,641

Es wächst also hiernach der Contractionscoefficient beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ansehnlich mit der Druckhöhe. Bei Anwendung der Wasserformel wird aber diese Veränderlichkeit bedeutend herabgezogen; diese Formel giebt μ nahe $\sqrt{\frac{p}{p_1}}$, z. B. für $\frac{p_1}{p} = 2$;

$\sqrt{1/_2} = 0{,}707$ mal so groß als die letzte Formel. Nach der ersten Tabelle ist z. B. für $d = 1$, und $\frac{p_1}{p} = 2$, $\mu = \frac{0{,}754 + 0{,}788}{2} = 0{,}771$, und daher nach der Wasserformel $\mu = 0{,}707 \,.\, 0{,}771 = 0{,}555$, also sehr nahe denselben Werth, wie Poncelet gefunden hat.

Bei dem Ausfluß durch eine Kreismündung von 1 Centimeter Durchmesser in einer conisch convergenten Wand von 100 Grad Convergenz wurde für

$\frac{b + h}{b} =$	1,31	1,66
$\mu =$	0,752	0,793

gefunden.

Ebenso bei einer solchen Mündung in der conisch divergenten Wand von 100 Grad Divergenz, für

$\frac{b + h}{b} =$	1,30	1,66
$\mu =$	0,589	0,663

465 Die Veränderlichkeit des Contractionscoefficienten $\alpha = \mu$ für den Ausfluß der Luft durch eine Mündung in der dünnen Wand, erstreckt sich der bekannten Formel

$$\mu = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}} \text{ (s. §. 422)}$$

zufolge auf den Ausfluß durch kurze cylindrische Ansatzröhren. Nach den oben angeführten Versuchen von Koch ist z. B. für solche Röhren von 3 bis 4 Linien Weite und 4- bis 6facher Länge, bei 0,3 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0{,}74$ bis 0,72, wogegen d'Aubuisson für solche Röhren von 1 bis 3 Centimeter Weite und der 3- bis 4fachen Länge, bei 0,027 bis 0,141 Meter Wasserbarometerstand, $\mu = 0{,}92$ bis 0,93 und Poncelet für cylindrische Röhren von 1 Centimeter Weite und der $2^1/_2$- bis 10fachen Weite, bei dem doppelten Atmosphärendrucke, $\mu = 0{,}632$ bis 0,650 gefunden hat.

Die vom Verfasser angestellten Versuche haben dagegen auf folgende Resultate geführt:

1) Eine kurze cylindrische Ansatzröhre von 1 Centimeter Weite und 3 Centimeter Länge, gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,05	1,10	1,30
$\mu =$	0,730	0,771	0,830

2) Eine solche Röhre von 1,414 Centimeter Weite und der dreifachen Länge, führte für

$\frac{b+h}{b} =$	1,41	1,69
auf $\mu =$	0,813	0,822

3) Eine solche Röhre von 2,44 Centimeter Weite und der dreifachen Länge, gab für

$$\frac{b+h}{b} = 1{,}74;\; \mu = 0{,}833.$$

Die Zunahme des Ausflußcoefficienten beim Wachsen der Pressung ist durch das gleichzeitige Wachsen des Contractionscoefficienten erklärlich.

Die Ansatzröhre (1) mit schwach abgerundeter Einmündung gab im Mittel den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}927$, also viel größer als bei einer solchen Röhre ohne Abrundung.

4) Ein kurzes innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Länge und 1,6 Centimeter Länge gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,24	1,38	1,59	1,85	2,14
$\mu =$	0,979	0,986	0,965	0,971	0,978

Da dieser Coefficient, wie erforderlich, der Einheit sehr nahe kommt, so ist dadurch der Vorzug der Ausflußformel

$$Q = \mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma} \cdot \frac{b}{p}}$$

vor den anderen Formeln dargethan.

Die ältere Formel giebt natürlich bei hohem Drucke viel kleinere Werthe, und dagegen die logarithmische Formel (s. §. 460) viel größere, die Einheit sogar übersteigende Werthe von μ.

Eine kurze conische Röhre mit innerer Abrundung gab ziemlich

dieselben Werthe für μ, dagegen eine kurze conische Röhre ohne Abrundung von 1 Centimeter Mündungsweite, 4 Centimeter Länge und 7° 9′ Convergenz für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,27	1,65
$\mu =$	0,910	0,922	0,964

Nach Buff und Koch ist für eine solche Röhre von 2,72 Linien äußerer Weite und 6° Seitenconvergenz, bei 0,3 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0,73$ bis 0,85, und nach d'Aubuisson, bei einer ähnlichen Röhre von 1,5 Centimeter Mündungsweite, unter 0,027 bis 0,144 Meter Wasserdruckhöhe, $\mu = 0,94$, bei Zugrundelegung der älteren oder sogenannten Wasserformel.

Das vollständige längere Düsenmundstück AC, Fig. 736 aus §. 434, d. i. eine conische Röhre, von 14,5 Centimeter Länge, 1 Centimeter Weite in der Ausmündung, und 3,8 Weite in der übrigens gut abgerundeten Einmündung, bei nahe 6° Seitenconvergenz gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,45	2,16
$\mu =$	0,932	0,960	0,984

Durch Versuche über das Einströmen der Luft in Gefäße fanden die Franzosen Saint-Venant und Wantzel für ein kurzes, inwendig nach einem Viertelkreise abgerundetes Mundstück, nach der neueren Formel berechnet, $\mu = 0,98$, und für eine Mündung in der dünnen Wand, $\mu = 0,61$.

Sind die Pressungen klein, ist, wie z. B. bei der gewöhnlichen Gebläseluft, $\frac{h}{b} < 1/_6$, so läßt sich dem Vorstehenden zufolge, bei Anwendung der neueren Ausflußformel

$$Q = \mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma} \cdot \frac{b}{h}} = 1261 \mu F \sqrt{(1 + 0,004 \,.\, \tau) \frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß}$$

im Mittel setzen:

1) für Mündungen in der dünnen Wand, $\mu = 0,56$,
2) für kurze cylindrische Ansatzröhren, $\mu = 0,75$,
3) für ein gut abgerundetes conoidisches Mundstück, $\mu = 0,98$,
4) für eine conische Röhre von circa 6° Seitenconvergenz, $\mu = 0,92$.

Beispiel. Wenn bei einem Gebläse die Mündungen der beiden conischen Düsen zusammen 3 Quadratzoll Inhalt haben, wenn ferner bei einer Temperatur von 15 Grad der Manometerstand im Regulator 3 Zoll und der äußere Barometerstand $27\frac{1}{2}$ mißt, so läßt sich das effective Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke, setzen:

$$Q = 1261\,\mu F \sqrt{(1 + 0{,}004\,\tau)\,\frac{b}{h}}$$

$$= 1261 \,.\, 0{,}92 \cdot \frac{3}{144} \sqrt{(1 + 0{,}004 \,.\, 15)\,\frac{3 \,.\, 2}{55}} = 24{,}17 \sqrt{\frac{1{,}06 \,.\, 6}{55}}$$

$$= 24{,}17 \sqrt{0{,}1156} = 24{,}17 \,.\, 0{,}34 = 8{,}22 \text{ Cubikfuß}.$$

Reibungscoefficient der Luft. Bewegt sich die Luft durch eine lange Röhre CF, Fig. 796, so hat sie einen Reibungswiderstand wie das §. 4

Fig. 796.

Wasser zu überwinden, auch läßt sich dieser Widerstand durch die Höhe einer Luftsäule messen, welche der Ausdruck:

$$z = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin genau, wie bei den Wasserleitungen, l die Länge, d die Weite der Röhre, v die Geschwindigkeit und ζ den durch Versuche zu bestimmenden Widerstandscoefficienten der Luft bezeichnen, angiebt.

Die Versuche von Girard über die Bewegung der Luft durch Röhren führen auf den Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}0256$, und die von d'Aubuisson liefern im Mittel $\zeta = 0{,}0238$, wogegen nach Buff's Versuchen im Mittel $\zeta = 0{,}0375$ zu setzen ist. Dagegen findet wieder Poncelet aus den Ergebnissen der Versuche von Pecqueur bei dem Pressungsverhältnisse $\frac{p_1}{p} = 2$, $\mu = 0{,}0237$.

Die nach der neueren Formel berechneten Versuche des Verfassers gaben folgende Resultate.

1) Eine Messingröhre von 1 Centimeter Weite und 2 Meter Länge gab für Geschwindigkeiten von 25 bis 150 Meter, ζ allmälig abnehmend von 0,027260 bis 0,01482,

2) und eine Glasröhre von derselben Länge bei ziemlich denselben Geschwindigkeiten, lieferte $\zeta = 0{,}02738$ bis 0,01390.

3) Eine Messingröhre von 1,41 Centimeter Weite und 3 Meter Länge, führt r auf $\zeta = 0{,}02578$ bis $0{,}01214$,

4) und eine dergleichen Glasröhre auf $\zeta = 0{,}02663$ bis $0{,}009408$.

5) Eine Zinkröhre von 2,4 Centimeter Weite und 10 Meter Länge gab endlich bei Geschwindigkeiten von 25 bis 80 Meter, $\zeta = 0{,}02303$ bis $0{,}01296$.

Es ist hieraus zu folgern, daß nur bei mäßigen Windgeschwindigkeiten, von circa 25 Meter = 80 Fuß, der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}024$ gesetzt werden kann, daß er aber immer kleiner und kleiner angenommen werden muß, je größer die Geschwindigkeit des Windes in der Röhre ist.

Annähernd läßt sich auch für Metermaß $\zeta = \frac{0{,}120}{\sqrt{v}}$, und für Fußmaß $\zeta = \frac{0{,}214}{\sqrt{v}}$ setzen.

Im Ganzen verhält sich also die Luft bei der Bewegung in Röhren ebenso wie das Wasser.

Auch der Widerstand, welchen Kniee und Kröpfe in den Röhren der Bewegung der durchströmenden Luft entgegensetzen, ist ähnlich wie beim Wasser zu beurtheilen.

Bei den Versuchen des Verfassers gab ein rechtwinkeliges Knie von 1 Centimeter Weite, $\zeta = 1{,}61$, und ein solches von 1,41 Centimeter Weite, $\zeta = 1{,}24$; ferner ein nach einem Kreisquadranten gebogener Kropf gab bei der ersteren Weite, $\zeta = 0{,}485$; und bei der letzteren, $\zeta = 0{,}471$.

467 **Bewegung der Luft in langen Röhren.** Mit Hülfe des Coefficienten ζ des Reibungswiderstandes einer Röhre, wie BF, läßt sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge bei gegebener Länge und Weite derselben u. s. w. bestimmen.

Ist h_2 der Stand des Manometers M_2 am Ende der Röhre CF, Fig. 797, unmittelbar vor dem Mundstück F, dessen Widerstandscoefficient

Fig. 797.

$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1$ sein möge, und bezeichnet d die Weite der Röhre, sowie d_1

die Weite, also $\frac{\pi d_1^2}{4}$ den Inhalt der Mündung F_1, so hat man nach dem Obigen die Ausflußmenge:

$$Q = \mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_2}{b}}{1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} = 1261\,\mu_1 \pi \frac{d_1^2}{4}\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\frac{h_2}{b}}{1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} \text{ Cbkfß.}$$

sowie umgekehrt für den Manometerstand h_2,

$$\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_2}{b} = \left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\mu F_1}\right)^2.$$

Nun ist aber der Manometerstand am Anfang der Leitung,

$$h_1 = h_2 + \zeta\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g},$$

wenn l die Länge der Röhre zwischen beiden Manometern M_1 und M_2, und v die Geschwindigkeit des Luftstromes in dieser Röhre bezeichnet, daher hat man:

$$\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_1}{b} = \left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\mu_1 F_1}\right)^2 + \zeta\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}, \text{ oder}$$

$$v = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 v_1, \text{ und } v_1 = \frac{Q}{F_1} \text{ eingeführt,}$$

$$\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_1}{b} = \left(\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\frac{1}{\mu_1^2} + \zeta\frac{l}{d}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right)\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F_1}\right)^2,$$

und es folgt daher die Ausflußmenge

$$Q = F_1\sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_1}{b}}{\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\frac{1}{\mu_1^2} + \zeta\frac{l}{d}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}$$

$$= 1261\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{(1+\delta\tau)\frac{h_1}{b}}{\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\frac{1}{\mu_1^2} + \zeta\frac{l}{d}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} \text{ Cubikfuß.}$$

Ist endlich der Stand h des Manometers M im Reservoir AB bekannt, so haben wir, wenn wir den Widerstandscoefficienten für den Eintritt bei C, durch ζ_0 bezeichnen, und $\frac{1}{\mu_1^2} = 1 + \zeta_1$ einzusetzen, da hier beim Eintritt in die Röhre die Druckhöhe $\zeta_0\frac{v^2}{2g}$ verloren geht,

$$\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b} = \left[\left(\zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1\right]\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F_1}\right)^2,$$

folglich die Ausflußmenge

$$Q = F_1 \sqrt{\frac{2\,g\,\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}}{\left(\zeta_0 + \zeta\,\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1}}$$

$$= 1261\,\frac{\pi\,d_1^2}{4}\sqrt{\frac{(1 + 0{,}04\,\tau)\,\frac{h}{b}}{\left(\zeta_0 + \zeta\,\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1}}\ \text{Cubikfuß}.$$

Je nachdem der Einmündungspunkt um s höher oder tiefer liegt als die Ausmündungsstelle, hat man in dem Zähler der Wurzelgröße zu $\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}$ noch s zu addiren oder subtrahiren.

Beispiel. In dem Regulator am Kopfe einer 320 Fuß langen und 4 Zoll weiten Windleitung steht das Quecksilbermanometer auf 3,1 Zoll, während der äußere Barometerstand 27,2 Zoll mißt; es ist ferner die Mündungsweite des conisch zusammengezogenen Röhrenendes, $d_1 = 2$ Zoll, und die Temperatur der comprimirten Luft im Regulator, $\tau = 20$ Grad C., welches Windquantum liefert die Leitung?

Es ist hier $(1 + 0{,}004\,\tau)\,\frac{b}{h} = 1{,}08\cdot\frac{3{,}1}{27{,}2} = 0{,}1231$, ferner

$\zeta_0 = \frac{1}{\mu_0^2} - 1 = \frac{1}{0{,}75^2} - 1 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} = 0{,}778$, sowie

$\zeta_1\,\frac{l}{d} = 0{,}024\,.\,320\,.\,3 = 23{,}04$, $\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 = \left(\frac{2}{4}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$,

$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = \frac{1}{0{,}92^2} - 1 = 0{,}330$, und

$F_1 = \frac{\pi\,d_1^2}{4} = \frac{\pi}{4}\,(1/6)^2 = \frac{3{,}1416}{144} = 0{,}021817$ Quadratfuß,

daher folgt die gesuchte Windmenge

$$Q = 1261\,.\,0{,}021817\sqrt{\frac{0{,}1231}{(0{,}778 + 23{,}04)\,0{,}0625 + 1{,}330}}$$

$$= 27{,}51\sqrt{\frac{0{,}1231}{1{,}489 + 1{,}330}} = 27{,}51\sqrt{0{,}04367} = 5{,}744\ \text{Cubikfuß}.$$

468 **Ausfluss unter abnehmendem Drucke.** Wenn ein Windreservoir keinen Zufluß erhält, während durch eine Mündung in demselben ununterbrochenes Ausströmen statt hat, so nimmt die Dichtigkeit und Spannung allmälig ab, und es fällt daher auch die Ausflußgeschwindigkeit während des Ausflusses immer kleiner und kleiner aus. In welchem Verhältnisse nun diese Abnahme zur Zeit und zur Ausflußmenge in derselben steht, läßt sich auf folgende Weise ermitteln.

Es sei das Volumen des Reservoirs V, der anfängliche Manometerstand $= h_0$, und der Manometerstand am Ende einer gewissen Zeit t, $= h_1$, sowie der äußere Barometerstand $= b$. Dann ist das auf den äußeren Druck reducirte Luft- oder Windquantum im Reservoir anfangs

$$= \frac{V(b + h_0)}{b}$$

und am Ende der Zeit t

$$= \frac{V(b + h_1)}{b},$$

und folglich das innerhalb der Zeit t ausgeflossene und unter dem äußeren Drucke gemessene Windquantum:

$$V_1 = \frac{V(b + h_0)}{b} - \frac{V(b + h_1)}{b} = \frac{V(h_0 - h_1)}{b}.$$

Nun hat man aber auch

$$V_1 = \mu F t \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{x}{b}},$$

wenn x dem mittleren Manometerstand während der Ausflußzeit t entspricht, daher folgt

$$t = \frac{V(h_0 - h_1)}{\mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} b x}} = \frac{V(h_0 - h_1)}{\mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} b}} (x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ferner ist, wenn $h_0 = m\sigma$ und $h_1 = n\sigma$ gesetzt wird, der Mittelwerth

$$(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(\sigma)^{-\frac{1}{2}}}{m-n}(1^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + \cdots + m^{-\frac{1}{2}}) - (1^{-\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} + \cdots + n^{-\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{(\sigma)^{-\frac{1}{2}}}{m-n}\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2(\sigma)^{-\frac{1}{2}}}{m-n}\left(\sqrt{\frac{h_0}{\sigma}} - \sqrt{\frac{h_1}{\sigma}}\right)$$

$$= \frac{2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{(m-n)\sigma} = \frac{2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{h_0 - h_1}$$ (s. Ingenieur S. 88);

daher folgt die gesuchte Ausflußzeit

$$t = \frac{2V(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{\mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} b}} = \frac{2V}{\mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1}}}\left(\sqrt{\frac{h_0}{b}} - \sqrt{\frac{h_1}{b}}\right).$$

Diese Bestimmung hat übrigens dann nur eine hinreichende Genauigkeit, wenn das Ausflußreservoir (V) groß, oder die Ausflußmündung, sowie die Pressungsdifferenz klein ist, wo die Abkühlung der Luft im Reservoir während des Ausflusses unbedeutend ausfällt.

Beispiel. Der 50 Fuß lange und 5 Fuß weite cylindrische Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen Manometerstand $h = 10$ Zoll und Thermometerstand 6⁰ beträgt. Wenn nun der Wind durch eine 1 Zoll weite runde Mündung in einen Raum ausströmt, dessen Barometerstand 27 Zoll beträgt, so

entsteht die Frage, in welcher Zeit sinkt der Manometerstand auf 7 Zoll herab, und welches ist die entsprechende Ausflußmenge?

Das Volumen des Regulators oder Kessels ist:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot 5^2 . 50 = 1250 \cdot \frac{\pi}{4} = 981,75 \text{ Cubikfuß, ferner}$$

$$\sqrt{\frac{h_0}{b}} - \sqrt{\frac{h_1}{b}} = \sqrt{\frac{10}{27}} - \sqrt{\frac{7}{27}} = 0,09942,$$

$$\sqrt{2\,g\,\frac{p_1}{\gamma_1}} = 1261\,\sqrt{1 + 0,00367\,.\,\tau} = 1261\,\sqrt{1,02202} = 1275,$$

und

$$F = \frac{\pi}{4}\,(1/_{12})^2 = \frac{\pi}{576} = 0,005454 \text{ Quadratfuß.}$$

Setzt man nun noch den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,95$, so folgt die in Frage stehende Ausflußzeit:

$$t = \frac{2\,.\,981,75\,.\,0,09942}{0,95\,.\,0,005454\,.\,1275} = \frac{97,61}{3,303} = 29,55 \text{ Secunden.}$$

Anmerkung. Eine allgemeinere Theorie des Ausflusses der Luft und des Wasserdampfes wird im zweiten Theile abgehandelt.

Schlußanmerkung. Versuche über den Ausfluß der Luft sind angestellt worden von Young, Schmidt, Lagerhjelm, Koch, d'Aubuisson, Buff, und in neuerer Zeit von Saint-Venant, Wantzel und Pecqueur. In Betreff der Versuche von Young und Schmidt ist nachzusehen in Gilbert's Annalen Bd. 22, 1801, und Bd. 6, 1820, und in Poggendorff's Annalen, Bd. 2, 1824, in Betreff derjenigen von Koch und Buff aber in den Studien des Götting'schen Vereines bergmännischer Freunde, Bd. 1, 1824; Bd. 3, 1833; Bd. 4, 1837 und Bd. 5, 1838; ferner in Poggendorff's Annalen, Bd. 27, 1836 und Bd. 40, 1837. Nächstdem auch in Gerstner's Mechanik, Bd. 3, und in Hülsse's allgemeiner Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluß". Die Lagerhjelm'schen Versuche werden behandelt in dem schwedischen Werke Hydrauliska Försök af Lagerhjelm, Forselles och Kallstenius, 1 Delen, Stockholm, 1818. Die Versuche d'Aubuisson's lernt man kennen in den Annales des Mines, Tome 11, 1825; Tome 13, 1826; Tome 34, 1827, dann aber auch in d'Aubuisson's Traité d'Hydraulique. Ueber die Versuche von Saint-Venant und Wantzel siehe Comptes rendus hebd. des séances de l'Académie des sciences. à Paris 1839. Von den neuesten in Frankreich angestellten Versuchen handelt Poncelet in einer Note sur les expériences de M. Pecqueur relatives à l'écoulement de l'air dans les tubes etc. der Comptes rendus und hiervon im Auszuge das polytechnische Centralblatt, Bd. 6, 1845. Aus diesen Versuchen folgert Poncelet, daß die Luft bei ihrem Ausflusse denselben Gesetzen folge, wie das Wasser. Die meisten dieser Versuche sind mit sehr engen Mündungen angestellt worden, weshalb sie wohl schwerlich den Ansprüchen der Praxis Genüge leisten. Leider findet auch unter den Ergebnissen aller dieser Versuche nicht die erwünschte Uebereinstimmung statt, namentlich weichen auch die von d'Aubuisson gefundenen Ausflußcoefficienten von denen, welche sich aus den Koch'schen berechnen lassen, bedeutend ab. Vergleichende Versuche über das Aus- und Einströmen der Luft und über den Ausfluß des Wassers rapportirt des Verfassers Experimental-Hydraulik. Die Resultate der neuesten, im größeren Maßstabe vom Verfasser ausgeführten Versuche über den Ausfluß der Luft werden im 5. Bande des Civilingenieurs mitgetheilt.

Siebentes Capitel.

Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

Fliessende Wasser. Die Lehre von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen macht den zweiten Haupttheil der Hydraulik aus. Das Wasser fließt entweder in einem natürlichen oder in einem künstlichen Bette (franz. lit; engl. bed). Im ersten Falle bildet es Ströme, Flüsse, Bäche, im zweiten Canäle, Gräben und Gerinne. Bei der Theorie der Bewegung der fließenden Wasser kommt auf diesen Unterschied nichts, oder nur wenig an. §. 469

Das Flußbett besteht aus dem Grundbette oder der Sohle (franz. font du lit; engl. bottom of the channel), und aus den beiden Ufern (franz. bords; engl. shores). Durch eine Ebene winkelrecht gegen die Bewegungsrichtung des fließenden Wassers ergiebt sich der Querschnitt (franz. section; engl. perpendicular-section) desselben. Der Umfang desselben ist das Quer- oder Breitenprofil, welches wieder aus dem Wasser- und dem Luftprofile besteht. Eine Verticalebene in der Richtung des fließenden Wassers giebt den Längendurchschnitt und das Längenprofil (franz. profil; engl. profile) desselben. Unter Abhang (franz. pente; eng. declivity, slope) eines fließenden Wassers versteht man den Neigungswinkel seiner Oberfläche gegen den Horizont. Um diesen auf eine bestimmte Länge eines fließenden Wassers anzugeben, dient das Gefälle (franz. chute; engl. fall), welches der Verticalabstand der beiden Endpunkte im Wasserspiegel einer bestimmten Flußstrecke ist. Rösche ist das Gefälle für die Längenerstreckung $= 1$. Für die Flußstrecke $AD = l$, Fig. 798, ist BC das Grundbette, $DH = h$ das Gefälle und der Winkel $DAH = \delta$ der Abhang; die Rösche aber ist

Fig. 798.

$$sin. \delta = \frac{h}{l}, \text{ oder annähernd, } \delta = \frac{h}{l}.$$

Anmerkung. Das Gefälle der Bäche und Flüsse ist sehr verschieden. So hat z. B. die Elbe auf eine deutsche Meile Erstreckung von Hohenelbe bis Podiebrad, 57 Fuß, von da bis Leitmeritz 9 Fuß, von da bis Mühlberg im Mittel 5,8 und von Mühlberg bis Magdeburg, 2,5 Fuß Gefälle. Gebirgsbäche haben auf die Meile ein Gefälle von 40 bis 400 Fuß. Näheres hierüber siehe: „Vergleichende hydrographische Tabellen u. s. w. von Stranz." Canäle oder andere künstliche Wasserleitungen erhalten viel kleinere Gefälle. Hier ist die Rösche meistens unter 0,001, oft 0,0001 und noch kleiner. Mehr hierüber im zweiten Theile.

470 **Verschiedene Geschwindigkeiten eines Querprofiles.** Die Geschwindigkeit des Wassers in einem und demselben Querprofile ist an verschiedenen Stellen sehr verschieden. Die Adhäsion des Wassers an dem Bette und der Zusammenhang der Wassertheile unter einander bewirken, daß die den Bettwänden näher liegenden Wassertheile in ihrer Bewegung mehr aufgehalten werden und daher langsamer fließen, als die entfernteren. Aus diesem Grunde nimmt die Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Bette zu ab, und es ist dieselbe am Boden und nahe den Ufern am kleinsten. Die größte Geschwindigkeit befindet sich bei geraden Flußstrecken meist in der Mitte oder an derjenigen Stelle in der freien Oberfläche des Wassers, wo es die größte Tiefe hat. Man nennt diejenige Stelle, wo das Wasser die größte Geschwindigkeit hat, den Stromstrich, und die tiefste Stelle im Bette die Stromrinne.

Bei Krümmungen ist der Stromstrich in der Regel nahe dem concaven Ufer.

Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers innerhalb eines Querprofiles ist nach §. 396:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{\text{Wasserquantum pr. Secunde}}{\text{Inhalt des Querschnittes}}.$$

Außerdem läßt sich die mittlere Geschwindigkeit auch noch aus den Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. s. w. der einzelnen Theile des Querprofiles und aus den Inhalten F_1, F_2, F_3 u. s. w. der letzteren berechnen. Es ist nämlich:

$$Q = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \cdots,$$

und daher auch:

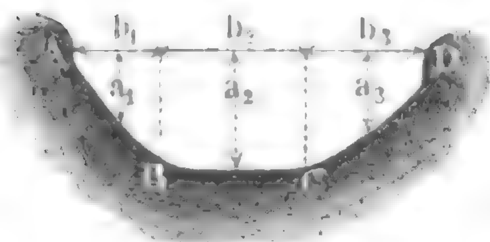
$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2 + \cdots}{F_1 + F_2 + \cdots}.$$

Außer der mittleren Geschwindigkeit führt man auch die mittlere Wassertiefe, also diejenige Tiefe a ein, welche ein Querprofil an allen Stellen haben müßte, damit es ebenso viel Inhalt erhielte, als es bei den veränderlichen Tiefen a_1, a_2, a_3 u. s. w. wirklich hat. Es ist also hiernach:

$$a = \frac{F}{b} = \frac{\text{Inhalt des Querschnittes}}{\text{Breite des Querschnittes}}.$$

Sind die den einzelnen Breitentheilen b_1, b_2, b_3 u. s. w. entsprechenden mittleren Tiefen a_1, a_2, a_3 u. s. w., Fig. 799, so hat man:

Fig. 799.



$$F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots,$$

und daher auch:

$$a = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots}{b_1 + b_2 + \cdots}.$$

Endlich ist die mittlere Geschwindigkeit auch

$$c = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots},$$

und bei gleicher Größe der Theile b_1, b_2 u. s. w.:

$$c = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots}{a_1 + a_2 + \cdots}.$$

Ein Fluß oder Bach ist im Beharrungszustande (franz. permanence; engl. permanency), wenn durch jeden seiner Querschnitte in gleicher Zeit eine gleiche Wassermenge fließt, wenn also Q oder das Product Fc aus dem Inhalte des Querprofiles und aus der mittleren Geschwindigkeit auf die ganze Flußstrecke eine unveränderliche Zahl ist. Hieraus folgt nun das einfache Gesetz: bei der permanenten Bewegung des Wassers verhalten sich die mittleren Geschwindigkeiten innerhalb zweier Querprofile umgekehrt wie die Inhalte dieser Profile.

Beispiele. 1) An dem Querprofile $ABCD$, Fig. 799, eines Canales hat man gefunden:
Breitentheile:

$$b_1 = 3{,}1 \text{ Fuß}, \; b_2 = 5{,}4 \text{ Fuß}, \; b_3 = 4{,}3 \text{ Fuß},$$

mittlere Tiefen:

$$a_1 = 2{,}5 \text{ Fuß}, \; a_2 = 4{,}5 \text{ Fuß}, \; a_3 = 3{,}0 \text{ Fuß},$$

entsprechende mittlere Geschwindigkeiten:

$$c_1 = 2{,}9 \text{ Fuß}, \; c_2 = 3{,}7 \text{ Fuß}, \; c_3 = 3{,}2 \text{ Fuß},$$

daher läßt sich setzen der Inhalt dieses Profiles:

$$F = 3{,}1 \,.\, 2{,}5 + 5{,}4 \,.\, 4{,}5 + 4{,}3 \,.\, 3{,}0 = 44{,}95 \text{ Quadratfuß},$$

ferner die Wassermenge:

$$Q = 3{,}1 \,.\, 2{,}5 \,.\, 2{,}9 + 5{,}4 \,.\, 4{,}5 \,.\, 3{,}7 + 4{,}3 \,.\, 3{,}0 \,.\, 3{,}2 = 153{,}665 \text{ Cubikfuß},$$

und die mittlere Geschwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{153{,}665}{44{,}95} = 3{,}419 \text{ Fuß}.$$

2) Wenn ein Graben pr. Secunde 4,5 Cubikfuß Wasser mit einer mittleren Geschwindigkeit c von 2 Fuß fortführen soll, so hat man ihm ein Querprofil von $\frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$ Quadratfuß Inhalt zu geben.

3) Wenn ein und derselbe Fluß an einer Stelle bei 560 Fuß Breite und 9 Fuß mittlerer Tiefe eine mittlere Geschwindigkeit von $2^1/_4$ Fuß hat, so wird er an einer anderen Stelle, bei 320 Fuß Breite und 7,5 Fuß mittlerer Tiefe, die mittlere Geschwindigkeit:

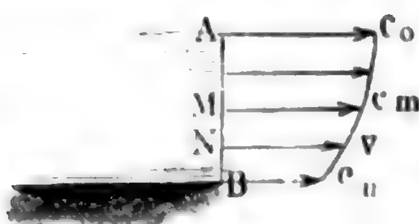
$$c = \frac{560 \,.\, 9}{320 \,.\, 7{,}5} \cdot 2{,}25 = \frac{567}{120} = 4{,}725 \text{ Fuß}$$

haben.

Mittlere Geschwindigkeit. Wenn man die Wassertiefe an irgend einer Stelle eines fließenden Wassers in gleiche Theile theilt, und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt, so erhält man eine sogenannte Stromgeschwindigkeitsscala AB, Fig. 800. Obwohl es als ausgemacht anzusehen ist, daß das Gesetz dieser Scala oder der Geschwindig- §. 471

keitsveränderung durch irgend eine Curve, wie z. B. nach **Gerstner**, durch eine Ellipse u. s. w. ausgedrückt wird, so läßt sich doch auch ohne einen großen Fehler befürchten zu müssen, eine gerade Linie substituiren, oder annehmen, daß die Geschwindigkeit nach der Tiefe gleichmäßig abnehme, weil die Abnahme der Geschwindigkeit nach unten immer nur eine mäßige ist. Aus den Versuchen von **Ximenes**, **Brünnings** und **Funk** ergiebt sich, daß die **mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel**

Fig. 800.



$$c_m = 0{,}915\, c_0$$

ist, wenn c_0 die Geschwindigkeit an der Oberfläche oder die Maximalgeschwindigkeit bezeichnet. Es nimmt also hiernach die Geschwindigkeit von oben bis zur Mitte M um

$$c_0 - c_m = (1 - 0{,}915)\, c_0 = 0{,}085\, c_0$$

ab, und es läßt sich folglich die Geschwindigkeit unten oder am Fußpunkte des Perpendikels,

$$c_u = c_0 - 2 \,.\, 0{,}085\, c_0 = (1 - 0{,}170)\, c_0 = 0{,}83\, c_0$$

setzen. Ist nun die ganze Tiefe $AB = a$, so hat man, bei Annahme einer der geraden Linie entsprechenden Geschwindigkeitsscala für eine Tiefe $AN = x$ unter dem Wasser, die entsprechende Geschwindigkeit:

$$v = c_0 - (c_0 - c_u)\, \frac{x}{a} = \left(1 - 0{,}17\, \frac{x}{a}\right) c_0.$$

Sind ferner noch $c_0, c_1, c_2 \ldots$ die Oberflächengeschwindigkeiten eines ganzen Querprofiles von nicht sehr veränderlicher Tiefe, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten in der mittleren Tiefe:

$$0{,}915\, c_0,\ 0{,}915\, c_1,\ 0{,}915\, c_2,$$

und daher die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0{,}915\, \frac{(c_0 + c_1 + c_2 + \cdots c_n)}{n}.$$

Nehmen wir endlich an, daß die Geschwindigkeit vom Stromstriche aus nach den Ufern zu ebenso abnehme wie nach der Tiefe zu, so können wir wieder die mittlere Oberflächengeschwindigkeit

$$\frac{c_0 + c_1 + \cdots + c_n}{n} = 0{,}915\, c_0$$

setzen, und erhalten so die **mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile**

$$c = 0{,}915 \,.\, 0{,}915 \,.\, c_0 = 0{,}837 \,.\, c_0,$$

d. i. 83 bis 84 Procent der Maximal- oder Stromstrichgeschwindigkeit.

Prony leitet aus den allerdings nur in kleinen Gräben angestellten Versuchen du **Buat's** und für diese Fälle vielleicht noch genauer

$$c_m = \left(\frac{2,372 + c_0}{3,153 + c_0}\right) c_0 \text{ Meter} = \left(\frac{7,50 + c_0}{9,97 + c_0}\right) c_0 \text{ Fuß}$$

ab. Für mittlere Geschwindigkeiten von 3 Fuß folgt hiernach:

$$c_m = 0,81\, c_0.$$

Fließt das Wasser nicht frei, sondern ist es durch eine Verengerung des Querprofiles gestaut, so fällt c_m noch größer aus.

Beispiel. Wenn im Stromstriche eines Flusses die Geschwindigkeit des Wassers 4 Fuß und die Tiefe 6 Fuß ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit im entsprechenden Perpendikel:

$$c_m = 0,915 \,.\, 4 = 3,66 \text{ Fuß},$$

und die am Boden:

$$= 0,83 \,.\, 4 = 3,32 \text{ Fuß};$$

ferner die Geschwindigkeit bei 2 Fuß unter der Oberfläche:

$$v = (1 - 0,17 \,.\, {}^2\!/_6) \,.\, 4 = (1 - 0,057) \,.\, 4 = 3,772 \text{ Fuß},$$

endlich die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0,837 \,.\, 4 = 3,348 \text{ Fuß},$$

dagegen nach Prony:

$$c = \frac{11,50}{13,97} \cdot 4 = \frac{46}{13,97} = 3,29 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung. Ueber diesen und über die nächstfolgenden Gegenstände wird ausführlich gehandelt in der allgemeinen Maschinenencyklopädie, Artikel „Bewegung des Wassers". Neue Versuche und neue Ansichten hierüber findet man in folgender Schrift: Lahmeyer, Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Canälen, Braunschweig 1845. Nach Baumgarten's Beobachtungen (s. Annales des Ponts et Chaussées, Paris 1848, sowie polytechnisches Centralblatt, Nr. 14, 1849) giebt diese Formel bei größeren Geschwindigkeiten (über 1,5 Meter) zu große Werthe, und es ist für solche

$$c_m = \left(\frac{2,372 + c_0}{3,153 + c_0}\right) \cdot 0,8\; c_0 \text{ Meter}$$

zu setzen.

Die Maximalgeschwindigkeit des Wassers kommt immer etwas unterhalb der Oberfläche des Wassers vor, was jedenfalls seinen Grund in dem Widerstande der Luft hat. Von der Stelle der Maximalgeschwindigkeit an nimmt die Geschwindigkeit mit dem Quadrate der Tiefe ab, wonach also die Geschwindigkeitsscala einer Parabel entspricht. Ebenso soll nach Boileau (s. dessen Traité sur la mesure des eaux) vom Stromstriche aus die Geschwindigkeit mit dem Quadrate des Abstandes von dieser Stelle abnehmen. Bezeichnet c_0 die Geschwindigkeit im Stromstriche, so ist hiernach die Geschwindigkeit im Horizontalabstande x:

$$c_x = c_0 - \mu x^2,$$

wobei μ eine allerdings bei verschiedenen Flüssen verschiedene Erfahrungszahl bezeichnet.

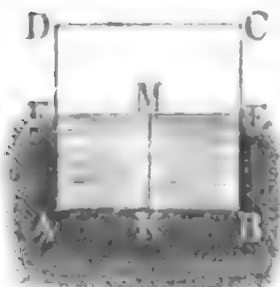
Vortheilhafteste Querprofile. Der Widerstand, welchen das Bette der Bewegung des Wassers in Folge der Adhäsion, Klebrigkeit oder Reibung entgegensetzt, wächst mit der Berührungsfläche zwischen dem Bette und dem Wasser, und also auch mit dem Umfange p des Wasserprofiles oder im Bette §. 472

liegenden Theiles vom Querprofile. Da aber durch ein Querprofil um so mehr Wasserfäden hindurchgehen, je größer der Inhalt eines solchen ist, so wächst der Widerstand eines Wasserfadens auch umgekehrt wie der Inhalt, und daher im Ganzen wie der Quotient $\frac{p}{F}$ aus dem Umfange des Wasserprofiles und dem Inhalte F des ganzen Querprofiles.

Damit nun dieser Reibungswiderstand eines fließenden Wassers möglichst klein ausfalle, hat man dem Querprofile diejenige Gestalt zu geben, bei welcher $\frac{p}{F}$ möglichst klein ist, für welche also der Umfang p bei gegebenem Inhalte ein Minimum, oder der Inhalt bei gegebenem Umfange ein Maximum werde. Bei ringsumschlossenen Wasserleitungen, wie z. B. bei Röhren, ist p der ganze Umfang der vom Querprofile gebildeten Figur. Nun hat aber unter allen Figuren von gleicher Seitenzahl allemal die regelmäßige, und unter allen regelmäßigen Figuren wieder diejenige, deren Seitenzahl die größere ist, bei gleichem Inhalte den kleinsten Umfang, daher fällt auch bei ringsumschlossenen Wasserleitungen der Reibungswiderstand um so kleiner aus, je mehr ihr Querprofil einer regelmäßigen Figur sich nähert, und je größer die Seitenzahl derselben ist, und es ist der Kreis, als eine regelmäßige Figur von unendlich vielen Seiten, in diesem Falle das dem kleinsten Reibungswiderstande entsprechende Querprofil. Bei den oben offenen Wasserleitungen ist das Verhältniß ein anderes, weil die obere Seite des Querprofiles frei oder vielmehr nur mit Luft in Berührung ist, die, so lange sie sich in Ruhe befindet, dem Wasser keinen oder nur einen sehr kleinen Widerstand entgegensetzt. Wir müssen also auch bei Beurtheilung dieses Reibungswiderstandes in dem Quotienten $\frac{p}{F}$ die obere Seite oder das sogenannte Luftprofil außer Acht lassen.

Bei Anwendung von Canälen, Gräben und Gerinnen kommen in der Regel nur rectanguläre und trapezoidale Querprofile vor. Eine durch den Mittelpunkt M des Quadrates AC gehende Horizontale EF, Fig. 801, theilt sowohl den Inhalt als auch den Umfang in zwei gleiche Theile, daher bleibt dann das, was für das Quadrat gilt, auch für diese Hälfte richtig, und es entspricht sonach unter allen rectangulären Querprofilen das halbe Quadrat AE, oder dasjenige, welches doppelt so breit als hoch ist, dem kleinsten Reibungswiderstande.

Fig. 801.



Ebenso wird das regelmäßige Sechseck ACE, Fig. 802, durch eine Horizontale CF in zwei gleiche Trapeze zertheilt, wovon jedes, wie das ganze Sechseck, den größten relativen Inhalt hat, und

es ist folglich unter allen trapezoidalen Querprofilen das halbe regelmäßige Sechseck oder das Trapez *ABCF* mit Böschungswinkeln *AFM* = *BCM*, von 60° dasjenige, bei dessen Anwendung der kleinste Reibungswiderstand eintritt.

Ebenso liefern das **halbe regelmäßige Achteck** *ADE*, Fig. 803, das **halbe regelmäßige Zehneck** u. s. w. und endlich der **Halbkreis** *ADB*, Fig. 804, unter gegebenen Umständen die vortheilhaftesten Querprofile für

Fig. 802.

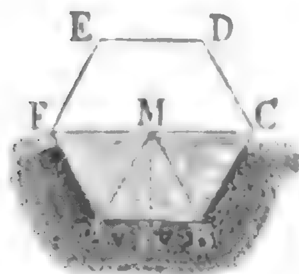


Fig. 803.

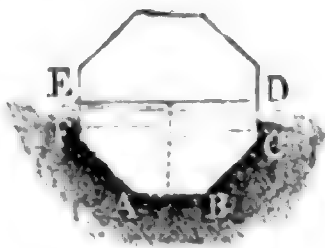
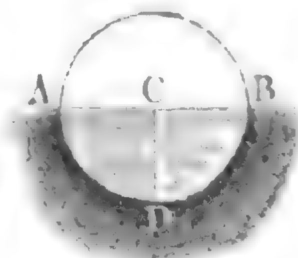


Fig. 804.



Canäle. Das trapezoidale oder halbe regelmäßige Sechseck giebt noch einen kleineren Widerstand als das halbe Quadrat oder Rechteck mit dem Seitenverhältniß 1 : 2, weil das Sechseck einen kleineren relativen Umfang hat als das Quadrat. Das halbe regelmäßige Zehneck führt auf eine noch kleinere Reibung, und dem Halbkreise entspricht allerdings das Minimum der Reibung. Nach dem Halbkreise und nach dem Rechtecke werden nur die Profile von Gerinnen aus Holz, Stein oder Eisen gebildet, nach Trapezen hingegen construirt man die Querprofile von ausgegrabenen und gemauerten Canälen. Andere Formen werden wegen Schwierigkeiten in der Ausführung nicht leicht angewendet.

In den Fällen, wenn Canäle nicht ausgemauert, sondern in der lockeren Erde oder in Sand ausgegraben werden, ist der Böschungswinkel von 60° zu groß oder die relative Böschung *cotang.* 60° = 0,57735 zu klein, weil die Ufer noch nicht hinreichende Stabilität erhalten; man wird daher genöthigt, trapezoidale Querprofile anzuwenden, bei welchen die Neigung der Seiten gegen die Basis noch kleiner als 60°, vielleicht nur 45° oder sogar noch kleiner ist. Bei einem trapezoidalen Querprofile *ABCD*, Fig. 805 (a. f. S.), welches mit dem halben Quadrate gleichen Umfang und Inhalt hat, ist die relative Böschung = $^4/_3$ und der Böschungswinkel nur 36° 52′. Theilt man die Höhe *BE* dieses Profiles in drei gleiche Theile, so hat die Basis *BC* deren 2, die Parallele *AD*, 10, und jede der Seiten *AB* = *CD*, = 5 Theile. In vielen Fällen macht man die Böschung = 2, deren Winkel 26° 34′ beträgt, und zuweilen macht man sie noch größer. §. 473

Jedenfalls läßt sich der Böschungswinkel *BAE* = θ, Fig. 806, oder die Böschung $\frac{AE}{BE}$ = *cotang.* θ als eine gegebene und von der

Natur des Erdreiches, worin der Canal ausgegraben wird, abhängige Größe ansehen, und es sind daher nur noch die Dimensionen des den kleinsten

Fig. 805.

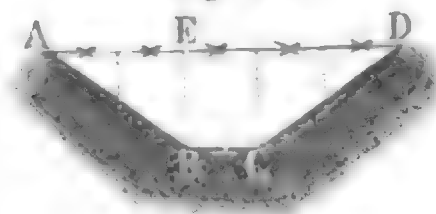
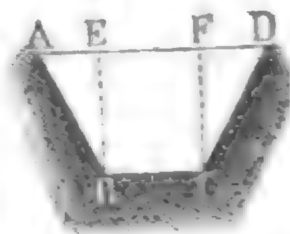


Fig. 806.



Widerstand gebenden Querprofiles zu bestimmen. Setzen wir die untere Breite $B\,C = b$, die Tiefe $B\,E = a$ und die Böschung $\frac{A\,E}{B\,E} = \nu$, so erhalten wir für den Umfang des Profiles:

$$A\,B + B\,C + C\,D = p = b + 2\sqrt{a^2 + \nu^2 a^2} = b + 2\,a\sqrt{1 + \nu^2},$$

für den Inhalt desselben:

$$F = a\,b + \nu\,a\,a = a\,(b + \nu\,a),$$

und daher umgekehrt:

$$b = \frac{F}{a} - \nu\,a,$$

und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a} + \frac{a}{F}\,(2\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu).$$

Führt man statt a, $a + x$ ein, wo x eine kleine Zahl bezeichnet, so läßt sich

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a + x} + \frac{(a + x)}{F}\,(2\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu)$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{a + x}{F}\,(2\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu)$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{a}{F}\,(2\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu) + \left(\frac{2\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu}{F} - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{x^2}{a^3}$$

setzen.

Damit nun dieser Werth nicht allein für einen positiven, sondern auch für einen negativen Werth von x größer ausfalle, als der erste Werth

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{F}\,(2\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu),$$

damit also $\frac{p}{F}$ zum Minimum werde, ist nöthig, daß das Glied mit dem Factor x verschwinde, daß also

$$\frac{2\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu}{F} - \frac{1}{a^2} = 0 \text{ sei,}$$

wonach für die gesuchte Canaltiefe a folgt:

$$a^2 = \frac{F}{2\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu},$$

oder, da $v = cotang.\,\theta$ und $\sqrt{v^2 + 1} = \frac{1}{sin.\,\theta}$ ist:

$$a^2 = \frac{F\,sin.\,\theta}{2 - cos.\,\theta}.$$

Hiernach ist also die in einem gegebenen Böschungswinkel θ und einem gegebenen Inhalte entsprechende zweckmäßigste Form des Querprofiles bestimmt durch die Formel

$$a = \sqrt{\frac{F\,sin.\,\theta}{2 - cos.\,\theta}} \text{ und } b = \frac{F}{a} - a\,cotang.\,\theta.$$

Es ist folglich die obere Breite AD des Querprofiles:

$$b_1 = b + 2\,v\,a = \frac{F}{a} + a\,cotang.\,\theta,$$

und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{b}{F} + \frac{2\,a}{F\,sin.\,\theta} = \frac{1}{a} + \frac{(2 - cos.\,\theta)\,a}{F\,sin.\,\theta} = \frac{2}{a}.$$

Beispiel. Welche Dimensionen sind dem Querprofile eines Canales zu geben, dessen Ufer 40° Böschung erhalten sollen, und der bestimmt ist, bei einer mittleren Geschwindigkeit von 3 Fuß ein Wasserquantum Q von 75 Cubikfuß fortzuführen? Es ist

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{75}{3} = 25 \text{ Quadratfuß, daher die erforderliche Tiefe:}$$

$$a = \sqrt{\frac{25\,sin.\,40^0}{2 - cos.\,40^0}} = 5\sqrt{\frac{0,64279}{1,23396}} = 3,609 \text{ Fuß, die untere Breite:}$$

$$b = \frac{25}{3,609} - 3,609\;cotang.\;40^0 = 6,927 - 4,301 = 2,626 \text{ Fuß,}$$

die Böschung oder Ausladung der Ufer,

$v\,a = a\;cotang.\;\theta = 3,609\,.\,cotang.\;40^0 = 4,301$, die obere Breite

$b_1 = b + 2\,a\;cotang.\;\theta = 6,927 + 4,301 = 11,228$ Fuß,

der Umfang:

$$p = b + \frac{2\,a}{sin.\,\theta} = 2,626 + \frac{7,218}{sin.\,40^0} = 13,855 \text{ Fuß,}$$

und das den Reibungswiderstand bestimmende Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{2}{a} = \frac{2}{3,609} = 0,5542.$$

Bei dem Querprofile in Form eines halben regelmäßigen Rechteckes, wo $\theta = 60^0$ ist, fällt $a = 3,80$ Fuß, $b = 4,39$, $b_1 = 8,78$ und $p = 13,16$ Fuß aus, daher ist

$$\frac{p}{F} = \frac{13,16}{25} = 0,526.$$

Tabelle der vortheilhaftesten Querprofile. Die Dimensionen §. 47· der, verschiedenen Böschungswinkeln und einem gegebenen Querschnitte entsprechenden, zweckmäßigsten Querprofile giebt folgende Tabelle an.

Böschungswinkel θ.	Relative Böschung ν.	Dimensionen der Querprofile.				Quotient $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$
		Tiefe a.	Untere Breite b.	Absolute Böschung νa.	Obere Breite $b + 2 \nu a$.	
90°	0	$0{,}707 \sqrt{F}$	$1{,}414 \sqrt{F}$	0	$1{,}414 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}828}{\sqrt{F}}$
60°	0,577	$0{,}760 \sqrt{F}$	$0{,}877 \sqrt{F}$	$0{,}439 \sqrt{F}$	$1{,}755 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}632}{\sqrt{F}}$
45°	1,000	$0{,}740 \sqrt{F}$	$0{,}613 \sqrt{F}$	$0{,}740 \sqrt{F}$	$2{,}092 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}704}{\sqrt{F}}$
40°	1,192	$0{,}722 \sqrt{F}$	$0{,}525 \sqrt{F}$	$0{,}860 \sqrt{F}$	$2{,}246 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}771}{\sqrt{F}}$
36°52′	1,333	$0{,}707 \sqrt{F}$	$0{,}471 \sqrt{F}$	$0{,}943 \sqrt{F}$	$2{,}357 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}828}{\sqrt{F}}$
35°	1,402	$0{,}697 \sqrt{F}$	$0{,}439 \sqrt{F}$	$0{,}995 \sqrt{F}$	$2{,}430 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}870}{\sqrt{F}}$
30°	1,732	$0{,}664 \sqrt{F}$	$0{,}356 \sqrt{F}$	$1{,}150 \sqrt{F}$	$2{,}656 \sqrt{F}$	$\frac{3{,}012}{\sqrt{F}}$
26°34′	2,000	$0{,}636 \sqrt{F}$	$0{,}300 \sqrt{F}$	$1{,}272 \sqrt{F}$	$2{,}844 \sqrt{F}$	$\frac{3{,}144}{\sqrt{F}}$
Halbkreis	—	$0{,}798 \sqrt{F}$	—	—	$1{,}596 \sqrt{F}$	$\frac{2{,}507}{\sqrt{F}}$

Man ersieht aus dieser Tafel, daß allerdings beim Halbkreise der Quotient $\frac{p}{F}$ am kleinsten, nämlich $= \frac{2{,}507}{\sqrt{F}}$ ist, daß er beim halben Sechseck größer, beim halben Quadrate und beim Trapeze von 36° 52′ Böschung aber noch größer ausfällt u. s. w.

Beispiel. Welche Dimensionen sind einem Querprofile zu geben, welches bei 40 Quadratfuß Inhalt eine Uferböschung von 35° hat? Nach der vorstehenden Tafel ist die Tiefe:

$a = 0{,}697 \sqrt{40} = 4{,}408$, die untere Breite

$b = 0{,}439 \sqrt{40} = 2{,}777$ Fuß, die absolute Böschung

$\nu a = 0{,}995 \sqrt{40} = 6{,}293$ Fuß, die obere Breite

$b_1 = 15{,}363$,

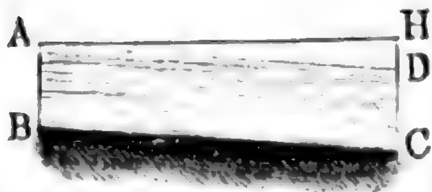
und der Quotient:

$$\frac{p}{F} = \frac{2,870}{\sqrt{40}} = 0,4538.$$

Gleichförmige Bewegung. Die Bewegung des Wassers in Betten ist auf einer gewissen Strecke entweder gleichförmig oder ungleichförmig; gleichförmig, wenn die mittlere Geschwindigkeit in allen Querschnitten dieser Strecke sich gleichbleibt, und also auch die Inhalte der Querschnitte gleich sind; ungleichförmig hingegen, wenn die mittleren Geschwindigkeiten und also auch die Inhalte der Querschnitte sich verändern. Zunächst ist von der gleichförmigen Bewegung die Rede. §. 47

Bei der gleichförmigen Bewegung des Wassers auf einer Strecke $AD = l$, Fig. 807, wird das ganze Gefälle $HD = h$ nur auf die Ueberwindung der Reibung des Wassers im Bette verwendet, weil das Wasser mit derselben Geschwindigkeit fortfließt, mit welcher es zuströmt, also eine Geschwindigkeitshöhe weder gebunden noch frei wird. Messen wir nun diese Reibung durch die Höhe jener Wässersäule, so können wir folglich das Gefälle dieser Höhe gleichsetzen. Die Reibungswiderstandshöhe wächst aber mit dem Quotienten $\frac{p}{F}$, mit l und mit dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit c (§. 427), daher gilt denn die Formel:

Fig. 807.



$$1)\ h = \zeta \cdot \frac{l p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g},$$

worin ζ eine Erfahrungszahl ausdrückt, welche der Coefficient des Reibungswiderstandes zu nennen ist.

Durch Umkehrung folgt

$$2)\ c = \sqrt{\frac{F}{\zeta \,.\, l p} \cdot 2 g h.}$$

Es kommt also bei der Bestimmung des Gefälles aus der Länge, dem Querprofile und der Geschwindigkeit, sowie umgekehrt, bei der Ermittelung der Geschwindigkeit aus dem Gefälle, der Länge und dem Querprofile, auf die Kenntniß des Reibungscoefficienten ζ an. Nach den Eytelwein'schen Berechnungen der 91 Beobachtungen von du Buat, Brünings, Funk und Woltmann ist $\zeta = 0,007565$, und daher:

$$h = 0,007565 \cdot \frac{l p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Setzt man $g = 9,809$ Meter oder 31,25 Fuß ein, so erhält man für Metermaß:

$$h = 0{,}0003856\,\frac{lp}{F}\cdot c^2 \text{ und } c = 50{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}},$$

dagegen für das Fußmaß:

$$h = 0{,}00012103\,\frac{lp}{F}\cdot c^2 \text{ und } c = 90{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}}.$$

Bei Röhrenleitungen ist $\frac{lp}{F} = \frac{\pi l d}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4l}{d}$, daher giebt diese Formel für Röhren:

$$h = 0{,}03026\,\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g},$$

während wir richtiger (§. 428) für diese bei mittleren Geschwindigkeiten:

$$h = 0{,}025\,\frac{l}{d}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

gefunden haben. Es ist also, wie zu erwarten stand, die Reibung in Flußbetten größer, als in metallenen Röhrenleitungen.

Beispiele. 1) Welches Gefälle ist einem Canale von der Länge $l = 2600$ Fuß, unteren Breite $b = 3$ Fuß, oberen Breite $b_1 = 7$ Fuß, und der Tiefe $a = 3$ Fuß zu geben, wenn er ein Wasserquantum $Q = 40$ Cubikfuß pr. Secunde fortführen soll? Es ist:

$$p = 3 + 2\sqrt{2^2 + 3^2} = 10{,}211,\; F = \frac{(7+3)\,3}{2} = 15, \text{ und } c = {}^{40}/_{15} = {}^{8}/_{3},$$

daher das gesuchte Gefälle:

$$h = 0{,}000121\cdot\frac{2600\,.\,10{,}211}{15}\cdot({}^{8}/_{3})^2 = \frac{0{,}3146\,.\,10{,}211\,.\,64}{15\,.\,9} = 1{,}52 \text{ Fuß}.$$

2) Welches Wasserquantum liefert ein Canal von 5800 Fuß Länge bei 3 Fuß Gefälle, 5 Fuß Tiefe, 4 Fuß unterer und 12 Fuß oberer Breite? Hier ist:

$$\frac{p}{F} = \frac{4 + 2\sqrt{5^2 + 4^2}}{5\,.\,8} = \frac{16{,}806}{40} = 0{,}42015,$$

daher die Geschwindigkeit:

$$c = 90{,}9\sqrt{\frac{3}{0{,}42015\,.\,5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{0{,}14005\,.\,5800}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{812{,}29}}$$
$$= \frac{90{,}9}{28{,}5} = 3{,}19 \text{ Fuß},$$

und das Wasserquantum:

$$Q = Fc = 40\,.\,3{,}19 = 127{,}6 \text{ Cubikfuß}.$$

476 **Reibungscoefficienten.** Auch bei Flüssen, Bächen u. s. w. zeigt sich der Widerstandscoefficient, wofür wir im vorigen Paragraphen den mittleren Werth 0,007565 angegeben haben, nicht constant, sondern, wie bei Röhren, bei kleinen Geschwindigkeiten etwas zu- und bei großen etwas abnehmend. Man hat also zu setzen:

$$\zeta = \zeta_1\left(1 + \frac{\alpha}{c}\right) \text{ oder } \zeta_1\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{c}}\right) \text{ oder dergl.}$$

Der Verfasser der schon in der Anmerkung zu §. 471 angeführten Schrift findet aus 255 zum großen Theil von ihm angestellten Versuchen für das preuß. Maß:

$$\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}1865}{c}\right),$$

und es folgt hiernach für das Metermaß:

$$\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}05853}{c}\right).$$

Man sieht, daß diese Formeln bei einer Geschwindigkeit $c = 8\frac{1}{2}$ Fuß den oben angegebenen mittleren Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}007565$ wiedergeben. Zur Erleichterung der Rechnung dient folgende für das Metermaß zunächst brauchbare Tabelle der Widerstandscoefficienten:

Geschwindigkeit c	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Meter.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1175	0958	0885	0849	0828	0813	0803	0795	0789	

Geschwindigkeit c	1	1,2	1,5	2	3	4	5 Meter.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	0784	0777	0771	0763	0755	0752	0750

Für das preuß. Fußmaß gilt folgende Tabelle:

Geschwindigkeit c	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	5	7	10	15 Fuß.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1202	1096	1017	0971	0938	0914	0894	0879	0833	0810	0787	0769	0761	0755	07501

Diese Tabellen finden eine unmittelbare Anwendung in allen den Fällen, wenn die Geschwindigkeit c gegeben ist und das Gefälle gesucht wird, und wenn die Formel Nr. 1 des vorigen Paragraphen in Anwendung kommt. Ist aber die Geschwindigkeit c unbekannt oder die zu suchende Größe, so gestattet diese Tabelle nur dann eine unmittelbare Anwendung, wenn man schon einen Näherungswerth von c hat. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man erst annähernd c durch eine der Formeln

$$c = 50{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ Meter oder } c = 90{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ Fuß,}$$

bestimmt, dann hieraus, mittels der Tabelle, ζ ermittelt, und den so erhaltenen Werth in der Formel:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{h}{\zeta} \cdot \frac{F}{lp}, \text{ oder:}$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{\zeta l p} \cdot 2gh} \text{ einsetzt.}$$

Aus der Geschwindigkeit c folgt dann auch noch das Wasserquantum mittels der Formel $Q = Fc$.

Ist endlich das Wasserquantum und Gefälle gegeben und, wie es bei Anlegung von Canälen oft vorkommt, das Querprofil zu bestimmen, so setze man $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ (s. Tabelle §. 474) und $c = \frac{Q}{F}$ in die Formel:

$$h = 0{,}007565 \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}, \text{ schreibe also:}$$

$$h = 0{,}007565 \frac{ml\,Q^2}{2gF^{5/2}}, \text{ und bestimme hiernach:}$$

$$F = \left(0{,}007565 \frac{ml\,Q^2}{2gh}\right)^{2/5}, \text{ d. i. für Metermaß:}$$

$$F = 0{,}0431 \left(\frac{ml\,Q^2}{h}\right)^{2/5}, \text{ oder für Fußmaß:}$$

$$F = 0{,}0271 \left(\frac{ml\,Q^2}{h}\right)^{2/5}.$$

Hieraus folgt nun annähernd:

$$c = \frac{Q}{F};$$

nimmt man diesem Werth entsprechend, ζ aus einer der Tabellen, so läßt sich

$$F = \left(\zeta \cdot \frac{ml\,Q^2}{2gh}\right)^{2/5}$$

genauer berechnen, und es ergeben sich hieraus auch schärfere Werthe für

$$c = \frac{Q}{F} \text{ und } p = m\sqrt{F},$$

sowie für a, b u. s. w.

Beispiele 1) Welches Gefälle erfordert ein Canal von 1500 Fuß Länge, 2 Fuß unterer, 8 Fuß oberer Breite und 4 Fuß Tiefe, zur Fortleitung einer Wassermenge von 70 Cubikfuß pr. Secunde? Es ist

$$p = 2 + 2\sqrt{4^2 + 3^2} = 12,\ F = 5 \,.\, 4 = 20,\ c = {}^{70}/_{20} = 3{,}5,$$
daher:

$$\zeta = 0{,}00784 \text{ und}$$

$$h = 0{,}00784 \cdot \frac{1500 \cdot 12}{20} \cdot \frac{3{,}5^2}{2g} = 7{,}056 \cdot 0{,}196 = 1{,}38 \text{ Fuß}.$$

2) Welche Wassermenge liefert ein Bach von 40 Fuß Breite, $4\frac{1}{2}$ Fuß mittlerer Tiefe und 46 Fuß Wasserprofil, wenn er auf einer Länge von 750 Fuß, 10 Zoll Gefälle hat? Es ist ungefähr

$$c = 90{,}9 \cdot \sqrt{\frac{40 \cdot 4{,}5 \cdot 10}{46 \cdot 750 \cdot 12}} = \frac{90{,}9}{\sqrt{230}} = 6 \text{ Fuß},$$

und hiernach $\zeta = 0{,}00765$

anzunehmen. Man erhält daher genauer:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{Fh}{\zeta l p} = \frac{4{,}5 \cdot 40 \cdot 10}{0{,}00765 \cdot 46 \cdot 750 \cdot 12} = \frac{1}{1{,}7595} = 0{,}5683 \text{ und } c = 5{,}96 \text{ Fuß}.$$

Die entsprechende Wassermenge ist endlich:

$$Q = 4{,}5 \cdot 40 \cdot 5{,}96 = 10{,}73 \text{ Cubikfuß}.$$

3) Man will einen Graben von 3650 Fuß Länge anlegen, welcher bei einem Totalgefälle von 1 Fuß eine Wassermenge von 12 Cubikfuß pr. Secunde fortführt. Welche Dimensionen sind dem Querprofile desselben zu geben, wenn es die Form eines halben regelmäßigen Sechseckes erhalten soll? Hier ist $m = 2{,}632$ (s. Tabelle §. 474), daher annähernd:

$$F = 0{,}0271\,(2{,}632 \cdot 3650 \cdot 144)^{2/5} = 7{,}75 \text{ Quadratfuß und}$$

$$c = \frac{12}{7{,}75} = 1{,}548 \text{ Fuß}.$$

Hiernach ist $\zeta = 0{,}0083$, und daher:

$$F = \left(0{,}0083 \cdot 2{,}632 \cdot \frac{3650 \cdot 144}{62{,}5}\right)^{2/5} = 8{,}22 \text{ Quadratfuß}$$

zu nehmen. Es ist hiernach zu setzen:

die Tiefe: $a = 0{,}760\,\sqrt{F} = 2{,}18$ Fuß,

die untere Breite: $b = 0{,}877\,\sqrt{F} = 2{,}51$,

und die obere Breite: $b_1 = 2 \cdot 2{,}51 = 5{,}02$ Fuß.

Anmerkung 1. Nach Saint-Venant läßt sich mit ziemlicher Genauigkeit setzen:

$$h = 0{,}000401\,\frac{p}{F} \cdot v^{21/11} = 0{,}000401 \cdot 2g \cdot v^{-1/11} \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter};$$

es ist daher der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = 0{,}000401 \cdot 2g \cdot v^{-1/11} = 0{,}000401 \cdot 19{,}62 \cdot v^{-1/11} = 0{,}007887\, v^{-1/11},$$

also z. B. für $v = 1$ Meter:

$$\zeta = 0{,}007887,$$

und für $v = \frac{1}{4}$ Meter:

$$\zeta = 0{,}007887 \cdot \sqrt[11]{4} = 0{,}007887 \cdot 1{,}134 = 0{,}008945.$$

(Vergl. oben §. 428, Anmerkung 3).

Anmerkung 2. Eine Tabelle zur Abkürzung dieser Rechnungen theilt der „Ingenieur“ Seite 460 und 461 mit.

Ungleichförmige Bewegung. Die Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Wassers in Flußbetten läßt sich insofern auf die Theorie der gleichförmigen Bewegung zurückführen, als man den Reibungswiderstand auf einer kurzen Flußstrecke als constant und die entsprechende Höhe ebenfalls §. 47

$$= \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

setzen kann. Außerdem ist aber noch auf die der Geschwindigkeitsveränderung entsprechende lebendige Kraft des Wassers Rücksicht zu nehmen.

Es sei $ABCD$, Fig. 808, eine kurze Flußstrecke, von der Länge $AD = l$, dem Gefälle $DH = h$, und es sei v_0 die Geschwindigkeit des ankommenden, v_1 die des fortgehenden Wassers. Wenden wir die Regeln des Ausflusses auf ein Element D im Wasserspiegel an, so erhalten wir für dessen Geschwindigkeit v_1:

Fig. 808.

$$\frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v_0^2}{2g};$$

was aber ein Element E unter Wasser betrifft, so hat dasselbe zwar von der einen Seite her eine größere Druckhöhe $AG = EH$, allein da das Unterwasser mit der Druckhöhe DE entgegenwirkt, so bleibt für dasselbe ebenfalls nur das Gefälle $DH = EH - ED$ als Bewegung erzeugende Druckhöhe übrig, und es gilt also auch für dieses und für jedes andere Element die Formel:

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g},$$

und nimmt man hierzu noch den Reibungswiderstand, so erhält man:

$$h = \frac{v_2 - v_0^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin p, F und v Mittelwerthe des Wasserprofiles, Querschnittes und der Geschwindigkeit sind. Ist F_0 der Inhalt des oberen und F_1 der des unteren Querprofiles, so läßt sich setzen:

$$F = \frac{F_0 + F_1}{2} \text{ und } Q = F_0 v_0 = F_1 v_1,$$

weshalb nun

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{Q}{F_0}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g},$$

sowie

$$\frac{v^2}{F} = \frac{v_0^2 + v_1^2}{F_0 + F_1} = \left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{F_0 + F_1}$$

folgt und sich ergiebt:

1) $$h = \left[\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\right]\frac{Q^2}{2g},$$ sowie

2) $$Q = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)}}.$$

Mit Hülfe der Formel 1) läßt sich aus dem Wasserquantum, der Länge und den Querschnitten einer Fluß- oder Canalstrecke das entsprechende Gefälle h berechnen, mit Hülfe der Formel 2) aber umgekehrt aus dem Gefälle, der Länge und den Querschnitten das Wasserquantum. Um mehr Genauigkeit zu erzielen, kann man die Rechnung für mehrere kurze Flußstrecken durchführen und zuletzt das arithmetische Mittel nehmen. Ist nur das Totalgefälle bekannt, so setze man gleich dieses statt h in die letzte Formel, führe statt

$$\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2},\ \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_0^2},$$

wo F_n den Inhalt des letzten Querprofiles bezeichnet, und statt

$$\zeta \cdot \frac{l\,p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)$$

die Summe aller ähnlichen Werthe der einzelnen Flußstrecken ein.

Beispiel. Ein Bach hat auf einer Strecke von 300 Fuß Länge 9,6 Zoll Gefälle, der mittlere Umfang seines Wasserprofiles ist 40 Fuß, der Inhalt des oberen Querprofiles mißt 70 und der des unteren 60 Quadratfuß. Welche Wassermenge liefert dieser Bach? Es ist:

$$Q = \frac{7{,}906\,\sqrt{0{,}8}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} = \frac{1}{70^2} + 0{,}007565 \cdot \frac{300\ .\ 40}{130}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{70^2}\right)}}$$

$$= \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003365}} = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0004096}} = 349 \text{ Cubikfuß.}$$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\frac{2\,Q}{F_0 + F_1} = \frac{698}{130} = 5{,}37$ Fuß, daher ist richtiger

$$\zeta = 0{,}00768 \text{ statt } 0{,}007565$$

zu setzen, und es folgt nun schärfer:

$$Q = \frac{7{,}071}{\sqrt{0{,}0000731 + 0{,}0003416}} = 347 \text{ Cubikfuß.}$$

Wenn derselbe Bach bei demselben Wasserstande auf einer anderen Strecke von 450 Fuß Länge 11 Zoll Gefälle hat, und wenn auf dieser Strecke sein oberes Querprofil 50 und sein unteres 60 Quadratfuß beträgt, wobei der mittlere Profilumfang 36 Fuß mißt, so hat man:

$$Q = \frac{7{,}906\,\sqrt{0{,}9167}}{\sqrt{\frac{1}{60^2} - \frac{1}{50^2} + 0{,}00768 \cdot \frac{450\ .\ 36}{110}\left(\frac{1}{60^2} + \frac{1}{50^2}\right)}}$$

$$= 7{,}906\sqrt{\frac{0{,}9167}{-\,0{,}0001222 + 0{,}0007549}} = 301 \text{ Cubikfuß.}$$

Aus beiden Werthen folgt der mittlere:

$$Q = \frac{347 + 301}{2} = 324 \text{ Cubikfuß.}$$

Um eine Formel für die Wassertiefe zu erhalten, setzen wir die obere §. 478
Tiefe $= a_0$ und die untere $= a_1$, ferner den Abhang des Flußbettes,

$= \alpha$, folglich das Gefälle des Grundbettes, $= l\, sin.\, \alpha$. Dann erhalten wir das Wassergefälle:

$$h = a_0 - a_1 + l\, sin.\, \alpha,$$

und es folgt nun die Gleichung:

$$a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \left[\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - sin.\, \alpha\right] l,$$

daher:

$$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - sin.\, \alpha}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die Strecke l bestimmen, welche einer gegebenen Veränderung $a_0 - a_1$ der Wassertiefe entspricht. Ist aber die umgekehrte Aufgabe zu lösen, so hat man den Weg der Näherung zu betreten, indem man erst die den angenommenen Senkungen $a_0 - a_1$ und $a_1 - a_2$ entsprechenden Entfernungen l_1 und l_2 ermittelt, und hieraus durch eine Proportion die der gegebenen Entfernung l entsprechende Senkung berechnet (s. „Ingenieur", Arithmetik, §. 16, V. Seite 76).

Die Formel ist noch einer Vereinfachung fähig, wenn die Breite b des fließenden Wassers constant ist, oder als constant angesehen werden kann. Wir setzen in diesem Falle:

$$\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{F_0^2 - F_1^2}{F_0^2 F_1^2} \cdot \frac{Q^2}{2g} = \frac{(F_0 - F_1)(F_0 + F_1)}{F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

$$= \frac{(a_0 - a_1)(a_0 + a_1)}{a_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g} \text{ annähernd} = 2\,\frac{(a_0 - a_1)}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g},$$

und ebenso:

$$\frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{p\,(F_0^2 + F_1^2)}{(F_0 + F_1)\,F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\text{annähernd} = \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g},$$ erhalten daher:

$$l = \frac{(a_0 - a_1)\left(1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}\right)}{\zeta \cdot \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - sin.\, \alpha},$$

und folglich:

$$\frac{a_0 - a_1}{l} = \frac{\zeta \cdot \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - sin.\, \alpha}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}}.$$

Mit Hülfe dieser Formel läßt sich direct die einer gegebenen Strecke l entsprechende Veränderung $(a_0 - a_1)$ der Wassertiefe berechnen.

Beispiel. Man will in einem horizontalen Graben von 5 Fuß Breite und 800 Fuß Länge eine Wassermenge von 20 Cubikfuß fortführen und dieselbe 2 Fuß hoch eintreten lassen, welche Höhe wird das Wasser am Ende des Canales haben? Theilen wir die ganze Länge in zwei gleiche Theile und bestimmen wir nach der letzten Formel das Gefälle für jeden dieser Theile.

Allemal ist $sin. \alpha = 0$, $l = \frac{800}{2} = 400$, und $b = 5$; für den ersten Theil ist $v_0 = \frac{20}{2 \, . \, 5} = 2$, daher $\zeta = 0{,}00810$, ferner $a_0 = 2$; da nun $p = 8\frac{1}{2}$, so folgt:

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{0{,}00810 \, . \, \frac{8{,}5}{10} \cdot \frac{4}{2\,g}}{1 - \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{2\,g}} \right) \cdot 400 = \frac{0{,}1762}{0{,}936} = 0{,}188 \text{ Fuß.}$$

Nun ist für die zweite Hälfte $a_1 = 2 - 0{,}188 = 1{,}812$, ferner p_1 etwa $= 8{,}2$, $v_1 = \frac{20}{9{,}106} = 2{,}207$, und die Senkung des zweiten Theiles:

$$a_1 - a_2 = \left(\frac{0{,}00810 \cdot \frac{8{,}2}{9{,}106} \cdot \frac{2{,}207^2}{2\,g}}{1 - \frac{2}{1{,}812} \cdot \frac{2{,}207^2}{2\,g}} \right) \cdot 400 = \frac{0{,}2285}{0{,}914} = 0{,}250 \text{ Fuß,}$$

daher folgt die ganze Senkung

$$= 0{,}188 + 0{,}250 = 0{,}438,$$

und die Wassertiefe am unteren Ende

$$= 2 - 0{,}438 = 1{,}562 \text{ Fuß} = 18\frac{3}{4} \text{ Zoll.}$$

Anschwellungen. Wenn Flüsse oder Canäle ihren Wasserstand ändern, so treten auch Geschwindigkeitsveränderungen und Veränderungen in den Wassermengen ein. Einem höheren Wasserstande entspricht nicht nur ein größerer Querschnitt, sondern auch eine größere Geschwindigkeit, und daher aus doppelten Gründen ein größeres Wasserquantum, und ebenso giebt eine Abnahme der Wassertiefe eine Verminderung im Querschnitt und in der Geschwindigkeit, und daher auch eine Abnahme der Wassermenge in zweifacher Beziehung. Ist die anfängliche Tiefe $= a$, und die spätere Tiefe $= a_1$, sowie die obere Breite des Canales, $= b$, so läßt sich die Vergrößerung des Querschnittes, $= b\,(a_1 - a)$, und daher der Querschnitt nach der Anschwellung $(a_1 - a)$: §. 479

$$F_1 = F + b\,(a_1 - a)$$

setzen, auch folgt hiernach:

$$\frac{F_1}{F} = 1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{F}$$

und:

$$\sqrt{\frac{F_1}{F}} \text{ annähernd } = 1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2\,F}.$$

Ist ferner p der anfängliche, p_1 der spätere Umfang des Wasserprofiles, sowie θ der Böschungswinkel der Ufer, so läßt sich setzen:

$$p_1 = p + \frac{2\,(a_1 - a)}{sin.\,\theta}\text{, daher}$$

$$\frac{p_1}{p} = 1 + \frac{2\,(a_1 - a)}{p\,sin.\theta}\text{ und:}$$

$$\sqrt{\frac{p_1}{p}} = 1 + \frac{a_1 - a}{p\ sin.\ \theta}\text{, sowie:}$$

$$\sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1 - \frac{a_1 - a}{p\ sin.\ \theta}.$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit beim ersten Wasserstande, $c = 90,9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}}$, und beim zweiten $c_1 = 90,9 \sqrt{\frac{F_1}{p_1} \cdot \frac{h}{l}}$, es läßt sich daher:

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{F_1}{F}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p_1}} = \left(1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2\,F}\right)\left(1 - \frac{a_1 - a}{p\ sin.\ \theta}\right)$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\ sin.\ \theta}\right),$$

also die relative Geschwindigkeitsveränderung:

$$1)\ \frac{c_1 - c}{c} = (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\ sin.\ \theta}\right)\text{ setzen.}$$

Dagegen folgt das Verhältniß der Wassermengen:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1\,c_1}{Fc} = \left(1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{F}\right)\left[1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\ sin.\ \theta}\right)\right]$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{3b}{2\,F} - \frac{1}{p\ sin.\ \theta}\right),$$

und der relative Wassermengenzuwachs:

$$2)\ \frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3\,b}{2\,F} - \frac{1}{p\ sin.\ \theta}\right).$$

Weniger genau, aber in vielen Fällen, namentlich bei breiten Canälen mit wenig Böschung genügend, ist es, $F = ab$ zu setzen und $\frac{1}{p\ sin.\ \theta}$ zu vernachlässigen, weswegen dann einfacher

$$\frac{c_1 - c}{c} = {}^1/_2\,\frac{a_1 - a}{a}\text{ und }\frac{Q_1 - Q}{Q} = {}^3/_2 \cdot \frac{a_1 - a}{a}$$

folgt.

Hiernach ist also die relative Geschwindigkeitsveränderung halb so groß, und die relative Veränderung im Wasserquantum gleich $^3/_2$mal so groß, als die relative Veränderung im Wasserstande.

Die vorstehenden Formeln gelten nur für die permanente Bewegung

des Wassers **in Flußbetten**, wo die Wasserstände constant sind, nicht aber in den Fällen, wo die Höhe des fließenden Wassers veränderlich ist. Die mittlere Geschwindigkeit in einem und demselben Querprofile ist während des **Steigens** der Wasserhöhe **größer** und während des **Fallens kleiner** als bei constantem Wasserstande, es fließt also auch im ersten Falle mehr und im zweiten Falle weniger Wasser durch als bei der permanenten Bewegung des Wassers.

Beispiele. 1) Wenn der Wasserstand um $\frac{1}{10}$ seiner anfänglichen Größe zunimmt, so wird die Geschwindigkeit um $\frac{1}{20}$ und das Wasserquantum um $\frac{3}{20}$ seines anfänglichen Werthes größer.

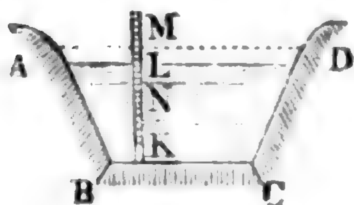
2) Wenn die Tiefe um 8 Procent abnimmt, so vermindert sich die Geschwindigkeit um 4 Procent, und das Wasserquantum um 12 Procent.

3) Mit Hülfe der genaueren Formel

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3\,b}{2\,F} - \frac{1}{p\, sin.\, \theta}\right)$$

läßt sich eine Wasserstandsscala KM, Fig. 809, construiren, woran man die jeder Wassertiefe KL entsprechende Wassermenge eines Canales ablesen kann, wenn man nur einmal das Wasserquantum für eine gewisse mittlere Tiefe kennt. Ist $b = 9$ Fuß, $b_1 = 3$, $a = 3$ und $\theta = 45^0$, so hat man:

Fig. 809.



$$F = \frac{(9 + 3)\,3}{2} = 18 \text{ Quadratfuß},$$

$$p = 3 + 2\,.\,3\sqrt{2} = 11{,}485, \text{ und}$$

$$sin.\, \theta = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707,$$

daher:

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = \left(\frac{3\,.\,9}{2\,.\,18} - \frac{1}{11{,}485\,.\,0{,}707}\right)(a_1 - a) = (0{,}750 - 0{,}123)\,(a_1 - a)$$
$$= 0{,}627\,(a_1 - a).$$

Beträgt das dem mittleren Wasserstande entsprechende Wasserquantum $Q = 40$ Cubikfuß, so hat man:

$$Q_1 = 40 + 40\,.\,0{,}627\,(a_1 - a) = 40 + 25\,(a_1 - a).$$

Ist $a_1 - a = 0{,}04$ Fuß $= 5{,}76$ Linien, so folgt $Q_1 = 41$; ist $a_1 - a = 0{,}08$ Fuß $= 11{,}52$ Linien, so hat man $Q_1 = 42$ Cubikfuß; ist ferner $a_1 - a = -0{,}04$, so folgt $Q_1 = 39$ Cubikfuß u. s. w. Es giebt also eine Scala, deren Intervalle $LM = LN = 5{,}76$ Linien betragen, die Wassermenge bis auf einen Cubikfuß genau an. Natürlich wird die Genauigkeit um so kleiner, je mehr sich der Wasserstand von dem mittleren entfernt.

Anmerkung. Ueber die Zu- und Abführung des Wassers in Canälen, sowie über die Anlage der Wehre und Teiche wird im zweiten Theile gehandelt.

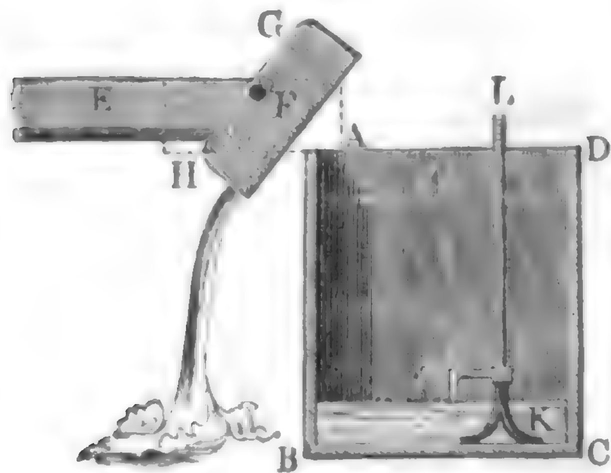
Schlußanmerkung. Ausführlich über die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen handelt der Verfasser in der allgemeinen Encyklopädie, Bd. II., Artikel „Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen"; auch wird daselbst eine vollständige Literatur (bis 1844) über diesen Gegenstand mitgetheilt. **Rittinger's** tabellarische Zusammenstellung der Versuche über die Bewegung des Wassers in Canälen ist in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereins 7. Jahrgang 1855, enthalten.

Achtes Capitel.

Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen.

§. 480 **Aichen.** Das Wasserquantum, welches ein fließendes Wasser innerhalb einer gewissen Zeit liefert, wird entweder durch Aichmaße, oder durch Ausflußapparate oder durch Hydrometer gefunden. Das einfachste Wassermessen besteht allerdings in dem Aichen (franz. jaugeage; engl. gauging), d. i. in der Anwendung eines Aichgefäßes, doch ist dieses nur bei kleineren Wassermengen, wie sie etwa in Röhren oder kleinen Bächen und Gräben zugeführt werden, anwendbar. Das Aichgefäß wird meist aus Brettern zusammengesetzt, und bekommt deshalb eine parallelepipedische Form; um seine Haltbarkeit zu erhöhen, wird es wohl noch mit eisernen Reifen umgeben. Wie der genaue Inhalt dieses Gefäßes zu ermitteln ist, wird im „Ingenieur", S. 208, angezeigt. Das Wasser wird diesem Gefäße durch ein Gerinne EF, Fig. 810, zugeführt, an dessen Ende sich eine Doppelklappe GH befindet, durch welche man das Wasser nach Belieben neben dem Gefäße AC oder in dasselbe ausfließen lassen kann. Um die Höhe des Wasserkörpers im Gefäße recht genau zu erhalten, wendet man wohl noch eine Wasserstandsscala KL an. Wenn man vor der Messung die Zeigerspitze Z bis auf die Oberfläche des schon im Gefäße befindlichen und wenn auch vielleicht nur den Boden bedeckenden Wassers herabgelassen und den Wasserstand an der Scala abgelesen hat, so erhält man die Höhe ZZ_1 des geaichten Wassers durch Subtraction dieses Wasserstandes von demjenigen Stande, welchen die Scala anzeigt, wenn man die Zeigerspitze Z_1 am Ende der Beobachtung mit dem Wasserspiegel in Berührung gebracht hat. Vor der Messung ist natürlich die Klappe so zu stellen, daß das Wasser neben dem Kasten ausfließt. Hat man sich überzeugt, daß der Zufluß im Gerinne in Beharrung übergegangen ist, und hat man an der in der Hand befindlichen Uhr einen Zeitpunkt beobachtet, so dreht man die Klappe um, damit das Wasser in das Aichgefäß fließt; und ist nachher das Gefäß ganz oder zum Theil gefüllt, so liest man auf der Uhr einen zweiten Zeitpunkt ab und bringt

Fig. 810.

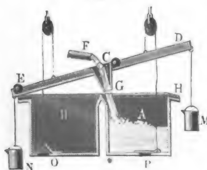


die Klappe wieder in die erste Stellung. Aus dem mittleren Querschnitte F des Gefäßes und der Höhe $ZZ_1 = s$ des Wasserkörpers ergiebt sich das ganze Wasserquantum $V = Fs$, und hieraus wieder mittels der durch die Differenz der beobachteten Zeiten gegebenen Füllungszeit t das Wasserquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{Fs}{t}.$$

Anmerkung. Um ein veränderliches Zuflußwasserquantum zu jeder Tageszeit angeben zu können, kann man den in Fig. 811 abgebildeten Cubir-Apparat, wie er vorzüglich auf Salinen vorkommt, anwenden. Hier giebt es zwei Aichgefäße A und B, die sich abwechselnd füllen und leeren, und das durch eine Röhre F zugeführte Wasser geht durch eine kurze Röhre CG, welche mit einem um C drehbaren Hebel DE fest verbunden ist. Hat sich das eine Gefäß, z. B. A, gefüllt, so fließt das Wasser durch ein kleines Gerinne H in das Eimerchen M, dieses zieht nun den Hebel auf der einen Seite nieder, und es kommt die Röhre CG in eine Lage, wodurch das Wasser nach B geleitet wird. Das Aufziehen der Klappen O und P erfolgt durch über Rollen weggehende Schnüre, deren Enden mit dem Hebel verbunden sind, und wird vorzüglich durch eiserne Kugeln unterstützt, die dem Niedergehen des Hebels den letzten Impuls ertheilen. Die Eimer M und N enthalten noch kleine Ausflußöffnungen, damit sie sich nach jedesmaligem Kippen leeren können. Uebrigens ist noch ein Zählapparat angebracht, an welchem die Zahl der Spiele zu jeder Zeit abgelesen werden kann. Andere Apparate dieser Art von Brown beschreibt Dingler's polyt. Journal Bd. 115. Ueber einen neuen Wassermeßapparat von Noeggerath siehe „Polyt. Centralblatt 1856. Heft 5." Vergleiche ferner die angeführten Werke von Francis, Lesbros u. s. w. Siehe auch weiter unten §. 506.

Fig. 811.



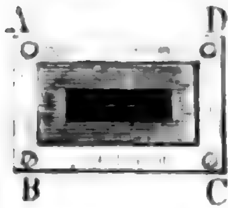
Ausflussregulatoren. Sehr häufig werden kleinere und mittlere Wassermengen mit Hülfe ihres Ausflusses durch eine bestimmte Mündung und unter einem bekannten Drucke gefunden. Aus dem Inhalte F der Mündung, aus der Druckhöhe h und mit Hülfe eines Ausflußcoefficienten μ ergiebt sich die Wassermenge pr. Secunde: §. 481

$$Q = \mu F \sqrt{2gh}.$$

Am besten eignen sich hierzu die Poncelet'schen Mündungen, weil für diese bei sehr verschiedenen Druckhöhen die Ausflußcoefficienten mit großer Genauigkeit bekannt sind (§. 410); jedoch sind dieselben nur bei gewissen mittleren Wassermengen anwendbar. Der Verfasser bedient sich bei seinen Wassermessungen vier solcher Mündungen, eine von 5, eine von 10, eine von 15

und eine von 20 Centimeter Höhe, alle aber von 20 Centimeter Weite. Diese Mündungen sind in Messingtafeln ausgeschnitten, welche auf hölzernen Rahmen AC, Fig. 812, aufsitzen, die man mittels vier starker eiserner Schrauben an jeder Wand befestigen kann. In vielen Fällen muß man sich freilich größerer Mündungen bedienen, für welche die Ausflußcoefficienten nicht so sicher bestimmt sind, ja oft lassen sich nur Ueberfälle anbringen, welche meist noch weniger Genauigkeit gewähren. Jedenfalls gilt aber die Regel, daß man bei dem Ausflusse so viel wie möglich vollständige und vollkommene Contraction zu erzielen suchen und deshalb der Mündung, wenn sie in einer dickeren Wand befindlich ist, nach außen eine Abschrägung ertheilen muß. Welche Correctionen bei unvollkommener und partieller Contraction anzubringen sind, ist in den §§. 416, 417 u. s. w. hinreichend auseinandergesetzt worden.

Fig. 812.



Um das Wasser eines Gerinnes zu messen, hat man das Mündungsstück einzusetzen und den Moment abzuwarten, wann der Wasserstand in Beharrung gekommen ist. Zur Messung der Druckhöhe kann man sich der festen Wasserstandsscala KL mit Zeiger, Fig. 813, oder der beweglichen Wasserstandsscala EF, Fig. 814, bedienen. Will man den Ausfluß unmittelbar

Fig. 813.

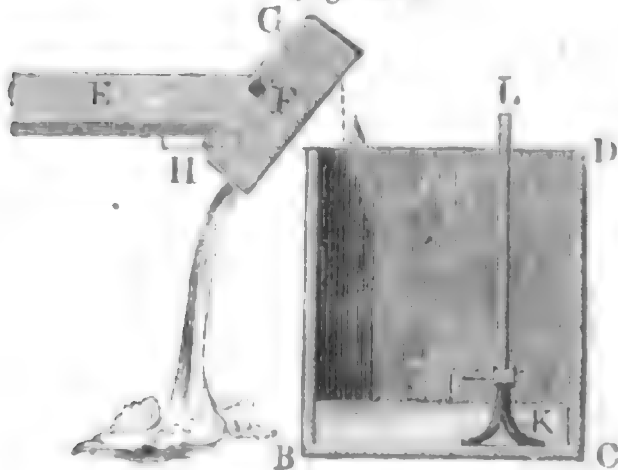
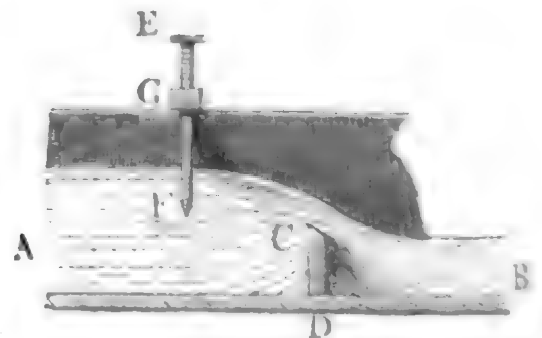
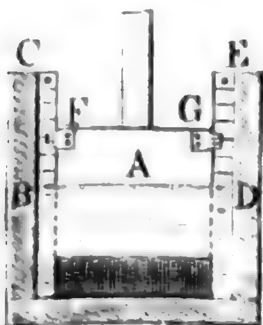


Fig. 814.



an Schutzöffnungen beobachten, so ist es gut, vorher ein Paar messingene Schützenstandsscalen BC und DE, Fig. 815, nebst ihren Zeigern F und G auf die Führung und auf das Schutzbrett A zu befestigen, um die Oeffnungshöhe sicherer ablesen zu können. Uebrigens ist es meist besser, zu dem Zwecke der Wassermessung gleich ein neues Schutzbrett nebst einer Führung mit der erforderlichen Abschrägung nach außen einzusetzen.

Fig. 815.



Das einfachste Mittel, das Wasser in einem Gerinne zu messen, besteht allerdings in dem Einsetzen eines an der oberen Kante abgeschrägten Brettes CF, Fig. 701, und in der Ausmessung des dadurch gebildeten Ueberfalles. Ist

der Graben oder das Gerinne lang und wenig ansteigend, so dauert es allerdings ziemlich lange, ehe der Beharrungszustand eintritt, und es ist deshalb gut, hier vor der Messung noch ein zweites Brett einzusetzen, welches den Ausfluß des Wassers auf eine längere Zeit verhindert, um das Steigen des Wassers auf die dem Beharrungszustande entsprechende Höhe zu beschleunigen.

Um das Wasserquantum eines Baches zu messen, kann man denselben durch einen aus Pfählen und Brettern bestehenden Einbau AB, Fig. 816, eindämmen und das Wasser durch eine in demselben angebrachte Oeffnung C abfließen lassen, oder man kann sich auch eines einfachen Ueberfalles oder Ueberfallwehres (hiervon im zweiten Theile) bedienen.

Fig. 816.

Anmerkung. Das einfachste Mittel, um die Druckhöhe zu bestimmen, ist, den Stand des Zeigers zu beobachten, wenn dessen Spitze erstens die Oberfläche des im Beharrungszustande abfließenden Wassers und zweitens den Spiegel des stillstehenden und nur bis Schwelle C aufgestauten Wassers berührt. Die Differenz dieser beiden Scalenstände ist die Druckhöhe oder der Stand des Wassers über der Schwelle. Bei Beobachtung des letzten Zeigerstandes ist die Capillarität nicht außer Acht zu lassen, vermöge welcher der Wasserspiegel noch um 1,37 Linien über oder unter der Schwelle stehen kann, ehe der Abfluß des Wassers über derselben beginnt oder aufhört. (Siehe §. 380.)

Sehr einfach wird auch das Wasser in einem rectangulären Canale oder Gerinne AB, Fig. 817 und 818, gemessen, wenn man ein unten abge- §. 482

Fig. 817.

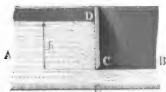
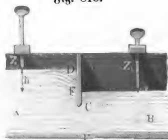


Fig. 818.



schrägtes Brett CD so einsetzt, daß unter demselben eine Ausflußöffnung CE übrig bleibt, durch welche das Wasser abfließen kann. Diese Methode hat vor der Anwendung eines Ueberfalles den Vorzug, daß bei ihr das gespannte Wasser mehr zur Ruhe kommt, und deshalb die Messung der Druckhöhe schärfer zu vollziehen ist. Wenn es möglich ist, suche man einen freien Ausfluß, wie Fig. 817, herbeizuführen, weil hierbei eine größere Ge-

nauigkeit zu erlangen ist; bei einer großen Wassermenge ist es jedoch nicht möglich, das Zurückstauen des Unterwassers zu verhindern, und man muß sich daher mit einem Ausflusse unter Wasser, Fig. 818, begnügen. Endigt sich das Gerinne kurz hinter der Mündung, bildet es also ein sogenanntes **kurzes Ansatzgerinne**, so fließt das Wasser durch dasselbe fast **frei** ab, und man hat es dann mit einem Falle der **Lesbros**'schen Versuche (§. 418) zu thun. Bezeichnet a die Mündungshöhe, b die Mündungsbreite, ferner h die Druckhöhe, bis Mitte der Mündung gemessen, und μ den aus Tab. II, §. 418, zu nehmenden Ausflußcoefficienten, so hat man das Ausflußquantum

$$Q = \mu a b \sqrt{2 g h}.$$

Ist hingegen das **Gerinne lang**, oder das abfließende Wasser gestaut, so daß es eine horizontale Oberfläche hat, so fließt das Wasser in allen Stellen des Mündungsquerschnittes mit einer und derselben, dem Niveauabstande zwischen der Oberfläche A des Oberwassers und der Oberfläche B des Unterwassers entsprechenden Geschwindigkeit ab, es ist daher dann in der letzten Formel für Q, statt h dieser Niveauabstand einzuführen.

Fließt das Wasser in die **freie Luft**, oder steht der Unterwasserspiegel nicht über der oberen Mündungskante, wie Fig. 817 vor Augen führt, so hat man sowohl für eine scharfe als auch für eine abgerundete Mündungskante,

$$\mu = 0{,}965$$

einzusetzen, und folglich bei der Strahldicke a und Breite b,

$$Q = 0{,}965\, a b \sqrt{2 g h},$$

oder genauer, wenn a_1 die Tiefe des zu- und a die des abfließenden Wassers bezeichnet, nach §. 398:

$$Q = 0{,}965\, a b \sqrt{\frac{2 g h}{1 - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2}}.$$

Bei dem **Ausfluß unter Wasser**, wobei der Unterwasserspiegel über der oberen Mündungskante steht (s. Fig. 818), bildet sich hinter der Mündungswand ein Wasserwirbel, wobei der Ausfluß wesentlich gestört wird, und es ist hier, einigen Versuchen des Verfassers zufolge, für eine Mündung mit **scharfer Mündungskante** im Mittel,

$$\mu = 0{,}462,$$

und dagegen für eine solche mit nach einem **Quadranten abgerundeter Kante**,

$$\mu = 0{,}717$$

zu setzen.

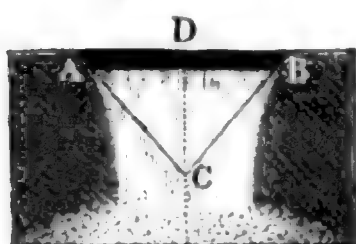
Beispiel. Um die Wassermenge zu finden, welche ein Gerinne AB, Fig. 818, fortführt, hat man ein scharfkantiges Brett CD in dasselbe eingesetzt, und dadurch einen Ausfluß unter Wasser hergestellt, übrigens aber Folgendes gefunden. Weite der Mündung oder des Gerinnes, $b = 3$ Fuß, Oeffnungshöhe oder Abstand CE

der Brettkante C vom Gerinnboden, $a = 6$ Zoll, Stand des Zeigers Z auf der Seite des Oberwassers, $h_1 = 0{,}445$ Fuß, und Stand des Zeigers Z_1 über dem Unterwasser, $h_2 = 1{,}073$. Es ist hiernach der Niveauabstand $h = h_2 - h_1 = 1{,}073 - 0{,}445 = 0{,}628$ Fuß und die gesuchte Wassermenge:

$$Q = 0{,}462 \,.\, 7{,}906 \,.\, 3 \,.\, 0{,}5 \sqrt{h_2 - h_1} = 5{,}48 \sqrt{0{,}628} = 4{,}34 \text{ Cubikfuß.}$$

Wäre der Ausflußcoefficient bei ähnlichen Mündungsquerschnitten immer derselbe, so würde der trianguläre Ueberfall oder zweiseitige Wandeinschnitt ABC, Fig. 819, einen besonderen Vorzug vor dem Ueberfall mit horizontaler Schwelle haben, dies ist jedoch, wie schon an Kreismündungen wahrgenommen werden kann, bei kleinen Mündungen nicht, und bei großen Mündungen nur annähernd richtig. Solche Wandeinschnitte empfiehlt Herr Professor Thomson in Belfast als Hülfsmittel zum Wassermessen. Aus der Breite $AB = b$, und der Höhe $CD = h$, folgt hier das Wasserquantum §. 483

Fig. 819.



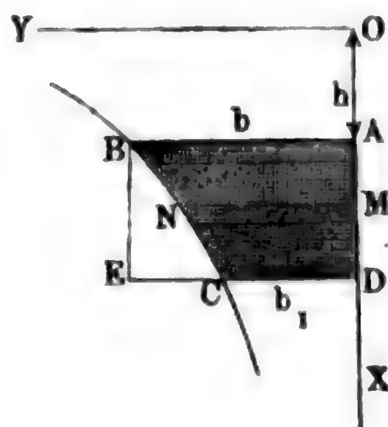
$$Q = {}^8/_{15} \frac{\mu b h}{2} \sqrt{2gh} \text{ (s. §. 402),}$$

und wenn man nach Thomson, den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}619$ setzt,

$$Q = 0{,}33 \frac{b h}{2} \sqrt{2gh} = 0{,}13\, b h^{3/2} \text{ Cubikfuß.}$$

Zum Wassermessen eignen sich auch solche Mündungen, bei welchen die Wassermenge der Mündungshöhe proportional ist. Ist dieselbe mit einem Schutzbrete versehen, so giebt dann die Größe des Schützenzuges das Maß der Ausflußmenge an. Es sei die Druckhöhe über der oberen Kante einer solchen Mündung $ABCD$, Fig. 820, $OA = h$, die Länge dieser Kante, $AB = b$, die der unteren Kante, $CD = b_1$, und die Höhe der Mündung, $AD = a$. Horizontale Linien im Abstande $\frac{a}{n}$ von einander theilen die Mündung in gleichhohe Streifen, wovon jeder eine und dieselbe Wassermenge $\frac{Q}{n}$ geben soll. Für den oberen Spalt oder Streifen, welcher die Breite b und Druckhöhe h hat, ist

Fig. 820.



$$\frac{Q}{n} = \frac{b a}{n} \sqrt{2gh},$$

und dagegen für einen Streifen, welcher um $OM = x$ unter dem Wasserspiegel liegt, und die Breite $MN = y$ hat, ist

$$\frac{Q}{n} = \frac{y\,a}{n}\sqrt{2gx};$$

folglich hat man, wenn man diese beiden Ausdrücke für $\frac{Q}{n}$ einander gleich setzt,

$$y\sqrt{x} = b\sqrt{h}, \text{ oder}$$

$$\frac{y}{b} = \sqrt{\frac{h}{x}}.$$

Die Curve BNC, welche die Mündung an der Seite begrenzt, gehört einem aus Artikel 9 der analytischen Hülfslehren bekannten Curvensysteme an, welches die Horizontale OY und die Verticale OX zu Asymptoten hat.

Aus Q, h und a folgt:

1) die obere Mündungsbreite $b = \frac{Q}{a\sqrt{2gh}}$,

2) Mündungsbreite in der Tiefe x, $y = b\sqrt{\frac{h}{x}}$, und

3) die untere Mündungsbreite $b_1 = b\sqrt{\frac{h}{h+a}}$.

Ferner ist der Inhalt der Mündung:

$$F = 2b(\sqrt{h(h+a)} - h),$$

und daher die mittlere Druckhöhe:

$$z = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{h(h+a)} - h}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}.$$

Ist diese Mündung mit einer Schütze AE versehen, so giebt der Schützenzug $DM = a_1$ eine Ausflußöffnung MC, durch welche die Wassermenge $Q_1 = \frac{a_1}{a} Q$ fließt.

§. 484 **Prony's Methode.** Da es oft lange dauert, ehe der Beharrungszustand von dem durch einen Einbau aufgestauten Wasser eintritt, so kann man folgendes von Prony vorgeschlagene Verfahren mit Vortheil anwenden. Zuerst verschließe man die Mündung durch ein Schutzbrett ganz und lasse dadurch das Wasser ziemlich hoch, oder so weit, es die Umstände erlauben, aufstauen; jetzt ziehe man das Schutzbrett so weit auf, daß mehr Wasser ab- als zufließt, und messe nun die Wasserstände in gleichen und möglichst kleinen Zeitabständen; endlich verschließe man die Schutzöffnung wieder völlig und beobachte noch die Zeit t_1, innerhalb welcher das Wasser auf die erste Höhe steigt. Jedenfalls ist dann im Laufe der ganzen Beobachtungszeit $t + t_1$ ebenso viel Wasser zu- als abgeflossen, und es läßt sich daher durch das Ausflußquantum in der Zeit t das Zuflußquantum in der Zeit $t + t_1$ aus-

drücken. Sind die Druckhöhen während des Sinkens h_0, h_1, h_2, h_3 und h_4, so hat man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4})$$ (s. §. 453),

und ist nun der Inhalt der Schutzöffnung, $= F$, so hat man das Ausflußquantum in der Zeit t:

$$V = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$

und daher das Zuflußquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{V}{t + t_1} = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12(t + t_1)}(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}).$$

Beispiel. Um das zum Umtriebe eines Wasserrades zu benutzende Wasser eines Baches zu messen, hat man dasselbe durch eine Spundwand, Fig. 816, eingedämmt und nach Eröffnung der rectangulären Mündung in derselben Folgendes beobachtet: anfängliche Druckhöhe, 2 Fuß, nach 30″, 1,8 Fuß, nach 60″, 1,55 Fuß, nach 90″, 1,3 Fuß, nach 120″, 1,15 Fuß, nach 150″, 1,05 Fuß, und nach 180″, 0,9 Fuß; Breite der Oeffnung, = 2 Fuß, Höhe der Oeffnung, = ½ Fuß, Zeit zum Zurücksteigen auf die erste Höhe bei verschlossener Oeffnung, = 110″. Zunächst beträgt die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{7,906}{18}(\sqrt{2} + 4\sqrt{1,8} + 2\sqrt{1,55} + 4\sqrt{1,3} + 2\sqrt{1,15} + 4\sqrt{1,05} + \sqrt{0,9})$$
$$= 0,4392\,(1,414 + 5,364 + 2,490 + 4,561 + 2,145 + 4,099 + 0,949)$$
$$= 0,4392 \,.\, 21,022 = 9,233 \text{ Fuß};$$

nun ist aber $F = 2 \,.\, \frac{1}{2} = 1$ Quadratfuß, daher folgt die theoretische Ausflußmenge = 9,233 Cubikfuß. Nimmt man den Ausflußcoefficienten = 0,61 an, so erhält man endlich das gesuchte Wasserquantum:

$$Q = \frac{0,61 \,.\, 180}{180 + 110} \cdot 9,233 = 3,495 \text{ Cubikfuß}.$$

Wasserzoll. Um kleine Wassermengen zu messen, bedient man sich auch wohl des Ausflusses durch kreisrunde, 1 Zoll weite Mündungen in einer dünnen Wand unter einem gegebenen Drucke. Man nennt die Wassermenge, welche eine solche Oeffnung unter dem kleinsten Drucke, oder dann, wenn der Wasserspiegel nur eine Linie über der obersten Stelle der Mündung steht, einen Wasser- oder Brunnenzoll (franz. pouce d'eau; engl. water-inch). Die Franzosen nehmen an, daß einem Wasserzolle (alt Paris. Maß) in 24 Stunden 15 Pinten oder 19,1953 Cubikmeter Wasser, also §. 485

in 1 Stunde 0,7998 Cubikmeter und
in 1 Minute 0,01333 „

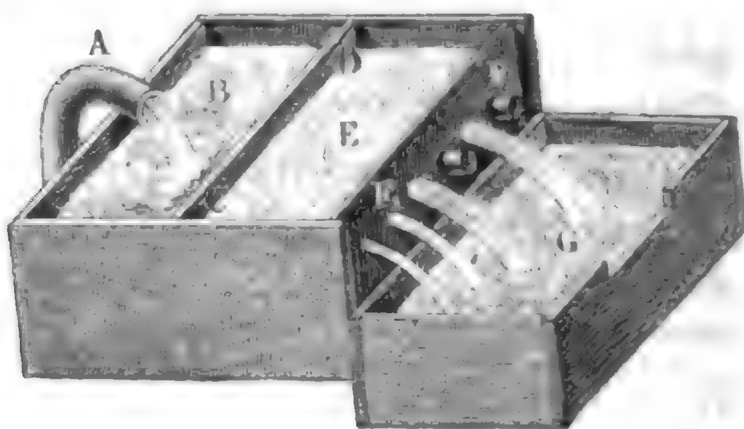
entspricht, doch weichen ältere Angaben von Mariotte, Couplet und Bossut hiervon nicht unbedeutend ab. Nach Hagen liefert ein Wasserzoll (für das preuß. Maß) in 24 Stunden 520 Cubikfuß, also in der Minute 0,3611 Cubikfuß. Der Prony'sche doppelte Wassermodul, welcher einer

Mündung von 2 Centimeter Durchmesser bei 5 Centimeter Druck entspricht und in 24 Stunden 20 Cubikmeter Wasser liefert, hat keine allgemeine Aufnahme gefunden.

Die Beobachtungen lassen sich sicherer anstellen, wenn man eine größere Druckhöhe hat; am einfachsten ist es, wenn man diese Höhe, wie den Durchmesser der Mündung, 1 Zoll annimmt. Nach den Herren Bornemann und Röting giebt ein solcher Wasserzoll täglich 642,8 Cubikfuß Wasser (s. den Ingenieur Seite 463).

Der Apparat, an dem man mit Hülfe von Wasserzollen das Wasser mißt, ist in Fig 821 abgebildet. Das zu messende Wasser fließt durch die Röhre A in einen Kasten B, aus diesem tritt es durch unten in der Scheidewand CD angebrachte Löcher in den Kasten E, und aus diesem fließt es durch eine horizontale Reihe von genau 1 Zoll weiten und in Blech ausgeschnittenen kreisrunden Mündungen F in das Reservoir G. Damit sich aber der Wasserspiegel nur eine Linie über den Köpfen dieser Mündungen stellt, ist es nöthig, daß diese in hinreichender Zahl vorhanden seien, und daß man einen Theil derselben durch Stöpsel verschließe. Zur genaueren Angabe bringt man noch Mündungen F_1 an, welche $^1/_2$, $^1/_4$ Wasserzoll durchlassen. Bei großen Wassermengen theilt man wohl erst das ganze Wasser, und mißt auf diese Weise nur einen Theil, z. B. den zehnten. Dieses Theilen ist leicht dadurch zu bewirken, daß man das Wasser erst in ein Reservoir mit einer gewissen Anzahl, in gleichem Niveau befindlicher Mündungen leitet, und nur das von der einen Mündung gelieferte Wasser in dem oben abgebildeten Apparate auffängt.

Fig. 821.



Anmerkung. Man kann auch die Hähne und andere Regulirungsapparate zur Wassermessung anwenden, wenn man den jeder Stellung entsprechenden Widerstandscoefficienten kennt. Ist h die Druckhöhe, F der Querschnitt des Rohres und μ der Ausflußcoefficient bei völlig geöffnetem Hahne, so hat man die Ausflußmenge:

$$Q = \mu F \sqrt{2gh},$$

sowie umgekehrt:

$$\mu = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} \text{ und } \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{F}{Q}\right)^2 \cdot 2gh.$$

Setzt man nun den einer bestimmten Hahnstellung entsprechenden und aus den ober

mitgetheilten Tabellen zu entnehmenden Widerstandscoefficienten, $= \zeta$, so hat man die entsprechende Ausflußmenge:

$$Q_1 = F \sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{\mu^2} + \zeta}} = \frac{\mu F \sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \mu^2 \zeta}} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \mu^2 \zeta}}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{1 + \zeta \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \cdot \frac{1}{2gh}}}.$$

Zur Bequemlichkeit kann man sich hiernach eine Tabelle construiren, so daß es nur eines Blickes auf diese bedarf, um die einer gewissen Hahnstellung entsprechende Ausflußmenge, oder um die einem gegebenen Ausflußquantum entsprechende Stellung des Hahnes zu finden. Ist z. B. $\mu = 0,7$ und $F = 4$ Quadratzoll, so hat man:

$$Q_1 = \frac{0,7 \,.\, 4 \,.\, 12 \,.\, 7,906 \sqrt{h}}{\sqrt{1 + 0,49 \,.\, \zeta}} = 265,6 \sqrt{\frac{h}{1 + 0,49\,\zeta}} \text{ Cubikzoll,}$$

oder, wenn h constant 1 Fuß mißt:

$$Q_1 = \frac{265,6}{\sqrt{1 + 0,49\,\zeta}}.$$

Wenn nun den Hahnstellungen 5°, 10°, 15°, 20°, 25° u. s. w. die Widerstandscoefficienten 0,057; 0,293; 0,758; 1,559; 3,095 zukommen, so entsprechen denselben die Ausflußmengen: 262,1; 248,4; 226,8; 200,0; 166,4 Cubikzoll.

Um den Ausfluß durch eine Mündung F, Fig. 822, zu reguliren, wendet §. 486
man auch einen Hahn oder eine Klappe A, Fig. 822 an, welche durch einen

Fig. 822.

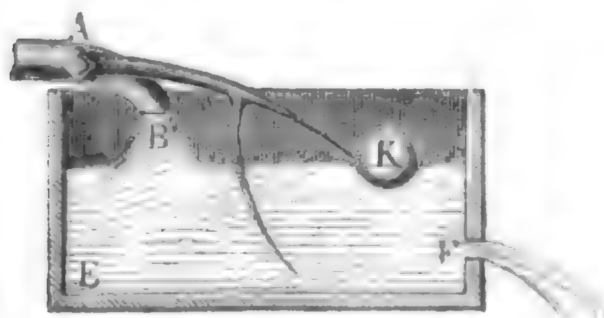
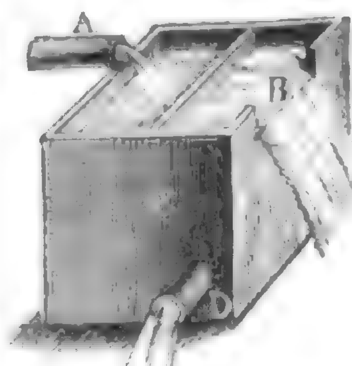


Fig. 823.



Schwimmer K mittels eines Hebels regulirt wird, so daß durch B immer nur so viel Wasser zu-, als durch F abfließt.

Sehr einfach läßt sich auch der Abfluß des Wassers aus einem Reservoir BDE, Fig. 823, durch eine tiefere Mündung oder Röhre D, mittels eines breiten Ueberfalles B reguliren, da hier eine mäßige Veränderung des Wasserzuflusses durch A, eine mäßige Vergrößerung des Wasserstandes über der Schwelle B, und eine verhältnißmäßig unbedeutende Vergrößerung der Druckhöhe der Ausflußmündung zur Folge hat.

Bezeichnet F die Größe der Ausmündung D, h die Höhe der Ueberfallschwelle über der Mitte dieser Mündung, h_1 die Höhe des Wasserspiegels

über der gedachten Schwelle, so hat man bei dem Ausflußcoefficienten μ das Abflußquantum durch D:

$$Q = \mu F \sqrt{2g(h + h_1)}.$$

Setzt man die Druckhöhe h_1 des Ueberfalles, welche sich aus dem Abflußquantum Q_1 der Breite b_1 und dem Ausflußcoefficienten μ_1, mittels der Gleichung

$$Q_1 = {}^2/_3\, \mu_1 b_1 \sqrt{2gh_1^3}, \text{ oder durch die Formel}$$

$$h_1 = \left[\frac{1}{2g}\left(\frac{{}^3/_2\, Q_1}{\mu_1 b_1}\right)^2\right]^{1/3},$$

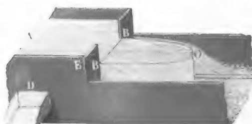
bestimmen läßt, in diesen Ausdruck ein, so erhält man die Formel

$$Q = \mu F \sqrt{2gh + \left(\frac{3g\,Q_1}{\mu_1 b_1}\right)^{2/3}},$$

woraus zu ersehen ist, daß sich Q mit Q_1 um so weniger verändert, je größer die Schwellenhöhe h und je größer die Breite b_1 des Ueberfalles ist.

Die Ueberfallbreite b_1 läßt sich dadurch leicht vergrößern, daß man den Ueberfall einer Bogenform, wie $B\,O\,B$, Fig. 824, giebt. Die Ausmündung D giebt dann ein ziemlich constantes Wasserquantum, obgleich der Zufluß bei A sehr variabel ist, weil die Höhe des Wassers über der langen bogenförmigen Schwelle immer klein bleibt gegen die Höhe dieser Schwelle über der Mitte der Ausflußöffnung.

Fig. 824.

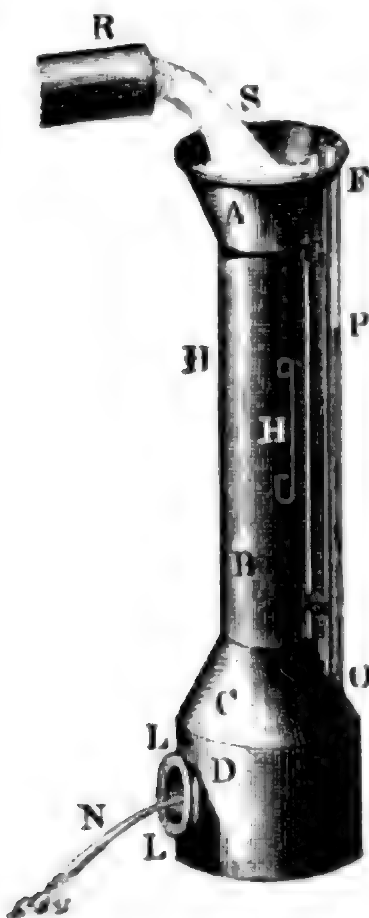


Anmerkung. Einen solchen Wassertheiler aus Eisenblech hat der Herr Oberkunstmeister Schwamkrug für den Wernergraben bei Freiberg construirt. Derselbe führt durch die rectanguläre Mündung D von 5 Fuß Breite und 1 Fuß Höhe fast constant 40 Cubikfuß Wasser pr. Secunde ab, während das übrige Wasser durch den Ueberfall, dessen Schwelle 2 Fuß über der oberen Mündungskante liegt, in den Graben fließt, welcher es nach dem Punkte des Bedarfs fortführt.

§. 487 **Hydrometrischer Becher.** Zur Ausmessung kleiner fließenden Wassermengen kann man sich eines kleinen in Fig. 825 abgebildeten Gefäßes bedienen, welchem ich den Namen hydrometrischer Becher gegeben habe. Dieses Instrument besteht aus einer 3 Zoll weiten und 12 Zoll langen Röhre B mit einem trichterförmigen Einmündungsstücke A und einem 6 Zoll weiten und ebenso hohen Gefäße D, welches durch ein conisches Zwischenstück C mit B fest verbunden ist. Dieses Gefäß ist mit einem Seitenloch LL versehen, in welches verschiedene, kreisförmige Mündungen in der dünnen

Wand bildende Mundstücke eingesetzt werden können. Man hält dieses Instrument mittels der Henkel H, H unter das z. B. durch eine Röhre R ausfließende Wasser S und läßt das auf diese Weise abgefangene Wasser wieder durch das Mundstück LL abfließen. Um das eingeflossene Wasser zu beruhigen, ist noch in dem Reservoir D ein feines Sieb angebracht, und um die Druckhöhe des Wassers beobachten zu können, ist eine Glasröhre OP angesetzt, welche an einer Messingscala aufsteigt und sich unten, $\frac{1}{2}$ Zoll über dem Boden des Gefäßes D endigt. Aus der beobachteten Druckhöhe h, dem bekannten Querschnitt des Mundstückes und dem entsprechenden Ausflußcoefficienten läßt sich dann die Ausflußmenge mittels der Formel

Fig. 825.



$$Q = \mu F \sqrt{2gh}$$

berechnen.

Wenn man sich eine kleine Tabelle anfertigt, so kann man natürlich die Berechnung nach dieser Formel ganz ersparen, und es ist höchstens nur eine einfache Interpolation zu den Tabellenwerthen erforderlich. Ist d der Durchmesser der Mündung, so hat man

$$F = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ und daher:}$$

$$Q = \frac{\mu \pi}{4} d^2 \sqrt{2gh} = \frac{\mu \pi}{4} \sqrt{2g} . d^2 \sqrt{h}.$$

Die Ausflußmenge Q wird sowohl das Doppelte bei dem doppelten Querschnitte oder doppelten d^2 als auch bei der vierfachen Druckhöhe. Richtet man daher das Instrument so ein, daß die Maximaldruckhöhe das Vierfache der Minimaldruckhöhe, z. B. jene 12 und diese 3 Zoll beträgt, und bedient man sich einer Sammlung von Mundstücken, deren Durchmesser die geometrische Reihe

$d, \sqrt{2}\, d, 2\, d, 2\sqrt{2}\, d, 4\, d$ u. s. w.

d. i. d; $1{,}414\, d$; $2\, d$; $2{,}828\, d$, $4\, d$ u. s. w.

bilden, so erhält man dadurch ein Mittel, zur Bestimmung aller Wassermengen innerhalb des Minimums, welches die kleinste Mündung mit dem Durchmesser d bei der kleinsten Druckhöhe giebt, und des Maximums, welches der größten Mündung mit dem Durchmesser $\sqrt{n} . d$ und der größten Druckhöhe $4\, h$ entspricht.

Nimmt man für

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$d =$	$\frac{1}{8}$ $= 0{,}1250$	$\frac{1}{8}\sqrt{2}$ $= 0{,}1768$	$\frac{1}{4}$ $= 0{,}2500$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}$ $= 0{,}3535$	$\frac{1}{2}$ $= 0{,}5000$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $= 0{,}7071$	1 Zoll $= 1{,}0000$
$\mu =$	0,690	0,675	0,660	0,647	0,635	0,627	0,620

an, so läßt sich folgende zum Gebrauch nützliche Tabelle zusammenstellen.

Tabelle

über die stündliche Wassermenge in Cubikfußen für folgende Mündungen:

Druckhöhe h in Zollen.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
3	0,84	1,64	3,20	6,28	12,32	24,35	48,12
4	0,97	1,90	3,70	7,26	14,23	28,12	55,56
5	1,08	2,11	4,13	8,11	15,91	31,44	62,12
6	1,18	2,31	4,53	8,88	17,42	34,43	68,05
7	1,28	2,50	4,89	9,59	18,82	37,21	73,57
8	1,37	2,68	5,23	10,26	20,12	39,76	78,58
9	1,45	2,84	5,55	10,88	21,34	42,18	83,35
10	1,53	2,99	5,85	11,48	22,50	44,46	87,86
11	1,60	3,13	6,13	12,03	23,59	46,62	92,14
12	1,67	3 27	6,40	12,56	24,64	48,70	96,24
13	1,74	3,40	6,66	13,07	25,65	50,69	100,17

Der Gebrauch dieser Tabelle ist aus folgendem Beispiele zu ersehen.

Beispiel. Um die Ergiebigkeit eines Brunnens zu ermitteln, hat man das Wasser desselben durch einen hydrometrischen Becher fließen lassen, und gefunden, daß beim Ausflusse durch die Mündung V. (von $\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser) der Beharrungszustand dann eintrat, als die Druckhöhe 10,4 Zoll war. Der Tabelle zufolge ist für $h = 10$ Zoll:

$$Q = 22{,}50 \text{ Cubikfuß stündlich},$$

und für $h = 11$ Zoll:

$$Q = 23{,}59 \text{ Cubikfuß},$$

folglich die Differenz für 1 Zoll, 1,09 Cubikfuß, und für 0,4 Zoll, $0{,}4 \cdot 1{,}09 = 0{,}436$ Cubikfuß. Hieraus ergiebt sich das Wasserquantum für $h = 10{,}4$ Zoll Druckhöhe:

$$Q = 22{,}50 + 0{,}436 = 22{,}94 \text{ Cubikfuß}.$$

Schwimmer. Die Wassermengen von größeren Bächen, Canälen §. 4
und von Flüssen lassen sich nur mittels die Geschwindigkeit angebender Hydrometer bestimmen. Unter diesen Instrumenten sind aber die Schwimmer (franz. flotteurs; engl. floating-bodies) die einfachsten. Man kann zwar hierzu jeden schwimmenden Körper gebrauchen, doch ist es sicherer, Körper von mittlerer Größe, welche nur wenig specifisch leichter als Wasser sind, hierzu zu verwenden. Körper von ungefähr $^1/_{10}$ Cubikfuß Inhalt sind hinreichend groß. Sehr große Körper nehmen nicht leicht die Geschwindigkeit des Wassers an, und sehr kleine Körper lassen sich wieder, namentlich wenn sie viel aus dem Wasser hervorragen, leicht durch zufällige Umstände, zumal durch die Luft über dem Wasserspiegel, in ihrer Bewegung stören. Oft wendet man einfache Holzstücke an, gut ist es aber, wenn dieselben mit einer hellen Firnißfarbe überstrichen sind, und noch besser sind die hohlen Schwimmer, wie Glasflaschen, Blechkugeln u. s. w., weil man diese nach Belieben mit Wasser füllen kann. Am häufigsten wendet man aber die Schwimmkugeln an. Dieselben werden von 4 bis 12 Zoll Durchmesser aus Messingblech verfertigt, sie bekommen, um sie nicht leicht aus dem Auge zu verlieren, einen Anstrich von lichter Oelfarbe, und erhalten auch noch eine Oeffnung mit einem Halse, um sie mit Wasser anfüllen und verstöpseln zu können. Eine solche Schwimmkugel A, Fig. 826, giebt allerdings nur die Geschwindigkeit an der Oberfläche und sogar oft nur die im Stromstriche an, allein man kann durch das Aneinanderhängen zweier Kugeln A und B, Fig. 827, auch die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen bestimmen. In diesem Falle wird die eine Kugel B, welche unter Wasser schwimmen soll, ganz mit Wasser, die andere aber, welche im Wasserspiegel zu schwimmen bestimmt ist, nur so viel mit Wasser angefüllt, daß sie nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Beide Kugeln werden durch einen Faden oder durch einen Draht oder durch eine dünne Drahtkette mit einander verbunden. Zuerst bestimmt man durch die einfache Kugel die Oberflächengeschwindigkeit c_0, und dann beobachtet man durch die Kugelverbindung die mittlere Geschwindigkeit c beider; bezeichnet man nun die Geschwindigkeit in der Tiefe der zweiten Kugel durch c_1, so läßt sich setzen:

Fig. 826.

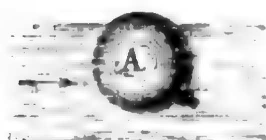
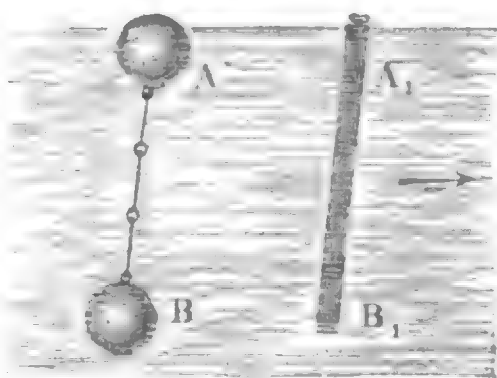


Fig. 827.



$$c = \frac{c_0 + c_1}{2}, \text{ und daher umgekehrt: } c_1 = 2\,c - c_0.$$

Wenn man nun beide Kugeln durch längere und längere Drähte mit ein-

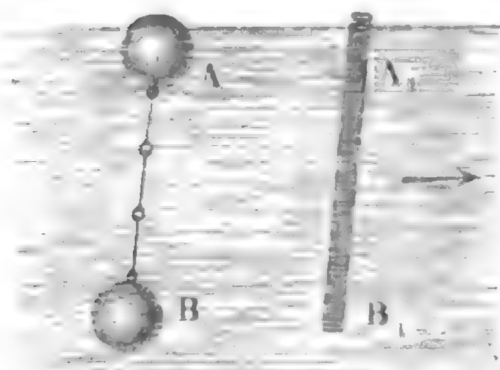
ander verbindet, so kann man auf diese Weise nach und nach die Geschwindigkeiten in größeren und größeren Tiefen finden. Uebrigens ergiebt sich auch die mittlere Geschwindigkeit c eines Perpendikels, wenn man die zweite Kugel nahe über dem Boden schwimmen läßt und ebenfalls

$$c = \frac{c_0 + c_1}{2}$$

setzt; genauer aber noch, wenn man das Mittel aus allen beobachteten Geschwindigkeiten in einem Perpendikel nimmt.

Um die mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel anzugeben, wendet man auch oft den in Fig. 828 abgebildeten Schwimmstab $A_1 B_1$ an, namentlich ist dieser bei Messungen in Canälen und Gräben bequem, zumal wenn er aus kurzen Stücken zusammengeschraubt werden kann. Der Schwimmstab, welchen der Verfasser anwendet, ist aus 15 ausgehöhlten Theilen, jeder von 1 Decimeter Länge, zusammengesetzt. Damit derselbe ziemlich aufrecht schwimme, wird stets das unterste Stück so stark mit Schrot angefüllt, daß der Kopf beim Schwimmen nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Die Anzahl der zusammenzuschraubenden Stücke hängt natürlich von der Tiefe des Canales ab.

Fig. 828.



An dem Schwimmstabe, sowie an der Schwimmkugelverbindung läßt sich auch wahrnehmen, daß bei ungehinderter Bewegung des Wassers in Betten die Geschwindigkeit am Wasserspiegel größer ist als am Boden, weil der Kopf des Stabes dem Fuße und die obere Kugel der unteren etwas vorausschwimmt. Nur bei durch Verengungen, z. B. durch Brückenpfeiler gebildeten Aufstauungen, findet das Gegentheil statt.

Anmerkung. In der Regel ist, namentlich bei großen Schwimmern, wie Schiffen u. s. w., die Geschwindigkeit der schwimmenden Körper etwas größer als die des Wassers, weniger deshalb, weil diese Körper beim Schwimmen von einer durch die Oberfläche des Wassers gebildeten schiefen Ebene herabgleiten, als deshalb, weil sie nicht oder nur zum Theil an der unregelmäßigen inneren Bewegung des Wassers Theil nehmen; doch ist die Abweichung bei kleinen Schwimmern klein genug, um sie vernachlässigen zu können.

489 **Geschwindigkeits- und Querschnittsbestimmung.** Die Geschwindigkeit einer Schwimmkugel findet man, indem man mit einer guten Secundenuhr oder an einem halbe Secunden schlagenden Lothe oder Pendel (§. 327) die Zeit t beobachtet, welche diese auf dem Wasser schwimmend braucht, um eine an einem Ufer abgesteckte und ausgemessene Strecke $AB = s$, Fig. 829, zurückzulegen. Es ist dann die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel, $c = \frac{s}{t}$. Damit die

Zeit t genau dem am Ufer abgemessenen Wege entsprechend gefunden werde, ist es nöthig, mit Hülfe eines Winkelkreuzes oder Winkelspiegels am jenseitigen Ufer

Fig. 829.

zwei, Perpendikel auf AB bezeichnende Signalstangen C und D einzustecken. Stellt man sich hinter A, so kann man den Zeitpunkt beobachten, wenn der etwas oberhalb A eingesetzte Schwimmer K in das Alignement AC kommt, und begiebt man sich hinter B, so kann man ebenfalls an der in der Hand gehaltenen Uhr beobachten, wann der Schwimmer in das Alignement BD gelangt, und man findet dann durch Subtraction der Beobachtungszeiten die gesuchte und der Durchlaufung von s entsprechende Zeit t.

Außer der mittleren Geschwindigkeit c des Wassers ist auch noch der Inhalt F des Querprofiles erforderlich, um das Wasserquantum $Q = Fc$ zu bestimmen. Um diesen Inhalt angeben zu können, ist es aber nöthig, daß man die Breite und mittlere Tiefe des Wassers kenne. Die Tiefe mißt man mit einer eingetheilten Sondirstange AB, Fig. 830, mit länglichem Querschnitte und einem Brettchen B am Fuße; bei größeren Tiefen kann man sich auch einer Sondirkette bedienen, an deren Ende eine eiserne Platte hängt, die sich beim Einsenken auf das Grundbette aufsetzt. Die Breite und die den gemessenen Tiefen entsprechenden Abscissen oder Abstände

Fig. 830.

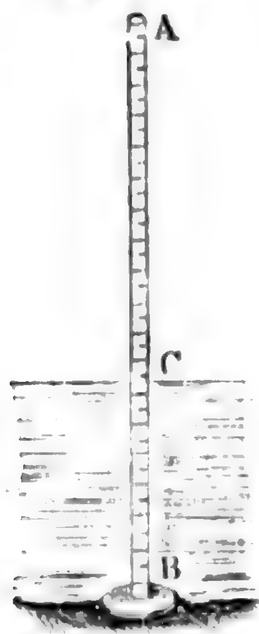
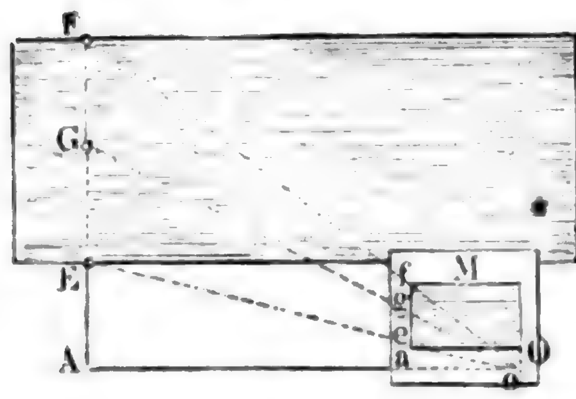


Fig. 831.

von den Ufern ergeben sich bei Canälen und schmalen Bächen EFG, Fig. 831, durch Ausspannen einer Meßkette AB oder Legen einer Stange u. s. w. quer über das fließende Wasser. Bei breiten Flüssen bestimmt man sie mit Hülfe eines Meßtisches M, den man in schicklicher Entfernung AO vom zu messenden Querprofile EF, Fig. 832 (a. f. S.), aufstellt. Ist ao auf der Mensel die verjüngte Entfernung AO der Standpunkte A und O von einander, und hat man ao in der Richtung von AO und dadurch auch die vorher beim Aufstellen des Meßtisches aufgetragene Breitenrichtung af mit der abgesteckten Breitenlinie AF parallel gestellt, so schneidet jede Visirlinie nach den Punkten E, F, G u. s. w. im Querprofile, entsprechende Punkte e, f, g auf der Mensel ab, und es sind ae, af, ag u. s. w. die Entfernungen AE, AF, AG u. s. w. im verjüngten Maße.

Man hat also beim Einsetzen der Sondirstange und dem dadurch bewirkten Tiefenmessen nicht erst nöthig, die Entfernungen der entsprechenden Punkte von den Ufern zu messen, wenn der am Meßtische stehende Ingenieur die Sondirstange beim Einsetzen in der Linie EF anvisirt.

Fig. 832.



Besteht nun die Breite EF, Fig. 831, eines Querprofiles aus den Theilen b_1, b_2, b_3 u. s. w. und sind die mittleren Tiefen innerhalb dieser Theile a_1, a_2, a_3, sowie die mittleren Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. s. w., so hat man den Inhalt des Querprofiles:

$$F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots,$$

die Wassermenge:

$$Q = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 + \cdots,$$

und endlich die mittlere Geschwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots}.$$

Beispiel. An einer ziemlich geraden und unveränderlichen Flußstrecke hat man Folgendes gefunden:

	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.
In den Mittelpunkten der Breitentheile:	5	12	20	15	7
die Tiefen	3	6	11	8	4
die mittleren Geschwindigkeiten . .	1,9	2,3	2,8	2,4	2,1

Es läßt sich daher setzen, der Inhalt des Querprofiles:

$$F = 5.3 + 12.6 + 20.11 + 15.8 + 7.4 = 455 \text{ Quadratfuß},$$

das Wasserquantum:

$$Q = 15.1{,}9 + 72.2{,}3 + 220.2{,}8 + 120.2{,}4 + 28.2{,}1 = 1156{,}9 \text{ Cbkfß.}$$

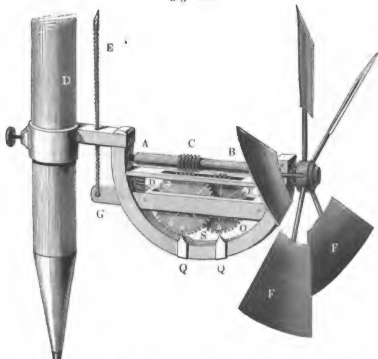
Die mittlere Geschwindigkeit ist:

$$c = \frac{1156{,}9}{455} = 2{,}54 \text{ Fuß.}$$

§. 490 **Hydrometrischer Flügel.** Das vorzüglichste Hydrometer ist das hydrometrische Flügelrad von Woltmann (franz. Moulinet de Woltmann; engl. Tachometer of Woltmann), Fig. 833. Es besteht aus einer

horizontalen Welle AB mit 2 bis 5 schief gegen die Axenrichtung stehenden Flächen oder Flügeln F, und giebt, unter das Wasser getaucht und der

Fig. 833.



Bewegungsrichtung desselben entgegengehalten, durch die Anzahl seiner Umdrehungen innerhalb einer gewissen Zeit die Geschwindigkeit des fließenden Wassers an. Um die Anzahl dieser Umdrehungen ablesen zu können, erhält die Welle ein paar Schraubengänge C, und läßt man diese zwischen die Zähne eines Rades D greifen, auf dessen Seitenflächen Ziffern eingravirt sind, welche an einem festen Zeiger die Anzahl der Umdrehungen der Flügelwelle angeben. Um aber eine große Anzahl von Umdrehungen beobachten zu können, wird auf die Welle dieses Zahnrades noch ein Getriebe aufgesetzt, das in ein zweites Zahnrad E eingreift, an dem sich, gleichsam wie am Stundenweiser einer Uhr, vielfache, z. B. fünf- oder zehnfache der Flügelumdrehungen ablesen lassen. Hat z. B. jedes der beiden Zahnräder 50 Zähne, und das Getriebe deren 10, so dreht sich das zweite Rad um einen Zahn, während das erste um fünf Zähne fortrückt, oder das Flügelrad fünf Umdrehungen macht. Wenn der Zeiger des ersten Rades auf $27 = 25 + 2$ und der des zweiten auf 32 steht, so ist hiernach die entsprechende Umdrehungszahl des Flügels:

$$= 32.5 + 2 = 162.$$

Das ganze Instrument wird mit einer Blechfahne an einen Stab geschraubt,

um es bequem ins Wasser eintauchen und dem Strome entgegenhalten zu können. Damit aber das Räderwerk nur während der Beobachtungszeit umlaufe, läßt man seine Axen in Pfannen umgehen, welche auf einem Hebel $G\,O$ sitzen, der durch eine Feder niedergedrückt wird, so daß ein Eingreifen der Zähne des ersten Rades in die Schraubengänge nur so lange statt hat, als man den Hebel mittels einer Schnur $G\,E$ emporzieht.

Die Umdrehungszahl eines Flügels in einer gewissen Zeit, z. B. in einer Secunde, ist nicht genau der Geschwindigkeit des Wassers proportional, es läßt sich daher auch nicht $v = \alpha . u$, wo u die Umdrehungszahl, v die Geschwindigkeit und α die Erfahrungszahl bezeichnen, setzen; es ist vielmehr zu setzen:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

oder genauer:

$$v = v_0 + \alpha u + \beta u^2 \cdots,$$

oder noch genauer:

$$v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2},$$

wo v_0 diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher das Wasser nicht mehr im Stande ist, den Flügel in Umdrehung zu setzen, α und β aber Erfahrungscoefficienten ausdrücken. Die Constanten v_0, α, β sind für jedes Instrument besonders zu ermitteln. Mit Hülfe derselben ergiebt sich durch eine einzige Beobachtung die Geschwindigkeit, doch ist es sicherer, deren immer wenigstens zwei anzustellen, und den mittleren Werth als den richtigen einzuführen.

Beispiel. Wenn bei einem Flügelrade $v_0 = 0{,}110$ Fuß, $\alpha = 0{,}480$, und $\beta = 0$, also $v = 0{,}11 + 0{,}48\,u$ ist, und man hat bei einer Beobachtung mit diesem Instrumente in einer Zeit von 80 Secunden eine Umdrehungszahl von 210 gefunden, so ist die entsprechende Geschwindigkeit des Wassers:

$$v = 0{,}11 + 0{,}48 \cdot \frac{210}{80} = 0{,}11 + 1{,}26 = 1{,}37 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung 1. Die Constanten v_0, α und β hängen vorzüglich von der Größe des Stoßwinkels, d. i. von dem Winkel ab, welchen die Flügelfläche mit der Bewegungsrichtung des Wassers und also auch mit der Axenrichtung des Flügels einschließt. Um bei kleinen Geschwindigkeiten noch ziemlich genau beobachten zu können, ist es gut, den Stoßwinkel groß, d. i. gegen 70° zu machen. Uebrigens ist es zweckmäßig, Flügel von verschiedener Größe und verschiedenen Stoßwinkeln zu haben, um, je nachdem die Tiefe oder die Geschwindigkeit des fließenden Wassers größer oder kleiner ist, den einen oder den anderen anwenden zu können.

Anmerkung 2. Hätte der hydrometrische Flügel bei seiner Umdrehung keine Hindernisse zu überwinden, so würde der Flügel $A\,B$, Fig. 934, den Weg $C\,C_1 = C\,D\,.\,tang.\,C\,D\,C_1$ zurücklegen, während das Wasser um $C\,D$ fortläuft, bezeichnet daher v die Geschwindigkeit des Wassers und δ den Stoßwinkel

$OCB = CDC_1$ desselben, so hat man unter dieser Voraussetzung, die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit des Flügels:

Fig. 834.

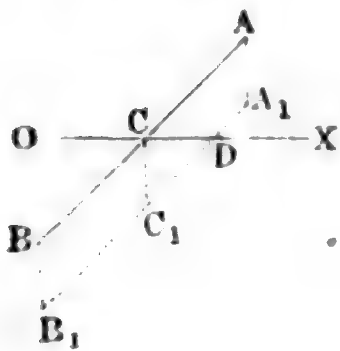
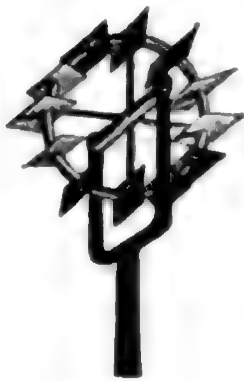


Fig. 835.



$$v_1 = v \ tang. \delta;$$

es ist hiernach zu ermessen, daß bei dem mittleren Flügelradius r die Umdrehungszahl des Flügelrades

$$u = \frac{v_1}{2 \pi r} = \frac{v \ tang. \delta}{2 \pi r}$$

ausfällt, und folglich direct wie die Geschwindigkeit v des Wassers und wie die Tangente des Stoßwinkels der Flügel, sowie umgekehrt wie der mittlere Flügelhalbmesser wächst.

Anmerkung 3. Um die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers zu finden, wendet man auch wohl ein kleines Blechrädchen, wie Fig. 835 repräsentirt, an, indem man nur dessen Untertheil ins Wasser eintaucht. Die Anzahl der Umdrehungen desselben läßt sich durch ein Räderwerk genau wie beim hydraulischen Flügel angeben.

Um die Constanten oder Coefficienten eines hydrometrischen Flügelrades zu finden, ist es nöthig, dieses Instrument in fließende Wasser einzuhalten, deren Geschwindigkeiten bekannt sind, und die entsprechenden Umdrehungszahlen zu beobachten. Wiewohl man eigentlich nur so viel Beobachtungen braucht, als Constanten vorhanden sind, so ist es doch viel sicherer, so viel Beobachtungen wie möglich, und namentlich auch bei sehr verschiedenen Geschwindigkeiten anzustellen, weil man dann die Methode der kleinsten Quadrate (s. analyt. Hülfslehren Art. 36) anwenden und dadurch den Einfluß der zufälligen Beobachtungsfehler herabziehen kann. Uebrigens läßt sich die Geschwindigkeit des Wassers entweder durch eine Schwimmkugel oder auch dadurch finden, daß man das Wasser in einem Aichgefäße auffängt, und die darin gemessene Wassermenge durch das Querprofil dividirt. Bei Anwendung der Schwimmkugeln ist ruhige Luft und eine gerade und gleichförmig fließende Wasserstrecke nöthig. Der Flügel ist an mehreren Stellen des von dem Schwimmer durchlaufenen Weges einzuhalten, und es ist auch die Genauigkeit befördernd, wenn der Durchmesser der Schwimmkugel ungefähr gleich ist dem Durchmesser des Flügelrades. §. 49

Viele Vortheile gewährt die zweite Bestimmungsweise, wo man das Wasser, in welches der Flügel eingetaucht wird, in einem Aichkasten auffängt. Zu diesem Zwecke, und zum Justiren der Hydrometer überhaupt, ist es sehr gut, wenn der Hydrauliker über ein besonderes, aus einem Ausflußkasten, einem Aichreservoir und einem zwischen beiden befindlichen Gerinne bestehendes hydraulisches Observatorium verfügen kann. Bei einem solchen ist ohne Umstände dem Wasser jede beliebige Geschwindigkeit zu ertheilen, indem man nicht nur den Eintritt in das Gerinne, sondern auch die Bewegung

in demselben durch Einsatzbretter nach Willkür reguliren kann. Bei den Beobachtungen hat man den Flügel an verschiedenen Stellen eines Querprofiles im Gerinne einzuhalten, die Tiefe dieses Profiles durch Wasserstandsscalen zu messen, und endlich das in irgend einer Zeit durchgelaufene Wasser im unteren Reservoir zu aichen (§. 480). Den Inhalt F des Querprofiles erhält man durch Multiplication der mittleren Wassertiefe mit der mittleren Breite, und das Wasserquantum Q erhält man aus dem mittleren Querschnitte G des Aichmaßes und der Höhe s des in der Zeit zugeflossenen Wasserquantums durch die Formel

$$Q = \frac{Gs}{t};$$

aus Q und F folgt zuletzt die mittlere Wassergeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{Gs}{Ft}.$$

Die entsprechende Umdrehungszahl u des Flügels ist das Mittel aus allen Umdrehungen, welche man erhält, wenn man das Instrument in verschiedenen Breiten und Tiefen des ausgemessenen Querprofiles einhält.

Hat man nun bei einer Versuchsreihe die mittleren Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 u. s. w. und die entsprechenden Umdrehungszahlen gefunden, so erhält man durch Substitution in der Formel:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

oder in der genaueren:

$$v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2}$$

so viel Bestimmungsgleichungen für die Constanten v_0, α, β, als Beobachtungen angestellt worden sind, und man kann nun hieraus die Constanten selbst finden, indem man entweder das Art. 36 der analyt. Hülfslehren angegebene Verfahren anwendet, oder indem man diese Gleichungen in so viel Gruppen theilt, als unbekannte Constanten vorhanden sind, und diese durch Addition zu so viel Bestimmungsgleichungen vereinigt, als zur Ermittelung von v_0, α und nach Befinden β, nöthig sind.

Unter der Voraussetzung, daß die passiven Widerstände des Instrumentes klein genug sind, um sie außer Acht lassen zu können, läßt sich $v = \alpha u$ setzen und α dadurch finden, daß man das Flügelrad im stillstehenden Wasser fortbewegt und hierbei die Anzahl $n = ut$ der Umdrehungen beobachtet, welche es bei Durchlaufung eines Weges $s = vt$ macht. Es ist dann:

$$\alpha = \frac{v}{u} = \frac{vt}{ut} = \frac{s}{n}.$$

Anmerkung 1. Wenn man die einfachere Formel mit zwei Constanten zu Grunde legt, so kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate setzen:

$$v_0 = \frac{\Sigma(y^2)\,\Sigma(x) - \Sigma(xy)\,\Sigma(y)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(xy)]^2} \text{ und } \alpha = \frac{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y) - \Sigma(xy)\,\Sigma(x)}{\Sigma(x^2)\,\Sigma(y^2) - [\Sigma(xy)]^2},$$

wobei $x = \frac{1}{v}$ und $y = \frac{u}{v}$, und das Zeichen Σ die Summe von allen ihm folgenden gleichnamigen Werthen, z. B.

$$\Sigma (x) = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \cdots,$$

$$\Sigma (x\,y) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{u_1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{u_2}{v_2} + \frac{1}{v_3} \cdot \frac{u_3}{v_3} + \cdots$$

bezeichnet.

Beispiel. Man hat mit einem kleinen hydrometrischen Flügel bei den Geschwindigkeiten:

0,163; 0,205; 0,298; 0,366; 0,610 Meter.

die Umdrehungszahlen pr. Secunde:

0,600; 0,835; 1,467; 1,805; 3,142

beobachtet, und soll nun die diesem Flügel entsprechenden Constanten bestimmen. Mit Hülfe der in der Anmerkung gegebenen Formel folgt, da

$$\Sigma (x) = \frac{1}{0,163} + \frac{1}{0,205} + \cdots = 18,740,$$

$$\Sigma (y) = \frac{0,600}{0,163} + \frac{0,835}{0,205} + \cdots = 22,759,$$

$$\Sigma (x^2) = \left(\frac{1}{0,163}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,205}\right)^2 + \cdots = 82,846,$$

$$\Sigma (y^2) = 105,223, \text{ und}$$

$$\Sigma (x\,y) = \frac{0,600}{(0,163)^2} + \frac{0,835}{(0,205)^2} + \cdots = 80,961$$

ist,

$$v_0 = \frac{105,223 \,.\, 18,740 - 80,961 \,.\, 22,759}{82,846 \,.\, 105,223 - (80,961)^2} = \frac{129,5}{2162} = 0,060 \text{ und}$$

$$\alpha = \frac{368,3}{2162} = 0,1703,$$

daher gilt für dieses Instrument die Formel:

$$v = 0,060 + 0,1703\,u.$$

Setzt man hierin $u = 0,6$, so bekommt man:

$$v = 0,060 + 0,102 = 0,162;$$

ferner $u = 0,835$ giebt:

$$v = 0,060 + 0,142 = 0,202;$$

ferner $u = 1,467$:

$$v = 0,060 + 0,249 = 0,309;$$

ferner $u = 1,805$:

$$v = 0,060 + 0,307 = 0,367;$$

endlich $u = 3,142$:

$$v = 0,060 + 0,535 = 0,595;$$

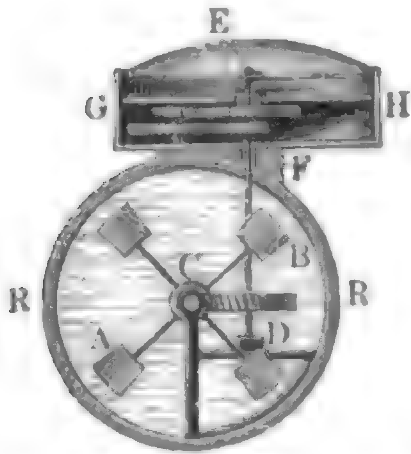
es findet also eine sehr gute Uebereinstimmung dieser berechneten Werthe mit den beobachteten statt.

Anmerkung 2. Man kann auch nach Lapointe das hydraulische Flügelrad in eine cylindrische Röhre einsetzen, und sich von demselben die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers angeben lassen. Der Zählapparat kann dann außerhalb des Wassers stehen und mit dem Rade durch eine stehende Welle in Verbindung gesetzt werden. Lapointe nennt dieses Instrument une tube jaugeur (s. Comptes

61*

rendues T. XXV, 1848; auch Polytechn. Centralblatt 1847. Fig. 836 führt eine ideelle Darstellung des hydrometrischen Flügelrades in einer Röhre vor Augen. Das Flügelrad ACB setzt auch hier mittels Schraube ohne Ende eine Welle DE in Umdrehung; die letztere ist aber mittels einer Stopfbüchse F aus der Röhre RR, in welcher das zu messende Wasser fließt, in das Gehäuse GH des Zählapparates geführt, dessen innere Einrichtung sehr verschieden sein kann.

Fig. 836.



Anmerkung 3. In Frankreich fängt man erst seit Kurzem an, dem hydraulischen Flügelrade die nöthige Aufmerksamkeit zu schenken. Wir finden eine ausführliche Abhandlung über dieses Instrument in den Annales des ponts et chaussées, T. XIV, 1847, von Baumgarten, und einen Auszug hiervon im Polytechnischen Centralblatte, 1849. Herr Baumgarten empfiehlt besonders die Schraubenflügel, und macht hierzu noch manche Bemerkungen, die mit den von uns allerdings schon längst gemachten Erfahrungen ganz im Einklange stehen. Ein neues hydrometrisches Flügelrad mit einer langen Schraube und ohne Räder beschreibt Boileau in seinem Traité de la mesure des eaux courantes.

§. 492 **Pitot'sche Röhre.** Die übrigen Hydrometer sind unvollkommener als der hydraulische Flügel, denn sie gewähren entweder weniger Genauigkeit, oder sie sind umständlicher im Gebrauche. Das einfachste Instrument dieser Art ist die **Pitot'sche Röhre** (franz. la tube de Pitot; engl. Pitot's tube). In seiner einfachsten Gestalt besteht es in einer gläsernen Knieröhre ABC, Fig. 837, welche so ins Wasser gehalten wird, daß der untere Theil derselben horizontal und dem Wasser entgegen zu stehen kommt. Durch den Wasserstoß wird nun in dieser Röhre eine Wassersäule zurückgehalten, die über das Niveau des äußeren Wasserspiegels zu stehen kommt, und die Erhebung DE dieser Wassersäule fällt um so größer aus, je größer der Stoß oder die ihn erzeugende Geschwindigkeit des Wassers ist; es kann daher auch umgekehrt, diese Erhebung oder Niveaudifferenz als Maß der Geschwindigkeit des Wassers dienen. Setzen wir diese Erhebung DE über den äußeren Wasserspiegel, $= h$, und die Geschwindigkeit des Wassers, $= v$, so können wir, wenn μ eine Erfahrungszahl bezeichnet,

Fig. 837.

$$h = \frac{v^2}{2 g \mu^2}$$

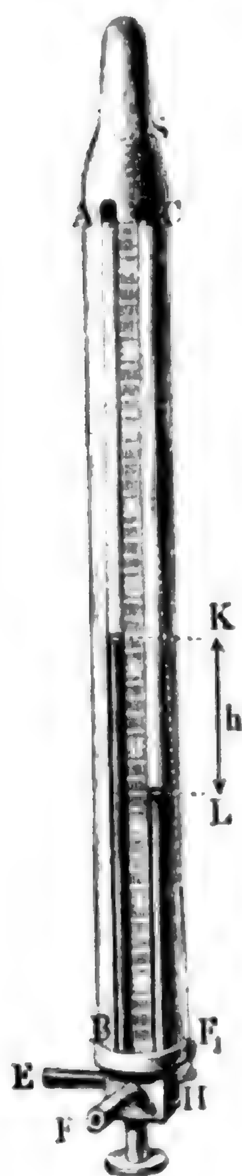
setzen, und daher umgekehrt

$$v = \mu \sqrt{2 g h} \text{ oder einfacher}$$
$$v = \psi \sqrt{h}.$$

Um die Constante ψ zu finden, hält man das Instrument an einer Stelle ins Wasser, wo die Geschwindigkeit v_1 bekannt ist; zeigt sich hier die Erhebung $= h_1$, so hat man für die Constante $\psi = \frac{v_1}{\sqrt{h_1}}$, welche nun in anderen Fällen, wo die Geschwindigkeit mit diesem Instrumente gesucht werden soll, zu gebrauchen ist.

Um das Ablesen der Höhe h zu erleichtern, läßt man das Instrument aus zwei Röhren AB und CD bestehen, und wie Fig. 838 zeigt, aus der einen ein Röhrchen E in der Stromrichtung, aus der anderen aber zwei Röhrchen F und F_1 rechtwinkelig gegen die Stromrichtung, durch beide Röhren aber einen einzigen Hahn H gehen, womit man die Wassersäulen in beiden Röhren absperren kann. Zieht man das Instrument aus dem Wasser heraus, so kann man bequem an einer zwischen beiden Röhren befindlichen Scala die Differenz $KL = h$ der beiden Wassersäulen ablesen. Damit das Wasser in der Röhre keine großen Schwankungen annehme, ist es nöthig, den Röhren enge Einmündungen zu geben, und damit das Absperren der Röhren schnell und sicher vor sich gehen könne, versieht man den Hahn mit einem Arme und einer in der Figur größtentheils punktirten Zugstange HS, welche oben nahe an der Handhabe des Instrumentes sich endigt.

Fig. 838.

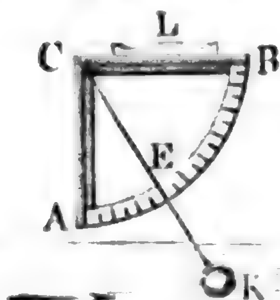


Anmerkung 1. Wenn auch die Pitot'sche Röhre nicht die Genauigkeit gewährt wie das hydrometrische Flügelrad, so ist sie doch wegen ihres einfachen Gebrauches ein sehr zu empfehlendes Instrument. Der Verfasser handelt im Polytechnischen Centralblatte, 1847, etwas specieller von diesem Instrumente, und theilt auch daselbst eine Reihe von Erfahrungszahlen und die darauf gegründete Bestimmung des Coefficienten ψ mit. Bei seinem Instrumente sind die Geschwindigkeiten zwischen 0,32 und 1,24 Meter, $v = 3{,}545 \sqrt{h}$ Meter zu setzen.

Anmerkung 2. Duchemin empfiehlt eine Pitot'sche Röhre mit Schwimmer. Da dieselbe ziemlich weit sein muß, so giebt sie eine nicht unbeträchtliche Stauung, weshalb sie in engen Canälen nicht zu gebrauchen ist (s. Duchemin: Recherches expérim. sur les lois de la résistance des fluides). Boileau beschreibt in dem oben (§. 412) citirten Werke eine neue Pitot'sche Röhre mit einem kleinen Aichgefäße, wodurch die Geschwindigkeit des fließenden Wassers mittels der Wassermenge, welche das letztere über den Wasserspiegel drückt, gemessen wird.

493 **Stromquadrant.** Der Stromquadrant oder das hydrometrische Pendel (franz. pendule hydrométrique; engl. hydrometrical-pendulum) ist vorzüglich von Ximenes, Michelotti, Gerstner und Eytelwein zum Messen der Geschwindigkeit fließender Wasser angewendet worden. Dieses Instrument besteht aus einem in Grade und feinere Theile eingetheilten Quadranten AB, Fig. 839, und aus einer im Mittelpunkte C desselben mittels eines Fadens aufgehängten Metall- oder Elfenbeinkugel K von 2 bis 3 Zoll Durchmesser; es giebt die Geschwindigkeit des Wassers durch den Winkel ACE an, um welchen der von der Kugel gespannte Faden von der Verticalen CA abweicht, wenn man die Ebene des Instrumentes in die Richtung des Stromes bringt, und die Kugel unter das Wasser tauchen läßt. Da der Winkel nicht leicht 40 und mehr Grade beträgt, so giebt man diesem Instrumente oft nur die Form eines rechtwinkeligen Dreieckes und bringt die Gradtheilung auf der horizontalen Kathete desselben an. Zum Einstellen der Index- oder Nulllinie in die Verticale wendet man am besten eine oben aufsitzende Röhrenlibelle an, oder man bedient sich dazu der Kugel selbst, indem man dieselbe außerhalb des Wassers hängen läßt und das Instrument so lange dreht, bis der Faden in die Nulllinie der Eintheilung fällt. Bei Geschwindigkeiten unter 4 Fuß kann man sich einer Elfenbeinkugel, bei größeren Geschwindigkeiten muß man sich aber schwerer Metallkugeln bedienen. Wegen der steten Schwankungen der Kugel in der Bewegungsrichtung des Wassers sowohl als auch rechtwinkelig gegen die Stromrichtung ist das Ablesen ziemlich beschwerlich und läßt viel Unsicherheit zurück; es ist daher dieses Instrument nicht zu den vollkommneren zu zählen.

Fig. 839.



Die Abhängigkeit zwischen dem Ablenkungswinkel und der Geschwindigkeit des Wassers läßt sich bei einer nicht sehr tief eingetauchten Kugel auf folgende Weise ermitteln. Aus dem Gewichte G der Kugel und aus dem mit dem Quadrate der Geschwindigkeit v und dem Querschnitte F der Kugel gleichmäßig wachsenden Wasserstoße $P = \mu F v^2$, folgt eine Mittelkraft R, deren Richtung auch der Faden annimmt, und welche bestimmt ist durch den Ablenkungswinkel δ, für den man hat:

$$tang.\,\delta = \frac{P}{G} = \frac{\mu F v^2}{G};$$

es ist daher auch umgekehrt:

$$v^2 = \frac{G\,tang.\,\delta}{\mu F}, \text{ und } v = \sqrt{\frac{G}{\mu F}} \cdot \sqrt{tang.\,\delta},$$

d. i.:

$$v = \psi \sqrt{tang.\,\delta},$$

wenn ψ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, den man vor dem Gebrauche auf dem oben angegebenen Wege (§. 491) zu ermitteln hat.

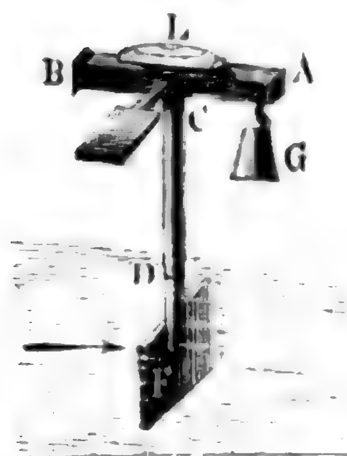
Rheometer. Die übrigen Hydrometer, als: Lorgna's Wasserhebel, Ximenes' Wasserfahne, Michelotti's hydraulische Schnellwage, Brünning's Tachometer, Poletti's Rheometer u. s. w., sind im Gebrauche umständlicher und zum Theil auch unsicher. Das Princip ist bei allen diesen Instrumenten dasselbe; diese Instrumente sind aus einer Stoßfläche und einer Wage zusammengesetzt, und es dient die letztere dazu, den Stoß P des Wassers gegen die erstere anzugeben; da dieser aber $= \mu F v^2$ ist, so hat man umgekehrt: §. 4

$$v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \psi \sqrt{P},$$

wo ψ eine von der Größe der Stoßfläche F abhängige Erfahrungsconstante bezeichnet.

Das Rheometer, welches in der neueren Zeit von Poletti vorgeschlagen wurde, und im Wesentlichen nicht von Michelotti's hydrometrischer Schnellwage abweicht, besteht aus einem um eine feste Axe C drehbaren Hebel AB, Fig. 840, und einem zweiten Arme CD, an welchen die Stoßfläche oder, nach Poletti, ein bloßer Stoßstab angeschraubt wird. Um dem Stoße des Wassers gegen diese Fläche das Gleichgewicht zu halten, werden in die am Hebelende A hängende Blechbüchse Gewichte oder Schrotkörner eingelegt, und um die leere Wage im stillstehenden Wasser ins Gleichgewicht zu setzen, ist bei B ein Gegengewicht angesetzt, welches das äußerste Ende des Armes CB ausmacht. Aus dem aufgelegten Gewichte G folgt die Stoßkraft P mittels der Hebelarme $CA = a$ und $CF = b$, durch die Formel $Pb = Ga$, weshalb nun

Fig. 840.



$$P = \frac{a}{b} G \text{ und } v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \sqrt{\frac{aG}{\mu b F}} = \psi \sqrt{G}$$

ist, wo ψ wieder eine Erfahrungsconstante bezeichnet.

Ein nach demselben Principe construirtes Hydrometer, wo dem Wasserstoß durch die Kraft einer Feder das Gleichgewicht gehalten wird (hydromètre dynamométrique), beschreibt Boileau in seiner Abhandlung über das Wassermessen.

Anmerkung 1. Ueber die letzteren Hydrometer wird ausführlicher gehandelt in Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, ferner in Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. II., in Brünning's Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, in Venturoli's Elementi di

Meccanica e d'Idraulica, Vol. II. Wegen Poletti's Rheometer ist in Dingler's Polytechn. Journal, Bd. XX., 1826, nachzusehen. Stevenson's Hydrometer ist der Woltmann'sche Flügel, s. Dingler's Journal, Bd. LXV., 1842. Die nach Art der Reactionsräder construirten Hydrometer und Gasuhren werden im folgenden Capitel abgehandelt.

Anmerkung 2. Ein besonders auch zum praktischen Gebrauch zu empfehlendes Werk ist die Hydrometrie oder praktische Anleitung zum Wassermessen, von Bornemann, Freiberg 1849. Der Schrift von Boileau ist schon wiederholt gedacht worden (s. §. 412 u. s. w.).

Neuntes Capitel.

Von der Kraft und dem Widerstande der Flüssigkeiten.

495 **Reaction des Wassers.** Der Gesammtdruck des in einem Gefäße stillstehenden Wassers reducirt sich nach §. 362 auf eine dem Gewichte dieser Wassermasse gleiche Verticalkraft; wenn aber das Gefäß AF, Fig. 841, eine Oeffnung F hat, durch welche das Wasser ausfließen kann, so erleidet diese Kraft eine Veränderung, und zwar nicht allein, weil in F ein Theil der Gefäßwand ausfällt, sondern auch deshalb, weil das der Mündung zufließende Wasser wie jeder andere Körper, der seinen Bewegungszustand ändert, vermöge seiner Trägheit reagirt. Die Bewegungsänderung eines Körpers kann sich sowohl auf eine Veränderung der Geschwindigkeit als auch auf eine Veränderung der Bewegungsrichtung erstrecken; und daher kann auch die Reaction (franz. réaction; engl. reaction) des ausfließenden Wassers sowohl aus einer Beschleunigung als auch aus einer stetigen Richtungsänderung des der Mündung zuströmenden Wassers entspringen.

Fig. 841.

Auf folgendem Wege gelangen wir sogleich zur Kenntniß der vollständigen Reaction des Wassers in einem Ausflußgefäße.

Es sei c die Geschwindigkeit des durch die Mündung F fließenden Wassers, c_1 die relative Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche bei A,

G der Inhalt dieser Fläche und h die Druckhöhe AD in der Ausmündung. Dann haben wir:

$$\frac{c^2}{2g} = h + \frac{c_1^2}{2g},$$

und das Ausflußquantum:

$$Q = Fc = Gc_1.$$

Denken wir das Gefäß AF, Fig. 841, mit einer Geschwindigkeit v horizontal fortgehend, so müssen wir für die absolute Geschwindigkeit c_2 des eintretenden Wassers:

$$c_2^2 = c_1^2 + v^2,$$

und bei dem Neigungswinkel $EFc = \alpha$ der Strahlaxe gegen den Horizont, für die absolute Geschwindigkeit w des austretenden Strahles:

$$w^2 = c^2 + v^2 - 2cv \cos.\alpha$$

setzen.

Nun ist das Arbeitsvermögen des Wassers vor dem Ausflusse:

$$L_1 = \left(\frac{c_2^2}{2g} + h\right) Q\gamma = \left(\frac{c_1^2 + v^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das Arbeitsvermögen desselben nach dem Ausflusse:

$$L_2 = \frac{w^2}{2g} Q\gamma = \left(\frac{c^2 + v^2 - 2cv \cos.\alpha}{2g}\right) Q\gamma,$$

daher folgt das dem Wasser entzogene und auf das Gefäß übergetragene Arbeitsquantum:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{c_1^2 - c^2 + 2cv \cos.\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $\frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = h$ ist:

$$L = \frac{cv \cos.\alpha}{g} Q\gamma;$$

und hiernach der horizontale Component der Reaction des Wassers:

$$H = \frac{L}{v} = \frac{c \cos.\alpha}{g} Q\gamma.$$

Da $Q = Fc$ ist, so haben wir auch:

$$H = \frac{c^2}{g} F\gamma \cos.\alpha = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma \cos.\alpha = 2hF\gamma \cos.\alpha$$

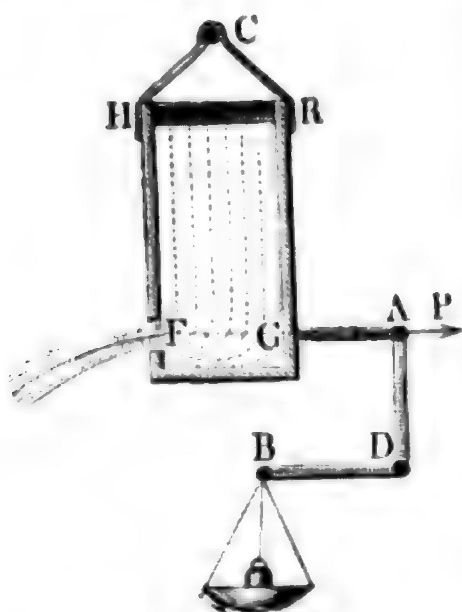
und daher bei einem horizontal gerichteten Strahle, wie Fig. 842:

$$H = 2hF\gamma.$$

Es ist also die Reaction eines horizontalen Strahles gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Querschnitt des Strahles zur Basis und die doppelte Geschwindigkeitshöhe ($2h$) zur Länge hat.

Anmerkung. Ein Engländer, Peter Ewart, hat in der neueren Zeit die Richtigkeit dieses Gesetzes durch Versuche zu bestätigen gesucht (s. Memoirs of the Manchester Philosophical Society, Vol. II., oder den „Ingenieur, Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen", Bd. I.). Hierbei wurde das Gefäß HRF, Fig. 842, an eine horizontale Axe C aufgehangen, und die Reaction durch eine Winkelhebelwage ADB gemessen, auf welche das Gefäß mittels eines horizontalen Stabes AG wirkte, der sich genau der Mündung F gegenüber, an das Gefäß anstemmte. Beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ergab sich:

Fig. 842.



$$P = 1{,}14 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma.$$

Setzt man den Strahlquerschnitt

$$F_1 = 0{,}64 \, . F$$

und die effective Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = 0{,}96 \; v$$

(s. §. 405), so erhält man nach der theoretischen Formel:

$$P = 2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} \cdot F_1 \gamma = 2 \, . \, 0{,}96^2 \, . \, 0{,}64 \, . \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}18 \, \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

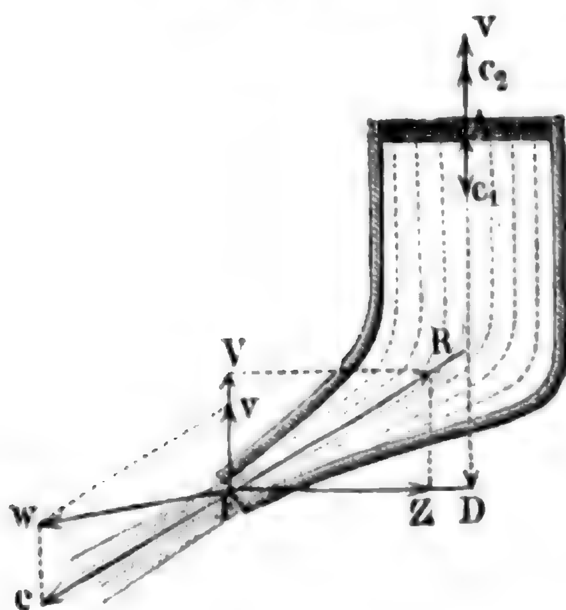
also ziemlich dasselbe, was die Versuche gegeben haben. Bei einer nach dem contrahirten Wasserstrahle geformten Mündung wurde $P = 1{,}73 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, der Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient aber $= 0{,}94$ gefunden. Da hier $F_1 = F$ und $v_1 = 0{,}94\, v$ ist, so hat man theoretisch:

$$P = 2 \, . \, 0{,}94^2 \, \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}77 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

also wieder eine gute Uebereinstimmung.

496 Denkt man sich das Ausflußgefäß AF, Fig. 843, mit einer Geschwindigkeit v **vertical aufwärts bewegt**, so hat man für die absolute Geschwindigkeit des eintretenden Wassers:

Fig. 843.



$$c_2 = v - c_1,$$

und dagegen für die des ausfließenden, bei der im vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnung:

$$w^2 = c^2 + v^2 + 2cv\cos.(90^0 + \alpha)$$
$$= c^2 + v^2 - 2cv\sin.\alpha.$$

Es ist hiernach das ganze Leistungsvermögen der Wassermenge Q pr. Secunde:

$$L_1 = \left(\frac{(v - c_1)^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das des abfließenden Wassers:

$$L_2 = (c^2 + v^2 - 2cv\sin.\alpha)\, Q\gamma,$$

und folglich die mechanische Arbeit, welche das Wasser dem Gefäße mitgetheilt hat:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{2\, r c_1 + c_1^2 - c^2 + 2\, c\, r\, sin.\, \alpha}{2\, g} + h\right) Q \gamma,$$

oder, da $h = \frac{c^2}{2\, g} - \frac{c_1^2}{2\, g}$ ist:

$$L = \frac{(c\, sin.\, \alpha - c_1)\, r}{g}\, Q \gamma,$$

und die entsprechende Verticalkraft:

$$V = \frac{L}{r} = \left(\frac{c\, sin.\, \alpha - c_1}{g}\right) Q \gamma = \left(sin.\, \alpha - \frac{F}{G}\right) \frac{c}{g}\, Q \gamma$$

$$= \left(sin.\, \alpha - \frac{F}{G}\right) \frac{c^2}{g}\, F \gamma = \left(sin.\, \alpha - \frac{F}{G}\right) . 2\, h\, F \gamma.$$

Ist die Ausflußmündung klein gegen die Oberfläche G, so hat man $\frac{F}{G} = 0$, und daher den verticalen Componenten der Reaction:

$$V = 2\, h\, F \gamma\; sin.\, \alpha.$$

Nach dem vorigen Paragraphen hat man aber den horizontalen Componenten dieser Kraft:

$$H = 2\, h\, F \gamma\; cos.\, \alpha,$$

daher ist die vollständige Reaction des Wassers:

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = 2\, h\, F \gamma,$$

und die Richtung derselben der Bewegung des ausfließenden Wassers genau entgegengesetzt.

Ist $F = G$, fließt z. B. das Wasser durch eine überall gleichweite Röhre, so hat man $\frac{F}{G} = 1$ und daher:

$$V = (sin.\, \alpha - 1) . 2\, h\, F \gamma = -\, (1 - sin.\, \alpha) . 2\, h\, F \gamma;$$

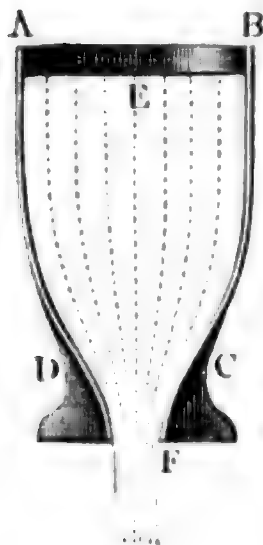
dann wirkt also V nicht nach oben, sondern nach unten, und es ist die vollständige Reaction:

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{cos.\, \alpha^2 + (1 - sin.\, \alpha)^2} . 2\, h\, F \gamma$$

$$= \sqrt{2\, (1 - sin.\, \alpha)} . 2\, h\, F \gamma$$

$$= 4\, h\, F \gamma\; sin. \left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 844.



Für $\alpha = -\, 90^0$, d. i. wenn die Röhre einen Halbkreis bildet, ist $R = 4\, h\, F \gamma$.

Ist $\alpha = +\, 90^0$, so hat man es also im Allgemeinen mit dem Ausflusse, wie Fig. 844, zu thun, und es ist $Z = 0$ und

$$V = \frac{(c - c_1)}{g}\, Q \gamma = \left(1 - \frac{F}{G}\right) . 2\, h\, F \gamma,$$

folglich für $\frac{F}{G} = 0$:

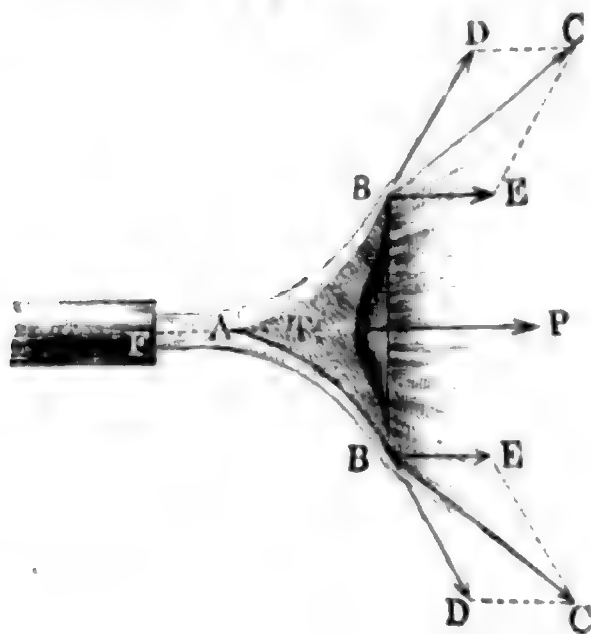
$$V = R = 2 h F \gamma.$$

Um diese Kraft wird das ganze Gewicht des im Ausflußapparate befindlichen Wassers vermindert, wenn das letztere zum Ausfluß gelangt.

497 **Stoss und Widerstand des Wassers.** Das Wasser oder eine andere Flüssigkeit übt gegen einen festen Körper einen Stoß aus, wenn sie mit diesem zusammentrifft, und dadurch in ihrem Bewegungszustande verändert wird. Von dem Stoße ist der Widerstand (franz. résistance; engl. resistence), welchen das Wasser der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, nicht wesentlich verschieden. Die Untersuchung beider Kräfte bildet den drittenHarpttheil der Hydraulik. Man unterscheidet zunächst von einander: 1) den Stoß isolirter Wasserstrahlen (franz. choc d'une veine de fluide; engl. impact of an isolated stream), 2) den Stoß im begrenzten Wasser oder Gerinne (franz. choc d'un fluide défini; engl. impact of a bounded stream), und 3) den Stoß im unbegrenzten Wasser (franz. choc d'un fluide indéfini; engl. impact of an unlimited stream). Ein Stoß der ersten Art findet statt, wenn sich dem aus einem Gefäße ausfließenden Wasserstrahl ein Körper, z. B. die Schaufel eines oberschlägigen Wasserrades, entgegenstellt; ein Stoß der zweiten Art tritt ein, wenn das Wasser in einem Canale oder Gerinne gegen einen, den Querschnitt des letzteren ganz ausfüllenden Körper, z. B. gegen die Schaufel eines unterschlägigen Wasserrades trifft; die dritte Art kommt endlich vor, wenn ein fließendes Wasser gegen einen in dasselbe eingetauchten Körper trifft, dessen Querschnitt nur ein sehr kleiner Theil ist vom Querschnitte des Wasserstromes, wie z. B. wenn es gegen die Schaufeln eines Schiffmühlenrades stößt.

Uebrigens ist zu unterscheiden, der Wasserstoß gegen ruhende und der gegen bewegte Körper, ferner der Stoß gegen krumme Flächen und der gegen ebene Flächen, und bei letzterem wieder, der senkrechte und der schiefe Stoß.

Fig. 845.



Wir betrachten gleich einen allgemeineren Fall, nämlich den Stoß eines isolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche, welche sich in ihrer eigenen, mit der der Bewegungsrichtung des Strahles zusammenfallenden Axe bewegt.

498 **Stoss isolirter Strahlen.** Es sei BAB, Fig. 845, eine Rota-

tionsfläche, AP ihre Axe, und FA ein in der Richtung dieser Axe antreffender Wasserstrahl; setzen wir die Geschwindigkeit des Wassers, $= c$, die der Fläche, $= v$ und den Winkel BTP, welchen die Tangente DT am Ende B der Erzeugungscurve oder jeder die Fläche verlassende Wasserfaden BD mit der Axenrichtung BE einschließt, $= \alpha$, nehmen wir endlich noch an, daß das Wasser beim Hinlaufen an der Fläche durch Reibung an lebendiger Kraft nichts verliere. Das Wasser trifft die Fläche mit der relativen Geschwindigkeit $c - v$ und geht daher auch mit dieser an der Fläche hin, entfernt sich also auch mit derselben in den Tangentialrichtungen TB, TB u. s. w. von der Fläche. Aus der Tangentialgeschwindigkeit $BD = c - v$ und der Axengeschwindigkeit $BE = v$ ergiebt sich aber die absolute Geschwindigkeit $BC = c_1$ des Wassers nach dem Zusammenstoße mit der Fläche durch die bekannte Formel:

$$c_1 = \sqrt{(c - v)^2 + 2\,(c - v)\,v\,\cos.\alpha + v^2}.$$

Nun kann aber ein Wasserquantum Q durch seine lebendige Kraft die mechanische Arbeit $\frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma$ verrichten, wenn es hierbei seine Geschwindigkeit c vollkommen zusetzt; es ist demnach auch das im Wasser zurückbleibende Arbeitsvermögen $= \frac{c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$, folglich die auf die Fläche übergetragene Arbeit:

$$Pv = \frac{c^2}{2g}\,Q\gamma - \frac{c_1^2}{2g}\,Q\gamma = \frac{c^2 - c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$$

$$= \frac{[c^2 - (c - v)^2 - 2\,(c - v)\,v\,\cos.\alpha - v^2]}{2g}\,Q\gamma$$

$$= \frac{2cv - 2v^2 - 2\,(c - v)\,v\,\cos.\alpha}{2g}\,Q\gamma, \text{ d. i.:}$$

$$Pv = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma,$$

und die Kraft oder der Wasserstoß in der Axenrichtung:

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c - v)}{g}\,Q\gamma.$$

Geht die Fläche dem Wasser mit der Geschwindigkeit v entgegen, so hat man:

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c + v)}{g}\,Q\gamma,$$

und ist dieselbe ohne Bewegung, also $v = 0$, so stellt sich der Stoß oder hydraulische Axendruck

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{c}{g} \cdot Q\gamma$$

heraus.

Es folgt hieraus, daß der Stoß einer und derselben Wassermasse unter übrigens gleichen Umständen der relativen Geschwindigkeit $c \mp v$ des Wassers proportional ist.

Aus dem Inhalte F des Querschnittes vom Wasserstrahle folgt das zum Stoße gelangende Wasserquantum $Q = F(c \mp v)$; daher:

$$P = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{(c \mp v)^2}{g}\,F\gamma;$$

und für $v = 0$:

$$P = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{c^2}{g}\,F\gamma.$$

Bei gleichem Querschnitte des Strahles wächst also hiernach der Stoß gegen eine ruhende Fläche wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers.

499 **Stoss gegen ebene Flächen.** Der Stoß eines und desselben Wasserstrahles hängt vorzüglich auch noch von dem Winkel α ab, unter welchem das Wasser nach dem Stoße sich von der Axe entfernt; er ist Null, wenn dieser Winkel = Null ist, und dagegen ein Maximum, nämlich

$$= 2\,\frac{(c \mp v)}{g}\,Q\gamma,$$

wenn dieser Winkel 180°, also dessen Cosinus = — 1 ausfällt, wo das Wasser, wie Fig. 846 repräsentirt, in der entgegengesetzten Richtung die Fläche verläßt, in welcher es dieselbe trifft. Ueberhaupt ist derselbe bei concaven Flächen größer als bei convexen, weil dort der Winkel stumpf, also der Cosinus negativ ausfällt und $1 - cos.\,\alpha$ in $1 + cos.\,\alpha$ übergeht.

Fig. 846.

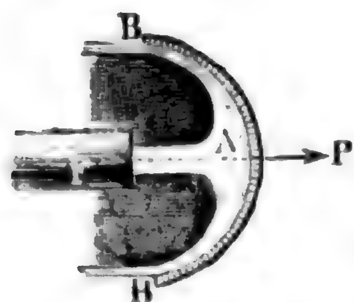
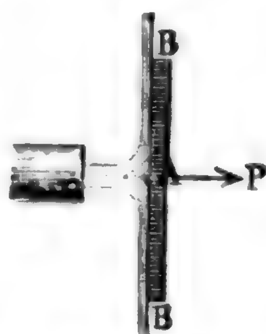


Fig. 847.



Am häufigsten ist die Fläche, wie Fig. 847 vorstellt, eben, und daher $\alpha = 90^0$, also $cos.\,\alpha = 0$ und der Stoß

$$P = \frac{(c \mp v)}{g}\cdot Q\gamma;$$

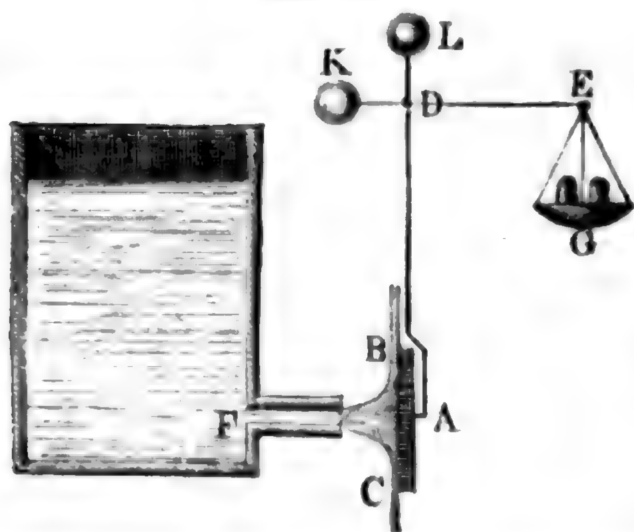
bei einer ruhenden Fläche:

$$P = \frac{c}{g}\,Q\gamma = \frac{c^2}{2\,g}\,F\gamma = 2\cdot\frac{c^2}{2\,g}\,F\gamma = 2\,F h\,\gamma.$$

Der Normalstoß des Wassers gegen eine ebene Fläche ist also gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis den Querschnitt F des Strahles und zur Höhe die zweifache Geschwindigkeitshöhe $\left(2\,h = 2\cdot\frac{c^2}{2\,g}\right)$ hat.

Die hierüber angestellten Versuche von Michelotti, Vince, Langsdorf, Bossut, Morosi und Bidone haben ziemlich zu dem nämlichen Ergebnisse geführt, wenn der Querschnitt der gestoßenen Fläche mindestens 6mal so groß war, als der des Strahles, und wenn diese Fläche wenigstens zweimal so weit von der Ebene der Ausflußmündung abstand, als die Strahldicke maß. Der Apparat, welcher hierbei in Anwendung gekommen ist, bestand in einem Hebel, ähnlich wie Poletti's Rheometer (§. 494), welcher auf der einen Seite den Wasserstoß aufnahm, dem durch Gewichte auf der anderen Seite das Gleichgewicht gehalten wurde. Das Instrument, welches Bidone angewendet hat, ist in Fig. 848 abgebildet. BC ist die vom Strahle FA gestoßene Fläche, G die Wagschale zur Aufnahme von Gewichten, ferner D die Drehungsaxe und K und L sind Gegengewichte.

Fig. 848.



Anmerkung. Die ausführlichsten Versuche über den Wasserstoß sind von Bidone. S. Memoire de la Reale Accademia delle Scienze di Torino. T. XL. 1838. So wurden bei einer Geschwindigkeit von mindestens 27 Fuß und an Messingplatten von 2 bis 9 Zoll Durchmesser angestellt. Im Allgemeinen fand Bidone den Normalstoß gegen eine ebene Fläche etwas größer als $2 Fh\gamma$, doch ist diese Abweichung wohl einer Vergrößerung des Hebelarmes beizumessen, welche durch das zurückfallende Wasser erzeugt wurde. S. Duchemin: Recherches expérimentales sur les lois de la résistance des fluides (ins Deutsche übersetzt von Schnuse). Wenn die gestoßene Fläche der Mündung ganz nahe war, so fiel bei Bidone P nur $1{,}5\, Fh\gamma$ aus. Wenn ferner die Fläche mit dem Strahle gleichen Querschnitt hat, in welchem Falle das Wasser nur um einen spitzen Winkel α abgelenkt wird, so ist nach du Buat und Langsdorf, P nur $= Fh\gamma$. Endlich hat sich auch bei Bidone und Anderen ergeben, daß der Stoß im ersten Augenblicke beinahe noch einmal so groß ist, als der permanente Stoß. Vergleichende Versuche über den Stoß und die Reaction des Wassers mit Hülfe eines Reactionsrades sind von dem Verfasser angestellt worden, siehe dessen „Experimentalhydraulik", sowie den „Civilingenieur" Bd. I. 1854.

Durch neuere Versuche über den Stoß isolirter Luft- und Wasserstrahlen (siehe „Civilingenieur", Bd. VII. Heft 5, und Bd. VIII. Heft 1) hat der Verfasser gefunden, daß der effective Stoß eines isolirten Luft- oder Wasserstrahles gegen eine normale Ebene, 92 bis 96 Procent der theoretischen Kraft $P = \frac{c\,Q\gamma}{g}$ ist, daß dagegen der Stoß eines solchen Strahles gegen eine hohle Rotationsfläche, welche die Richtung des aufschlagenden Strahles um $\delta = 134$ Grad abändert, nur 83 bis 88 Procent der theoretischen Kraft $P = c\,(1 - \cos.\,\delta)\,\frac{Q\gamma}{g}$ ausfällt.

500 **Maximalarbeit des Stosses.** Die mechanische Arbeit

$$Pv = (1 - sin.\alpha)\frac{(c - v)v}{g}Q\gamma$$

des Stoßes hängt vorzüglich auch von der Geschwindigkeit v der gestoßenen Fläche ab; sie ist z. B. Null, nicht nur für $v = c$, sondern auch für $v = 0$; es muß daher auch eine Geschwindigkeit geben, bei welcher die Arbeit des Stoßes ein Maximum ist. Offenbar kommt es hierbei nur darauf an, daß $(c - v)v$ zu einem solchen wird. Sehen wir c als den halben Umfang eines Rechteckes und v als die Grundlinie desselben an, so haben wir für dessen Höhe $= c - v$ und für dessen Inhalt $= (c - v)v$; nun hat aber unter allen Rechtecken das Quadrat bei gegebenem Umfange $2c$ den größten Inhalt, es ist daher auch $(c - v)v$ ein Maximum, wenn $c - v = v$, d. i. $v = \frac{c}{2}$ gemacht wird, und wir erhalten so den Maximalwerth der Arbeit des Wasserstoßes, wenn die Fläche mit der halben Geschwindigkeit des Wassers ausweicht, und zwar:

$$Pv = (1 - cos.\,\alpha).\,{}^1\!/_2\cdot\frac{c^2}{2g}\cdot Q\gamma = (1 - cos.\,\alpha).\,{}^1\!/_2\;Qh\gamma.$$

Ist nun $\alpha = 180^0$, wird also die Bewegung des Wassers durch den Anstoß die entgegengesetzte, so hat man allerdings die Arbeit

$$= 2\;.\;{}^1\!/_2\;Qh\gamma = Qh\gamma;$$

ist aber $\alpha = 90^0$, wie beim Stoße gegen eine ebene Fläche, so stellt sich diese Arbeit nur ${}^1\!/_2\;Qh\gamma$ heraus, es wird also im letzteren Falle von der ganzen disponiblen oder der lebendigen Kraft des Wassers entsprechenden Arbeit nur die Hälfte gewonnen oder auf die Fläche übergetragen.

Beispiele. 1) Wenn ein Wasserstrahl von 40 Quadratzoll Querschnitt eine Wassermenge von 5 Cubikfuß pr. Secunde liefert, und gegen eine ebene Fläche normal stößt, welche mit 12 Fuß Geschwindigkeit ausweicht, so ist die Stoßkraft:

$$P = \frac{(c - v)}{g}Q\gamma = \left(\frac{5.144}{40} - 12\right).\,0{,}032\;.\;5\;.\;66 = 6\;.\;0{,}032\;.\;330$$
$$= 63{,}36 \text{ Pfund},$$

und die auf die Fläche übergetragene mechanische Arbeit:

$$Pv = 63{,}36\;.\;12 = 760{,}32 \text{ Fußpfund}.$$

Die größte Leistung ist für

$$v = \frac{c}{2} = {}^1\!/_2\cdot\frac{5\;.\;144}{40} = 9 \text{ Fuß}$$

zu erwarten und zwar:

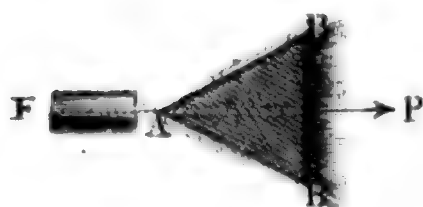
$$L = {}^1\!/_2\cdot\frac{c^2}{2g}\cdot Q\gamma = {}^1\!/_2\,.\,18^2\,.\,0{,}016\,.\,5\,.\,66 = 81\,.\,0{,}16\,.\,66 = 855{,}36 \text{ Fußpfd.}$$

der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck beträgt:

$$P = \frac{855{,}36}{9} = 95{,}04 \text{ Pfund}.$$

2) Wenn ein Strahl FA, Fig. 849, von 64 Quadratzoll Querschnitt und 40 Fuß Geschwindigkeit gegen einen unbeweglichen Kegel von dem Convergenzwinkel $BAB = 100^0$ stößt, so ist der hydraulische Druck in der Richtung des Strahles:

Fig. 849.



$$P = (1 - cos.\, \alpha) \frac{c}{g}\, Q\gamma$$

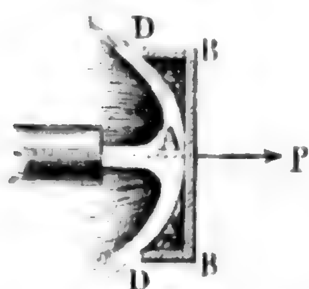
$$= (1 - cos.\, 50^0)\,.\,40\,.\,0{,}032 \cdot \frac{64}{144} \cdot 40\,.\,61{,}74$$

$$= (1 - 0{,}64279)\,.\,1{,}28 \cdot \frac{3292{,}8}{3}$$

$$= 0{,}35721\,.\,1405 = 501{,}9 \text{ Pfund.}$$

Stoss des begrenzten und unbegrenzten Wassers. Besetzt man den Umfang einer ebenen Fläche BB, Fig. 850, mit Leisten BD, BD (franz. rebords; engl. borders), welche über der vom Wasser getroffenen Seite hervorragen, so wird das Wasser, ähnlich wie bei concaven Flächen, um einen stumpfen Winkel von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, und es fällt daher der Stoß größer aus, als bei der einfachen ebenen Fläche. Die Wirkung dieses Stoßes hängt vorzüglich von der Höhe der Einfassung und von dem Querschnittsverhältnisse zwischen dem Strahle und dem eingefaßten Theile ab. Bei einem Versuche, wo der Strahl 1 Zoll Dicke, die cylindrische Einfassung aber 3 Zoll Weite und $3^1/_2$ Linien Höhe hatte, floß daß Wasser beinahe in umgekehrter Richtung, und es betrug der Stoß: §. 501

Fig. 850.

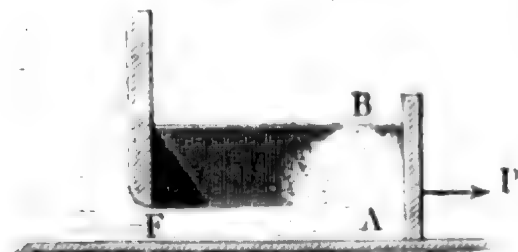


$$3{,}93\, \frac{c^2}{2g}\, F\gamma;$$

in jedem anderen Falle war diese Kraft eine kleinere. Wegen der Reibung des Wassers an der Fläche und Einfassung ist der theoretische Maximalwerth $4\, \frac{c^2}{2g}\, F\gamma$ nie ganz zu erreichen.

Auch bei dem Stoße des begrenzten Wassers FAB, Fig. 851, findet zwar auch eine Einfassung statt, es nimmt aber diese Einfassung nur einen Theil des Umfanges ein, und erstreckt sich dagegen auf die gestoßene Fläche und den Wasserstrahl zugleich. Das stoßende Wasser nimmt die Richtung nach dem uneingefaßten Theil des Umfanges hinein, wird also auch hier um den Rechtwinkel abgelenkt, weshalb hier auch die oben gefundene Formel für den isolirten Strahl

Fig. 851.



$$P = \frac{(c - v)}{g}\, Q\gamma = \left(\frac{c - v}{g}\right) c F\gamma.$$

ihre Giltigkeit hat. Weicht die Fläche BB, Fig. 847, gegen welche der Wasserstrahl normal anstößt, mit der Geschwindigkeit v in einer Richtung aus, welche um den Winkel δ von der ursprünglichen Richtung des Strahles abweicht, so ist die Geschwindigkeit der Fläche in der Richtung des Stoßes,

$$v_1 = v \cos. \delta,$$

daher die Stoßkraft

$$P = \frac{(c - v \cos. \delta)}{g} Q \gamma,$$

und die Leistung derselben pro Secunde:

$$L = P v_1 = \frac{(c - v \cos. \delta)\ v \cos. \delta}{g} Q \gamma.$$

Diese Formel findet vorzüglich ihre Anwendung beim Stoße eines unbegrenzten Stromes statt, wo

$$Q = F (c - v \cos. \delta)$$

zu setzen ist, so daß

$$P = \frac{(c - v \cos. \delta)^2}{g} F \gamma \text{ ausfällt.}$$

502 **Schiefer Stoss.** Bei dem schiefen Stoße gegen ebene Flächen müssen wir unterscheiden, ob das Wasser nur nach einer oder nach zwei oder nach allen Richtungen in der Ebene abfließt. Ist wie beim Stoße des begrenzten Wassers die Fläche AB, Fig. 852, von drei Seiten eingefaßt, so daß es nur nach einer Richtung abströmen kann, so hat man den hydraulischen Druck des Wassers gegen die Fläche in der Richtung des Strahles:

$$P = (1 - \cos. \alpha) \frac{(c - v)}{g} Q \gamma.$$

Fig. 852.

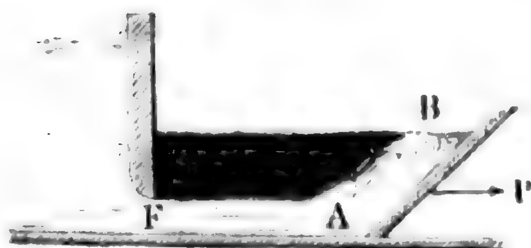
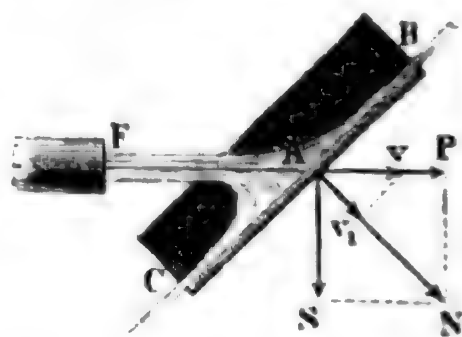


Fig. 853.



Ist aber die gestoßene Ebene BC, Fig. 853, nur auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingefaßt, so theilt sich der Strahl in zwei ungleiche Theile, der größere Theil Q_1 nimmt die kleinere Ablenkung α und der kleinere Theil Q_2 die größere Ablenkung $= 180 - \alpha$ an, es ist daher der Gesammtstoß in der Richtung des Strahles:

$$P = (1 - \cos. \alpha) \cdot \frac{c - v}{g} Q_1 \gamma + (1 + \cos. \alpha) \cdot \frac{c - v}{g} Q_2 \gamma$$

$$= \left(\frac{c - v}{g}\right) [(1 - cos.\,\alpha)\ Q_1 + (1 + cos.\,\alpha)\ Q_2]\ \gamma.$$

Nun fordert aber das Gleichgewicht der beiden Strahltheile, daß die Drücke

$$\frac{(c - v)}{g} (1 - cos.\,\alpha)\ Q_1\ \gamma \text{ und } \frac{(c - v)}{g} (1 + cos.\,\alpha)\ Q_2\ \gamma$$

zwischen denselben einander gleich seien, es ist daher auch:

$$(1 - cos.\,\alpha)\ Q_1 = (1 + cos.\,\alpha)\ Q_2,$$

oder da $Q_1 + Q_2 = Q$,

$$(1 - cos.\,\alpha)\ Q_1 = (1 + cos.\,\alpha)\ (Q - Q_1), \text{ d. i.:}$$

$$Q_1 = \left(\frac{1 + cos.\,\alpha}{2}\right) Q \text{ und } Q_2 = \left(\frac{1 - cos.\,\alpha}{2}\right) Q$$

zu setzen, so daß endlich der gesammte Stoß in der Richtung des Strahles:

$$P = \frac{(c - v)}{g} .\,2\ (1 - cos.\,\alpha)\ \frac{(1 + cos.\,\alpha)\ Q}{2} \gamma$$

$$= \frac{(c - v)}{g} (1 - cos.\,\alpha^2)\ Q\,\gamma, \text{ d. i.:}$$

$$P = \frac{c - v}{g} sin.\,\alpha^2 .\,Q\,\gamma \text{ ausfällt.}$$

Dividirt man die Stoßleistung

$$L = P v = \frac{(v - v)}{g} v\,sin.\,\alpha^2 .\,Q\,\gamma$$

durch die Geschwindigkeit $\overline{A v_1} = v_1 = v\,sin.\,\alpha$, mit welcher die Fläche in normaler Richtung ausreicht, so erhält man den **Normalstoß**:

$$N = \frac{(c - v)\ v\,sin.\,\alpha^2}{g\,v\,sin.\,\alpha} \cdot Q\,\gamma = \frac{(c - v)}{g} sin.\,\alpha\ .\ Q\,\gamma,$$

und dieser besteht außer dem bekannten **Parallelstoße**

$$P = N\,sin.\,\alpha = \frac{(c - v)}{g} sin.\,\alpha^2 .\,Q\,\gamma$$

noch aus einem **Seitenstoße**

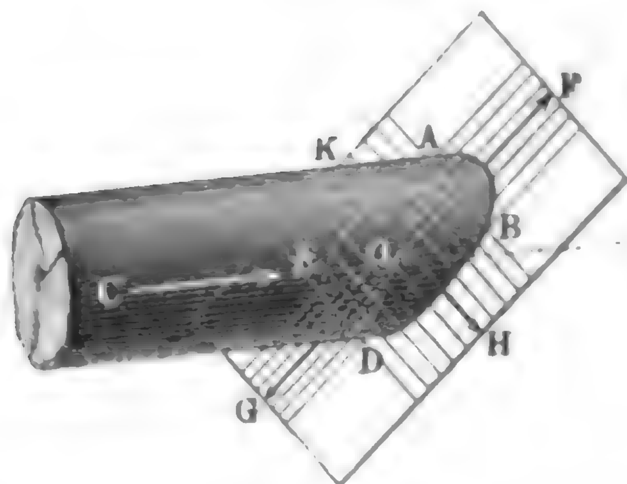
$$S = N\,cos.\,\alpha = \frac{(c - v)}{g} sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha\ .\ Q\gamma = \frac{(c - v)}{2\,g} .\,sin.\,2\,\alpha\ .\ Q\,\gamma.$$

Es wächst also der **Normalstoß** wie der **Sinus**, der **Parallelstoß wie das Quadrat des Sinus des Einfallswinkels und der Seitenstoß wie der Sinus vom Doppelten dieses Winkels.**

Hat endlich die schiefgestoßene Fläche gar **keine Einfassung**, so daß sich das Wasser nach allen Richtungen auf ihr ausbreiten kann, so fällt der Stoß noch größer aus, weil unter allen Winkeln, um welche die Wasserfäden abgelenkt werden, gerade α der kleinste ist, und daher jeder Faden, welcher sich nicht in der Normalebene bewegt, einen größeren Druck ausübt, als der Faden in der Normalebene. Nehmen wir an, daß ein den Sectoren $A\,O\,B$

und $D\,O\,E$, Fig. 854, entsprechender Theil Q_1 um die Winkel $C\,O\,F = \alpha$ und $C\,O\,G = 180 - \alpha$, und ein anderer, den Sectoren $A\,O\,E$ und $B\,O\,D$ entsprechender Theil Q_2 um $C\,O\,K = C\,O\,H = 90^0$ abgelenkt werde, und daß beide Theile einen gleichen Parallelstoß ausüben, so können wir setzen:

Fig. 854.



$$P = \frac{c - r}{g}\, Q_1\, \gamma\, sin.\, \alpha^2 + \frac{c - r}{g}\, Q_2\, \gamma,$$

ferner $Q_1\, sin.\, \alpha^2 = Q_2$ und $Q_1 + Q_2 = Q$; es folgt daher:

$$Q_1\,(1 + sin.\, \alpha^2) = Q,$$

und der gesammte Parallelstoß:

$$P = \left(\frac{c - r}{g}\right) \frac{2\, Q\, \gamma\, sin.\, \alpha^2}{1 + sin.\, \alpha^2} = \frac{2\, sin.\, \alpha^2}{1 + sin.\, \alpha^2} \cdot \frac{c - r}{g} \cdot Q\, \gamma.$$

Wiewohl diese Voraussetzung nur eine annähernd richtige ist, so stimmt diese Formel doch ziemlich mit den neuesten Versuchen von Bidone überein.

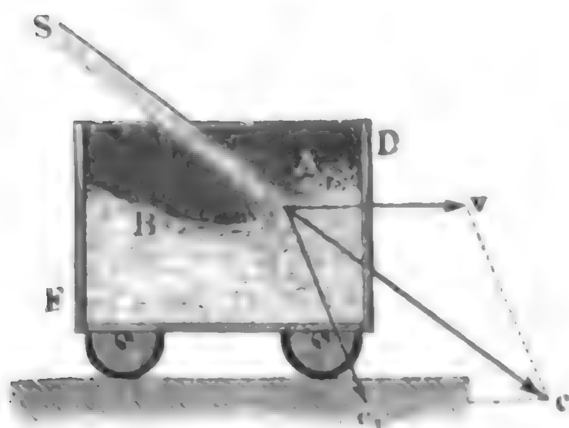
Anmerkung. Herr Prof. Broch findet in seiner Mechanik, Seite 614, für den schiefen Wasserstoß gegen eine Kreisfläche

$$P = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) tang.\, \alpha \left(\frac{c - v}{g}\right) Q\gamma, \text{ und}$$

$$N = tang.\, \alpha\; Ln.\, cotg.\, \frac{\alpha}{2} \left(\frac{c - r}{g}\right) Q\gamma.$$

§. 503 **Stoss des Wassers ins Wasser.** Wenn das Wasserquantum Q mit einer gewissen Geschwindigkeit $\overline{Ac} = c$ in ein mit der Geschwindigkeit $\overline{Ar} = r$ fortbewegtes Gefäß DE, Fig. 855, strömt, so wird von dem Arbeitsvermögen $L_0 = \frac{Q c^2}{2g}\gamma$ desselben ein Theil $L_1 = \frac{Q c_1^2}{2g}\gamma$ auf die Bildung und Erhaltung des Wasserwirbels AB verwendet, welcher aus dem Verluste der Geschwindigkeit c_1 hervorgeht. Bezeichnet α den Winkel $r A c$, um welchen die Richtung des Wasserstrahles von der Bewegungsrichtung des Gefäßes abweicht, so ist

Fig. 855.



$$c_1^2 = c^2 + r^2 - 2\, c\, v\, cos.\, \alpha,$$

und daher die durch den Wasserwirbel verloren gehende mechanische Arbeit

$$L_1 = \frac{Q\,(c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,\cos.\alpha)}{2\,g}.$$

Nun behält aber das Wasserquantum Q noch das Arbeitsvermögen $L_2 = \frac{Q v^2}{2\,g}\gamma$ in sich, da es die Geschwindigkeit v des Gefäßes behält, daher folgt die **mechanische Arbeit**, welche auf das Gefäß übergeht, und auf die Fortbewegung desselben verwendet wird:

$$L = L_0 - L_1 - L_2$$
$$= \left(\frac{c^2 - (c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,\cos.\alpha) - v^2}{2\,g}\right) Q\gamma = \frac{2\,c\,v\,\cos.\alpha - 2\,v^2}{2\,g} Q\,\gamma$$
$$= \frac{(c\cos.\alpha - v)\,v}{g}\,Q\,\gamma,$$

und die **Kraft**, mit welcher das Gefäß in seiner Bewegungsrichtung durch das einströmende Wasser fortgetrieben wird:

$$P = \frac{L}{v} = \left(\frac{c\,\cos.\alpha - v}{g}\right) Q\,\gamma.$$

Noch ist das stoßende Wasserquantum pr. Secunde, $Q = F\,c$, wenn F den Querschnitt des Strahles bei seinem Eintritt bezeichnet, daher hat man auch

$$P = \frac{(c\,\cos.\alpha - v)\,c}{g} F\,\gamma,$$

und für den Fall, daß das Gefäß still steht, also $v = 0$ ist,

$$P = \frac{c^2\cos.\alpha}{g} F\gamma = 2\,\frac{c^2}{2\,g} F\gamma\,\cos.\alpha = 2\,F\,h\,\gamma\,\cos.\alpha,$$

wobei h die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2\,g}$ bezeichnet.

Die mechanische Arbeit ist ein Maximum für $v = \frac{1}{2}\,c\,\cos.\alpha$, und zwar

$$L_m = \frac{1}{2}\,\frac{c^2\,(\cos.\alpha)^2}{2\,g} Q\,\gamma = \frac{1}{2}\,Q\,h\,\gamma\,(\cos.\alpha)^2.$$

Führt man den Strahl in der Bewegungsrichtung des Gefäßes ein, macht man also $\alpha = 0$, so erhält man:

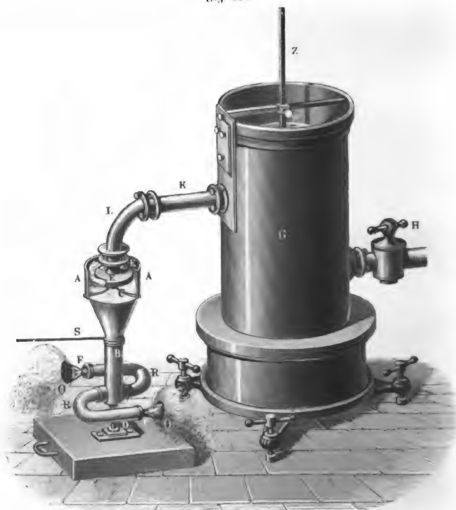
$$L = \frac{(c - v)\,v}{g} Q\,\gamma \text{ und}$$
$$L_m = \frac{1}{2}\,Q\,h\,\gamma.$$

Es wird daher in diesem Falle nur die Hälfte des ganzen mechanischen Arbeitsvermögens $Q\,h\,\gamma$ des Wassers gewonnen (vergl. §. 500).

Reactionsrad zu Versuchen. Zur Prüfung der vorstehenden Theorie des Stoßes und der Reaction des Wassers bedient man sich am besten eines kleinen **Reactionsrades** $A A B$, Fig. 856 (a. f. S.), mit verticaler Um- §. 504

drehungsaxe CD (s. des Verfassers Experimental-Hydraulik §. 48 u. s. w.). Das Wasser, welches zum Umtriebe dieses Rades dient, wird oben durch zwei Seitencanäle E, E nahe tangential in den Behälter $A\,A$ des Rades eingeführt, und

Fig. 856.



strömt unten, durch zwei Seitenmündungen F, F in den Enden der Schwungröhren R, R aus. Zur Erzielung eines constanten Wasserzuflusses und einer constanten Umtriebskraft dient der Hahn H in der Röhre, welche das Betriebswasser zunächst dem Behälter G zuführt, aus dem es wieder durch eine Röhre $K\,L$ in die Kammer $E\,E$ mit den Eintrittscanälen E, E geleitet wird. Während des Ganges der Maschine ist der Hahn H so zu stellen, daß die Oberfläche W des Wassers im Reservoir G immer von der Spitze des Zeigers Z berührt wird.

Um die Reaction des ausfließenden Wassers zu finden, befestigt man noch an der Mittelröhre B des Rades eine dünne Schnur S, welche das vom Rade zu hebende Gewicht trägt und mittels einer Leitrolle nach dem Rade geführt wird. Das Aufschlagwasserquantum wird in dem Reservoir, aus welchem das Wasser in die Röhre mit dem Hahne fließt, dadurch gemessen, daß man den Inhalt A und die Tiefe a der Senkung des Wasserspiegels während der Versuchszeit ausmittelt. Ist dann die Ausfluß- oder Beobachtungszeit $= t$, so hat man das Aufschlagwasserquantum pr. Secunde,

$$Q = \frac{A a}{t},$$

und ist das Gefälle, d. i. die senkrechte Tiefe der Ausmündungen des Rades unter dem Wasserspiegel im Reservoir G, $= h$, so läßt sich das ganze Arbeitsvermögen des Aufschlagwassers pr. Secunde

$$L = Q h \gamma = \frac{A a h \gamma}{t} \text{ setzen.}$$

Wird nun in der Zeit t von der Maschine das Gewicht G auf die senkrechte Höhe s gehoben, so ist dagegen die wirklich verrichtete mechanische Arbeit des Reactionsrades:

$$L_1 = \frac{G s}{t},$$

und es lassen sich nun beide Arbeitswerthe, von welchen der letztere stets der kleinere ist, mit einander vergleichen.

Theorie des Reactionsrades. Das ganze Gefälle h eines solchen Wasserrades besteht aus der Höhe h_1 vom Wasserspiegel bis an die Eintrittsstelle E gemessen, und aus der Höhe h_2, von dem letzteren Punkte aus bis zu den Ausflußöffnungen des Rades gerechnet. Aus h_1 bestimmt sich die Eintrittsgeschwindigkeit c_1 des Wassers durch die Formel $c_1 = \sqrt{2 g h_1}$, und aus h_2 läßt sich die relative Ausflußgeschwindigkeit des Wassers beim Austritt aus dem Rade nach §. 304 mittels der Formel §.

$$c = \sqrt{2 g h_2 + v^2 - v_1^2}$$

berechnen, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeiten v_1 und v des Rades an der Ein- und an der Austrittsstelle bekannt sind. Da die als Umdrehungskraft dienende Reaction des Wassers der Ausflußgeschwindigkeit entgegengesetzt wirkt, so ist die absolute Geschwindigkeit des Wassers, beim Austritt aus dem Rade:

$$w = c - v,$$

und deren Quadrat:

$$w^2 = c^2 - 2 c v + v^2 = 2 g h_2 - 2 c v + 2 v^2 - v_1^2,$$

und folglich das mechanische Arbeitsvermögen des fortfließenden Wassers:

$$L_2 = Q\gamma \cdot \frac{w^2}{2g} = Q\gamma\left(h_2 - \frac{(c-v)v}{g} - \frac{v_1^2}{2g}\right).$$

Das mit der relativen Geschwindigkeit $w_1 = c_1 - v_1$ in das Rad einströmende Wasser verliert außerdem durch den Stoß (nach §. 436) das Arbeitsvermögen

$$L_1 = Q\gamma\frac{(c_1 - v_1)^2}{2g} = Q\gamma\left(h_1 - \frac{c_1 v_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g}\right),$$

folglich geht von dem ganzen Arbeitsvermögen des Wassers auf das Rad

$$Qh\gamma = Q(h_1 + h_2)\gamma,$$

nur die mechanische Arbeit:

$$L = Q\gamma(h - h_1 - h_2) = Q\gamma\left(\frac{(c-v)v}{g} + \frac{c_1 v_1}{g}\right) \text{ über.}$$

Um eine möglichst große Arbeit des Rades zu erlangen, muß w = Null, also $v = c$, und ebenso w_1 = Null, also $v_1 = c_1$ sein, wonach dann

$$\frac{c_1^2}{2g} = h_2, \text{ oder } c_1 = \sqrt{2gh_2}, \text{ sowie}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = h_1, \text{ oder } v_1 = \sqrt{2gh_1} \text{ folgt.}$$

Es ist also in diesem Falle $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$, und die entsprechende Maximalleistung der Maschine:

$$L_m = Q\gamma \cdot \frac{c_1 v_1}{g} = Q\gamma \cdot \frac{v_1^2}{g} = 2Qh_1\gamma = Qh\gamma,$$

d. i. gleich dem ganzen Arbeitsvermögen des Wassers.

Bezeichnet r_1 den Abstand des Eintrittspunktes und r den mittleren Abstand der Ausflußöffnungen des Rades von der Axe desselben, so hat man

$$\frac{v_1}{v} = \frac{r_1}{r}, \text{ daher } v_1 = \frac{r_1}{r}v$$

und die Radleistung überhaupt

$$L = Q\gamma\left(c - v + \frac{r_1}{r}c_1\right)\frac{v}{g};$$

so daß nun die Umdrehungskraft, im Abstande r gemessen:

$$P = \frac{L}{v} = \frac{Q\gamma}{g}\left(c - v + \frac{r_1}{r}c_1\right) \text{ folgt.}$$

Wenn die Last oder das angehangene Gewicht G am Hebelarme a wirkt, welcher z. B. im abgebildeten Apparate, sehr nahe dem Halbmesser der Mittelröhre B gleich ist, so hat man $Ga = Pr$, und daher das anzuhängende und während der Umdrehung des Rades emporzuhebende Gewicht:

$$G = \frac{r}{a}P = \frac{Q\gamma}{ga}[(c-v)r + c_1 r_1],$$

also für $c = v$ und $c_1 = v_1$,

$$G = \frac{Q\gamma}{ga} c_1 r_1 = \frac{Q\gamma}{ga} v_1 r_1.$$

Bezeichnet F den Inhalt der Ausflußmündungen, sowie F_1 den der Eintrittsöffnungen des Rades zusammengenommen, so ist

$$Q = Fc = F_1 c_1, \text{ und daher}$$

$$F_1 = \frac{Q}{c_1} = \frac{Q}{\sqrt{2gh_1}}, \text{ sowie}$$

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{Q}{\sqrt{2gh_2 + v^2 - v_1^2}} = F_1 \sqrt{\frac{2gh_1}{2gh_2 + v^2 - v_1^2}}.$$

Für $v = c$, und $v_1 = c_1$, wo $h_1 = h_2 = \frac{1}{2} h$ ist, hat man $Q = Fv$, daher:

$$P = \frac{Qh\gamma}{v} = Fh\gamma,$$

dagegen für $v = 0$, ist $Q = F\sqrt{2gh_2}$, daher

$$P = \frac{Fc\gamma}{g}\left(c + \frac{r_1}{r} c_1\right).$$

Führt man noch das Wasser sehr langsam ins Rad ein, so läßt sich $c_1 = 0$, sowie $h_1 = 0$ setzen, und es folgt im letzteren Falle die Reactionskraft:

$$P = \frac{Fc\gamma}{g} = \frac{2Fc^2\gamma}{2g} = 2Fh_2\gamma = 2Fh\gamma,$$

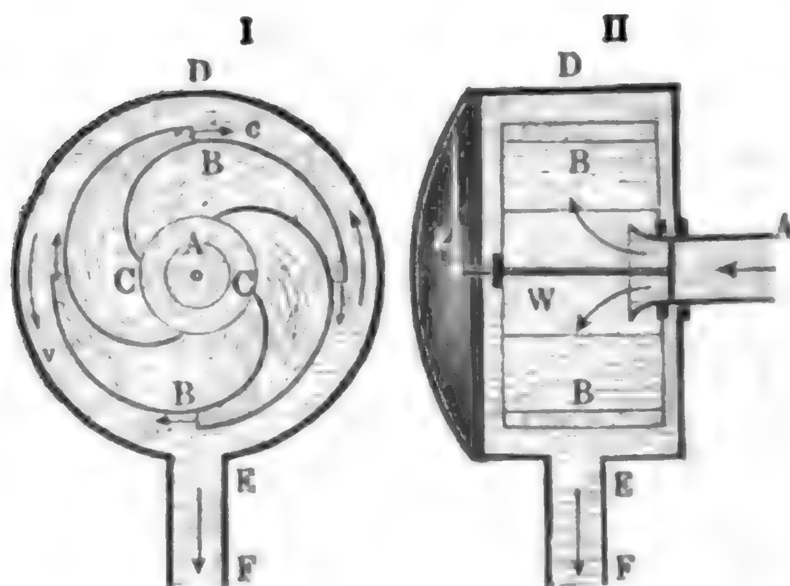
wie schon oben gefunden worden ist.

Da wir bei den vorstehenden Entwickelungen von den Nebenhindernissen abgesehen haben, so geben die Versuche an der abgebildeten Maschine nicht genau die gefundenen, sondern um einige Procent kleinere Kraftwerthe. Uebrigens stehen die Ergebnisse der Versuche an einem solchen Rade bei sorgfältiger Ausführung im besten Einklang mit der im Vorstehenden entwickelten Theorie.

Um diese Maschine zur Prüfung der Theorie des Wasserstoßes zu verwenden, befestigt man Stoßplatten, O, O, kleine Gefäße u. s. w. so an den Schwungröhren des Rades, daß dieselben den Stoß des ausfließenden Wassers aufnehmen können. Es ist dann die Umdrehungskraft gleich der Differenz zwischen der Reaction des Wassers im Rade und der Stoßkraft desselben außerhalb des Rades. Ganz der Theorie entsprechend bleibt dann das Rad stehen, wenn das ausströmende Wasser winkelrecht gegen ebene Stoßplatten oder in mit Wasser angefüllte Gefäße strömt; es behält dagegen noch eine Umdrehungsbewegung in der Richtung der Reaction, wenn es schief gegen ebene Stoßplatten oder gerade gegen convexe Stoßplatten stößt, und es dreht sich dagegen in der Richtung des ausfließenden Wassers um, wenn dasselbe von concaven Stoßplatten aufgefangen wird.

§. 506 **Wassermesser.** In neuerer Zeit bedient man sich auch zum Messen des fließenden Wassers der Wassermesser (franz. compteurs hydrauliques; engl. water-meters), welche durch die Reactionskraft des ausfließenden Wassers in Bewegung gesetzt werden, und im Wesentlichen die Einrichtung eines Reactionsrades oder einer Turbine haben. Eine ideelle Darstellung eines solchen Wassermessers führt Fig. 857 im Durchschnitt vor Augen. Das zu messende Wasser fließt durch eine Röhre A in das Innere des Rades BB, und gelangt durch 4 Canäle CB, CB ... am äußern Umfang desselben zum Ausfluß in das Gehäuse DE, aus welchem es mittels einer Röhre EF weiter geführt wird. Die Welle W dieses Rades trägt einen Zeiger Z, oder vielmehr einen ganzen Zeigermechanismus, welcher die Umdrehungszahl des Rades und dadurch auch das derselben proportionale Quantum des durchgeflossenen Wassers zu jeder Zeit angiebt. Bezeichnet h den durch die Höhe einer Wassersäule gemessenen Druckverlust beim Durchgang durch das Rad, ferner Q das durchfließende Wasserquantum pr. Secunde, c die Ausfluß- und v die in umgekehrter Richtung erfolgende Radgeschwindigkeit am Umfange, so hat man $c^2 - v^2 = 2gh$ und die Leistung des Rades:

Fig. 857.



$$L = \frac{(c - v)\, v}{g} Q\gamma \text{ (s. §. 505).}$$

Ist R der Widerstand des Rades, in Folge seiner Axenreibung u. s. w., so kann man $L = Rv$ setzen, und erhält die Formel

$$R = \left(\frac{c - v}{g}\right) Q\gamma,$$

oder, wenn noch F die Summe der Inhalte sämmtlicher Ausmündungen bezeichnet, so daß $Q = Fc$, oder $c = \frac{Q}{F}$ gesetzt werden kann,

$$R = \left(\frac{Q}{F} - v\right) \frac{Q\gamma}{g}; \text{ so daß}$$

$$v = \frac{Q}{F} - \frac{gR}{Q\gamma} \text{ folgt.}$$

Wäre R Null, oder wenigstens sehr klein, so ließe sich $v = \frac{Q}{F}$ setzen,

also annehmen, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit v der Wassermenge Q proportional wäre, was allerdings auch zu fordern ist. Wenn dagegen $R = \psi v$ wäre, also der Widerstand des Rades mit v gleichmäßig wüchse, so würde

$$v + \frac{\psi g v}{Q \gamma} = \frac{Q}{F}, \text{ also}$$

$$v = \frac{Q}{F\left(1 + \frac{\psi g}{Q \gamma}\right)}, \text{ annähernd} = \frac{Q}{F}\left(1 - \frac{\psi g}{Q \gamma}\right) \text{ zu setzen sein.}$$

Wenn also der Widerstand R des Rades nicht sehr klein ist, so nimmt das Instrument eine kleinere Umdrehungsgeschwindigkeit an als wenn derselbe Null oder wenigstens unbeträchtlich ist, und es giebt auch dann das Instrument ein zu kleines Wasserquantum an.

Setzt man $v = 0$, so erhält man bei der Ausflußmenge Q_0 die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit

$$c_0 = \frac{g R}{Q_0 \gamma},$$

und es läßt sich dann wenigstens annähernd

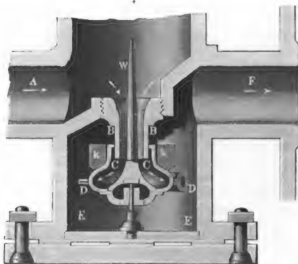
$$v = c - c_0, \text{ sowie}$$

$$Q = F(v + c_0) = \frac{\pi F r u}{30} + Q_0 = \mu u + Q_0$$

setzen, wenn r den Radhalbmesser, u die Umdrehungszahl des Rades und μ einen durch Versuche zu bestimmenden Coefficienten bezeichnen.

Am meisten haben in der neuesten Zeit die Wassermesser dieser Art von Siemens Anwendung gefunden, wovon Fig. 858 den Haupttheil im Durch-

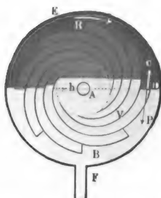
Fig. 858.



schnitt darstellt. Das aus A zufließende Wasser tritt durch die Röhre BB in das Rad CC, und wird von da durch die Schwungröhren DD in das Gehäuse EE geführt, aus dem es die Röhre F weiter leitet. Die Welle W des Rades ist oben durch eine Stopfbüchse geführt, und setzt mit ihrem schraubenförmigen Ende den Zählapparat in Bewegung. Die Flügel k, k auf dem Rade sollen durch den Widerstand, welchen sie im Wasser erleiden, zum Reguliren der Umdrehungsbewegung des Rades beitragen.

Man kann auch das Reactionsrad so einrichten, daß es bei jeder Umdrehung eine bestimmte Wassermenge durchführt. In dieser Absicht taucht man das Rad BAB, Fig. 859, nur zum Theil ins Wasser, so daß sich bei Umdrehung desselben, die Röhren oder Spiralgänge abwechselnd mit Luft und Wasser füllen. Das Wasser wird auch hier durch eine Röhre ins Innere des Rades und von da durch die Spiralgänge in den übrigen Raum des Gehäuses EF geführt, aus dem es in der Röhre F abläuft. Das Wasser steht hier im Innern des Rades um eine gewisse Höhe h über dem Wasser im Gefäße, und wenn daher bei der Umdrehung des Rades in der angedeuteten Richtung eine Ausmündung D unter den Wasserspiegel im Inneren gelangt, so fängt das Wasser an durch dieselbe auszufließen, und übt dabei eine gewisse Reactionskraft P aus, wodurch die Umdrehungsbewegung des Rades unterhalten wird. Ist V die Wassermenge, welche ein Spiralgang faßt, und n die Anzahl dieser Canäle, so fließt bei der Umdrehungszahl u des Rades pr. Minute, die Wassermenge $Q = \frac{n u V}{60}$ pr. Secunde durch das Rad.

Fig. 859.

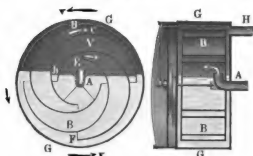


Anmerkung. Ueber den Siemen'schen Wassermesser ist nachzulesen: die Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Bd. I., 1857, wo auch noch ein nach dem Principe des Aichens construirter Wassermesser von Jopling beschrieben wird. Siehe auch die Schrift: Siemens and Adamsons Patent-Water-Meter. Ein ganz eigenthümlich construirter Wassermesser in Form eines Reactionsrades ist im Génie industrielle Tome XXI, No. 126, 1861, unter dem Namen: Compteur hydraulique pour la mesure d'écoulement des liquides, par Guyet beschrieben. Zwei Wassermesser sind auch in der englischen Schrift Hydraulia, by W. Matthews behandelt. Ein Compteur hydraulique, welcher auf dem Bahnhofe zu Chartres gebraucht wird, ist beschrieben im Bulletin de la Société d'encouragement, 51. Jahrgang (1852). Ueber Uhler's Meßapparat für Flüssigkeit handelt Dingler's Journal, Bd. 161. Die Beschreibung eines Controlapparates zum Messen des in den Branntweinbrennereien gewonnenen Spiritus

von Perels enthalten die Mittheilungen des Gewerbevereines für Hannover, Neue Folge 1861.

Gasmesser. Die sogenannten nassen Gasmesser oder Gasuhren §. 50
(franz. compteurs à gaz; engl. gas-meters) sind ebenso wie gewisse Wassermesser, kleine Räder mit Spiralgängen, welche zur größeren Hälfte ins Wasser eintauchen, und durch die Reaction des durchströmenden Gases in Umdrehung gesetzt werden, wobei jeder Spiralgang eine gewisse Gasmenge von innen nach außen führt. Die wesentliche Einrichtung eines solchen Gasmessers ist aus den beiden Durchschnitten in Fig. 860 ersichtlich. Das zuströmende Gas wird durch eine Kropfröhre A in das Innere eines Rades BB geleitet, wo es den Wasserspiegel um die Höhe h tiefer drückt, welche dem Spannungsverlust des Gases beim Durchgang durch das Instrument entspricht. Aus demselben tritt es nach und nach in die Einmündungen der Spiralgänge, füllt dieselben fast ganz aus, und strömt zuletzt durch die Mündungen am Radumfang in das Gehäuse GG, aus welchem es durch eine Röhre H nach dem Punkte des Bedarfes geführt wird. Damit durch einen Spiralgang des Rades eine bestimmte Gasmenge abgeführt werde, ist die Anordnung so zu treffen, daß sich von den beiden Mündungen einer Windung immer mindestens eine unter Wasser befindet, weil dann während des Anfüllens eines Ganges kein Abfluß statthat, und während des Abflusses nicht noch Gas von innen nachströmt. Es ist dann die Gasmenge V, welche ein Spiralgang durchläßt, eine bestimmte, und daher das Gasquantum

Fig. 860.



$$Q = \frac{n u V}{60}$$

zu setzen, wenn das Rad mit n Spiralgängen pr. Minute u Umdrehungen macht. Bezeichnet b den Barometerstand des abströmenden Gases, so ist $b + h$ der Barometerstand des zuströmenden Gases, daher, nach dem Mariotte'schen Gesetze, das Luftquantum eines Spiralganges, gemessen unter dem Drucke außerhalb des Rades:

$$V_1 = \left(\frac{b + h}{b}\right) V,$$

und folglich die Luftmenge, welche zunächst beim Austritt einer Außenmündung aus dem Wasser, aus dem Rade in den übrigen Gefäßraum strömt,

$$V_1 - V = \frac{h}{b} V.$$

Bei diesem Ausströmen wird die mechanische Arbeit

$$A = V p \; Log.\, nat. \left(\frac{b + h}{b}\right)$$

frei (s. §. 388), welche, da wegen der Kleinheit von $\frac{h}{b}$ annähernd

$$Log.\, nat. \left(\frac{b + h}{b}\right) = Log.\, nat. \left(1 + \frac{h}{b}\right) = \frac{h}{b}$$

und bei der Dichtigkeit γ der Manometerfüllung, $p = (b + h)\gamma = b\gamma$ ist, auch $A = V h \gamma$ gesetzt werden kann.

Von dieser Arbeit wird ein Theil auf die Umdrehungsbewegung des Rades verwendet, und ein Theil von der Wirbelbildung aufgezehrt. Der erstere Theil ist durch den Ausdruck

$$A_1 = \frac{(c - v)v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1,$$

in welchem h den mittleren Manometerstand, c die mittlere Ausflußgeschwindigkeit, v die äußere Radgeschwindigkeit und γ_1 die Dichtigkeit des ausströmenden Gases bezeichnet, bestimmt. Ist R der auf den Radumfang reducirte Widerstand des Rades, sowie r der Halbmesser desselben, so hat man die von demselben beanspruchte Arbeit:

$$A_1 = R \cdot \frac{2 \pi r}{n}, \text{ und daher zu setzen:}$$

$$\frac{(c - v)v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1 = \frac{2 \pi r}{n} R, \text{ oder da } 2 \pi r = \frac{60\, v}{u} \text{ ist,}$$

$$\frac{c - v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1 = \frac{60\, R}{n u}$$

und es folgt daher die dem Abstande h zwischen den beiden Wasserspiegeln entsprechende Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v = c - \frac{g b}{h V \gamma_1} \cdot \frac{60\, R}{n u}$$

sowie die Umdrehungszahl der Gasuhr pro Minute:

$$u = \frac{30}{\pi r} \left(c - \frac{60\, g b R}{n u V h \gamma_1}\right).$$

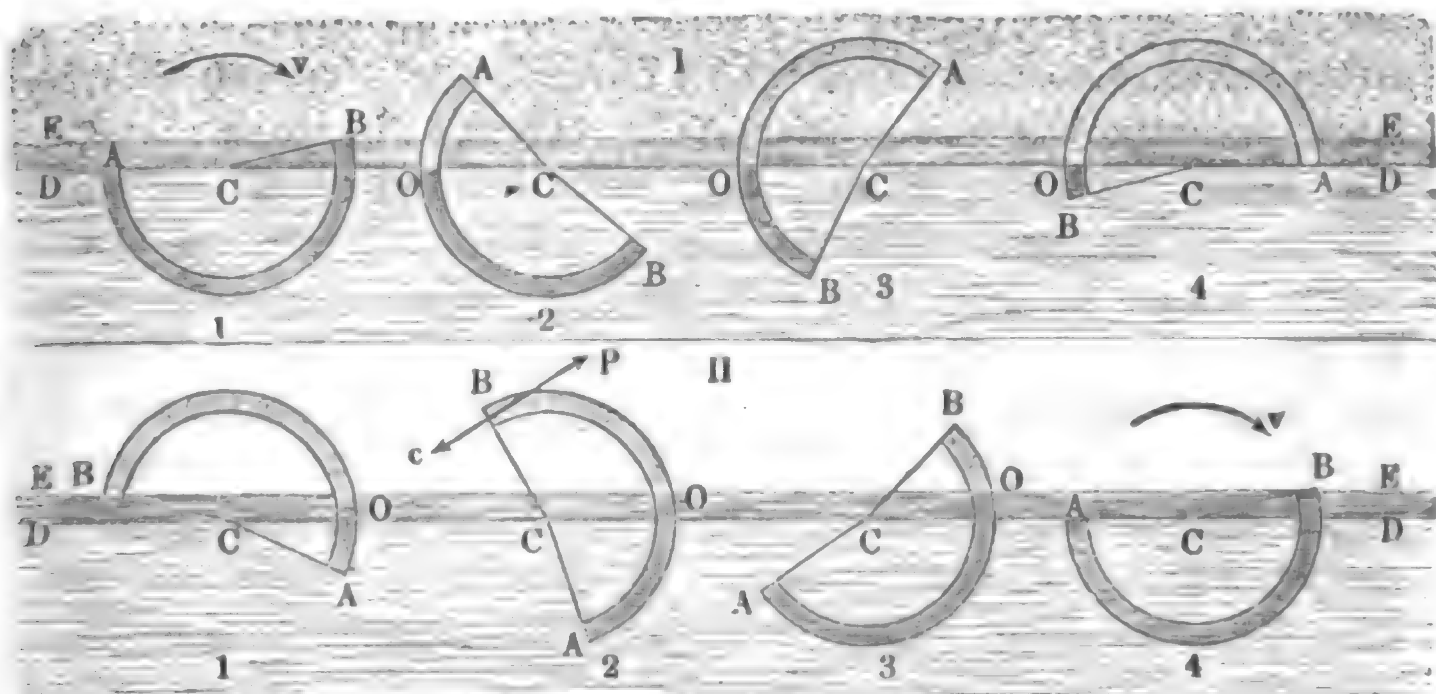
Annähernd fällt $c = \sqrt{2 g \frac{h \gamma}{\gamma_1}}$ aus, wenn γ die Dichtigkeit der Manometerfüllung bezeichnet. Das Gasquantum pro Minute ist natürlich

$$Q = \frac{n u}{60} V,$$

also der Umdrehungszahl u proportional.

Neuere Gasuhren. Anstatt die Spiralgänge einer Gasuhr in einer Ebene um die Welle zu legen, kann man dieselben auch schraubenförmig um dieselbe herumführen. Die Art und Weise der Wirkung eines solchen Gasmessers ist aus den Durchschnitten in I. und II., Fig. 861, zu ersehen, wo DD den Wasserspiegel an der vorderen und EE den Wasserspiegel an der hinteren Stirnfläche des §. 508

Fig. 861.



eine liegende Trommel bildenden Rades vorstellt. Die Mündung A des Spiralganges AOB mündet in der Kammer an der vorderen Fläche aus und nimmt das zuströmende Gas auf, die Mündung B hingegen führt das Gas in die Kammer an der hinteren Stirnfläche, von welcher aus es mittels einer Röhre weiter geführt wird. In Fig. 861, I. sind die verschiedenen Stellungen eines Spiralganges von der vorderen Stirnfläche aus gesehen, abgebildet. Fig. 861, II. dagegen stellt verschiedene Stellungen dieses Ganges von der hinteren Stirnfläche des Rades aus betrachtet, dar. Bei der durch einen Pfeil angedeuteten Richtung der Umdrehung des Rades um die horizontale Axe C tritt in (I., 1) die Einmündung A eben aus dem vorderen Wasser heraus, während die Ausmündung B in das hintere Wasser zu treten beginnt; ferner sind in (I., 2) und (I., 3) Gasbögen AO, AO durch die Mündung A eingetreten, und es taucht in (I., 4) die Einmündung A wieder in das Vorderwasser, wobei nach Aufnahme einer gewissen Gasmenge V das weitere Einströmen von Gas durch A aufhört. Kurz darauf gelangt aber die Ausmündung B wie (II., 1) darstellt, aus dem Hinterwasser, und es beginnt das Ausströmen des vorher eingenommenen Gases, welches bei den Stellungen (II., 2) und (II., 3) vollkommen im Gange ist. Bei einer neuen Umdrehung tritt B wieder in das Hinterwasser, wie (II., 4) darstellt, und es beginnt nun eine neue Aufnahme von Gas. Es wird also bei der einen Hälfte der Umdrehung von dem Spiralgange AOB ein Gasbogen AO (I., 4) von der größeren Pressung $b + h$ aufgenommen, und bei der zweiten

Hälften von demselben in den Raum mit der kleineren Pressung geführt. Bei dem Uebergange aus der größeren Pressung in die kleinere wird wieder das Arbeitsquantum $A = Vh\gamma$ frei, von welchem ein Theil die Umdrehung des Rades bewirkt, wie bereits im vorigen Paragraphen angegeben worden ist. Die allgemeine Einrichtung und Thätigkeit einer solchen Gasuhr ist aus einer ideellen Darstellung in Fig. 862 noch besser zu erkennen. Das Gas wird zunächst durch ein Kropfrohr A in eine Kammer BB geführt, welche nur in der Mitte, um die Umdrehungsaxe C herum, mit dem Wasser im Gehäuse EFG communicirt, am äußeren Umfange aber, wo die Spiralgänge HK und LM einmünden, luftdicht abgeschlossen ist. In der Abbildung ist dargestellt, wie der Spiralgang HK aus BB Gas aufnimmt, und wie dagegen der Spiralgang LM das kurz vorher aufgenommene Gas bei M in den oberen Raum des Gehäuses EFG führt, aus dem es durch eine Röhre F weiter geleitet wird. Bei dieser Einrichtung der Gasuhr ist das Gas in der Vorkammer durch das Wasser von dem in dem Gehäuse ganz abgesperrt, und daher eine Liderung, welche durch die Reibung viel Kraft verzehrt, nicht nöthig. Das andere Ende D der Axe CD des Rades ist mit einem Schraubengewinde versehen, wodurch der Rädermechanismus des Zählapparates in Bewegung gesetzt wird.

Fig. 862.

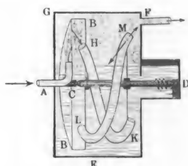


Fig. 863.

Die Crosley'schen Gasuhren, welche eine allgemeine Verbreitung erlangt haben, sind nach dem im Vorstehenden erklärten Principe construirt; nur sind hier die Spiralgänge nicht röhrenförmig, sondern wirkliche Kammern mit spiralförmigen Scheidewänden und durch Ausbiegung der Stirnwände gebildeten triangulären Ein- und Ausmündungscanälen. Figur 863 ist eine perspectivische Ansicht eines solchen Rades bei abgenommenem Mantel, welches sich aus 4 Blechstücken, wie Fig. 864 darstellt, zusammensetzen läßt. Man sieht in A_1, A_2, A_3, A_4 die Ein- und in B_1, B_2 . . . die Ausmündungen, sowie in C_1, C_2, C_3 . . . die Scheidewände des um die Axe DD umlaufen-

den Rades der Gasuhr. In Fig. 865 ist ein Längendurchschnitt der Gasuhr mit dem Aeußeren der Trommel abgebildet; man bemerkt bei K die Kropfröhre, welche das Gas in die Vorkammer des Rades oder der Trommel einführt, und in Z die Röhre, welche das Gas aus dem oberen Raume AA des Uhrgehäuses ableitet. Das Gas strömt nicht unmittelbar aus der Gasleitung nach K, sondern die Röhre E führt erst das Gas in eine Kammer F, und von da durch die Ventilöffnung i in die Kammer G, von wo aus es durch den oberen Theil der verticalen Röhre H in die Kropfröhre K gelangt. Der äußere Wasserspiegel reicht gerade bis zur Einmündung der Röhre H, durch welche das überschüssige Wasser nach unten in einen Behälter L abgeführt wird. Damit auf der anderen Seite das Wasser nicht zu tief sinke, ist ein Schwimmer S angebracht, welcher das Admissionsventil i trägt, und dasselbe verschließt, wenn er bis auf eine gewisse Tiefe sinkt. Der Gaszufluß hört dann ganz auf und man wird dadurch benachrichtigt, daß eine Nachfüllung von Wasser durch eine Mündung M in einer nur unten mit dem Wasserraume in Communication stehenden Kammer N nöthig ist.

Fig. 864.

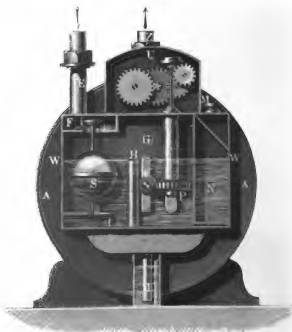
Fig. 865.

Die Abbildung in Fig. 866 (a. f. S.) führt die Gasuhr in einem vordern Durchschnitt vor Augen, woran außer der Kammer N mit der Mündung M, vorzüglich das Uhrwerk U des Zählapparates, welches mittels eines Schraubengewindes an der Axe der Trommel, und durch eine stehende Welle mit Zahnrad P im Umtrieb gesetzt wird, zu sehen ist.

Ein wesentlicher Widerstand bei dem Gange der Crosley'schen Gasuhr geht aus dem Ein- und Austritt des Wassers durch die verengten trian-

gulären Mündungen hervor. Aus dem Inhalte F einer Ein- oder Ausmündung und der durchströmenden Wassermenge pr. Secunde, welche sich dem Gasquantum Q gleichsetzen läßt, folgt die Ein- und Austrittsgeschwindigkeit

Fig. 866.



des Wassers $v_1 = \frac{Q}{F}$, und daher der entsprechende Arbeitsverlust pr. Secunde:

$$L_1 = z \frac{v_1^2}{2\,g}\, Q\,\gamma = \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \frac{Q\,\gamma}{g}.$$

Anmerkung. Näheres über Gasuhren ist nachzulesen in Schilling's Handbuch der Steinkohlengasbeleuchtung, ferner Heeren's Aufsatz: „die Einrichtung der Gasuhren" in den Mittheilungen des Gewerbevereins für das K. Hannover, Jahrgang 1859. Eine neue Gasuhr von Hansen ist beschrieben im Journal für Gasbeleuchtung, 1861.

509 **Wirkungen unbegrenzter Flüssigkeiten.** Wenn sich ein Körper in einer unbegrenzten Flüssigkeit progressiv fortbewegt, oder wenn ein Körper in eine bewegte Flüssigkeit gebracht wird, so erleidet derselbe einen Druck, der von der Form und Größe dieses Körpers, sowie von der Dichtigkeit der Flüssigkeit und von der Geschwindigkeit der einen oder der anderen Masse abhängt, und in einem Falle Widerstand, im anderen aber Stoß

der Flüssigkeit genannt wird. Dieser hydraulische Druck entspringt aber vorzüglich aus der Trägheit des Wassers, dessen Bewegungszustand durch das Zusammentreffen mit dem festen Körper verändert wird, dann aber auch noch aus der Kraft des Zusammenhängens der Wassertheilchen, die hierbei theilweise von einander getrennt oder an einander verschoben werden. Bewegt sich ein Körper AC, Fig. 867, dem stillstehenden Wasser entgegen, so schiebt er eine gewisse Wassermasse mit erhöhtem Drucke vor sich her. Während diese Wassermasse beim weiteren Fortrücken des Körpers auf der einen Seite immer mehr Zuwachs erhält, findet auf einer anderen Seite, nahe am Körper ein steter Abfluß statt, indem die der Vorderfläche AB zunächst liegenden

Fig. 867.

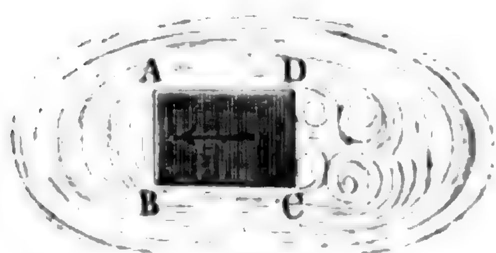
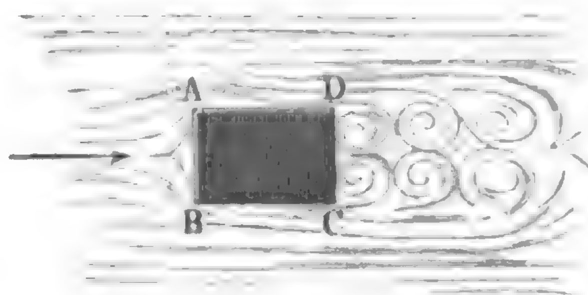


Fig. 868.



Theilchen eine Bewegung in der Richtung dieser Fläche annehmen. Trifft das bewegte Wasser einen in Ruhe befindlichen Körper AC, Fig. 868, so erzeugt sich vor demselben ebenfalls ein erhöhter Wasserdruck und macht, daß die Wassertheilchen vor dem Körper von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden und sich an der Vorderfläche AB hinbewegen. Haben diese Wassertheilchen die Grenzen der Vorderfläche erreicht, so machen dieselben eine Wendung, und laufen nachher an den Seitenflächen des Körpers hin, bis sie an die Hinterfläche kommen, wo sie sich nicht sogleich wieder vereinigen, sondern zunächst wirbelnde Bewegungen annehmen. Man sieht, daß die allgemeinen Bewegungsverhältnisse der den Körper umgebenden Wasserelemente beim Stoße des bewegten Wassers dieselben sind, wie beim Widerstande eines im Wasser bewegten Körpers; nur findet bei den Wirbeln eine Verschiedenheit insofern statt, als bei kurzen Körpern die Wirbel im letzteren Falle einen kleineren Raum einnehmen als im ersteren. Die Geschwindigkeit der Wasserelemente nimmt in beiden Fällen von der Mitte der Vorderfläche an nach den Grenzen derselben immer mehr und mehr zu, erreicht am Anfange der Seitenflächen, wo in der Regel noch eine Contraction eintritt, ihr Maximum, nimmt nun bei dem an den Seitenflächen hingehenden Wasser allmälig ab, und erreicht endlich ihr Minimum bei dem Wasser, welches die Hinterfläche erlangt und in wirbelnde Bewegung übergeht.

Theorie des Stosses und Widerstandes. Der Normaldruck des ruhenden oder bewegten Wassers gegen einen in demselben bewegten oder in §. 51

Ruhe befindlichen Körper ist an verschiedenen Punkten dieses Körpers sehr verschieden. Er ist in der Mitte der Vorderfläche desselben am größten, und in der Mitte der Hinterfläche und nächstdem am Anfange der Seitenflächen am kleinsten, weil dort mehr ein Zu-, hier aber mehr ein Entströmen des Wassers in Hinsicht auf den Körper statt hat. Ist der Körper, wie wir in der Folge voraussetzen wollen, in Hinsicht auf die Bewegungsrichtung symmetrisch, so heben sich die sämmtlichen Pressungen rechtwinkelig gegen diese Richtung auf, und es kommen daher nur die Pressungen in der Bewegungsrichtung in Betracht. Nun sind aber die Pressungen auf der Hinterfläche des Körpers den Pressungen auf der Vorderfläche entgegengesetzt, es läßt sich daher der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers gleichsetzen der Differenz zwischen dem Drucke gegen die Vorder- und dem gegen die Hinterfläche.

Wenn wir auch die Größe dieser Drücke a priori nicht angeben können, so können wir doch wegen der großen Aehnlichkeit der Verhältnisse mit dem Stoße isolirter Strahlen annehmen, daß wenigstens das allgemeine Gesetz für den Stoß des unbegrenzten Wassers von dem für den Stoß isolirter Strahlen nicht abweiche. Ist also F der Inhalt einer Fläche, welche von einem unbegrenzten Strome, dessen Dichtigkeit γ sein möge, mit der Geschwindigkeit v getroffen wird, so läßt sich der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck:

$$P = \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$$

setzen, wobei ζ noch eine von der Form der Fläche abhängige Erfahrungszahl bezeichnet. Dieser Ausdruck läßt sich aber nicht nur auf die Wirkung gegen die Vorderfläche, sondern auch auf die gegen die Hinterfläche anwenden, nur besteht sie hier, wo das Wasser ein Bestreben hat, sich zu entfernen, in einem Zuge oder einem Negativdrucke. Ist nun $Fh\gamma$ der hydrostatische Druck (§. 690) gegen die Vorder- und gegen die Hinterfläche eines Körpers, so folgt der Gesammtdruck gegen die Vorderfläche:

$$P_1 = Fh\gamma + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

und der gegen die Hinterfläche:

$$P_2 = Fh\gamma - \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

und es ergiebt sich so der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers:

$$P = P_1 - P_2 = (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

wenn $\zeta_1 + \zeta_2 = \zeta$ gesetzt wird.

Diese allgemeine Formel für den Stoß und Widerstand des unbegrenzten Wassers findet auch ihre Anwendung auf den Stoß des Win-

des und auf den Widerstand der Luft. Allerdings findet hier außer der Verschiedenheit des aërodynamischen Druckes an der Vorder- und Hinterfläche auch noch eine Verschiedenheit des aërostatischen Druckes statt, indem die Luft vor der Vorderfläche bei ihrer größeren Spannung auch eine größere Dichtigkeit (γ) hat, als an der Hinterfläche. Deshalb fallen wenigstens bei großen Geschwindigkeiten, wie sie z. B. bei Geschützkugeln vorkommen, die Widerstandscoefficienten der Luft größer aus, als die des Wassers.

Anmerkung. Eine eigenthümliche Erscheinung beim Stoße und Widerstande unbegrenzter Mittel (Wasser oder Luft) ist das Anhängen einer gewissen Wasser- oder Luftmasse an dem Körper, dessen Einfluß sich bei der ungleichförmigen Bewegung der Körper, wie z. B. bei Pendelschwingungen, besonders bemerkbar macht. Bei einer Kugel hat die dem bewegten Körper anhängende Luft- oder Wassermasse ein Volumen von 0,6 des Volumens der Kugel. Bei einem in der Arenrichtung bewegten prismatischen Körper ist das Verhältniß dieser Volumina

$$= 0{,}13 + 0{,}705\,\frac{\sqrt{F}}{l},$$

wo l die Länge und F den Querschnitt des Körpers bezeichnet. Diese schon von du Buat aufgefundenen Verhältnisse haben durch die neueren Beobachtungen von Bessel, Sabine und Baily vollkommene Bestätigung gefunden.

Stoss und Widerstand gegen Flächen. Der Widerstandscoefficient ζ oder die Zahl, womit die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ zu multipliciren ist, um die Höhe einer den hydraulischen Druck messenden Wassersäule zu erhalten, ist bei Körpern von verschiedenen Formen sehr verschieden, und nur bei Platten, welche rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung stehen, von beinahe bestimmter Größe. Nach den Versuchen von du Buat, und nach denen von Thibault läßt sich für den Luft- und Wasserstoß gegen eine ruhende ebene Fläche, $\zeta = 1{,}86$ setzen, wogegen, jedoch mit weniger Sicherheit, für den Widerstand der Luft und des Wassers gegen eine bewegte ebene Fläche, $\zeta = 1{,}25$ anzunehmen sein möchte. In beiden Fällen kommen auf die Vorderfläche ungefähr zwei, und auf die Hinterfläche ein Drittel der ganzen Wirkung. Der Widerstand, welchen die Luft einer im Kreise umlaufenden Fläche entgegensetzt, ist von Borda, Hutton und Thibault sehr verschieden gefunden worden. Der Letztere fand mittels einer rotirenden ebenen Fläche von 0,1 Quadratmeter Inhalt den Widerstand: §. 5

$$P = 0{,}108\,F v^2, \text{ wonach}$$

$$\zeta = 0{,}108 \cdot \frac{2g}{\gamma} = 0{,}108 \cdot \frac{19{,}62}{1{,}25} = 1{,}70 \text{ ist.}$$

Dieser Widerstand bleibt, diesen Versuchen zufolge, fast unverändert, so lange der Winkel α, um welchen die Fläche von der Bewegungsrichtung abweicht, nicht unter 45 Grad herabgeht. Von 45 Grad an nimmt er mit dem Stoßwinkel α ab, so daß bei $\alpha = 10$ Grad, ζ nur $= 0{,}53$ ausfällt.

Nach den Versuchen von Didion u. s. w. ist für den Widerstand rotirender ebener Flächen von 0,2 . 0,2 = 0,04 Quadratmeter Inhalt:

$$\zeta = (0{,}1002 + 0{,}0434\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}573 + 0{,}681\, v^{-2},$$

wo v in Metern zu geben ist.

An einer ebenen Fläche von 1 Quadratmeter Inhalt fand dagegen Didion u. s. w. bei einer senkrechten Bewegung derselben, den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = (0{,}084 + 0{,}036\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}318 + 0{,}565\, v^{-2},$$

wogegen Thibault an solchen Flächen von 0,1 und 0,2 Quadratmeter Inhalt den Coefficienten

$$\zeta = (0{,}1188 + 0{,}036\, v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}865 + 0{,}565\, v^{-2}$$ findet.

Vorstehende Formeln gelten nur für eine gleichförmige Bewegung der Fläche; erfolgt die Bewegung derselben ungleichförmig, so erfordern dieselben noch eine Ergänzung. Aendert sich die Geschwindigkeit eines in einem widerstehenden Mittel bewegten Körpers, so wird auch die von dem Körper in Bewegung gesetzte, oder von demselben mit fortgenommene Flüssigkeitsmasse eine andere, und deshalb läßt sich der Widerstand auch noch von der Acceleration p des Körpers abhängig darstellen. Nach den Versuchen von Didion u. s. w. an einer Fläche von 1 und an einer solchen von $^1/_4$ Quadratmeter Inhalt, welche in einer verticalen Linie bewegt wurde, ist der Widerstand:

$$P = (0{,}084\, v^2 + 0{,}036 + 0{,}164\, p) F,$$ und hiernach:

$$\zeta = [0{,}084 + (0{,}036 + 0{,}164\, p)\, v^{-2}] \cdot \frac{2g}{\gamma}$$
$$= 1{,}318 + (0{,}565 + 2{,}574\, p)\, v^{-2}.$$

Uebrigens ist zu beachten, daß bei der ungleichförmigen Bewegung das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit von dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit verschieden ist.

Stoß und Widerstand unbegrenzter Mittel werden auch erhöht, wenn man die Flächen aushöhlt oder am Umfange mit vorstehenden Rändern versieht; doch ist man hierüber zu allgemeinen Ergebnissen noch nicht gelangt.

An einem Fallschirm von 1,2 Quadratmeter Querschnitt, 1,27 Meter mittlerem Durchmesser und 0,430 Meter Tiefe fand Didion u. s. w. bei einer accelerirten Bewegung, wobei die hohle Seite vorausging:

$$P = (0{,}163\, v^2 + 0{,}070 + 0{,}142\, p) F,$$

wonach also

$$\zeta = 2{,}559 + (1{,}099 + 2{,}229\, p)\, v^{-2}$$ ist.

Stoss und Widerstand gegen Körper. Der Stoß und Widerstand des Wassers gegen prismatische Körper, deren Axe mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, nimmt ab, wenn die Länge der Körper eine größere wird. Nach den Versuchen von du Buat und Duchemin ist der Stoß von der Vorderfläche unveränderlich, und nur die Wirkung gegen die Hinterfläche veränderlich. Jenem entspricht der Coefficient $\zeta_1 = 1{,}186$, für die Gesammtwirkung aber ist bei den relativen Längen §. 512

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3:$$
$$\zeta = 1{,}86; \; 1{,}47; \; 1{,}35; \; 1{,}33.$$

Bei noch größerem Verhältnisse zwischen der Länge l und der mittleren Breite $\sqrt{F}$ des Körpers nimmt ζ in Folge der Reibung des Wassers an den Seitenflächen des Körpers wieder zu. Bei dem Widerstande des Wassers treten umgekehrte Verhältnisse ein. Hier ist nach du Buat für die Wirkung gegen die Vorderfläche unveränderlich $\zeta_1 = 1$, für die Gesammtwirkung aber bei $\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3:$

$$\zeta = 1{,}25; \; 1{,}28; \; 1{,}31; \; 1{,}33,$$

so daß also bei einem Prisma, welches dreimal so lang als dick ist, der Stoß mit dem Widerstande des Wassers gleich groß ausfällt.

Die von Newton, Borda, Hutton, Vince, Désaguilliers u. A. angestellten Versuche über den Widerstand von eckigen und runden Körpern lassen noch viel Unsicherheit zurück. Was die Kugeln betrifft, so scheint bei mäßigen Geschwindigkeiten der Widerstandscoefficient für die Bewegung in Luft oder Wasser 0,5 bis 0,6 gesetzt werden zu können. Bei großer Geschwindigkeit und für die Bewegung in der Luft ist aber nach Robins und Hutton zu setzen für die Geschwindigkeiten

$v = 1, \quad 5, \quad 25, \quad 100, \quad 200, \quad 300, \quad 400, \quad 500, \quad 600$ Meter:
$\zeta = 0{,}59; 0{,}63; \; 0{,}67; \; 0{,}71; \; 0{,}77; \; 0{,}88; \; 0{,}99; \; 1{,}04; \; 1{,}01.$

Duchemin und Piobert haben besondere Formeln für das Wachsen dieser Widerstandscoefficienten angegeben. Nach Piobert ist der Widerstand der Geschützkugeln in der Luft:

$$P = 0{,}029\,(1 + 0{,}0023\,v)\,F v^2 \text{ Kilogramm, wonach}$$
$$\zeta = 0{,}451\,(1 + 0{,}0023\,v) \text{ folgt.}$$

Für den Stoß des Wassers gegen eine Kugel findet Eytelwein:

$$\zeta = 0{,}7886,$$

wogegen nach den Versuchen Piobert's u. s. w., angestellt mit Geschützkugeln von 0,10 bis 0,22 Meter Durchmesser, der Widerstand der Kugeln im Wasser:

$$P = 23{,}8\; F v^2 \text{ Kilogramm; und daher}$$
$$\zeta = 0{,}467 \text{ zu setzen ist.}$$

Die Widerstandscoefficienten fallen auch bei nur zum Theil eingetauchten Körpern anders aus, als bei ganz vom Wasser umgebenen Körpern. Für einen schwimmenden prismatischen Körper, welcher 5 bis 6 mal so lang als breit ist, und in der Axenrichtung bewegt wird, soll $\zeta = 1{,}10$ gesetzt werden. Ist der Körper durch zwei Verticalebenen vorn zugeschärft, wie *ABC*, Fig. 869, so nimmt ζ mit dem Zuschärfungswinkel $ACA = \beta$ ab, und es ist

für β =	180°	156°	132°	108°	84°	60°	36°	12°
ζ =	1,10	1,06	0,93	0,84	0,59	0,48	0,45	0,44

Ist das Hintertheil des Körpers *ACB*, Fig. 870, zugeschärft, und β der Zuschärfungswinkel, so hat man dagegen

Fig. 869.

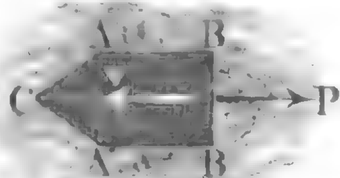
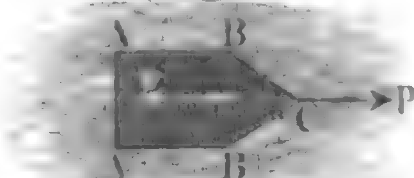


Fig. 870.



für β =	180°	138°	96°	48°	24°
ζ =	1,10	1,03	0,98	0,95	0,92

Bei zugespitzten Vorder- und Hintertheilen des schwimmenden Körpers fällt natürlich ζ noch kleiner aus; für Flußdampfschiffe ist $\zeta = 0{,}12$ bis $0{,}20$, und für große Seedampfschiffe $\zeta = 0{,}05$ bis $0{,}10$.

Anmerkung. Sehr ausführlich über diese Verhältnisse handeln Poncelet in seiner oben citirten Introduction, und Duchemin sowie Thibault in ihren Récherches expérimentales etc. Ueber den Widerstand gegen schwimmende Körper, namentlich gegen Schiffe, sowie auch vom Stoße des Windes gegen Räder, wird im zweiten und dritten Theile gehandelt.

Beispiel. Wenn man nach Borda den Widerstand und Stoß rechtwinkelig gegen die Axe eines Cylinders $\frac{1}{2}$mal so groß setzt, als den gegen ein Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Dimensionen hat, so erhält man für den Widerstand den Coefficienten:

$$\zeta = \tfrac{1}{2} \,.\, 1{,}28 = 0{,}64,$$

und für den Stoß, denselben

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, 1{,}47 = 0{,}735.$$

Wendet man nun diese Werthe auf den menschlichen Körper an, dessen Querschnitt etwa 7 Quadratfuß Inhalt hat, so findet man für den Widerstand und Stoß der Luft gegen denselben die Werthe:

$$P = 0{,}64 \,.\, 0{,}016 \,.\, 7 \,.\, 0{,}086\, v^2 = 0{,}00616\, v^2$$

und

$$P = 0{,}735 \,.\, 0{,}016 \,.\, 7 \,.\, 0{,}086\, v^2 = 0{,}00708\, v^2.$$

Bei einer Geschwindigkeit von 5 Fuß ist daher der Widerstand der Luft nur 0,00616 . 25 = 0,154 Pfund; und die entsprechende Leistung pr. Secunde = 5 . 0,154 = 0,77 Fußpfund; bei einer Geschwindigkeit von 10 Fuß fällt dieser Widerstand schon 4mal und der Arbeitsaufwand 8mal so groß aus, und bei einer Geschwindigkeit von 15 Fuß ist der Widerstand das 9= und die Arbeit sogar das 27fache. Bewegt sich ein Mensch mit 5 Fuß Geschwindigkeit dem Winde von 50 Fuß Geschwindigkeit entgegen, so hat er einen der relativen Geschwindigkeit 50 + 5 = 55 Fuß entsprechenden Widerstand 0,00708 . 55² = 21,42 Pfund zu überwinden, und dabei die übermäßige Arbeit von 21,42 . 5 = 107,1 Fußpfund zu verrichten.

§. 514. **Bewegung in widerstehenden Mitteln.** Die Gesetze der Bewegung eines Körpers in widerstehenden Mitteln sind nicht sehr einfach, weil man es hier mit einer veränderlichen, d. h. mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsenden Kraft zu thun hat. Aus der Kraft P, die einen Körper forttreibt, und aus dem Widerstande $P = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, welchen das Mittel der Bewegung entgegensetzt, folgt die bewegende Kraft:

$$P_0 = P - P_1 = P - \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

da aber die Masse des Körpers, $M = \frac{G}{g}$ ist, so ergiebt sich die Beschleunigung des Körpers:

$$p = \frac{P_0}{M} = \left(P - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma\right) : M = \left(\frac{P - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G}\right) \cdot g,$$

oder, wenn wir $\frac{\zeta F\gamma}{2gP}$ durch $\frac{1}{w^2}$ bezeichnen, also $\sqrt{\frac{2gP}{\zeta F\gamma}} = w$ setzen:

$$p = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G} g.$$

Die größte Geschwindigkeit, welche der Körper annehmen kann, ist

$$v = w = \sqrt{\frac{2gP_1}{\zeta F\gamma}}.$$

Ist die bewegende Kraft P_1 constant, so nähert sich die Bewegung nach und nach der Gleichförmigkeit, denn die Acceleration p fällt immer kleiner und kleiner aus, je größer v wird.

Nun nimmt aber bei der Acceleration p die Geschwindigkeit v in dem kleinen Zeittheilchen τ um $\varkappa = p\tau$ zu, daher läßt sich setzen:

$$\varkappa = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G} g\tau, \text{ und umgekehrt:}$$

$$\tau = \frac{G}{P} \cdot \frac{\varkappa}{g\left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]}.$$

Um nun die einer gegebenen Geschwindigkeitsveränderung entsprechende Zeit zu finden, theilen wir die Differenz $v_n - v_0$ zwischen der End- und Anfangsgeschwindigkeit in n Theile, setzen einen solchen Theil:

$$\frac{v_n - v_0}{n} = \varkappa,$$

berechnen hiernach die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = v_0 + \varkappa,\ v_2 = v_0 + 2\varkappa,\ v_3 = v_0 + 3\varkappa \text{ u. s. w.},$$

und führen diese Werthe in die Simpson'sche Formel ein. Auf diese Weise erhalten wir die gesuchte Zeit, bei Annahme von vier Theilen:

$$1)\ t = \frac{G}{P}\cdot\frac{v_n - v_0}{12g}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4}{1-\left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \frac{2}{1-\left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4}{1-\left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{v_4}{w}\right)^2}\right).$$

Es ist ferner der in einem Zeittheilchen τ zurückgelegte Raumtheil (§. 19):

$$\sigma = v\tau, \text{ oder da sich } \tau = \frac{\varkappa}{p} \text{ setzen läßt:}$$

$$\sigma = \frac{v\varkappa}{p}, \text{ also hier:}$$

$$\sigma = \frac{v\varkappa}{1-\left(\frac{v}{w}\right)^2}\cdot\frac{G}{Pg}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel findet man nun den Raum, welcher zurückgelegt wird, während die Geschwindigkeit v_0 in v_n übergeht.

$$2)\ s = \frac{G}{P}\cdot\frac{v_n - v_0}{12g}\left(\frac{v_0}{1-\left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4v_1}{1-\left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \frac{2v_2}{1-\left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4v_3}{1-\left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{v_4}{1-\left(\frac{v_4}{w}\right)^2}\right).$$

Natürlich wird die Genauigkeit größer, wenn man 6, 8 oder noch mehr Theile annimmt. Uebrigens gestattet diese Formel auch eine Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Widerstandscoefficienten, welches bei bedeutenden Geschwindigkeiten nothwendig ist. Beim freien Fall der Körper in der Luft oder im Wasser ist $P = G$ das scheinbare Gewicht des Körpers, und bei der Bewegung auf der Horizontalebene $P = 0$, oder richtiger, gleich der Reibung fG. Da diese ein Widerstand ist, so hat man sie negativ in Rechnung zu bringen, weshalb hier

$$P_0 = -(P + P_1) \text{ und}$$
$$p = -\left[1 + \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G} g$$

zu setzen ist. Da ferner hier nicht von einer Zu-, sondern nur von einer Abnahme der Geschwindigkeit die Rede sein kann, so haben wir hier statt $v_n - v_0$, $v_0 - v_n$ in den obigen Formeln zu setzen.

In dem Falle, wenn der Körper durch eine Kraft, z. B. durch sein Gewicht getrieben wird, nähert sich die Bewegung immer mehr und mehr einer gleichförmigen, so daß sie schon nach einer gewissen Zeit als eine solche angesehen werden kann, wiewohl sie es in Wahrheit nie wird. Es fällt die Acceleration p = Null aus, wenn $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = P_0$, wenn also

$$v = \sqrt{\frac{2gP_0}{\zeta F\gamma}} = w \text{ ist.}$$

Diesem Ziele nähert sich also die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers immer mehr und mehr, ohne es je vollkommen zu erreichen.

Beispiel. Piobert, Morin und Didion fanden für einen Fallschirm, dessen Tiefe 0,31 des Oeffnungsdurchmessers betrug, den Widerstandscoefficienten $\zeta = 1{,}94 \,.\, 1{,}37 = 2{,}66$. Von welcher Höhe wird sich hiernach ein 150 Pfd. schwerer Mensch mit einem ähnlichen Fallschirme von 10 Pfund Gewicht und 60 Quadratfuß Querschnitt herablassen können, ohne eine größere Geschwindigkeit anzunehmen, als diejenige, welche er erlangt, wenn er ohne Fallschirm 10 Fuß hoch herabspringt? Die letzte Geschwindigkeit ist $v = 7{,}906 \sqrt{10} = 25$ Fuß, ferner die Kraft $P = G = 150 + 10 = 160$ Pfd., die Fläche $F = 60$ Quadratfuß, die Dichtigkeit $\gamma = 0{,}0859$ und der Widerstandscoefficient $\zeta = 2{,}66$, daher:

$$\frac{1}{w^2} = \frac{60 \,.\, 0{,}0859}{62{,}5 \,.\, 160} = 0{,}000515 \text{ und}$$

$$\zeta \cdot \frac{v^2}{w^2} = 2{,}66 \,.\, 0{,}000515 \,.\, 25^2 = 0{,}85625.$$

Nehmen wir nun 6 Theile an, so erhalten wir für diese:

$$1 - \zeta \frac{v^2}{w^2} = 0{,}97621;\ 0{,}90486;\ 0{,}78593;\ 0{,}61944;\ 0{,}40537;\ 0{,}14375,$$

und für

$$\frac{v}{1 - \zeta \frac{v^2}{w^2}} = 0;\ 4{,}268;\ 9{,}210;\ 15{,}905;\ 26{,}910;\ 51{,}393 \text{ und } 173{,}913,$$

daher nach der Simpson'schen Regel den mittleren Werth hiervon
$= (1 \,.\, 0 + 4 \,.\, 4{,}268 + 2 \,.\, 9{,}210 + 4 \,.\, 15{,}905 + 2 \,.\, 26{,}910 + 4 \,.\, 51{,}393 + 1 \,.\, 173{,}913) : (3 \,.\, 6)$
$= \frac{532{,}42}{18} = 29{,}58$; und hieraus den gesuchten Fallraum:

$$s = \frac{v_n - v_0}{g} \text{ mal Mittel von } \frac{v}{1 - \zeta \cdot \frac{v^2}{w^2}} = \frac{25 - 0}{31{,}25} \cdot 29{,}58 = 23{,}6 \text{ Fuß.}$$

Die entsprechende Fallzeit ist, da der mittlere Werth von $\frac{1}{1 - \zeta \frac{v^2}{w^2}}$

$= (1.0 + 4.1,024 + 2.1,105 + 4.1,272 + 2.1,614 + 4.2,467 + 1.6,957):18$
$= 1,747$ beträgt:

$$t = \frac{25}{31,25} \cdot 1,747 = 1,4 \text{ Secunden.}$$

Anmerkung. Für einen constanten Widerstandscoefficienten ergiebt sich für den freien Fall durch den höheren Calcül:

$$v = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right) w = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right) \sqrt{2 g \cdot \frac{G}{\zeta F \gamma}}$$

und

$$s = Ln. \left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4 e^{\mu t}}\right) \frac{w^2}{2 g} = Ln. \left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4 e^{\mu t}}\right) \frac{G}{\zeta F \gamma}$$
$$= Ln. \left(\frac{w^2}{w^2 - v^2}\right) \cdot \frac{w^2}{2 g},$$

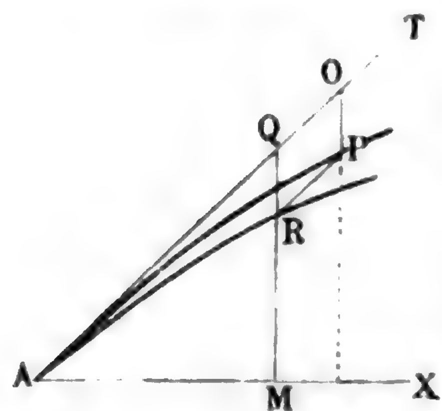
wobei

$$\mu = \sqrt{2 g \cdot \zeta \frac{F \gamma}{G}},$$

e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes und $Ln.$ den natürlichen Logarithmen bezeichnen.

514 **Geworfene Körper.** Wir haben schon früher die Wurfbewegung im luftleeren Raume kennen gelernt und §. 39 gefunden, daß derselben eine Parabel entspricht. Jetzt können wir uns auch über diese Bewegung in einem widerstehenden Mittel, z. B. über die eines abgeschossenen Körpers in der Luft nähere Kenntniß verschaffen.

Fig. 871.



Jedenfalls ist die Bahn eines die Luft durchschneidenden Körpers keine Parabel wie im luftleeren Raume, sondern eine unsymmetrische Curve, mit einem schwächer auf- und stärker niedersteigenden Schenkel, wie aus Folgendem hervorgeht. Während der kleinen Zeit τ durchläuft der mit der Geschwindigkeit v in der Richtung AT, Fig. 871, aufsteigende Körper in Folge seiner Trägheit einen Weg

$$AO = s = v \tau,$$

sowie in Folge seiner Schwere den senkrechten Weg:

$$OP = h = \frac{g \tau^2}{2};$$

und es wird der erstere Weg durch den Widerstand $\zeta \frac{c^2}{2 g} F \gamma$ der Luft noch um eine Größe vermindert, welche sich durch den Ausdruck

$$OQ = \frac{\zeta \frac{v^2}{2 g} F \gamma}{G} \cdot \frac{g \tau^2}{2} = \zeta \frac{F \gamma}{2 G} \cdot \frac{v^2 \tau^2}{2} \text{ bestimmen läßt.}$$

Setzt man $\zeta \frac{F\gamma}{2G} = \mu$, so hat man einfach:

$$O Q = \mu \frac{v^2 \tau^2}{2}.$$

Der vierte Eckpunkt R des aus $O P$ und $O Q$ construirten Parallelogrammes $O P R Q$ giebt den Ort an, wo sich der Körper am Ende der Zeit τ befindet, während P der Ort ist, welchen der Körper in diesem Augenblicke einnähme, wenn der Widerstand der Luft Null wäre. Es zieht sich folglich die Bahn $A R$ des geworfenen Körpers unter der Parabel $A P$ hin, welche der Körper im luftleeren Raume durchlaufen würde.

Ebenso sind für einen in der Richtung $A T$, Fig. 872, mit der Anfangsgeschwindigkeit v niedersteigenden Körper die in der Zeit τ gleichzeitig zurückgelegten Wege

$$A O = v \tau,$$

$$O P = g \frac{\tau^2}{2} \text{ und}$$

$$O Q = \mu \frac{v^2 \tau^2}{2},$$

und es ergiebt sich aus denselben wieder der Ort R, welchen der Körper am Ende dieser Zeit einnimmt, sowie der Ort P, welchen er einnehmen würde, wenn die Bewegung im luftleeren Raume erfolgte. Es läuft also auch in diesem Falle die Bahn $A R$ des Körpers unter der parabolischen Bahn $A P$ hin, welche der Körper verfolgen würde, wenn die Luft kein widerstehendes Mittel wäre.

Ist der Neigungswinkel, unter welchem der Körper von A aus mit der

Fig. 872.

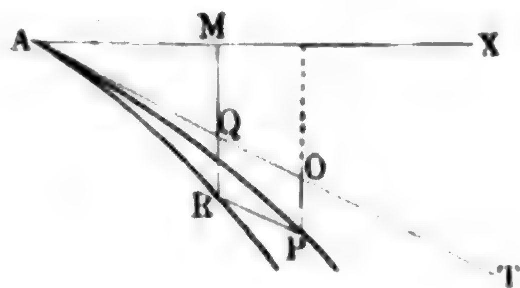
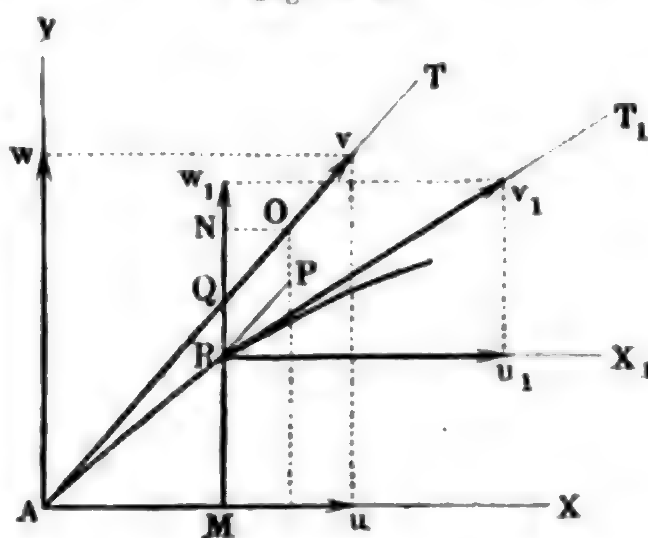


Fig. 873.



Anfangsgeschwindigkeit v emporsteigt, $T A X = \alpha$, Fig. 873, sind folglich die anfänglichen Coordinaten- oder Axengeschwindigkeiten:

$$u = v \cos. \alpha$$

und

$$w = v \sin. \alpha,$$

so hat man nach Verlauf der kleinen Zeit τ für den Ort R des bewegten Körpers die Abscisse:

$$A M = x = A Q \cos.\alpha = \left(v\tau - \frac{\mu v^2 \tau^2}{2}\right) \cos.\alpha$$
$$= \left(1 - \frac{\mu v \tau}{2}\right) v \tau \cos.\alpha,$$

und die Ordinate:

$$M R = y = A Q \sin.\alpha - Q R = \left(1 - \frac{\mu v \tau}{2}\right) v \tau \sin.\alpha - \frac{g \tau^2}{2};$$

ferner die Abscissengeschwindigkeit:

$$\overline{R u_1} = u_1 = v \cos.\alpha - \mu v^2 \tau \cos.\alpha = (1 - \mu v \tau)\, v \cos.\alpha,$$

und die Ordinatengeschwindigkeit:

$$\overline{R w_1} = w_1 = v \sin.\alpha - \mu v^2 \tau \sin.\alpha - g\tau = (1 - \mu v \tau) v \sin.\alpha - g\tau.$$

Aus beiden Geschwindigkeiten folgt nun für den Neigungswinkel $T_1 R X_1 = \alpha_1$ der Bahn in R:

$$tang.\alpha_1 = \frac{w_1}{v_1} = tang.\alpha - \frac{g\tau}{(1 - \mu v \tau)\, v \cos.\alpha},$$

und die Curvengeschwindigkeit:

$$\overline{R v_1} = v_1 = \sqrt{u_1^2 + w_1^2} = \sqrt{(1 - \mu v \tau)^2 v^2 - 2(1 - \mu v \tau) v g \tau \sin.\alpha + g^2 \tau^2}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln läßt sich der ganze Lauf der Wurflinie finden. Setzt man z. B. in die obigen Formeln für x und y statt α und v die durch die letzten Ausdrücke bestimmten Werthe für α_1 und v_1 ein, so erhält man durch dieselben die Coordinaten x_1 und y_1 eines neuen Punktes in Beziehung auf R u. s. w.

Beispiel. Eine massive gußeiserne Kugel von $2r = 4$ Zoll Durchmesser werde unter dem Elevationswinkel $\alpha = 25$ Grad mit der Geschwindigkeit $v = 1000$ Fuß abgeschossen, man soll den Ort derselben nach Verlauf von $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$ Secunde u. s. w. angeben.

Da die Dichtigkeit der Luft $\gamma = 0{,}0859$, und die des Gußeisens $\gamma_1 = 470$ Pfund ist, so hat man:

$$\mu = \frac{F\gamma}{2G} \cdot \zeta = \frac{\pi r^2 . \gamma}{^8/_3 \pi r^3 \gamma_1} \zeta = {}^3/_8 \frac{\gamma}{r\gamma_1} \zeta = {}^3/_8 . 6 \cdot \frac{0{,}0859}{470} \zeta = 0{,}00041122\, \zeta,$$

und daher für $v = 1000$ Fuß, wo $\zeta = 0{,}9$ ist (s. §. 512):

$$\mu = 0{,}0003701.$$

Nimmt man nun $\tau = 0{,}1$ Secunden an, so erhält man:

$$x = (1 - 0{,}0003701 . 1000 . 0{,}05)\ 100 \cos.25^0 = 0{,}9815 . 90{,}63 = 88{,}95 \text{ Fuß},$$

$$y = 0{,}9815 . 100 \sin.25^0 - 31{,}25 \cdot \frac{0{,}01}{2} = 0{,}9815 . 42{,}26 - 0{,}156 = 41{,}32 \text{ Fuß},$$

$$tang.\alpha_1 = tang.25^0 - \frac{31{,}25 . 0{,}1}{(1 - 0{,}03701) . 90{,}63} = 0{,}46631 - \frac{3{,}125}{0{,}9630 . 90{,}63}$$
$$= 0{,}46631 - 0{,}00358 = 0{,}46273,$$

hiernach ist der Steigwinkel selbst:

$$\alpha_1 = 24^0 50',$$

und die Curvengeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{(0,9630 \,.\, 1000)^2 - 2 \,.\, 0,9630 \,.\, 1000 \,.\, 31,25 \,.\, 0,04226 + (3,125)^2}$$
$$= \sqrt{927369 - 2543 + 10} = \sqrt{924836} = 961,68 \text{ Fuß}.$$

Nimmt man von Neuem $\tau = 0,1$ Secunde an, so erhält man, da für $v = 962$ Fuß, $\zeta = 0,88$ und folglich $\mu = 0,88 \,.\, 0,00041122 = 0,0003619$ zu setzen ist:

$$x_1 = (1 - 0,0003619 \,.\, 961,7 \,.\, 0,05) \,.\, 96,17 \,.\, \cos. 24^0\, 50'$$
$$= 0,9825 \,.\, 96,17 \,.\, 0,9075 = 85,75 \text{ Fuß},$$
$$y_1 = 0,9825 \,.\, 96,17 \,.\, \sin. 24^0\, 50' - 0,156 = 39,53,$$

ferner:

$$tang.\, \alpha_2 = tang.\, 24^0\, 50' - \frac{3,125}{0,9652 \,.\, 96,17 \,.\, \cos. 24^0\, 50'}$$
$$= 0,46277 - 0,00371 = 0,15906,$$

hiernach:

$$\alpha_2 = 24^0\, 39' \text{ und}$$
$$v_2 = \sqrt{(0,9652 \,.\, 961,7)^2 - 2 \,.\, 0,9652 \,.\, 961,7 \,.\, 31,25 \,.\, 0,04200 + (3,125)^2}$$
$$= \sqrt{861590 - 2347 + 10} = \sqrt{859163} = 926,92 \text{ Fuß}.$$

Nochmals $\tau = 0,1$ Secunde angenommen und $v = 927$ Fuß entsprechend, $\zeta = 0,87$ gesetzt, folgt:

$$\mu = 0,87 \,.\, 0,00041122 = 0,0003578,$$

und daher:

$$x_2 = (1 - 0,0003578 \,.\, 926,9 \,.\, 0,05) \,.\, 92,69 \,.\, \cos. 24^0\, 39' = 0,9834 \,.\, 92,69 \,.\, 0,9089$$
$$= 82,85 \text{ Fuß, sowie}$$
$$y_2 = 0,9834 \,.\, 92,69 \sin. 24^0\, 39' - 0,156 = 37,86 \text{ Fuß}.$$

Es ist hiernach der Ort des abgeschossenen Körpers nach 0,3 Secunden in Hinsicht auf den Anfangspunkt durch die Coordinaten

$$x + x_1 + x_2 = 88,95 + 85,75 + 82,85 = 257,55 \text{ Fuß und}$$
$$y + y_1 + y_2 = 41,32 + 39,53 + 37,86 = 118,71 \text{ Fuß bestimmt.}$$

Ohne Luftwiderstand und ohne Schwere wäre

$$x + x_1 + x_2 = c\, t \cos. \alpha = 1000 \,.\, 0,3 \,.\, \cos. 25^0 = 300 \,.\, 0,9063 = 271,89 \text{ Fuß},$$

sowie:

$$y + y_1 + y_2 = c\, t \sin. \alpha = 300 \,.\, \sin. 25^0 = 300 \,.\, 0,4226 = 126,78 \text{ Fuß},$$

und bloß ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft:

$$x + x_1 + x_2 = 271,89 \text{ Fuß, sowie}$$
$$y + y_1 + y_2 = 126,78 - \frac{g\, t^2}{2} = 126,78 - 31,25 \cdot \frac{0,09}{2} = 126,78 - 1,41$$
$$= 125,37 \text{ Fuß}.$$

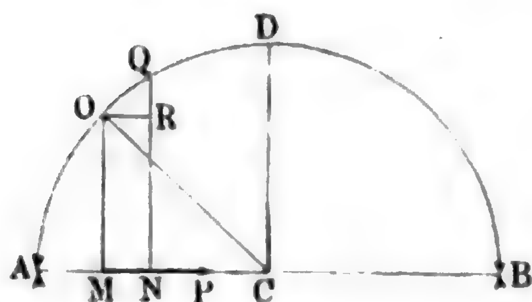
Anhang.

Die Theorie der Schwingungen.

(§. 1) **Schwingungstheorie.** Ein Körper hat eine schwingende Bewegung (franz. mouvement oscillatoire; engl. oscillatory motion) oder ist in Schwingung (franz. und engl. oscillation), wenn er wiederholt in gleichen Zeiten denselben Weg hin- und zurückläuft. Die Natur bietet uns außer der Bewegung eines Pendels noch viele andere Schwingungsbewegungen dar. Die vorzüglichste Ursache einer solchen Bewegung ist eine Kraft, welche den schwingenden Körper nach einem und demselben Punkte hinzieht oder hintreibt. So ist es z. B. die Schwerkraft, welche ein Pendel in schwingende Bewegung setzt. Wenn ein vorher in Ruhe befindlicher Körper ungestört der Kraft folgen kann, welche denselben nach einem gewissen Punkte hintreibt, so erfolgt die Schwingung desselben in einer geraden Linie; außerdem aber nimmt er Schwingungen in einer Curve an, wie z. B. ein Pendel, wo die Wirkung der Schwerkraft durch die Verbindung des Körpers mit einem festen Punkte fortwährend gestört wird. Ebenso erfolgen oft Schwingungen in krummen Linien, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Körpers eine andere Richtung hat als die Kraft.

Der einfachste und am häufigsten vorkommende Fall ist der, wenn die Kraft der Entfernung von einem gewissen Punkte C proportional ist.

Fig. 874.



Es sei A, Fig. 874, der Anfangspunkt der Bewegung, C der Sitz der Kraft, d. i. der Ort des Körpers, wo die Kraft Null ist, und M der veränderliche Ort des Körpers. Bezeichnen wir nun den Abstand CM durch x und bedeutet μ eine constante Erfahrungszahl, so können wir die Acceleration des Körpers in M,

$$p = \mu x$$

setzen, und erhalten sonach für die Geschwindigkeit v des Körpers (s. §. 20, III.), da x um $MN = \partial x$ abnimmt, wenn der Weg AM um ebensoviel wächst,

$$\frac{1}{2} v^2 = -\int p \partial x = -\mu \int x \partial x = -\frac{\mu x^2}{2} + Con.$$

Nun ist aber in A, $v = 0$ und x eine bestimmte Größe $CA = a$, daher hat man:

$$0 = -\frac{\mu a^2}{2} + Con., \text{ und}$$

$$v^2 = \mu (a^2 - x^2),$$

also die Geschwindigkeit selbst,

$$v = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)}.$$

Kommt der Körper in C an, ist also $x = 0$, so wird v ein Maximum, und zwar:

$$v = c = \sqrt{\mu a^2} = a \sqrt{\mu}.$$

Jenseits von C nimmt v wieder allmälig ab, und ist die Entfernung x von C, $CB = -a$, so fällt wieder $v = 0$ aus, und es kehrt nachher der Körper mit wachsender Geschwindigkeit nach C zurück. Diese rückgängige Bewegung erfolgt genau nach demselben Gesetze, wie die hingehende; es ist in C, $v = -c$ und in A, $v = 0$. Auf diese Weise wiederholt sich die Bewegung ohne Ende in dem Raume $AB = 2a$, die man deshalb die doppelte Schwingungsweite (franz. amplitude des oscillations; engl. amplitude of oscillations) nennt.

Die Zeit, während welcher der schwingende Körper einen gewissen Weg (§. 2) $AM = x_1$, Fig. 875, zurücklegt, läßt sich, wie folgt, bestimmen. Wird in dem Zeitelemente ∂t das Wegelement $MN = \partial x_1 = -\partial x$ zurückgelegt, so hat man nach (§. 20, I.):

$$\partial x_1 = v \partial t, \text{ d. i. } \partial x = -\sqrt{\mu (a^2 - x^2)}\, \partial t;$$

und daher umgekehrt:

$$\partial t = -\frac{\partial x}{\sqrt{\mu (a^2 - x^2)}}.$$

Beschreiben wir über AB mit dem Halbmesser $CA = CB = a$ einen Kreis ADB, so erscheint in demselben $\sqrt{a^2 - x^2}$ als Ordinate $MO = y$, und es ist daher:

$$\partial t = -\frac{\partial x}{\sqrt{\mu} . y}.$$

Setzen wir ferner den der Abscisse $CM = x$ entsprechenden Bogen $DO = s$, und das Element OQ desselben $= -\partial s$, so giebt uns die Aehnlichkeit gewisser Dreiecke OQR und OCM, in welchen $OR = -\partial x$,

$OQ = -\partial s$, $MO = y$ und $OC = a$ ist, die Proportion:

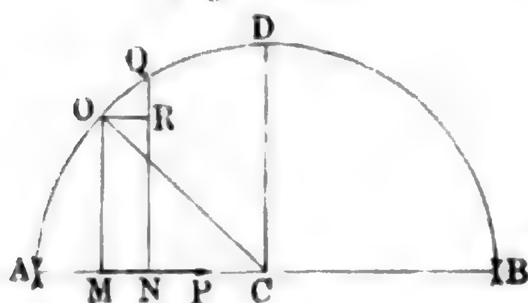


Fig. 875.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{y}{a}, \text{ daher:}$$

$$\frac{\partial x}{y} = \frac{\partial s}{a}, \text{ und es folgt sonach:}$$

$$\partial t = -\frac{\partial s}{\sqrt{\mu} \, . \, a}, \text{ sowie}$$

$$t = -\int \frac{\partial s}{\sqrt{\mu} \, . \, a} = -\frac{s}{\sqrt{\mu} \, . \, a} + Con.$$

Nun ist aber für den Anfangspunkt A, $t = 0$ und s der Quadrant $DA = \frac{1}{2} \pi a$, daher hat man:

$$0 = -\frac{\frac{1}{2} \pi a}{\sqrt{\mu} \, . \, a} + Con.,$$

und die Schwingungsdauer oder die Zeit, innerhalb welcher A nach M kommt:

$$t = \frac{\frac{1}{2} \pi a}{\sqrt{\mu} \, . \, a} - \frac{s}{\sqrt{\mu} \, . \, a} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{s}{a}\right).$$

Für die halbe Schwingungsdauer, d. i. für die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach dem Ruhe- oder Mittelpunkt C kommt, ist $s = 0$, daher

$$t = \frac{\pi}{2 \sqrt{\mu}},$$

ferner die Zeit einer ganzen Schwingung oder zum Durchlaufen des Weges $AB = 2a$,

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},$$

endlich die Zeit, innerhalb welcher der Körper nach A zurückkehrt, ist:

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Eben so groß ist auch die Schwingungsdauer, oder die Zeit zum Durchlaufen eines Weges $2AB = 4a$, wenn dieselbe an einem anderen Orte M zu zählen angefangen wird; denn die Zeit für den Weg MB hin und zurück ist

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen } OB}{\sqrt{\mu} \, . \, a},$$

und die für den Weg MA hin und zurück:

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen } OA}{\sqrt{\mu} \, . \, a};$$

folglich die Zeit für den Weg $2MB + 2MA$,

$$= 2 \cdot \frac{\text{Bogen } (OB + OA)}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2 . \pi a}{a\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Es hängt also die Schwingungsdauer gar nicht von der Amplitude ab. Gehen wir von dem Ruhepunkte C aus, so können wir einfacher die Zeit, welche der Elongation $CM = x$ entspricht, setzen

$$t = \frac{s}{\sqrt{\mu} . a},$$

oder, da $s = a\, arc. \left(sin. = \frac{x}{a}\right)$ ist:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, arc. \left(sin. = \frac{x}{a}\right), \text{ und umgekehrt:}$$

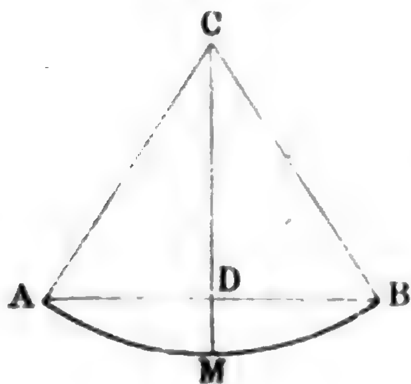
$$x = a\, sin. (t\sqrt{\mu}),$$

sowie:

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - a^2 [sin. (t\sqrt{\mu})]^2} = \sqrt{\mu} . a \sqrt{1 - [sin. (t\sqrt{\mu})]^2}$$
$$= \sqrt{\mu} . a\, cos. (t\sqrt{\mu}).$$

Anmerkung. Die vorstehende Schwingungstheorie läßt sich sogar auf das Kreispendel CM, Fig. 876, anwenden, wenn man kleine Schwingungsbögen voraussetzt. Es ist die Beschleunigung des im Bogen AMB schwingenden Punktes an der Stelle A:

Fig. 876.



$$p = g\, sin. ACD = \frac{DA}{CA} \cdot g,$$

oder da bei kleinen Elongationen $DA = MA$ gesetzt werden kann:

$$p = \frac{MA}{CA} \cdot g.$$

Bezeichnet man nun CA mit r und MA mit x, so erhält man:

$$p = \frac{g x}{r},$$

und daher durch Vergleichung mit der Formel $p = \mu x$ des vorigen Paragraphen:

$$\mu = \frac{g}{r}.$$

Folglich ist die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \text{ (vergl. §. 321).}$$

Längenschwingungen. Die vorzüglichste Ursache schwingender Bewe- (§. 3
gungen ist die Elasticität der Körper. Den einfachsten Fall bietet ein Faden oder eine Stange (Draht) OC, Fig. 877 (a. f. S.), dar, wenn derselbe durch ein Gewicht G gespannt wird. Führt man dieses Gewicht von dem Ruhepunkte C in der Axenrichtung des Fadens um einen Weg $CA = a$ fort, und überläßt man es nun sich selbst, so wird es in Folge der Elasticität des

Fadens wieder bis C gehoben, kommt daselbst mit einer gewissen Geschwindigkeit c an, und steigt durch seine lebendige Kraft bis zu einem Punkte B, von wo aus es wieder zurückfällt u. s. w. In dem Ruhepunkte wird das Gewicht G von der Elasticität $\frac{\lambda}{l} F E$ (s. §. 204) der Stange aufgehoben, es ist folglich hier die bewegende Kraft:

Fig. 877.

$$P = \frac{\lambda}{l} F E - G = 0, \text{ also } \frac{\lambda}{l} F E = G.$$

Ist aber das Gewicht in einem tieferen Punkte N, welcher um $CN = x$ von C absteht, so fällt die bewegende Kraft

$$P = \frac{\lambda + x}{l} F E - G = \frac{\lambda}{l} F E + \frac{x}{l} F E - G$$

$$= \frac{F E}{l} x$$

aus, und befindet es sich in einem höheren Punkte Q, so ist diese Kraft:

$$P = G - \frac{\lambda - x}{l} F E = G - \frac{\lambda}{l} F E + \frac{x}{l} F E = \frac{F E}{l} x.$$

Vernachlässigen wir die Masse der Stange, so ist folglich die Acceleration, mit welcher sich das Gewicht G nach C zurückbewegt:

$$p = \frac{P}{G} g = \frac{F E}{G l} g x, \text{ und daher:}$$

$$\mu = \frac{F E g}{G l},$$

wenn $p = \mu x$ gesetzt wird, F den Querschnitt, l die Länge und E den Elasticitätsmodul der Stange bezeichnen. Da dieses Gesetz mit dem in den vorigen Paragraphen behandelten Fall übereinstimmt, so haben wir auch hier die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{G l}{F E g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G l}{F E}}.$$

Setzt man statt F das Gewicht $G_1 = F l \gamma$ der Stange und statt E den Elasticitätsmodul $L = \frac{E}{\gamma}$ nach Länge (s. §. 204, Anmerk. 1) ein, so erhält man auch:

$$t = \frac{\pi l}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G}{G_1 L}}.$$

Wenn man umgekehrt, die Schwingungszeit t beobachtet, so kann man die Elasticitätsmodeln berechnen, indem man setzt:

$$E = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G l}{F} \text{ oder } L = \frac{\pi^2 l^2}{g t^2} \cdot \frac{G}{G_1}.$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die Schwingung der Stange nur durch bloßes Anhängen des Gewichtes (in B) hervorgebracht wird; es ist hier die Amplitude zu beiden Seiten von C:

$$a = \lambda = \frac{G}{F E} l,$$

wogegen wir oben $a < \lambda$ angenommen haben.

Beispiel. Wenn ein Eisendraht von 20 Fuß Länge und 0,1 Zoll Dicke durch ein Gewicht $G = 100$ Pfund in Längenschwingungen versetzt wird, deren Zeitdauer $^1/_9$ Secunde ist, so hat man $t = {}^1/_{18}{}''$ und den Elasticitätsmodul desselben:

$$E = 0{,}032 \,.\, \pi^2 \,.\, 18^2 \cdot \frac{100 \,.\, 20 \,.\, 4}{(0{,}1)^2 \,.\, \pi} = 0{,}032 \,.\, 8000 \,.\, 18^2\, \pi$$
$$= 25600 \,.\, 324\, \pi = 26'000000 \text{ Pfund}.$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich auch anwenden, wenn das Gewicht (§. 4) G zusammendrückend auf eine steife prismatische Stange wirkt. Ebenso finden dieselben noch ihre Anwendung, wenn das an das untere Stangenende angehängte Gewicht gleich anfangs mit einer gegebenen Geschwindigkeit v niedergeht. Nach dem Principe der mechanischen Arbeiten ist in diesem Falle für die Fallhöhe h von G:

$$G h + G \frac{v^2}{2 g} = \frac{h}{l} F E \cdot \frac{h}{2} = \frac{F E}{2 l} \cdot h^2, \text{ daher:}$$

$$h = \frac{G l}{F E} + \sqrt{\left(\frac{G l}{F E}\right)^2 + \frac{2 G l}{F E} \cdot \frac{v^2}{2 g}}.$$

Nach Durchlaufung dieses Weges hat das Gewicht G seine Geschwindigkeit verloren und steigt nun in Folge der Elasticität bis A zurück, wo es wieder mit der Geschwindigkeit v ankommt. Endlich aber erhebt es sich in Folge seiner lebendigen Kraft $G \frac{v^2}{2 g}$, indem es die Stange comprimirt, noch um eine Höhe h_1, ehe es wieder zurückkehrt und eine neue Schwingung beginnt. Für diese zweite Höhe ist

$$G \frac{v^2}{2 g} = G h_1 + \frac{F E}{2 l} h_1^2, \text{ und daher:}$$

$$h_1 = - \frac{G l}{F E} + \sqrt{\left(\frac{G l}{F E}\right)^2 + \frac{2 G l}{F E} \cdot \frac{v^2}{2 g}}.$$

Durch Addition von h und h_1 erhält man nun die ganze Schwingungsamplitude:

$$2 a = h + h_1 = 2 \sqrt{\left(\frac{G l}{F E}\right)^2 + \frac{2 G l}{F E} \cdot \frac{v^2}{2 g}},$$

und daher die einfache Elongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{G\,l}{F\,E}\right)^2 + \frac{2\,G\,l}{F\,E} \cdot \frac{v^2}{2\,g}}.$$

Da auch hier $p = \frac{F\,E}{G\,l}\,g\,x = \mu\,x$ ist, so hat man wie oben, die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G\,l}{F\,E}}.$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit v des Gewichtes G_1 durch ein niederfallendes Gewicht G erzeugt wird, so hat man es mit dem in §. 348 abgehandelten Falle (Fig. 878) zu thun. Lassen wir das Gewicht G mit der Geschwindigkeit c aufschlagen, und setzen wir einen unelastischen Stoß voraus, so haben wir die Anfangsgeschwindigkeit von $G + G_1$:

Fig. 878.

$$v = \frac{G\,c}{G + G_1},$$

daher die größte Schwingungselongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{(G + G_1)\,l}{F\,E}\right)^2 + \frac{2\,G^2\,l}{(G + G_1)\,F\,E} \cdot \frac{c^2}{2\,g}},$$

und die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{(G + G_1)\,l}{F\,E}}.$$

Die Elemente der Stange nehmen an den Schwingungen von G oder $G + G_1$ ebenfalls Antheil, nur ist die Amplitude um so kleiner, je näher das Element dem Aufhängepunkte liegt. Für ein Element C_1, Fig. 877, im Abstande $O\,C_1 = x$ vom Aufhängepunkte ist die Amplitude:

$$y = \frac{x}{l}\,a;$$

wogegen die Schwingungszeit, da diese gar nicht von y oder a abhängt, dieselbe ist wie für G. Es schwingen also alle Elemente der Stange in von C nach O stetig abnehmenden Amplituden isochron.

§. 5 **Querschwingungen.** Auch die Biegungs- sowie die Torsionselasticität bietet Gelegenheiten zu solchen Schwingungen dar, wie wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben. Für eine an einem Ende O festgehaltene und am anderen Ende C durch ein Gewicht G gespannte Stange oder Feder $O\,C$ (Fig. 879) haben wir nach §. 217 die Einbiegung:

$$H\,C = a = \frac{P\,l^3}{3\,W\,E}$$

gefunden; es folgt daher umgekehrt, die Kraft P, mit welcher die Stange gebogen ist,

Fig. 879.

$$P = \frac{3\,W E a}{l^3}.$$

Wird nun diese Kraft durch ein angehängtes Gewicht G ersetzt, und a um $CA = CB = x$ vergrößert oder verkleinert, so hat man die Kraft, mit welcher das Stangenende nach der Ruhelage durch die Elasticität der Stange zurückgetrieben wird:

$$P = \frac{3\,W E(a + x)}{l^3} - G = \frac{3\,W E(a + x)}{l^3} - \frac{3\,W E}{l^3}\,a = \frac{3\,W E}{l^3}\,x;$$

daher die Acceleration, wenn wir bloß die Masse von G in Betracht ziehen:

$$p = \frac{P}{G}\,g = \frac{3\,W E}{G\,l^3}\,g\,x,$$ und, da hiernach $p = \mu x$ zu setzen ist:

$$\mu = \frac{3\,W E}{G\,l^3}\,g.$$

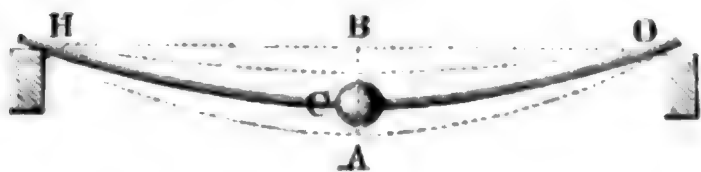
Die Proportionalität zwischen p und x gestattet die Anwendung der Formel in §. 2 (Anhang), weshalb nun die Schwingungszeit

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,l^2}{3\,W E}}$$

folgt.

Für eine an beiden Enden frei aufliegende und in der Mitte C mit einem Gewichte G belastete Stange HO, Fig. 880, ist nach §. 217:

Fig. 880.



$$a = \frac{P\,l^3}{48\,W E},$$

daher die Schwingungsdauer:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{G\,l^3}{48\,W E}}.$$

Bei Berücksichtigung des Stangengewichtes G_1 hat man im ersten Falle, Fig. 879, statt G, $G + \frac{1}{4}\,G_1$, und im zweiten Falle, Fig. 880, statt, G, $G + \frac{1}{2}\,G_1$ einzusetzen.

Aus der beobachteten Schwingungszeit t, läßt sich nun der Elasticitätsmodul berechnen, und zwar für den ersten Fall, mittels der Formel

$$E = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \left(\frac{G + \frac{1}{4}\,G_1}{3\,g\,W}\right) l^3,$$

oder, wenn $n = \frac{1}{t}$ die Anzahl der Doppelschwingungen pro Secunde bezeichnet,

$$E = (\pi n)^2 \left(\frac{G + \frac{1}{4} G_1}{3 g W}\right) l^3.$$

Beispiel. Ein Fichtenholzstab von 1 Centimeter Breite und Höhe wurde in zwei von einander 100 Centimeter abstehenden Punkten unterstützt, und in der Mitte von dem Gewichte $G = 1{,}37$ Kilogramm, um $a = 3{,}2$ Centimeter niedergezogen. Deshalb ist hiernach der Elasticitätsmodul des Fichtenholzes:

$$E = \frac{P l^3}{48\, W a} = \frac{1{,}37 \, . \, 1000000}{48 \, . \, \frac{1}{12} \, . \, 3{,}2} = 107031 \text{ Kilogramm},$$

während in der Tabelle auf Seite 370, $E = 110000$ Kilogramm angegeben wird.

Ferner wurde dieser Stab an einem Ende eingeklemmt, am anderen Ende mit dem Gewichte $G = 0{,}31$ belastet und in Schwingungen versetzt, wobei die Anzahl der Schwingungen in 35 Secunden, $= 100$ ausfiel. Das Gewicht des Stabes war $G_1 = 0{,}044$ Kilogramm, folglich ist $G + \frac{1}{4} G_1 = 0{,}321$ Kilogramm, und

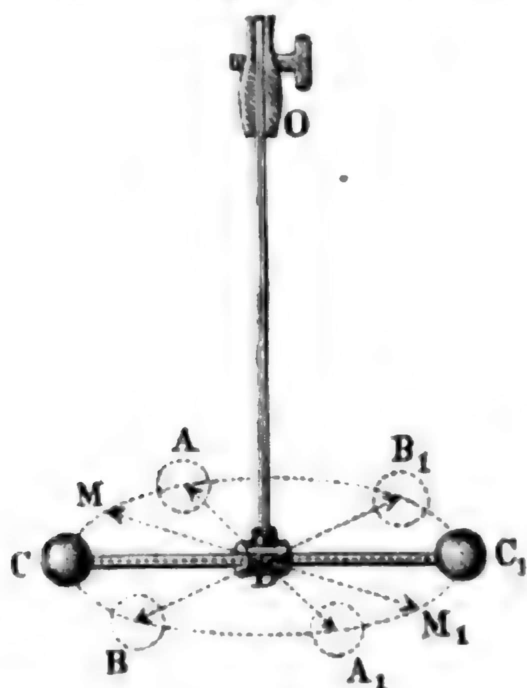
$$E = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \cdot \left(\frac{G + \frac{1}{4} G_1}{3 g W}\right) l^3 = \left(\frac{3{,}141}{0{,}35}\right)^2 \cdot \frac{321000}{981 \, . \, \frac{3}{12}}$$

$$= 80{,}57 \cdot \frac{1281000}{981} = 105260 \text{ Kilogramm},$$

also nahe gleich dem durch die Biegungsversuche gefundenen Werthe von E.

§. 6 **Torsionsschwingungen.** Die Formel $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ findet endlich auch bei dem **Torsionspendel** (franz. balance de torsion; engl. torsion-rod), d. i. bei einem Faden oder einer Stange DO, Fig. 881, statt, welche vermöge ihrer Torsion um ihre eigene Axe schwingt. In der Regel versieht man dieses Pendel mit einem belasteten Querarme CC_1, mittels dessen die anfängliche Drehung des Fadens hervorgebracht wird, indem man diesen Arm aus der Ruhelage CC_1 in die Lage AA_1 bringt. Die Torsion dreht dann den Arm nach CC_1 zurück, und vermöge der Trägheit geht derselbe auch noch weiter bis BB_1, von wo aus er nach CC_1 und AA_1 u. s. w. zurückkehrt. Wir haben oben (§. 262) das Torsionsmoment eines prismatischen Körpers

Fig. 881.



$$P a = \frac{\alpha W C}{l}$$

gefunden; und wissen hiernach, daß dasselbe umgekehrt wie die Länge $OD = l$ des Stabes und direct wie der Torsionswinkel $MDC = \alpha$ wächst; ist nun $G k^2$ das Trägheitsmoment des Armes CDC_1, folglich $\frac{k^2}{a^2} \frac{G}{g}$ die auf die Armenden C und C_1 reducirte träge Masse M desselben, so folgt die Acceleration dieser Punkte:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\alpha W C}{l a} : \frac{r^2 G}{a^2 g} = \frac{\alpha a W C g}{G k^2 l}.$$

Bezeichnen wir noch den Bogen $CM = \alpha a$, welcher der Armlänge $DA = DC = a$ und dem veränderlichen Elongationswinkel $CDM = \alpha$ entspricht, durch x, so erhalten wir den Ausdruck:

$$p = \frac{W C g}{G k^2 l} x,$$ und können wieder $p = \mu x$ setzen, also:

$$\mu = \frac{W C g}{G k^2 l}$$ annehmen.

Es ist folglich auch die Schwingungsdauer, der Schwingungsbogen $A C B = A_1 C_1 B_1$ mag groß oder klein sein:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2 l}{W C}}.$$

Umgekehrt folgt

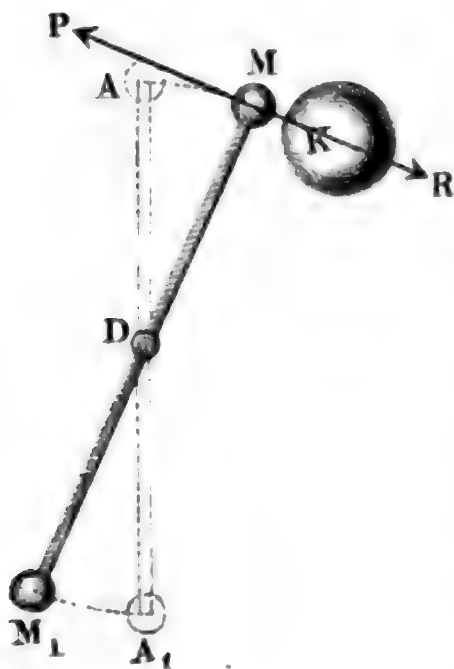
$$W C = \frac{\pi^2}{g t^2} G k^2 l,$$

und daher das Torsionsmoment

$$P a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \alpha G k^2.$$

Anmerkung. Vorstehende Formeln für die Schwingungen, welche durch die Elasticität fester Körper hervorgebracht werden, gelten natürlich nur so lange, als mit den Schwingungselongationen die Elasticitätsgrenze nicht erreicht wird. Bei allen Maschinentheilen sind die Schwingungen möglichst zu vermeiden, weil das Arbeitsquantum, welches auf dieselben verwendet wird, für die Maschinen verloren geht; deshalb sind diese Theile höchst sorgfältig mit einander zu verbinden, und es ist zumal ein sogenannter tauber Gang zu vermeiden, der zu Stößen und Schwingungen Veranlassung giebt.

Fig. 882.



Dichtigkeit der Erde. Die Theorie des Torsionspendels findet ihre unmittelbare Anwendung bei der Bestimmung der **mittleren Dichtigkeit** oder des specifischen Gewichtes ε unserer **Erde**. Nähert man dem einen Gewichte G am Armende ADA_1, Fig. 882, eines Torsionspendels eine schwere Kugel K, so rückt dasselbe in Folge der Anziehung um einen Weg $AM = x$ näher; es setzt sich in diesem neuen Orte M von G die Anziehungskraft R von K mit der Torsionskraft P ins Gleichgewicht, und es läßt sich daher auch die eine durch die andere bestimmen. Lassen wir nun nach Entfernung der Kugel K das Torsionspendel schwingen, so §. 7

können wir die Schwingungsdauer desselben ermitteln und hieraus die Torsionskraft berechnen. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Schwingungsdauer

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},\ \mu = \frac{p}{x} \text{ und } p = \frac{\text{Torsionskraft}}{\text{Masse des Pendels}} = \frac{P a^2}{G k^2} g,$$

wenn $G k^2$ das Trägheitsmoment und a die Armlänge des Pendels bezeichnen; daher hat man umgekehrt, die Torsions- oder Anziehungskraft:

$$P = \frac{G k^2 p}{g a^2} = \frac{\mu G k^2 x}{g a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 x}{a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 \alpha}{a},$$

und das dem Drehungswinkel α entsprechende Torsionsmoment:

$$P a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \alpha G k^2.$$

Wenn nun die Anziehungskräfte der Körper wie die Massen derselben und umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen wachsen (s. §. 302, Beispiel 3), so können wir die von K hervorgebrachte Anziehungskraft P mit dem der Anziehungskraft der Erde entsprechenden Gewichte Q des kleinen Körpers an der Torsionswage wie folgt vergleichen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{K : s^2}{E : r^2},$$

wobei s die Entfernung MK der Mittelpunkte r beider Massen G und K von einander, r den Halbmesser der Erde und E das Gewicht derselben bezeichnen. Wir erhalten nun das letztere:

$$E = \frac{K Q r^2}{P s^2},$$

und wenn wir statt $E = {}^4/_3\, \pi r^3 . \varepsilon \gamma$ setzen, die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$\gamma_1 = \varepsilon \gamma = \frac{3 E}{4 \pi r^3} = \frac{3 K Q r^2}{4 \pi P r^3 s^2} = \frac{3 K Q}{4 \pi P r s^2} = \frac{3 K Q}{4 \pi r s^2} \cdot \frac{g t^2 a^2}{\pi^2 G k^2 x},$$

oder, wenn wir statt $\frac{g}{\pi^2}$ die Länge l des Secundenpendels (s. §. 323) einführen:

$$\gamma_1 = \varepsilon \gamma = \frac{3 K l t^2}{4 \pi r x s^2} \cdot \frac{Q a^2}{G k^2},$$

und daher das mittlere specifische Gewicht der Erde:

$$\varepsilon = \frac{3 K l t^2}{4 \pi r x s^2} \cdot \frac{Q a^2}{G k^2 \gamma}.$$

Setzt man annähernd $G k^2 = Q a^2$, so erhält man einfacher:

$$\varepsilon = {}^3/_4\, \frac{K l t^2}{\pi r x s^2 \gamma}.$$

Mittels des einfachen Torsionspendels oder der sogenannten Coulomb'schen Drehwage fand zuerst Cavendish: $\varepsilon = 5{,}48$;
oder nach Hutton's Revision: $\varepsilon = 5{,}32$;

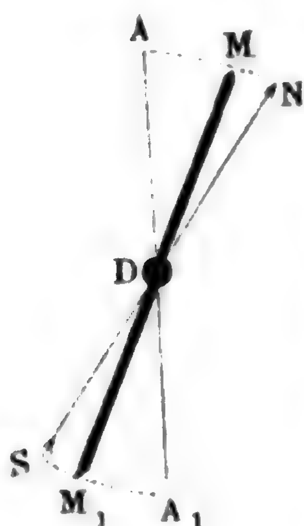
später bei Zuhülfenahme des Gauß-Poggendorff'schen Spiegelapparates, Reich: $\varepsilon = 5{,}43$,
dagegen Baily, durch Versuche in größerem Maßstabe: $\varepsilon = 5{,}675$.

Bei Wiederholung der Versuche wurde von Reich: $\varepsilon = 5{,}583$ gefunden. (S. „Neue Versuche mit der Drehwage, Leipzig 1852.") Es ist hiernach die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr gleich der Dichtigkeit des Eisenglanzes.

Anmerkung. Ueber die Ausführung der Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde ist nachzusehen: Gehler's physikal. Wörterbuch, Bd. III.; ferner die Abhandlung von Reich „Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde, Freiberg 1838," und die von Baily, Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the Earth, London 1843.

Magnetnadel. Die Torsionswage wird auch angewandt, um die Directionskraft oder das Drehungsmoment eines Magneten oder einer Magnetnadel (franz. aiguille aimantée; engl. magnetic-needle) zu finden. Ersetzen wir den Querarm einer solchen Wage durch eine Magnetnadel oder einen Magnetstab MDM_1, Fig. 883, so stellt sich derselbe so, §. 8

Fig. 883.



daß seine Directionskraft von der Torsionskraft aufgehoben wird. Weicht der unmagnetische Arm in der Ruhelage AA_1 um den Winkel $ADN = \alpha$ vom magnetischen Meridiane NS ab, und stellt sich der Magnetstab MM_1 so, daß seine Axe um den Winkel $MDN = \delta$ von dem Meridiane NS absteht, so haben wir denjenigen Componenten R_1 der parallel NS wirkenden Directionskraft R, welcher die Umdrehung der Nadel bewirkt und von der Torsionskraft aufgehoben wird: $R_1 = R sin. \delta$.

Die Torsionskraft P ist hingegen dem Torsionswinkel $MDA = \alpha - \delta$ proportional, läßt sich daher

$$P = P_1 \, (\alpha - \delta)$$

setzen; man hat daher: $R sin. \delta = P_1 \, (\alpha - \delta)$, und folglich:

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{sin. \delta}\right) P_1 = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1,$$

wenn die Declination oder der Ablenkungswinkel δ klein ist.

Nun läßt sich nach dem vorigen Paragraphen die Torsionskraft P mittels der Formel

$$P = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 x}{a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 a \, (\alpha - \delta)}{a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 \, (\alpha - \delta)}{a}$$

ausdrücken, daher kann man aus der Schwingungsdauer t u. s. w. des unmagnetischen Torsionspendels auch die Directionskraft des Magnetstabes durch die Formel

$$R = \left(\frac{\alpha - \delta}{\delta}\right) P_1 = \frac{P}{\delta} = \frac{\alpha - \delta}{\delta} \cdot \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2}{a}$$

berechnen.

Das Moment dieser Kraft ist bei der Declination $MDN = \delta$ der Nadel, wenn wir annehmen, daß dieselbe ihren Sitz in dem Abstande $DM = a$ von der Drehungsaxe habe:

$$R_1 a = R a \sin. \delta \text{ annähernd, bei kleiner Declination}$$

$$= R a \delta = (\alpha - \delta) \cdot \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2.$$

Dieses Moment ($R a \sin. \delta$) ist für $\sin. \delta = 1$, d. h. wenn die Magnetnadel rechtwinkelig gegen die Magnetrichtung steht, am größten, und zwar $= R a$, und dagegen für $\delta = 0$, d. h. wenn die Axe der Magnetnadel in den magnetischen Meridian fällt, am kleinsten, nämlich = Null.

§. 9 **Magnetismus.** Da die Directionskraft R der Magnetnadel keinen Druck auf die Drehaxe verursacht, also die Nadel kein Bestreben zum Fortschreiten, sondern nur ein Bestreben zur Drehung hat, wenn sie außerhalb des magnetischen Meridians steht, so folgt, daß die ganze Wirkung des Erdmagnetismus auf einen Magnet aus einem Kräftepaare $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ mit dem größten Momente $R a$ bestehen müsse. Da sich ferner jedes Kräftepaar $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ durch unendlich viele andere Paare $\left(\frac{R_1}{2}, -\frac{R_1}{2}\right), \left(\frac{R_2}{2}, -\frac{R_2}{2}\right)$ u. s. w ersetzen läßt, deren Momente $R a$, $R_1 a_1$, $R_2 a_2$ u. s. w. alle einander gleich sind, so folgt, daß weder R noch a, also weder die Directionskraft noch ihr Angriffspunkt, sondern nur ihr Moment $R a$ bestimmt ist. Dieses Drehungsmoment $R a$ ist überdies noch von zwei Factoren μ_1 und S, wovon μ_1 dem Erd- und S dem Stab- oder Nadelmagnetismus entspricht, abhängig, weshalb wir

$$R = \mu_1 S \text{ und } R a = \mu_1 S a$$

setzen können. Was endlich noch das Maß μ_1 des Erdmagnetismus anlangt, so ist dieses bei einer horizontalschwingenden Nadel, wie wir seither angenommen haben, nur der horizontale Component der Intensität μ des ganzen Erdmagnetismus, denn der verticale Component μ_2 wird durch die Unterstützung oder Aufhängung der Nadel aufgehoben. Ist ι die Inclination oder die Abweichung der magnetischen Erdaxe von dem Horizonte, so haben wir den horizontalen Componenten:

$$\mu_1 = \mu \cos. \iota,$$

dagegen den verticalen:

$$\mu_2 = \mu \sin. \iota,$$

und endlich das Drehungsmoment einer Magnetnadel:

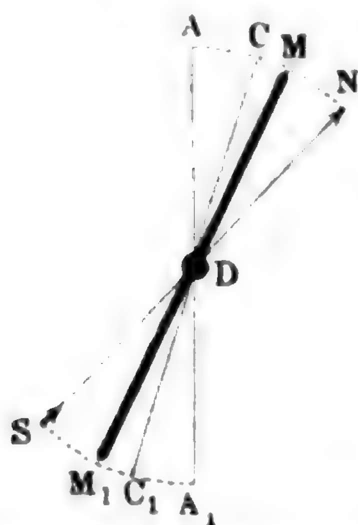
$$R\, a \sin. \delta = \mu \cos. \iota\,.\, S\, a \sin. \delta,$$

also den größten Werth desselben:

$$R\, a = \mu\, S\, a \cos. \iota.$$

Schwingungen einer Magnetnadel. Man kann auch das Drehungsmoment einer Magnetnadel aus der Schwingungszeit derselben selbst berechnen. Bringt man die aufgehängte Magnetnadel MDM_1, Fig. 884, aus ihrer durch das Gleichgewicht zwischen der Torsions- und der Magnetkraft bedingten Ruhelage, so daß sie von dieser um den kleinen Winkel $MDC = \varphi$ abweicht, so nimmt entweder die magnetische Directionskraft R um $R\varphi$ zu und die Torsionskraft um $P_1 \varphi$ ab, oder es tritt das Umgekehrte ein, in jedem Falle erwächst also aus beiden eine Kraft: §. 10

Fig. 884.



$$(R + P_1)\, \varphi,$$

oder ein Moment:

$$(R + P_1)\, \varphi\, a = (R + P_1)\, x,$$

welches den Magneten nach der Ruhelage zurücktreibt. Ist nun $G k^2$ das Trägheitsmoment der Nadel, so haben wir folglich die Beschleunigung, welche dieser Kraft entspricht:

$$p = \frac{(R + P_1)\, a\, x}{G k^2}\, g,$$

und setzen wir dieselbe $= \mu\, x$, so erhalten wir:

$$\mu = \left(\frac{R + P_1}{G k^2}\right) a\, g,$$

sowie die Schwingungsdauer:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{G k^2}{(R + P_1)\, a\, g}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2}{(R + P_1)\, a}},$$

oder, wenn ν das Verhältniß $\frac{P_1}{R} = \frac{\delta}{\alpha - \delta}$ der Torsionskraft zur magnetischen Kraft bezeichnet:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2}{(1 + \nu)\, R\, a}}.$$

Hat man t durch Beobachtungen gefunden, so kann man hiernach umgekehrt, das magnetische Umdrehungsmoment finden, es ist nämlich

$$Ra = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot \frac{G\,k^2}{1 + \nu}.$$

Ist die Torsionskraft klein, fällt namentlich die Ruhelage $M M_1$ nahe in den magnetischen Meridian, so kann man ν vernachlässigen und

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G\,k^2}{R\,a}}, \text{ sowie}$$

$$R\,a = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot G\,k^2 \text{ setzen.}$$

Noch können wir statt $R\,a$ den oben angegebenen Werth einführen und daher das Drehungsmoment durch die Formel

$$\mu\,S\,a\,cos.\,\iota = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot G\,k^2 \text{ ausdrücken.}$$

Für eine im magnetischen Meridiane schwingende Inclinationsnadel ist dagegen:

$$\mu\,S\,a = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot G\,k^2$$

und für eine Nadel, deren Umdrehungsaxe in dem magnetischen Meridiane liegt, die sich daher selbst vertical zu stellen sucht:

$$\mu\,S\,a\,sin.\,\iota = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot G\,k^2.$$

Die Formel $\mu\,S\,a\,cos.\,\iota = \frac{\pi^2}{g\,t^2} \cdot G\,k^2$ giebt uns in $\mu\,S\,a\,cos.\,\iota$ ein Product von vier Factoren; da sich aber die Inclination ι durch Beobachtungen an einer Magnetnadel bestimmen und sich $S\,a$ auf eine bestimmte Weise nicht in seine Factoren zerlegen läßt, so bleibt nur eine Zerlegung des bekannten Productes $\mu\,S\,a$ in die Factoren μ und $S\,a$ zu vollziehen übrig. Wie sich diese Zerlegung mittels Declinationsbeobachtungen ermöglichen läßt, wird aus Folgendem hervorgehen.

§. 11 **Magnetische Anziehungsgesetze.** Die Kräfte, mit welchen sich die ungleichnamigen Pole zweier Magnete anziehen und die gleichnamigen Pole derselben abstoßen, stehen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen zu einander. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten durch die Beobachtungen an einer kleinen Magnetnadel, welche man in der Nähe eines größeren Magnetstabes schwingen läßt. Zu diesem Zwecke legt man den Magnetstab horizontal und parallel dem magnetischen Meridiane, so daß sein Nordpol gegen Nord, also sein Südpol gegen Süd gekehrt ist, und bringt eine kleine Declinationsnadel in die Verlängerung der Axe des Magnetstabes. Ist der Abstand s des Stiftes dieser Nadel von dem einen Pole des

Mangnetstabes viel kleiner als der Abstand von dem anderen, so kann man die Wirkung des letzteren auf die Nadel Null setzen, und annehmen, daß durch die Wirkung des näheren Poles der Coefficient μ_1 der erdmagnetischen Kraft noch um einen gewissen Werth $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ vergrößert werde. Ist nun die Schwingungszeit der Nadel, $= t$, wenn der Magnetstab sich gar nicht in der Nähe derselben befindet, dagegen $= t_1$, wenn der nähere Pol dieses Stabes um s_1 von dem Stifte der Nadel absteht, und $= t_2$, wenn dieser Pol um s_2 von dem Nadelstifte absteht, so haben wir:

$$\mu_1 Sa = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2,\ (\mu_1 + \varkappa_1)\, Sa = \frac{\pi^2}{g t_1^2} G k^2 \text{ und } (\mu_1 + \varkappa_2) Sa = \frac{\pi^2}{g t_2^2} \cdot G k^2$$

daher folgt durch Division:

$$\frac{\mu_1 + \varkappa_1}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_1^2} \text{ und } \frac{\mu_1 + \varkappa_2}{\mu_1} = \frac{t^2}{t_2^2}, \text{ folglich:}$$

$$\varkappa_1 = \left(\frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2}\right) \mu_1 \text{ und } \varkappa_2 = \left(\frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2}\right) \mu_1, \text{ endlich:}$$

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2} : \frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2},$$

oder, wenn statt t, t_1 und t_2 die Schwingungszahlen

$$n = \frac{60''}{t},\ n_1 = \frac{60''}{t_1} \text{ und } n_2 = \frac{60''}{t_2}$$

eingeführt werden,

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = n_1^2 - n^2 : n_2^2 - n^2.$$

Wenn nun die Wirkung des Magnetstabes auf die Nadel dem umgekehrten Quadrate der Entfernung proportional ist, so muß auch

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = s_2^2 : s_1^2, \text{ und folglich auch}$$

$$\frac{n_1^2 - n^2}{n_2^2 - n_1} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

sein, welches durch die Beobachtungen bestätigt wird.

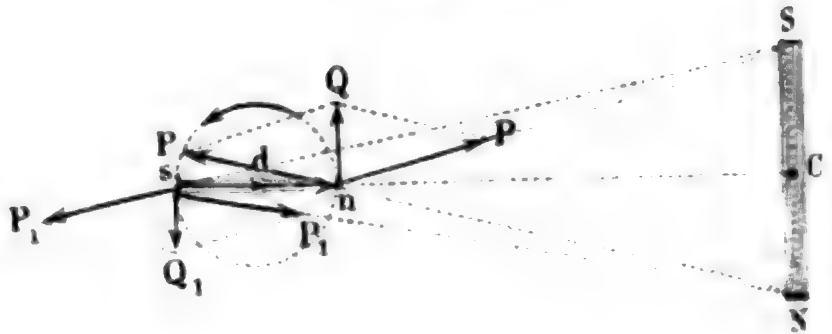
Die Wirkungen eines Magnetstabes NS auf eine Magnetnadel $n\,s$ fallen §. 12 am einfachsten aus, wenn der Magnetstab rechtwinkelig gegen den magnetischen Meridian gelegt wird, und zwar entweder so, daß sich der Stift d der Nadel $n\,s$, Fig. 885 (a. f. S.), in der Verlängerung von NS, oder so, daß er sich in dem durch die Mitte C gehenden Perpendikel von NS, Fig. 886 (a. f. S.), befindet. Setzen wir vor der Hand die Kraft, welche ein Pol von NS auf einen Pol von $n\,s$ in der Entfernung Eins ausübt, $= K$, so haben wir für den ersten Fall, Fig. 885, wenn a die Länge NS und e die Entfernung $C\,d$ der Mittelpunkte C und d der Körper NS und $n\,s$ von einander bezeichnen, die Kraft, mit welcher der Nordpol n von S angezogen wird,

$$P = \frac{K}{Ns^2}, \text{ annähernd } = \frac{K}{(e - \frac{1}{2}a)^2},$$

und die Kraft, mit welcher n von N abgestoßen wird,

Fig. 885.

Fig. 886.



$$P_1 = \frac{K}{Ss^2} = \frac{K}{(e + \frac{1}{2}a)^2},$$

daher die Mittelkraft aus P und P_1:

$$Q = P - P_1 = K\left(\frac{1}{(e - \frac{1}{2}a)^2} - \frac{1}{(e + \frac{1}{2}a)^2}\right)$$

$$= \frac{(e + \frac{1}{2}a)^2 - (e - \frac{1}{2}a)^2}{(e + \frac{1}{2}a)^2\,(e - \frac{1}{2}a)^2}\,K$$

$$= \frac{2\,a\,e\,K}{(e + \frac{1}{2}a)^2\,(e - \frac{1}{2}a)^2},$$

oder, wenn $\frac{1}{2}a$ gegen e klein ist,

$$Q = \frac{2aeK}{e^4} = \frac{2aK}{e^3}.$$

Ebenso ist die Mittelkraft aus der Anziehungs- und Abstoßungskraft des Südpoles s:

$$Q = -\frac{2aK}{e^3},$$

und daher das Moment des von diesen Mittelkräften gebildeten Kräftepaares, wenn l die Entfernung der Pole der Nadel von einander bezeichnet,

$$Ql = \frac{2alK}{e^3}.$$

Für den zweiten Fall (Fig. 886) sind hingegen die Anziehungs- und Abstoßungskräfte in s:

$$P = \frac{K}{Ns^2} = \frac{K}{Ss^2}, \text{ und die in } n:$$

$$P_1 = \frac{K}{Sn^2} = \frac{K}{Nn^2},$$

folglich die resultirenden Mittelkräfte:

$$Q = 2 \cdot \frac{CN}{Ns} \cdot P = \frac{aP}{Ns} = \frac{aK}{Ns^3} \text{ und } Q_1 = \frac{aK}{Nn^3}.$$

Wenn nun $\frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}l$ ansehnlich kleiner sind als e, so können wir statt $\overline{Ns} = \overline{Ss}$ und $\overline{Nn} = \overline{Sn}$ den Mittelwerth $\overline{Nd} = \overline{Sd}$ und dafür den Näherungswerth $\overline{Cd} = e$ einführen, erhalten demnach:

$$Q = Q_1 = \frac{aK}{e^3},$$

und daher das Moment des von Q und Q_1 gebildeten Kräftepaares:

$$Ql = \frac{alK}{e^3},$$

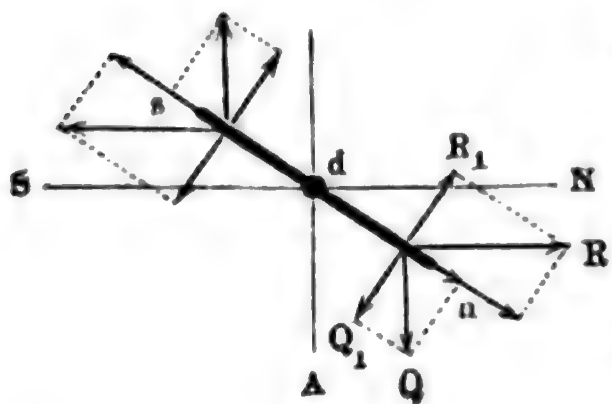
d. i. halb so groß als im vorigen Falle, was auch durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt wird.

Uebrigens ist aber die Kraft K selbst noch ein Product von der Intensität $\varkappa$ des Magnetismus in ns und von der Intensität S in $\overline{NS}$, also $K = \varkappa S$ zu setzen, weshalb nun für den ersten Fall

$$Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3}, \text{ und für den zweiten: } Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3} \text{ resultirt.}$$

Bestimmung des Erdmagnetismus. Ueberlassen wir in beiden der vorher betrachteten Fälle die Magnetnadel ns der Einwirkung des größeren Magneten, so nimmt dieselbe eine neue Stellung ns, Fig. 887, ein, wobei §. 13

Fig. 887.



sich die Kraft Q, mit welcher der Magnetstab auf die Nadel einwirkt, mit der Kraft R, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt, ins Gleichgewicht setzt. Ist nun δ der Ablenkungswinkel $Ndn = Sds$ der Nadel von dem magnetischen Meridian, so haben wir die sich das Gleichgewicht haltenden Seitenkräfte von Q und R:

$$Q_1 = Q \cos. \delta$$

und $R_1 = R \sin. \delta$,

folglich ist $Q \cos. \delta = R \sin. \delta$, und sonach

$$\operatorname{tang.} \delta = \frac{Q}{R},$$

oder, wenn wir nach dem vorigen Paragraphen entweder

$$Q = \frac{2\varkappa Sa}{e^3} \text{ oder } Q = \frac{\varkappa Sa}{e^3},$$

und nach §. 9 Anhang, $R = \mu_1 \varkappa$ setzen,

entweder $tang.\, \delta = \frac{2\varkappa S a}{\mu_1 \varkappa e^3} = \frac{2 S a}{\mu_1 e^3}$ oder $tang.\, \delta = \frac{S a}{\mu_1 e^3}$.

Hiernach läßt sich nun umgekehrt, das Verhältniß des magnetischen Momentes des Stabes zu der Intensität des Erdmagnetismus finden, denn es ist in dem einen Falle

$\frac{S a}{\mu_1} = {}^1/_2\, e^3\, tang.\, \delta$ und im anderen Falle $\frac{S a}{\mu_1} = e^3\, tang.\, \delta$.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer des Magnetstabes giebt uns aber (nach §. 10) das Product:

$$\mu_1 S a = \frac{\pi^2}{g t^2} G k^2;$$

daher folgt durch Combination beider Gleichungen mit einander das magnetische Moment des Stabes

entweder $S a = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{{}^1/_2\, G k^2\, e^3\, tang.\, \delta}$

oder $S a = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{G k^2\, e^3\, tang.\, \delta}$,

und das Maß der horizontalen Componenten des Erdmagnetismus:

entweder $\mu_1 = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{\frac{2\, G k^2\, cotang.\, \delta}{e^3}}$ oder $= \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2\, cotang.\, \delta}{e^3}}$,

je nachdem man δ auf die eine oder die andere Weise beobachtet hat.

Durch Division mit dem Cosinus der Inclination (ι) bekommt man die ganze Stärke des Erdmagnetismus:

$$\mu = \frac{\mu_1}{cos.\, \iota}.$$

Um sich einen klaren Begriff von dem Coefficienten oder dem Maße μ des Erdmagnetismus zu verschaffen, muß man in der Formel

$$R a = \mu S a \text{ und } Q l = \frac{\varkappa S l a}{e^3},\ a = l = e = 1,$$

sowie auch $\varkappa = S = 1$ setzen; dann erhält man $R a = \mu$ und $Q l = 1$; es ist hiernach:

1) das Maß μ der Intensität des Erdmagnetismus dasjenige Moment, mit welchem durch den Erdmagnetismus eine Magnetnadel umgedreht wird, deren magnetisches Moment = Eins ist; und es ist

2) das magnetische Moment einer Magnetnadel = Eins, wenn diese Nadel einer anderen ihr gleichen und mit ihr gleich starken Magnetnadel bei der zweiten, in Fig. 886 abgebildeten Stellung, in der Entfernung Eins ein Moment Eins (1 Millimetermilligramm) ertheilt.

Nach Weber's Angaben ist, wenn die Acceleration der Schwere 1 Millimeter wäre:

in Göttingen $\mu = 1{,}774$ Millimetermilligramm,
in München $\mu = 1{,}905$ „ „
in Mailand $\mu = 2{,}018$ „ „

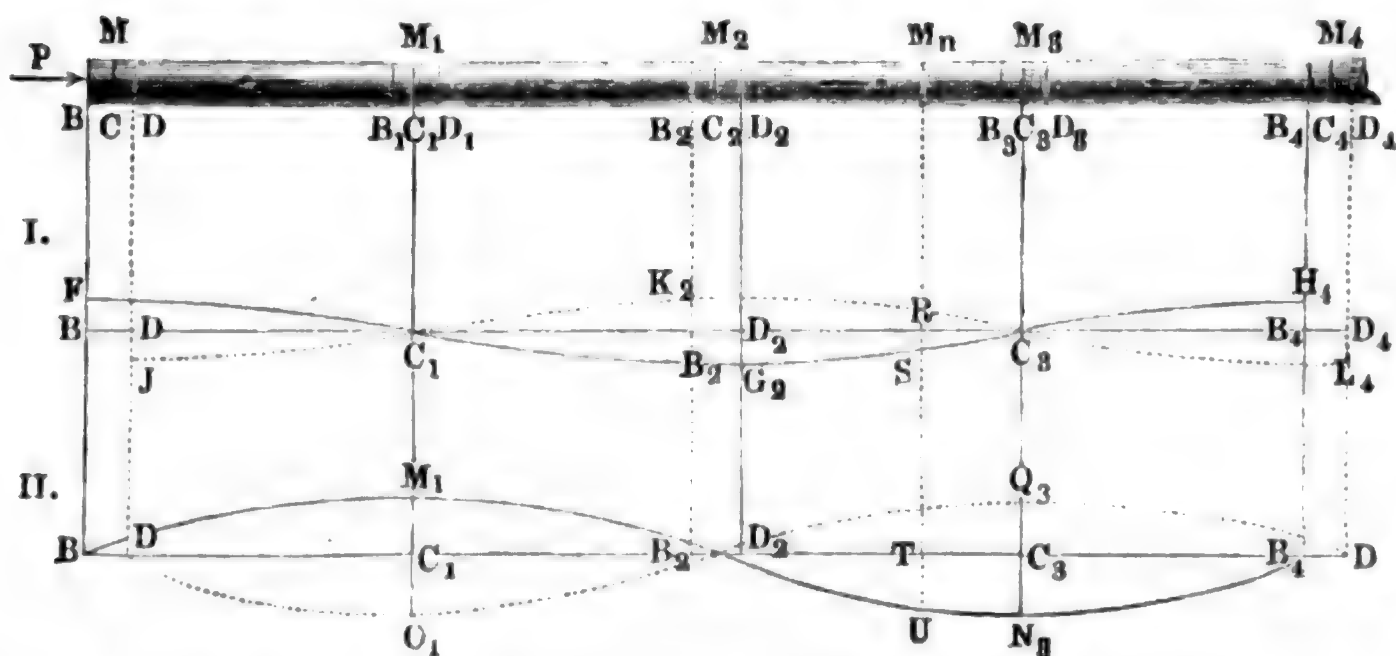
für die Acceleration der Schwere von 9810 Millimeter im mittleren Europa sind aber diese Werthe $\sqrt{9810} = 99$mal so klein.

Anmerkung. Zum tieferen Studium des Magnetismus sind außer Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, vorzüglich noch Lamont's Handbuch des Erdmagnetismus (Berlin 1849) und Gauß und Weber's Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, Göttingen und Leipzig 1837 bis 1843, zu empfehlen. Ferner: die Experimentalphysik von Quintus Icilius, sowie die Physik auf Grundlage der Erfahrung, von Mousson u. s. w.

Wellen. Wir haben bei den Längen- und Querschwingungen prismatischer Körper im Obigen (§. 3, 4 und 5) gar nicht auf die Masse dieser Körper Rücksicht genommen, sondern nur die Masse des den Körper spannenden Gewichtes in Betracht gezogen. Im Folgenden wollen wir hingegen von einem spannenden Gewichte ganz absehen, und voraussetzen, daß der Körper durch einen momentanen Impuls, oder durch eine nur eine kurze Zeit lang wirkende Kraft in eine schwingende Bewegung gesetzt worden sei, und daher den schwingenden Körper allein als träge Masse behandeln. Den einfachsten Fall bieten auch hier die Längenschwingungen dar; betrachten wir daher auch diese zunächst. §. 14

Wir wissen aus dem Obigen, daß sämmtliche Theile einer prismatischen Stange BM_4, Fig. 888, in Schwingungen versetzt werden, wenn man diese

Fig. 888.



Stange durch eine in ihrer Axenrichtung wirkende Kraft P ausgedehnt oder comprimirt hat. Nicht allein das Endelement M, sondern auch jedes andere

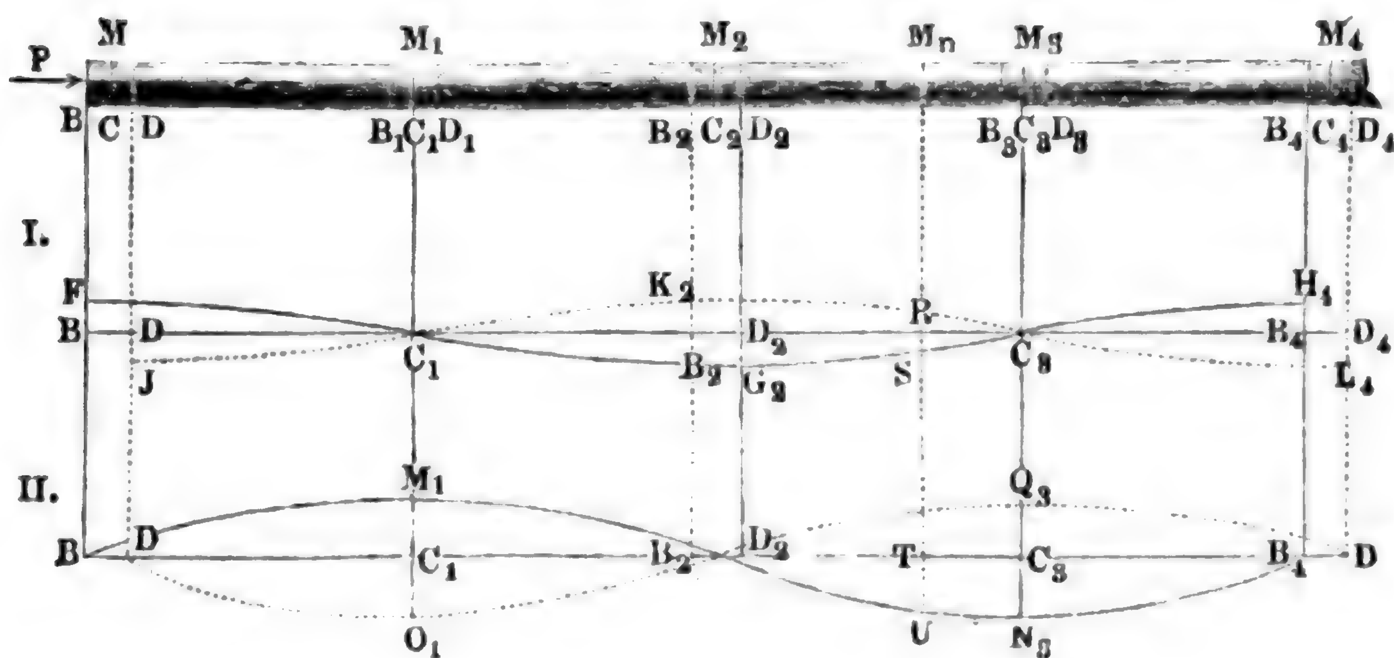
Element M_1, M_2 ... der Stange schwingt dann innerhalb eines gewissen Raumes BD, $B_1 D_1$, $B_2 D_2$ ... hin und her, den man die Schwingungsamplitude nennt; auch läßt sich, wenn die Stange sehr lang ist, annehmen, daß dieser Raum bei allen Elementen einer und derselbe sei. Wenn nun auch die Zeit, innerhalb welcher ein Stangenelement eine Schwingung vollendet, an allen Stellen der Stange eine und dieselbe ist, so können wir doch nicht voraussetzen, daß sich alle diese Elemente M, M_1, M_2 u. s. w. gleichzeitig in derselben Bewegungsphase, z. B. gleichzeitig in der Mitte ihrer Schwingung befinden, sondern wir müssen vielmehr annehmen, daß die Mittheilung der von M ausgehenden Bewegung Zeit erfordere und derselbe Bewegungszustand eines Elementes um so später eintrete, je entfernter dieses Element von der Bewegungsquelle P entfernt ist. Es ist hiernach möglich, daß in dem Augenblicke, wenn M einen Schwung BD hin und zurück gemacht hat, das Element M_1 noch auf dem Rückwege begriffen, z. B. erst in C_1 sei, daß ferner das Element M_2 erst einen einfachen Schwung gemacht habe, also den Ort D_2 einnehme, daß das Element M_3 erst die Hälfte des Hinweges zurückgelegt habe, daher in C_3 stehe, daß endlich ein Element M_4 erst eine Schwingung beginne, also mit M gleichzeitig schwinge. Die Geschwindigkeit, mit welcher eine und dieselbe Bewegungsphase von M aus nach und nach in dem Körper fortschreitet, heißt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (franz. vitesse de propagation; engl. velocity of propagation) der Schwingungen des Körpers. Ferner bezeichnet man den Inbegriff aller derjenigen Elemente von M bis M_4 des Körpers, welche sich in den sämmtlichen Bewegungsphasen einer Schwingung befinden, also zwischen zwei Elementen M und M_4 von gleichem Bewegungszustande enthalten sind, mit dem Namen einer Welle (franz. ondulation; engl. undulation, waving) des schwingenden Körpers, und nennt den Abstand MM_4 selbst die Länge der Welle. Eine Welle besteht aus einem Hintertheile BD_2, innerhalb dessen sich die rückkehrenden Elemente, wie M_1, M_2 ... befinden, und aus einem Vordertheile $D_2 B_4$, welcher die noch vorwärtsgehenden Elemente M_3, M_4 ... einschließt; man nennt auch wohl BD_2 den verdünnten und $D_2 B_4$ den verdichteten Theil der Welle, weil alle rückkehrenden Elemente innerhalb BD_2 in Ausdehnung, und alle hingehenden Elemente $D_2 B_4$ noch im Zusammendrücken begriffen sind.

§. 15 Die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen innerhalb einer Welle lassen sich recht gut durch die Ordinaten von Schlangenlinien (I. und II.) wie $FC_1 G_2 C_3 H_4$ und $BM_1 D_2 N_3 B_4$ darstellen. In dem Augenblicke, wenn M in B eine neue Schwingung beginnt, und die größte Elongation und Null Geschwindigkeit hat, befindet sich M_1 in der Ruhelage, hat also die Elongation Null und die größte Geschwindigkeit; beides wird auch durch

die genannten Curven angezeigt, denn die erste oder Elongationscurve (I.) geht in B um die Amplitude $BF = CB$ über die Axe BD_4 hin und durchschneidet in C_1 diese Axe, wogegen die zweite oder Geschwindigkeitscurve (II.) in B durch die Axe hindurchgeht und in C_1 um die Maximalgeschwindigkeit $C_1 M_1$ über der Axe hinläuft. In demselben Augenblicke befindet sich ferner das Element M_2 auf der anderen Seite im größten Abstande von seiner Ruhelage C_2 und es ist seine Geschwindigkeit wie bei M gleich Null; auch dies ist aus beiden Curven zu ersehen, denn die eine läuft in D_2 um die Amplitude $D_2 G_2$ unterhalb der Axe hin, und die andere schneidet die Axe daselbst, hat also die der Geschwindigkeit entsprechende Ordinate Null. Ebenso werden durch diese Curven die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen der Elemente M_3, M_4 u. s. w. angegeben. Da z. B. die erste Curve die Axe in C_3 schneidet und die zweite daselbst um den Maximalwerth $C_3 N_3$ unter der Axe hinläuft, so wird dadurch angezeigt, daß in diesem Augenblicke das Element M_3 durch seine Ruhelage mit der Maximalgeschwindigkeit in positiver Richtung hindurch gehe. Will man die Bewegungsphase irgend eines anderen Elementes M_n zwischen M, M_2, M_4 u. s. w. im Augenblicke kennen lernen, wo das erste Element M eine neue Schwingung beginnt, so darf man nur von demselben ein Perpendikel auf die besprochenen Curven herablassen. Das Stück RS dieses Perpendikels zwischen der ersten Curve und ihrer Axe entspricht der Elongation dieses Elementes, und das Stück TU zwischen der zweiten Curve und ihrer Axe giebt die Geschwindigkeit desselben an. Da beide Ordinaten abwärts gerichtet sind, so deuten sie auch an, daß sowohl die Elongation als auch die Geschwindigkeit positiv sei, d. i. die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit habe.

Befände sich das Element M in D, träte es also eine rückgängige Bewegung an, so würden sich die verschiedenen Elongationen der übrigen Elemente einer Welle durch die Ordinaten der punktirten Curve $J C_1 K_2 C_3 L_4$,

Fig 889.



und die Geschwindigkeiten derselben durch die Ordinaten der punktirten Curve $D\,O_1\,B_2\,Q_3\,D_4$ repräsentiren lassen. Die doppelte Schwingungsdauer eines Elementes, d. i. die Zeit t, innerhalb welcher dasselbe den Weg $BD + DB$ zurücklegt, ist auch gleich der Zeit, innerhalb welcher die Schwingungsbewegung um die ganze Länge $MM_4 = l$ einer Welle fortgepflanzt wird; ist daher c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so hat man die ganze Länge der Welle:

$$BB_4 = l = c \,.\, 2t = 2ct.$$

Die Länge des Hintertheils der Welle ist aber

$$BD_2 = l_1 = BB_2 + B_2D_2 = ct + \lambda,$$

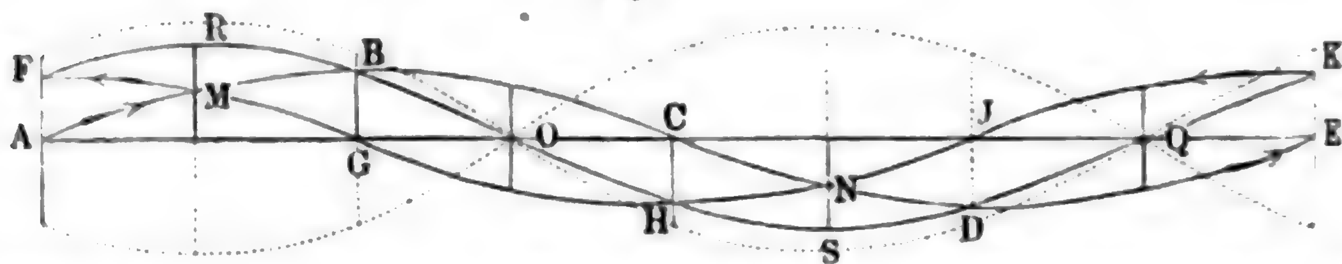
und die des Vordertheiles:

$$D_2B_4 = l_2 = D_2D_4 - B_4D_4 = ct - \lambda,$$

wo λ die ganze Schwingungsamplitude eines Elementes bezeichnet.

Anmerkung. Mit Hülfe der Schwingungscurven lassen sich auch die Erscheinungen vor Augen führen, welche mit der Interferenz der Wellen begleitet sind. Ziehen wir nur zwei gleiche und entgegengesetzt laufende Wellenzüge in Betracht, und hiervon wieder in $ABCDE$ und $FGHIK$, Fig. 890, nur diejenigen

Fig. 890.

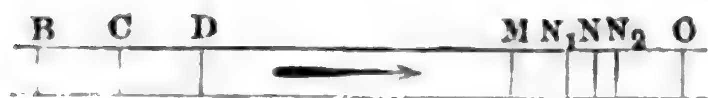


Curven, deren Ordinaten die Schwingungselongationen abschneiden. Aus den Schwingungselongationen eines zwei Wellen angehörenden Elementes entspringt eine mittlere Elongation, welche genau so gefunden wird, wie jede mittlere Bewegung aus zwei Seitenbewegungen (s. §. 28), und zwar hier durch die algebraische Addition der einfachen Elongationen. Hiernach werden in den Punkten M und N, wo sich beide Wellencurven begegnen, die Ordinaten verdoppelt, und dagegen in den Punkten O und Q, wo beide Curven auf entgegengesetzten Seiten von der Axe AE gleichviel abstehen, die Ordinaten vernullt, und es resultirt aus beiden Wellencurven eine dritte $FRBOHSDQK$, deren Ordinaten die Elongationen aller Elemente in der Axe AE angeben. Während die Wellenzüge ABC und FGH einander entgegenrücken, ändert sich natürlich auch die resultirende Wellencurve $FRBO$ u. s. w.; es ist indessen leicht zu ermessen, daß hierbei die Ruhepunkte O und Q ihren Ort nicht ändern, da hier die Ordinaten der einfachen Wellenzüge auch während der fortgesetzten Bewegung derselben gleich groß und entgegengesetzt bleiben. Diese Punkte sind die sogenannten Schwingungsknoten.

16) **Fortpflanzungsgeschwindigkeit.** Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen läßt sich auf folgende Weise ausmitteln. Denken wir uns den schwingenden Körper BO, Fig. 891, aus unendlichen Elementen, jedes vom Querschnitte A und von der Länge $BC = CD = \partial x$ bestehend,

und nehmen wir an, daß der Bewegungszustand des einen Elementes $BC = A\partial x$ in einem Zeitelemente ∂t vollkommen auf das folgende Element $CD = A\partial x$ übergehe, daß also die Bewegungsphasen in der Axenrichtung des Körpers mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\partial x}{\partial t}$ fortschreiten.

Fig. 891.



Setzen wir voraus, daß die Elemente BC und CD in der Zeit t von C nach N schwingen und dadurch in die Lagen $MN = \partial x_1$ und $NO = \partial x_2$ kommen, und bezeichnen wir die entsprechende Elongation CN durch y. War nun die Trennungsfläche zwischen beiden Elementen vor ∂t Secunden in N_1 und gelangt diese ∂t Secunden später nach N_2, so haben wir die entsprechenden Wege der Elemente:

$$NN_1 = \partial y_1 \text{ und } NN_2 = \partial y_2,$$

ferner die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{\partial y_1}{\partial t} \text{ und } v_2 = \frac{\partial y_2}{\partial t},$$

und daher die Retardation:

$$p = \frac{v_1 - v_2}{\partial t} = \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial t^2}.$$

Da ∂t Secunden vor dem Zeitpunkte, wo die Elemente BC und CD die Stellen MN und NO einnahmen, N_1 genau in derselben Phase war wie jetzt O, so hat man auch $CN_1 = DO$; und da ∂t Secunden nach diesem Zeitpunkte N_2 mit M in einerlei Phase ist, so folgt auch $CN_2 = BM$. Aus beiden Gleichungen ergiebt sich nun:

$N_1 O = DO - DN_1 = DO - (CN_1 - CD) = CD$ und:
$MN_2 = CN_2 - CM = CN_2 - (BM - BC) = BC$, und daher:
$NN_1 = \partial y_1 = N_1 O - NO = CD - NO = \partial x - \partial x_2$, sowie:
$NN_2 = \partial y_2 = MN_2 - MN = BC - MN = \partial x - \partial x_1$.

Es ist also das Wegelement ∂y_1 zugleich die Zusammendrückung $\partial x - \partial x_2$ des Elementes NO, und das Wegelement ∂y_2 die Zusammendrückung $\partial x - \partial x_1$ des Elementes MN. Bezeichnet nun noch E den Elasticitätsmodul des schwingenden Stabes, so hat man die aus diesen Zusammendrückungen hervorgehenden Spannungen der Elemente MN und NO:

$$S_1 = \left(\frac{\partial x - \partial x_1}{\partial x}\right) AE = \frac{\partial y_2}{\partial x} \cdot AE \text{ und}$$

$$S_2 = \left(\frac{\partial x - \partial x_2}{\partial x}\right) AE = \frac{\partial y_1}{\partial x} \cdot AE.$$

Durch Subtraction dieser beiden Spannungen von einander erhält man nun die verzögernde Kraft:

$$P = S_2 - S_1 = \left(\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x}\right) A E,$$

und ist nun noch γ die Dichtigkeit der Stangenelemente BC, CD, also $A \partial x . \gamma$ das Gewicht und $\frac{A \partial x . \gamma}{g}$ die Masse M eines Stangenelementes, so hat man die Beschleunigung desselben in N_1 auch

$$p = \frac{P}{M} = \left(\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x}\right) A E \cdot \frac{g}{A \partial x \gamma} = \frac{g E}{\gamma} \cdot \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x^2}.$$

Durch Gleichsetzen beider Werthe für p erhält man nun die Gleichung

$$\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial t^2} = \frac{g E}{\gamma} \cdot \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x^2},$$

woraus

$$\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{g E}{\gamma}, \text{ oder } c^2 = \frac{g E}{\gamma},$$

also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen (Schallgeschwindigkeit),

$$c = \sqrt{\frac{g E}{\gamma}} = \sqrt{g L},$$

wo L den Elasticitätsmodul nach Länge bezeichnet, folgt.

Beispiel. Nimmt man den Elasticitätsmodul des Tannenholzes $E = 1'800000$ Pfund und das Gewicht eines Cubikfußes desselben, $= 30$ Pfund an, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit desselben

$$c = \sqrt{\frac{144 . 1'800000}{30} \cdot g} = \sqrt{144 . 60000 . g} = 16432 \text{ Fuß},$$

d. i. ungefähr 15 mal so groß als die der Luft.

Anmerkung. Diese Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gilt auch für eine gespannte Saite, und sogar für das Wasser und für die Luft. Ist p der Druck der Luft auf die Flächeneinheit, so hat man die den Verdichtungsverhältnissen $\frac{\partial y_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial y_2}{\partial x}$ entsprechenden Spannungen nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$S_2 = \frac{p \partial x}{\partial x_2} = \frac{p \partial x}{\partial x - \partial y_1} \text{ und } S_1 = \frac{p \partial x}{\partial x_1} = \frac{p \partial x}{\partial x - \partial y_2},$$

und daher die bewegende Kraft auf ein Element vom Querschnitte A:

$$P = A (S_2 - S_1) = \frac{(\partial y_1 - \partial y_2) \, A p \partial x}{(\partial x - \partial y_1)\,(\partial x - \partial y_2)},$$

oder, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur ein kleiner Bruch ist, also $(\partial x - \partial y_1)\,(\partial x - \partial y_2) = \partial x^2$ gesetzt werden kann,

$$P = \frac{(\partial y_1 - \partial y_2) \, A p}{\partial x}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem obigen, wenn man statt p, E einsetzt, vollkommen überein, es ist folglich die Schallgeschwindigkeit in der Luft:

$$c = \sqrt{g \cdot \frac{p}{\gamma}}.$$

Bei der Lehre von der Wärme wird im zweiten Bande gezeigt, daß wegen der Wärmeveränderung, welche mit der Dichtigkeitsveränderung der Luft nothwendig verbunden ist, an dieser Formel noch ein Coefficient anzubringen ist. Da die Dichtigkeit γ der Luft ihrer Spannung p proportional ist, so fällt auch p aus der Formel heraus, und es bleibt nur noch die Temperatur τ in derselben zurück. Gewöhnlich nimmt man für Luft

$$c = 333\sqrt{1 + 0{,}00367 \,.\, \tau} \text{ Meter} = 1061\sqrt{1 + 0{,}00367 \,.\, \tau} \text{ Fuß an.}$$

Beispiel. Wenn nach der Anmerkung des §. 351, eine Wassersäule durch 14 Pfund Kraft um 0,000050 ihres Volumens zusammengedrückt wird, und hiernach der Elasticitätsmodul dieser Flüssigkeit

$$E = \frac{14}{0{,}00005} = 280000 \text{ Pfund}$$

zu setzen ist, so hat man hiernach die Schallgeschwindigkeit im Wasser:

$$c = \sqrt{31{,}25 \cdot \frac{280000 \,.\, 144}{66}} = \sqrt{31{,}25 \cdot \frac{6720000}{11}} = 4369 \text{ Fuß,}$$

also ungefähr 4,3mal so groß als die Schallgeschwindigkeit in der Luft setzen.

Schwingungszeit. Wir können nun auch die Zeit einer Schwingung finden, indem wir zunächst die Gleichung suchen, welche die Abhängigkeit der Schwingungselongation von der Zeit und von der die Ruhelage des schwingenden Elementes bestimmenden Abscisse x ausdrückt. Sicherlich ist y sowohl eine Function von t als auch eine solche von x, es läßt sich folglich $y = \varphi(t)$ und auch $y = \psi(x)$ setzen. (§. 17

Aus der ersten dieser beiden Functionen folgt durch Differenziiren die variable Schwingungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t),$$

und ebenso die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_2(t),$$

wo $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ andere Functionen von t ausdrücken (vergl. §. 19).

Die zweite Function giebt das Spannungsverhältniß

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi_1(x), \text{ also die Spannung}$$

$$S = AE \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = A\,E \,.\, \psi_1(x),$$

daher die bewegende Kraft des Massenelementes $\partial M = A\,\partial x \cdot \frac{\gamma}{g}$,

$$dS = AE \cdot \frac{\partial\,[\psi_1(x)]}{\partial x} = \frac{AE\,\psi_2(x)}{\partial x},$$

und die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{gE}{\gamma}\,\psi_2(x);$$

wobei natürlich $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ andere Functionen von x anzeigen.

Setzen wir die beiden Ausdrücke für p einander gleich, so erhalten wir folgende Endgleichung:

$$\varphi_2(t) = \frac{gE}{\gamma} \cdot \psi_2(x), \text{ oder, da } \frac{gE}{\gamma} = c^2 \text{ ist,}$$

$$\varphi_2(t) = c^2 . \psi_2(x).$$

Dieser Differenzialgleichung wird durch folgende Integralgleichung:

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x),$$

wo F und f unbestimmte Functionen von den in den Parenthesen enthaltenen Größen bezeichnen, entsprochen, denn es ist

$$\varphi_1(t) = \frac{\partial\,[\varphi(t)]}{\partial t} = cF_1(ct + x) + cf_1(ct - x),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\partial\,[\varphi_1(t)]}{\partial t} = c^2 F_2(ct + x) + c^2 f_2(ct - x)$$

$$= c^2\,[F_2(ct + x) + f_2(ct - x)],$$

ferner:

$$\psi_1(x) = \frac{\partial\,[\psi(x)]}{\partial x} = F_1(ct + x) - f_1(ct - x) \text{ und}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\partial\,[\psi_1(x)]}{\partial x} = F_2(ct + x) + f_2(ct - x),$$

also wirklich:

$$\varphi_2(t) = c^2 . \psi_2(x).$$

Obgleich die Function

$$y = F(ct + x) + f(ct - x)$$

eine unbestimmte ist, so läßt sie sich doch, wenn man noch nähere Bestimmungen des schwingenden Körpers giebt, dazu benutzen, um die Schwingungszeit des schwingenden Körpers zu finden. Wie dies in einigen Fällen möglich ist, wird aus Folgendem erhellen.

Anmerkung. Wenn man aus den Formeln $\partial y = v\,\partial t$ und $\partial x = c\,\partial t$, ∂t eliminirt, so erhält man den Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{c}$, oder, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Verdichtung σ des schwingenden Elementes ausdrückt, $\sigma = \frac{v}{c}$; es ist also die Verdichtung an

jeder Stelle des schwingenden Stabes in einem und demselben Augenblicke der Schwingungsgeschwindigkeit dieser Stelle proportional.

Bestimmung der Elasticitätsmodul. Nehmen wir zunächst an (§. 18 der schwingende Körper habe die Länge l und sei an beiden Enden festgeklemmt. In diesem Falle ist sowohl für $x = 0$, als auch für $x = l$, $y = 0$, folglich:

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F(ct + l) + f(ct - l) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $f = -F$, und bringen wir diese Beziehung in der zweiten Gleichung an, so erhält man:

$$f(ct + l) - f(ct - l) = 0, \text{ d. i. } f(ct + l) = f(ct - l),$$

oder, wenn man $ct - l = ct_1$ setzt,

$$f(ct_1 + 2l) = f(ct_1).$$

Es nimmt also die Function f stets denselben Werth wieder an, wenn ct_1 um $2l$, also die Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ größer wird, und es ist folglich auch

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

die Zeit eines Doppelschwunges.

Setzen wir zweitens voraus, daß der schwingende Körper an beiden Enden frei sei, so haben wir für $x = 0$ und $x = l$, S, und also auch $\psi_1(x)$, $= 0$, daher:

$$F_1(ct) - f_1(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct + l) - f_1(ct - l) = 0.$$

Hiernach ist:

$$f_1 = F_1 \text{ und } f_1(ct + l) = f_1(ct - l), \text{ oder } f_1(ct_1 + 2l) = f_1(ct_1),$$

und folglich wieder die Schwingungsdauer:

$$t_1 = \frac{2l}{c}.$$

Ist ferner der Körper an einem Ende frei und an dem anderen fest, so hat man für $x = 0$, $y = 0$, und für $x = l$, $S = 0$, daher:

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct + l) - f_1(ct - l) = 0,$$

es folgt nun $f = -F$, sowie auch $f_1 = -F_1$, und daher:

$$f_1(ct + l) + f_1(ct - l) = 0, \text{ oder } f_1(ct_1) + 2l = -f_1(ct_1).$$

Hiernach nimmt also der Körper nach der Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ stets den umgekehrten Bewegungszustand an, und es ist folglich erst in der doppelten Zeit $2t_1 = \frac{4l}{c}$ eine Schwingung vollendet. Man hat also hier die Schwingungsdauer:

$$t_2 = \frac{4\,l}{c} = 4\,l\sqrt{\frac{\gamma}{g\,E}},$$

also doppelt so groß als in den beiden ersten Fällen.

Mittels der gefundenen Formeln kann man aus der beobachteten Schwingungszeit t, oder vielmehr aus der Anzahl n der Längenschwingungen, welche ein prismatischer Körper in einer gewissen Zeit macht, den Elasticitätsmodul $E = \left(\frac{2\,l}{t}\right)^2 \cdot \frac{\gamma}{g}$, und die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit in demselben, $c = \frac{2\,l}{t}$ berechnen.

Beispiel. Ein ganz an beiden Enden eingeklemmter Eisendraht von 60 Zoll Länge wurde durch Reibung nach seiner Axenrichtung in Longitudinalschwingungen versetzt, deren 1589 auf eine Secunde gingen. Wie groß ist hiernach der Elasticitätsmodul und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Drahteisens? Nach einer der obigen Formeln hat man den Elasticitätsmodul nach Länge oder Höhe

$$L = \frac{1}{g}\left(\frac{2\,l}{t}\right)^2 = \frac{1}{g}\,(2\,n\,l)^2 = \frac{(1589\,.\,120)^2}{31,25\,.\,12} = 96'950000 \text{ Zoll},$$

und wenn nun ein Cubikzoll dieses Eisens 0,2733 Pfund wiegt, der Elasticitätsmodul nach Gewicht:

$$E = 96'950000\,.\,0,2733 = 26'500000 \text{ Pfund (vergl. Tabelle §. 212).}$$

Die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit ist:

$$c = \sqrt{g\,L} = \sqrt{31,25\,.\,96950000\,.\,{}^1\!/_{12}} = \sqrt{31,25\,.\,8'080000} = 15890 \text{ Fuß},$$

oder, die Schallgeschwindigkeit $c_1 = 1060$ Fuß der Luft als Einheit angenommen:

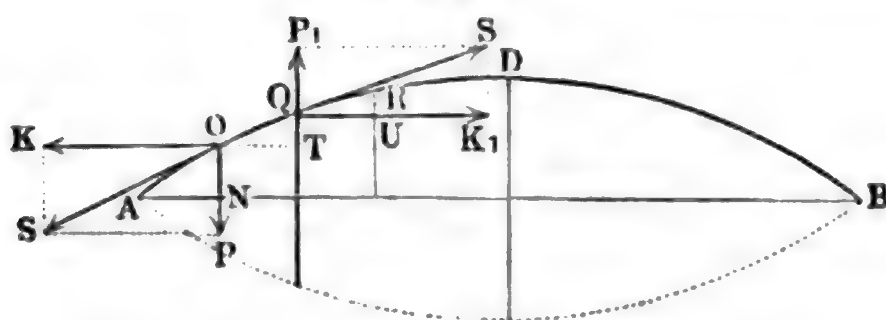
$$c = \frac{15890}{1060} = 15.$$

Anmerkung. Sind die schwingenden Säulen sehr lang, so hängt die Schwingungszeit von der Wellenlänge oder, nach Befinden, von dem Abstand l zwischen zwei Schwingungsknoten ab; es ist dann aber stets $t_1 = \frac{2\,l}{c}$. Diese Zeit bestimmt auch die Höhe des mit den Schwingungen verbundenen Tones; je größer oder kleiner t_1 ist, desto tiefer oder höher fällt auch der Ton aus. Die Stärke des Schalles hingegen wächst und nimmt ab mit den Schwingungselongationen. Bei den sphärischen Wellen, in welchen sich der Schall in der Luft und im Wasser ausbreitet, bleibt c und t unverändert, und es nimmt nur die Schwingungselongation, also die Stärke des Schalles allmälig ab.

19) **Querschwingungen einer Saite.** Die Querschwingungen der Saiten und elastischen Stäbe lassen sich auf ähnliche Weise ausmitteln, wie die Longitudinalschwingungen. Die gespannten Saiten (franz. cordes; engl. strings) bieten den einfacheren Fall dar, daher sei auch von diesen zunächst die Rede. Es sei ADB, Fig. 892, irgend eine Position der schwingenden Saite, A der eine, B der andere Festpunkt, $l = AB$ ihre Länge, G ihr Gewicht und S ihre als constant anzusehende Spannung. Fassen wir einen den Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ entsprechenden

Punkt O der Saite ins Auge, zerlegen wir dessen Spannkraft S parallel zu AB und rechtwinkelig gegen AB in die Seitenkräfte K und P, so können

Fig. 892.



wir die letztere als die bewegende Kraft an einem Ende O des Elementes OQ ansehen. Läßt man den Bogen $AO = s$ um das Element $OQ = \partial s$, und eben dadurch auch die Ordinate y um ein Element $QT = \partial y$ wachsen, so erhalten wir in P, S, ∂y und ∂s die gleichliegenden Seitenpaare von zwei ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken OPS und QTO, und es ist:

$$\frac{P}{S} = \frac{QT}{OQ} = \frac{\partial y}{\partial s}; \text{ also } P = \frac{\partial y}{\partial s} \cdot S.$$

Auf dasselbe Element OQ wirkt aber auch noch eine aus der Zerlegung der Gegenspannung hervorgehende Kraft $P_1 = \frac{RU}{QR} \cdot S = \frac{\partial y_1}{\partial s} S$ in entgegengesetzter Richtung, daher bleibt die bewegende, das Element OQ nach der Axe AB zurückführende Kraft:

$$P - P_1 = \left(\frac{\partial y - \partial y_1}{\partial s}\right) S$$

übrig.

Die Masse M des Elementes ist zwar der Länge $OQ = \partial s$ desselben proportional, setzen wir indessen nur kleine Schwingungselongationen y voraus, so können wir auch dieselbe dem Elemente $OT = QU = \partial x$ der Abscisse proportional wachsend annehmen, also $M = \frac{\partial x}{l} \cdot \frac{G}{g}$ setzen. Dies vorausgesetzt, erhalten wir nun die Acceleration, mit welcher das Element OQ sich der Ruhelage in AB nähert:

$$p = \frac{P - P_1}{M} = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial s . \partial x} \cdot \frac{g S l}{G},$$

oder $\partial s = \partial x$ gesetzt,

$$p = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial x^2} \cdot \frac{g S l}{G}.$$

Nun ist y irgend eine Function von x, z. B. $\psi(x)$, daher auch $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine andere Function $\psi_1(x)$ und $\frac{\partial y - \partial y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = \frac{\partial [\psi_1(x)]}{\partial x}$ eine dritte Function $\psi_2(x)$ von dieser Größe, sowie

$$p = \psi_2(x) \cdot \frac{g S l}{G}.$$

Da aber auch y eine Function der Zeit t, also etwa $y = \varphi(t)$ ist, so hat man ebenso die Geschwindigkeit, mit welcher OQ zur Ruhelage zurückkehrt:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t), \text{ und die entsprechende Acceleration:}$$

$$p = \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t} = \varphi_2(t).$$

Wenn man nun beide Ausdrücke für p einander gleich setzt, so erhält man ganz wie im Anhang §. 17, die Differenzialgleichung:

$$\varphi_2(t) = \psi_2(x) \cdot \frac{g S l}{G} = c^2 \psi_2(x),$$

und es läßt sich daher auch wie dort

$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x)$ sowie

$v = c\,[F_1(ct + x) + f_1(ct - x)]$ setzen.

Da auch hier für $x = 0$ und $x = l$, y und $v = 0$ sind, so haben wir wieder $f_1 = -F_1$ und $f_1(ct + l) = f(ct - l)$, oder $f(ct_1 + 2l) = f(ct_1)$; es ist daher die Zeit einer ganzen Schwingung:

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{G}{g S l}}, \text{ oder, wenn man } G = A l \gamma \text{ setzt,}$$

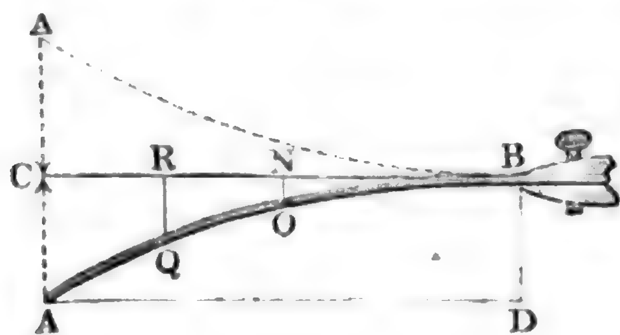
$$t_1 = 2l\sqrt{\frac{A\gamma}{g S}}.$$

Es wächst also die Schwingungsdauer einer Saite direct wie die Länge l, wie die Quadratwurzel aus dem Gewichte $A\gamma$ der Längeneinheit und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Spannung S der Saite.

Beispiel. Da der halben Schwingungszeit der nächste Octaventon entspricht, so wird nach dieser Regel eine Saite die Octave zu dem anfänglichen Grundton geben, wenn man sie bis zur Hälfte abkürzt, oder in ihrer Mitte unterstützt, oder wenn man sie viermal so stark spannt, oder wenn man sie bei gleicher Spannung durch eine Saite ersetzt, von der die laufende Längeneinheit viermal so leicht ist als bei der ersten Saite.

20) **Querschwingungen eines Stabes.** Die Bestimmung der Schwingungsdauer eines elastischen Stabes AB (franz. lame; engl. spring), Fig. 893, welcher an einem Ende B festgehalten wird, läßt sich auf folgendem, allerdings etwas umständlichem Wege finden. Nach §. 216 ist, wenn r den Krümmungshalbmesser des Stabes an einer durch die Coordi-

Fig. 893.



naten $CN = x_1$ und $NO = y_1$ bestimmten Stelle O bezeichnet, das Biegungsmoment des Bogens $AO = s_1$:

$$M = \frac{WE}{r}.$$

Setzen wir nun die Kraft, mit welcher sich ein den Coordinaten $CR = x$ und $RQ = y$ entsprechendes Element Q der Axe oder Ruhelage CB nähert, $= P\partial x$, also dessen Moment:

$$= \overline{NR}.P\partial x = (x_1 - x)\, P\partial x,$$ so haben wir:

$$\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P\partial x.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{x_1}(x_1 - x)\, P\partial x = \int_0^{x_1} P x_1 \partial x - \int_0^{x_1} P x \partial x$$
$$= x_1 \int_0^{x_1} P\partial x - \int_0^{x_1} P x \partial x,$$

oder wenn man $\int_0^{x_1} P\partial x = P_1$ und hiernach

$$\int_0^{x_1} P x \partial x = \int_0^{x_1} P\partial x . x = P_1 x_1 - \int_0^{x_1} P_1 \partial x$$ setzt,

$$\int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P\partial x = \int_0^{x_1} P_1 \partial x,$$ daher hat man auch

$$\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} P_1 \partial x.$$

Ferner ist $r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial (tang.\, \alpha)}$ (s. Art. 33 der analytischen Hülfslehren), oder, da bei einer kleinen Biegung $\partial s = \partial x$ gesetzt werden kann,

$$r = -\frac{\partial x}{\partial\, (tang.\, \alpha)};$$ daher folgt:

$$- WE \frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\partial x} = \int_0^{x_1} P_1 \partial x,$$

und durch Differenziiren:

$$- WE . \partial \left(\frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\partial x}\right) = P_1 \partial x.$$

Setzt man nun $y = \psi\, (x)$, ferner

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \psi_1\, (x), \frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\partial x} = \psi_2 (x) \text{ und } \partial \left(\frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\partial x^2}\right) = \psi_3 (x),$$

so erhält man die einfache Gleichung:

$$P_1 = - WE . \psi_3\, (x),$$

woraus durch nochmaliges Differenziiren

$$\partial P_1 = - WE \partial \psi_3\, (x), \text{ d. i. } P\partial x = - WE\partial \psi_3\, (x) \text{ oder}$$

$$P = - WE \frac{\partial \psi_3\, (x)}{\partial x} = - WE \psi_4\, (x) \text{ folgt.}$$

Damit der Stab symmetrisch schwinge, können wir nun noch annehmen, daß P proportional mit y wachse, also $P = - Ky$ sei; und hiernach erhalten wir:

$$WE\psi_4(x) = Ky, \text{ oder } \psi_4(x) = \frac{K}{WE}\cdot y = k^4 y,$$

wenn wir $\frac{K}{WE}$ mit k^4 bezeichnen.

Dieser Differenzialgleichung $\psi_4(x) = k^4 y$ entspricht die Gleichung:

$$y = \psi(x) = A\cos.(kx) + B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx},$$

denn wenn man diese successiv differenziirt, so erhält man:

$$\psi_1(x) = k\,[- A\sin.(kx) + B\cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}],$$
$$\psi_2(x) = k^2[- A\cos.(kx) - B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}],$$
$$\psi_3(x) = k^3[A\sin.(kx) - B\cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}] \text{ und}$$
$$\psi_4(x) = k^4\,[A\cos.(kx) + B\sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{kx}],$$

also wirklich:

$$\psi_4(x) = k^4 y.$$

§. 21) Die Schwingungszeit t des elastischen Stabes finden wir wieder wie oben, wenn wir $p = \varphi_2(t) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ setzen. Nun ist aber die Kraft eines Elementes:

$$= P\partial x = - Ky\partial x = - WEk^4 y\partial x,$$

und bei dem Querschnitt F und der Dichtigkeit γ die Masse desselben:

$$= F\partial x\,\frac{\gamma}{g}, \text{ daher folgt die Gleichung:}$$

$$\varphi_2(t) = - \frac{gWEk^4}{F\gamma}\cdot y = - \mu^2 y,$$

wenn wir den Ausdruck

$$\frac{gWEk^4}{F\gamma} \text{ durch } \mu^2 \text{ bezeichnen.}$$

Dieser Differenzialgleichung entspricht schon die einfache Formel

$$y = \varphi(t) = \sin.(\mu t + \tau),$$

wo τ eine beliebige Anfangszeit ausdrückt, denn es ist

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t) = \mu\,.\cos.(\mu t + \tau) \text{ und}$$

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_2(t) = - \mu^2\sin.(\mu t + \tau), \text{ d. i.}$$

$$\varphi_2(t) = - \mu^2 y.$$

Nehmen wir nun in der Gleichung $y = \sin.(\mu t + \tau)$, $\tau = 0$, so bekommen wir $y = \sin.(\mu t)$, daher für $\mu t = 0, \pi, 2\pi$ u. s. w., $y = 0$; und es ist folglich

$t_1 = \frac{\pi}{\mu}$ die halbe, und

$t = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{k^2}\sqrt{\frac{F\gamma}{gWE}}$ die ganze Schwingungsdauer.

Um hiernach die Zeit einer Schwingung berechnen zu können, muß nicht allein die Größe k, sondern auch das Verhältniß $\frac{F}{W}$ bekannt sein.

Ist der Stab cylindrisch und der Halbmesser desselben, $= r$, so hat man:

$$\frac{F}{W} = \frac{\pi r^2}{{}^1/_4 \pi r^4} = \frac{4}{r^2} \text{ (s. §. 231)},$$

und ist er parallelepipedisch, seine Breite b und Höhe h, so fällt

$$\frac{F}{W} = \frac{b\,h}{{}^1/_{12}\, b\,h^3} = \frac{12}{h^2} \text{ aus (s. §. 226).}$$

Hiernach folgt für die erste Stabform:

$$t = \frac{4\pi}{r k^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}},$$

und für den Stab von der zweiten Form:

$$t = \frac{4\pi}{h k^2}\sqrt{\frac{3\gamma}{gE}}.$$

Die Größe k wird aus der Gleichung:

$$y = A\,cos.(kx) + B\,sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}$$

auf folgende Weise gefunden.

Setzen wir in diese Formel die zusammengehörigen Werthe $x = l$ und $y = 0$, so erhalten wir:

1) $0 = A\,cos.(kl) + B\,sin.(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl}$.

Thun wir ferner dasselbe auch in der Gleichung

$$tang.\ \alpha = \frac{\partial y}{\partial s} = \psi_1(x), \text{ so erhalten wir:}$$

2) $0 = -A\,sin.(kl) + B\,cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl}$.

Da ferner das Biegungsmoment am Ende A des Stabes = Null, und folglich der Krümmungshalbmesser $r = \infty$, also $\psi_2(x) = 0$ und ebenso $\varphi_3(x) = 0$ ist, so folgt:

$0 = -A\,cos.0 - B\,sin.0 + Ce^0 + De^{-0}$, d. i. $-A + C + D = 0$, und

$0 = A\,sin.0 - B\,cos.0 + Ce^0 - De^{-0}$, d. i. $-B + C - D = 0$,

daher 3) $A = C + D$ und

4) $B = C - D$.

Eliminirt man nun aus diesen vier Gleichungen, A und B, so erhält man:

$(C + D)\,cos.(kl) + (C - D)\,sin.(kl) + Ce^{kl} + De^{-kl} = 0$,

und

$$-(C+D)\, sin.(kl) + (C-D)\, cos.(kl) + Ce^{kl} - De^{-kl} = 0;$$

hieraus folgt durch Addition:

$$C\, cos.(kl) - D\, sin.(kl) + Ce^{kl} = 0,$$

und durch Subtraction:

$$D\, cos.(kl) + C sin.(kl) + De^{-kl} = 0, \text{ oder:}$$

$$C\,[cos.(kl) + e^{kl}] = D\, sin.(kl) \text{ und}$$

$$D\,[cos.(kl) + e^{-kl}] = -\, C\, sin.(kl);$$

daher durch Division:

$$-\frac{cos.(kl) + e^{kl}}{sin.(kl)} = \frac{sin.(kl)}{cos.(kl) + e^{-kl}}, \text{ endlich}$$

$$2 + cos.(kl)\,(e^{kl} + e^{-kl}) = 0, \text{ oder}$$

$$cos.(kl) = -\frac{2}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Von den verschiedenen Werthen, entsprechend den verschiedenen Tönen, welche der Stab je nach der Anzahl seiner Schwingungsknoten geben kann, ist der kleinste $kl = 1,87501$, wogegen die größeren nahe

$$k = \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2} \text{ u. s. w.}$$

ausfallen. Kommt es darauf an, aus der beobachteten Schwingungsdauer t den Elasticitätsmodul E zu finden, so hat man in der Regel nur den kleinsten Werth in Betracht zu ziehen, es ist daher

$$l = \frac{1,8751}{l} \text{ und } k^2 = \frac{3,516}{l^2},$$

folglich für einen cylindrischen Stab:

$$E = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi}{rk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi l^2}{3,516\, rt}\right)^2 = 12,774\, \frac{\gamma}{g}\, \frac{l^4}{r^2 t^2},$$

und für einen parallelepipedischen:

$$E = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi}{hk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{3g}\left(\frac{4\pi l^2}{3,516\, ht}\right)^2 = 4,2579 \cdot \frac{\gamma}{g}\, \frac{l^4}{h^2 t^2}.$$

Anmerkung 1. Vergleicht man die Formeln

$$t = \frac{4\pi}{rk^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}} \text{ und } t_1 = 2\, l_1 \sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

für die Quer- und Längenschwingungen eines und desselben Stabes mit einander, so erhält man die Proportion:

$$t : t_1 = \frac{l^2}{r} : \frac{3,516}{2\pi}\, l_1, \text{ d. i. } t : t_1 = \frac{l^2}{r} : 0,5596\, l_1.$$

Wertheim hat für Gußstahl und Messing dieses Verhältniß durch Versuche bestätigt gefunden.

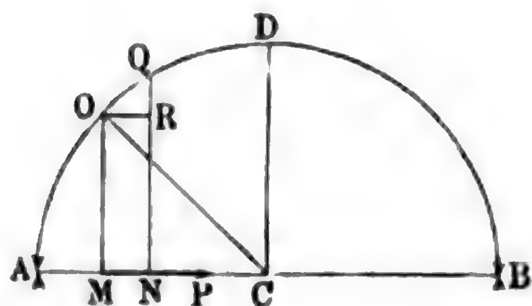
Anmerkung 2. Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe handelt ausführlich Seebeck in einer Abhandlung der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1849, sowie in dem Programme der technischen Bildungsanstalt in Dresden vom Jahre 1846. Wertheim's Untersuchungen über die Elasticität der Metalle und des Holzes mittels Längen- und Querschwingungen werden in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II. 1845, ziemlich ausführlich abgehandelt.

Anmerkung 3. Die Schwingungsdauer, oder vielmehr die Anzahl der Schwingungen eines Stabes in einer gewissen Zeit läßt sich wegen ihrer Kürze in der Regel nicht unmittelbar beobachten, sondern man muß sich hierbei besonderer Hülfsmittel bedienen. Man benutzt hierzu, entweder nach Chladni, Savart u. s. w., die Höhe des von den Schwingungen erzeugten Tones, oder man wendet das zuerst von Duhamel angegebene Verfahren an, welches darin besteht, daß man von dem schwingenden Stab mittels eines feinen Häkchens auf eine ganz gleichförmig umlaufende und mit Kienruß überzogene Glastafel eine Wellenlinie aufreißen läßt. Zur Erzielung einer möglichst gleichförmigen Umdrehungsbewegung kann man sich eines chronometrischen Apparates bedienen, welcher mit einem Windfange, ähnlich wie ein Bratenwender oder das Schlagwerk einer Thurmuhr, ausgerüstet ist, und von Morin in der Abhandlung „Description des appareils dynamometriques etc., Paris 1838“ sowie in dessen Notions fondamentales de mécanique beschrieben wird. Wertheim fand die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit dadurch, daß er mit dem zu untersuchenden Stabe noch einen anderen Körper, z. B. eine Stimmgabel, schwingen ließ, dessen Schwingungszahl bekannt war. Wenn man nun von beiden Körpern Wellencurven in die Rußschicht der rotirenden Glastafel einkratzen läßt und die Wellen derselben zählt, welche einem und demselben Centriwinkel entsprechen, so erhält man in dem Verhältnisse dieser Zahlen auch das Verhältniß der Schwingungszahlen. Was die Longitudinalschwingungen anlangt, so sind diese in der Regel auch mit kleinen Querschwingungen verbunden, weshalb hier die Stäbe zweifache Wellenlinien beschreiben, und die Anzahl der Längenschwingungen mit der der Querschwingungen leicht verglichen werden kann, wenn man die kleinen Wellen innerhalb einer Welle der großen Wellencurve auszählt.

Schwingungshindernisse. Zu den Kräften, welche die Schwingungen eines Körpers erzeugen, gesellen sich noch gewisse Bewegungshindernisse, deren Einfluß wir nun noch kennen lernen müssen. Ist ein solches Hinderniß constant, wie z. B. die Reibung an der Drehaxe eines Pendels oder an dem Stifte einer Magnetnadel, so hat dasselbe auf die Schwingungsdauer gar keinen Einfluß, sondern es wird nur durch dasselbe die Schwingungsweite bei jedem Ausschlag um eine gewisse Größe kleiner. Wir haben oben in §. 1 (Anhang) in dem Falle, wenn die bewegende Kraft der Entfernung x vom Ruhe- oder Mittelpunkte C der Bewegung AB, Fig. 894, proportional ist, §. 22

$$p = \mu x = \mu (a - x_1),$$

Fig. 894.



wo x_1 den durchlaufenen Weg AM bezeichnet, gesetzt. Bei Berücksichtigung der Verminderung k des Weges durch die Reibung haben wir dagegen für das Durchlaufen der ersten Weghälfte AC:

$$p = \mu (a - k - x_1),$$

und für das der zweiten Weghälfte CB:

$$p = -\mu[x_1 - (a + k)]$$

zu schreiben; es besteht also der Einfluß der Reibung k nur darin, daß durch sie bei der einen Weghälfte, a in $a - k$ und bei der andern, a in $a + k$, also der ganze Schwingungsweg $2a$, in $2a - 2k$ umgeändert, d. i. die Schwingungsweite bei jedem Ausschlage um eine constante Größe $2k$ abgekürzt wird. Da endlich in der Formel

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$$

die Schwingungsweite gar nicht vorkommt, so kann folglich auch k keinen Einfluß auf dieselbe ausüben.

Anders ist es dagegen mit dem Widerstande der Luft. Dieser wächst bei kleinen Geschwindigkeiten, wie sie bei Pendelbewegungen vorkommen, mehr nach der einfachen Geschwindigkeit als nach dem Quadrate derselben, wie besonders aus Bessel's Untersuchungen (über die Länge des einfachen Pendels, Abhandl. der Akademie der Wissensch. zu Berlin, 1826) hervorgeht, und sich auch dadurch erklären läßt, daß dieses Hinderniß vorzüglich aus der mit der Geschwindigkeit v des schwingenden Körpers wachsenden Verdichtung und Verdünnung der Luft vor und hinter demselben (s. §. 510, sowie den Anhang §. 17, Anmerkung) erwächst. Dies vorausgesetzt, können wir die Acceleration des schwingenden Körpers, wenn wir denselben im Auswärtsschwingen begriffen annehmen, und seinen Weg vom Ruhepunkte aus messen,

$p = -(\mu x + \nu v)$ oder $p + \nu v + \mu x = 0$ annehmen.

Setzen wir nun

$$x = f(t),\quad v = \frac{\partial x}{\partial t} = f_1(t) \text{ und } p = \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(t),$$

so können wir auch $f_2(t) + \nu f_1(t) + \mu f(t) = 0$ schreiben, und diesem Ausdruck durch die Integralgleichung

$$x = [b \cos.(\psi t \sqrt{\mu}) + b_1 \sin.(\psi t \sqrt{\mu})]\, e^{-\frac{\nu t}{2}},$$

wo b und b_1 noch zu bestimmende Constanten sind und $\psi = \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}$ ist, entsprechen. Nun ist aber für $t = 0$, auch $x = 0$, daher $b = 0$ und einfacher

$$x = b_1 \sin.(\psi t \sqrt{\mu})\, e^{-\frac{\nu t}{2}}.$$

Da dieser Werth für $\psi t \sqrt{\mu} = \pi$ wieder Null wird, so ist folglich die Zeit einer einfachen Schwingung

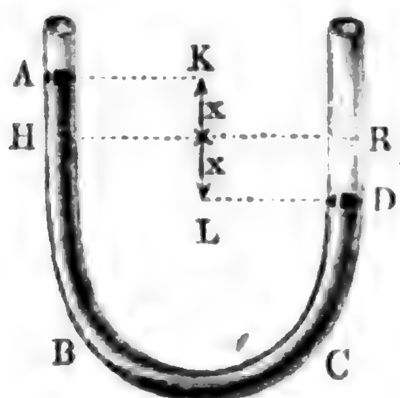
$$t = \frac{\pi}{\psi\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu + \frac{\nu^2}{4}}},\quad \text{d. i. } \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}}$$

mal so groß, als wenn der Widerstand der Luft nicht vorhanden wäre.

Anmerkung. Es ist leicht zu erklären, weshalb die in Schwingungen versetzten Körper nach und nach immer kleinere und kleinere Schwingungen machen und zuletzt in Ruhe übergehen. Die Ursache dieser Erscheinung ist zwar zunächst der Widerstand der Luft, dann aber auch noch die Unvollkommenheit der Elasticität der schwingenden Körper, vermöge welcher sich die Körper, namentlich innerhalb kurzer Zeiten den auf sie wirkenden Kräften nicht vollkommen proportional ausdehnen und zusammendrücken.

Schwingungen des Wassers. Den einfachsten Fall der Wellenbewegung des Wassers bieten die Schwingungen desselben in zwei communicirenden Röhren $ABCD$, Fig. 895, dar. Nehmen wir zunächst an, daß dieselben von gleichem Querschnitte A seien, und denken wir uns das Wasser in dem einen Schenkel um $HA = x$ über dem der Ruhelage entsprechenden Niveau HR gehoben, und im anderen um $RD = x$ gesunken. Wir haben dann die bewegende Kraft §. 23

Fig. 895.



$$P = A \cdot 2x\gamma,$$

ferner, wenn l die ganze Länge $ABCD = HBCR$ der Wassermasse bezeichnet, die bewegte Masse $M = \frac{Al\gamma}{g}$, und daher die Beschleunigung, mit welcher der eine Wasserspiegel sinkt und der andere steigt:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{2Ax\gamma}{Al\gamma}\, g = \frac{2gx}{l}.$$

Da diese Formel ganz dem im Anhange §. 1 und 2 abgehandelten Schwingungsgesetze $p = \mu x$ entspricht, so haben wir auch hier die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Da ferner beim einfachen Kreispendel von der Länge $\frac{l}{2}$, ebenfalls

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

ist, so schwingt also das Wasser in den communicirenden Röhren von gleicher Weite mit diesem Pendel isochron.

Sind die beiden Schenkel der Röhre $ABCD$, Fig. 896 (a. f. S.), gegen den Horizont geneigt, bildet z. B. die Axe des einen den Winkel α, und die des anderen den Winkel β mit dem Horizonte, so entspricht dem Wege $AH = DR = x$, welchen der Wasserspiegel in dem einen Schenkel auf- und in dem anderen abwärts gemacht hat, der Niveauabstand:

$$z = x\,sin.\alpha + x\,sin.\beta = x\,(sin.\alpha + sin.\beta),$$

Fig. 896.

daher ist die Kraft:

$$P = A\gamma x\,(sin.\alpha + sin.\beta),$$

ferner die Acceleration:

$$p = \frac{g\,(sin.\alpha + sin.\beta)\,.\,x}{l},$$

und die Schwingungsdauer:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g\,(sin.\alpha + sin.\beta)}}.$$

Sind endlich die Röhren von ungleicher Weite, so fällt die Bestimmung der Schwingungsdauer bedeutend complicirter aus. Es sei A der Querschnitt und l die Länge der Mittelröhre, ferner α_1, A_1 und l_1 Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der einen, sowie α_2, A_2 und l_2 Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der anderen Seitenröhre; denken wir uns endlich das Wasser in der Axe des einen Schenkels um x_1 gestiegen und im anderen um x_2 gesunken. Wir haben zunächst

$$A_1 x_1 = A_2 x_2,\ \text{daher}\ x_2 = \frac{A_1}{A_2}\,x_1,$$

und die bewegende Kraft, auf A_1 reducirt:

$$P = A_1\,(x_1 sin.\alpha_1 + x_2 sin\,\alpha_2)\,\gamma = \frac{A_1\gamma}{A_2}\,(A_2 sin.\alpha_1 + A_1 sin.\alpha_2)\,x_1.$$

Die Wassermasse in der Zwischenröhre ist constant, und zwar $= \frac{A\,l\,\gamma}{g}$, und da ihre Geschwindigkeit in dem Verhältnisse $\frac{A_1}{A}$ zu der der Kraft steht, dieselbe auf den Kraftpunkt reducirt:

$$= \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 .\,A\,l\,\gamma.$$

Die Wassermasse im ersten Schenkel ist:

$$= \frac{A_1\,(l_1 + x_1)\,\gamma}{g},$$ und die im zweiten

$$= \frac{A_2\,(l_2 - x_2)\,\gamma}{g},$$

oder auf den Kraftpunkt reducirt:

$$= \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{A_2\,(l_2 - x_2)\,\gamma}{g}.$$

Endlich folgt die von P zu bewegende Masse:

$$M = A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + x_1}{A_1} + \frac{l_2 - x_2}{A_2}\right)$$
$$= A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{x_1}{A_1} - \frac{A_1 x_1}{A_2^2}\right)$$
$$= \frac{A_1^2 \gamma}{g}\left[\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x_1\right],$$

und die Acceleration:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\left(\frac{sin.\alpha_1}{A_1} + \frac{sin.\alpha_2}{A_2}\right) g x_1}{\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x_1}.$$

Wären die beiden Seitenröhren von gleichem Querschnitte, so hätte man $A_1 = A_2$, daher:

$$p = \frac{(sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2) g x_1}{\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + l_2}{A_1}\right) A_1} = \frac{(sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2) g x_1}{\frac{A_1 l}{A} + l_1 + l_2},$$

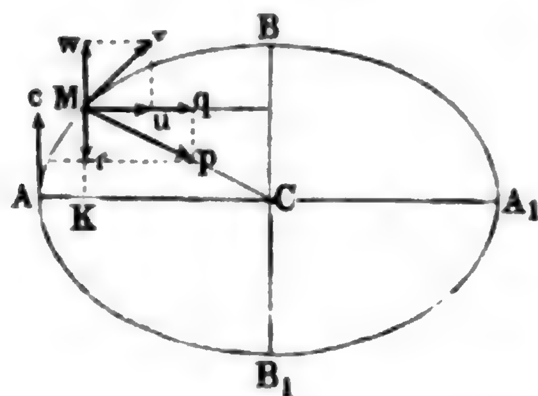
und die Schwingungszeit:

$$t = \pi \sqrt{\frac{A_1 l + A\,(l_1 + l_2)}{g A (sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2)}}.$$

Anmerkung. Durch die Reibung und durch den Krümmungswiderstand erleiden natürlich diese Formeln noch einige Modificationen (vergl. Anhang, §. 22).

Elliptische Schwingungen. Wenn der Körper M, welcher durch §. 24 eine Kraft P nach einem festen Punkte C, Fig. 897, mit einer Acceleration $p = \mu z = \mu . \overline{CM}$ hingetrieben wird, eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, deren Richtung von der Kraftrichtung abweicht, so erfolgen seine Schwingungen nicht mehr in der geraden Linie, sondern in einer Ellipse, wie aus Folgendem hervorgehen wird. Es sei in dem Anfangspunkte A der Bewegung die Bewegungsrichtung rechtwinkelig auf dem Abstande $CA = a$ und die entsprechende Geschwindigkeit $= c$. Legen wir die Coordinatenaxen durch C, und zwar die eine auf die andere rechtwinkelig gegen CA. Bezeichnen wir nun die Coordinaten CK und KM durch x und y, so haben wir die mit den Axen parallel gehenden Componenten q und r von $p = \mu z$, da $\frac{q}{p} = \frac{x}{z}$ und $\frac{r}{p} = \frac{y}{z}$ ist:

Fig. 897.



$$q = \mu x \quad \text{und} \quad r = \mu y.$$

Sind nun u und v die ebenfalls den Axen parallel gerichteten Componenten der Geschwindigkeit w des Körpers M, so haben wir nach §. 1, Anhang:

$$u = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)};$$

zugleich

$$c^2 - v^2 = 2 \int v \partial v = 2\mu \int y \partial y = \mu y^2, \text{ und daher } v = \sqrt{c^2 - \mu y^2}.$$

Wenn für $y = b$, $v = 0$ ist, so folgt:

$$0 = c^2 - \mu b^2, \text{ daher } c = b\sqrt{\mu} \text{ und } v = \sqrt{\mu (b^2 - y^2)}.$$

Nun ist aber $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ und $v = \frac{\partial y}{\partial t}$, daher folgt auch:

$$\frac{u}{v} = \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}}, \text{ oder } \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\partial y}{\sqrt{b^2 - b^2}}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{\partial \left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

und daher (nach Art. 26, V. der analytischen Hülfslehren):

$$arc. \left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc. \left(sin. = \frac{y}{b}\right) + Con.,$$

oder, da für $x = a$, $y = 0$ ist,

$$arc. \left(sin. = \frac{a}{a}\right) = arc. \left(sin. = \frac{0}{b}\right) + Con., \text{ oder}$$

$$arc. (sin. = 1) = arc. (sin. = 0) + Con., \text{ d. i. } \frac{\pi}{2} = Con., \text{ und}$$

$$arc. \left(sin. = \frac{x}{a}\right) = arc. \left(sin. = \frac{y}{b}\right) + \frac{\pi}{2}, \text{ oder}$$

$$arc. \left(sin. = \frac{x}{a}\right) - arc. \left(sin. = \frac{y}{b}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn aber die Differenz zweier Bögen $= \frac{\pi}{2}$ beträgt, so ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des anderen, d. i.

$$\frac{x}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \text{ oder } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Da dies die Gleichung einer Ellipse ist, so folgt auch, daß der Punkt, welcher mit der Acceleration μz nach C getrieben oder gezogen wird, in einer Ellipse von den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ um C läuft.

Auch folgt nun:

$$\partial t = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial y}{\sqrt{\mu (b^2 - y^2)}}, \text{ daher die Zeit:}$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cdot arc.\left(sin. = \frac{y}{b}\right), \text{ ferner umgekehrt:}$$

$$y = b\, sin.(t\sqrt{\mu}), \text{ sowie } x = a\, cos.(t\sqrt{\mu}),$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines elliptischen Quadranten, wenn man $y = b$ setzt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\, arc.\left(sin. = \frac{b}{b}\right) = \sqrt{\frac{1}{\mu}}\, arc.(sin. = 1) = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}},$$

also die Zeit zum Durchlaufen der halben Ellipse:

$$2\, t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},$$

und die Zeit einer ganzen Umdrehung oder Schwingung:

$$4\, t_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}};$$

also genau so groß, als wenn die Bewegung eine geradlinig wiederkehrende wäre. Noch folgt:

$$u = \sqrt{\mu(a^2 - x^2)} = \sqrt{\mu\left(a^2 - a^2\left[cos.(t\sqrt{\mu})\right]^2\right)} = \mu\, a\, sin.(t\sqrt{\mu})$$

und

$$v = \sqrt{\mu(b^2 - y^2)} = \mu\, b\, cos.(t\sqrt{\mu}),$$

und daher die Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \mu\sqrt{(a\, sin.\, t\sqrt{\mu})^2 + (b\, cos.\, t\sqrt{\mu})^2}.$$

Endlich kann man noch

$$x = \frac{a+b}{2}\, cos.(t\sqrt{\mu}) + \frac{a-b}{2}\, cos.(t\sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$y = \frac{a+b}{2}\, sin.(t\sqrt{\mu}) - \frac{a-b}{2}\, sin.(t\sqrt{\mu})$$

setzen, und da nun die ersten Glieder

$$\frac{a+b}{2}\, cos.(t\sqrt{\mu}) \text{ und } \frac{a+b}{2}\, sin.(t\sqrt{\mu})$$

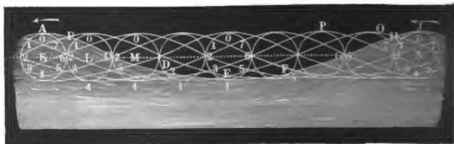
einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$, und die beiden anderen Glieder einer entgegengesetzten gleichförmigen in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ entsprechen, so kann man auch annehmen, daß die elliptische Bewegung des Punktes aus zwei kreisförmigen Bewegungen zusammengesetzt sei, daß nämlich der Punkt gleichförmig in

einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ umlaufe, während sich das Centrum dieses Kreises gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$ fortbewegt.

Ist $b = 0$, so erfolgt zwar die Schwingung in einer geraden Linie, allein man kann sich auch denken, daß diese Schwingung aus zwei gleichen und entgegengesetzten Kreisbewegungen zusammengesetzt sei.

§. 25 **Wasserwellen.** Die elliptischen Schwingungsbewegungen finden sich den genauen Beobachtungen der Gebrüder Weber zufolge bei den Bewegungen der Wasserwellen (franz. ondes; engl. waves) vor. Nicht allein jedes Wassertheilchen in der Oberfläche, sondern auch jedes Wassertheilchen unter derselben beschreibt während der Wellenbewegung des Wassers eine Ellipse. Wegen des Widerstandes am Boden sind jedoch die Ellipsen unter dem Wasser kleiner als die an der Oberfläche, und nehmen überhaupt mit dem Abstande von der Oberfläche ab. Die verschiedenen Elemente im Wasserspiegel, sowie in jeder anderen Fläche parallel zu demselben, befinden sich in demselben Augenblicke in den verschiedensten Bewegungsphasen; während ein Element A, Fig. 898, seine Bahn in (0) beginnt, ist ein Element B

Fig. 898.

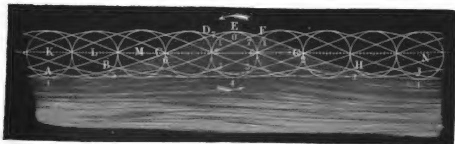


schon in (1), ein anderes C in (2), ein drittes D in (3), ein viertes E in (4) u. s. w.; es bildet also in diesem Augenblicke der verticale Durchschnitt der Oberfläche des Wassers eine cykloiden- oder trochoidenförmige Curve $ABCDEFGHJ$. Vor dem Eintritte der Wellenbewegung waren die Elemente in den Mittelpunkten $K, L \ldots N$ ihrer Bahnen und bildeten den horizontalen Wasserspiegel KN, während der Wellenbewegung hingegen befinden sie sich zum Theil über, zum Theil unter dieser Ebene, und haben natürlich stets ein Bestreben, nach ihren Ruhepunkten $K, L \ldots N$ zurückzukehren. Die elliptischen Schwingungen finden jedoch nur so lange statt, als die Wellen unverändert bleiben; nimmt aber die Größe derselben allmälig ab, so wird auch die Bahn eines Elementes nach und nach eine engere und engere, und bildet daher keine Ellipse mehr, sondern eine Spirallinie. Umge-

kehrt bildet sich sicherlich bei der Entstehung und dem Wachsen der Wellen die elliptische Bahn erst allmälig aus einer Spirallinie heraus.

Nach einem Zeittheilchen ist A in seiner Bahn nach (1), B nach (2), C nach (3) u. s. w. gerückt, und dadurch die Welle um den Horizontalabstand KL zwischen je zwei Elementen fortgeschoben worden; nach Verlauf eines zweiten Zeittheilchens befindet sich ferner A in (2), B in (3), C in (4), und es ist die Welle wieder um den Abstand $KL = LM$ fortgerückt; und so bewegt sich bei dem ferneren Umlaufe der Wasserelemente die Welle immer weiter und weiter fort, bis sie am Ende einer vollständigen Umdrehung eines Elementes in seiner Bahn ihre eigene Länge KN durchlaufen hat. Nach einer halben Umdrehung eines Wasserelementes ist wie Fig. 899 zeigt,

Fig. 899.



an die Stelle eines Wellenberges ein Wellenthal und an die des letzteren ein Wellenberg gekommen. Dieses Fortschreiten der Welle besteht natürlich in keiner besonderen Bewegung des Wassers, sondern nur in einem Fortrücken einer und derselben Bewegungsphase, z. B. in dem Fortrücken des Wellengipfels J (Fig. 898) nach O, P u. s. w. Kennt man die Umlaufszeit t eines Wasserelementes und die Länge $AJ = s$ einer Welle, so kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben durch die Formel $c = \frac{s}{t}$ berechnen.

Die Höhe einer Welle, oder die Summe von der Höhe eines Wellenberges und der Tiefe eines Wellenthales ist der verticalen Axe $2b$ der Ellipse gleich, in welcher die Wasserelemente an der Oberfläche umlaufen; die Länge CG des Wellenthales übertrifft die halbe Wellenlänge um die horizontale Axe $2a$ jener Ellipse, und die des Wellenberges ist natürlich um so viel kürzer als die halbe Länge der ganzen Welle. Hiernach wäre der Querschnitt eines Wellenthales größer als der eines Wellenberges; da dies aber wegen der Unveränderlichkeit des Wasservolumens nicht möglich ist, so müssen die Mittelpunkte der elliptischen Bahnen noch etwas über dem Niveau des ruhigen Wasserspiegels stehen.

§. 26 **Weber's Versuche.** Nach Weber's Versuchen ist die Bahn, in welcher sich jedes Wasserelement an der Oberfläche einer Welle bewegt, eine wenig gedrückte Ellipse, nach Emy sollen hingegen bei den Meereswellen die Wasserelemente aufrechtstehende Ellipsen durchlaufen. Mit der Tiefe der Elemente unter der Oberfläche nehmen beide Axen ihrer elliptischen Bahnen ab, jedoch, besonders nach Weber, die verticalen Axen mehr als die horizontalen Axen. Nach der Tiefe zu scheint ein Fortschreiten der Wellen nicht statt zu finden: senkrecht unter einander befindliche Wasserelemente befinden sich, den Beobachtungen der Gebrüder Weber zufolge, gleichzeitig in einer und derselben Bewegungsphase, wogegen die in einer horizontalen Linie liegenden Elemente eine stetige Folge der Bewegungsphasen bilden. Aus den erwähnten Beobachtungen geht ferner noch hervor, daß die Umlaufszeit eines Elementes, oder die Zeit, innerhalb welcher eine Welle um ihre eigene Länge fortschreitet, vorzüglich von dem Verhältnisse der beiden Bahnaxen abhängt; je größer das Verhältniß der horizontalen Axe $2a$ zur verticalen Axe $2b$ der Bahn ist, desto größer ist auch die Umlaufszeit. Die tiefer liegenden Wassertheile durchlaufen ferner ihre Bahnen in kürzerer Zeit, als die in der Oberfläche, woraus wieder gefolgert werden muß, daß auch die Wellenlängen nach dem Boden zu abnehmen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ einer Welle hängt, da die Umlaufszeit t mit dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ wächst, nicht allein von der Länge s, sondern auch von der Höhe b ab. Wenn eine Welle zwischen parallelen Wänden, z. B. in einem Canale fortschreitet, so bleibt ihre Breite unverändert; es nimmt aber ihre Höhe b allmälig ab und ihre Länge allmälig so zu, daß in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur diejenige Veränderung eintritt, welche aus der Reibung des Wassers an den Wänden resultirt. Wenn hingegen eine Welle auf keiner Seite in ihrem Fortschreiten gehindert wird, und dieselbe einen in sich selbst zurücklaufenden Wall bildet, so vergrößert sich ihre Länge und Breite zugleich, und zwar auf Unkosten ihrer Höhe, und sie wird allmälig so flach, daß sie in kurzer Zeit von dem Auge nicht mehr wahrgenommen werden kann. Ist eine solche Welle anfangs nicht kreisförmig, so nähert sie sich wenigstens der Kreisgestalt immer mehr und mehr, je weiter sie fortschreitet. Nach den Weber'schen Versuchen soll die Höhe in arithmetischer Progression abnehmen, wenn die Welle in geometrischer Progression fortschreitet. Die Geschwindigkeit des Fortschreitens einer solchen Welle nimmt allmälig ab, je weiter dieselbe fortschreitet. Wenn umgekehrt eine Welle von außen nach innen fortschreitet, und sich dabei immer mehr und mehr zusammenzieht, so nimmt dieselbe an Höhe und Länge, sowie auch an Geschwindigkeit, allmälig zu.

Es findet hiernach ein großer Unterschied zwischen den Wasserwellen und en Schallwellen statt. Während bei diesen Wellen die Fortpflanzungs- eschwindigkeit nur von der Elasticität und Dichtigkeit des Mediums abhängt, st dieselbe bei jenen Wellen nur eine Function der Wellenhöhe und Wellen- änge. Wenn die Wellenbewegung des Wassers durch eine fast momentan virkende Kraft, z. B. durch Eintauchen und schnelles Herausziehen eines festen Körpers aus dem Wasser, veranlaßt wird, so beschreiben die Wasserelemente mmer kleiner und kleiner werdende elliptische Bahnen, oder vielmehr im Gan- en sich immer mehr und mehr zusammenziehende Spirallinien, und es fallen ierbei auch die Umdrehungszeiten immer kleiner und kleiner aus. Diesem Bewegungsverhältnisse ist die Entstehung einer ganzen Reihe immer kleiner und kleiner ausfallender Wellen beizumessen. Bei dem weiteren Fortschreiten verden die folgenden Wellen von den vorhergehenden immer mehr und mehr erstärkt, während die vorderste Welle sich in kurzer Zeit so sehr verflacht, daß ie von dem Auge nicht mehr wahrgenommen wird. Dieses Zusammenfließen der Wellen verursacht die Entstehung kleiner Wellensysteme, welche besonders auf den Vorderflächen der Hauptwellen zahnförmig auftreten. Diese kleineren Wellen oder Zähne schreiten, nach Poisson und Cauchy, gleichförmig be- schleunigt fort.

Hagen's Versuche. Nach den neuesten Forschungen des Herrn Geh. Ober- §. 27
bauraths Hagen (s. den Seeufer- und Hafenbau von G. Hagen, 1. Band, Berlin 1863, welcher den 3. Theil des Handbuches der Wasserbaukunst von dem- selben Verfasser bildet, sowie auch dessen Abhandlungen über Wellen auf Ge- wässern von gleichmäßiger Tiefe, Berlin 1862) beschreiben die Wassertheile bei Wellen über einem sehr tiefen Grunde, mit constanter Winkelgeschwin- digkeit, Kreise, deren Durchmesser nach unten zu allmälig abnehmen, so daß sie am Boden unendlich klein ausfallen. Ein Wasserfaden, welcher in der Ruhelage senkrecht steht, wird folglich hiernach bei der Wellenbewegung, ähnlich wie ein Getreidestengel beim Winde, um diese Verticale so hin- und herschwingen, daß dabei der Fußpunkt unverändert bleibt. Die Wellenlinie, oder die Curve, welche die in gleicher Umdrehungsphase befindlichen, in der Ruhelage eine horizontale Linie bildenden Punkte verbindet, ist deshalb eine gestreckte Cycloide, deren Streckung mit der Tiefe so abnimmt, daß sie nahe über dem festen Boden eine gerade Linie bildet, während sie an der Oberfläche einer gemeinen Cycloide am nächsten kommt. Aus dem Halbmesser r der gemeinen Cycloide, dessen Größe sich bei hohen Meereswellen auf 50 Fuß steigert, folgt die Wellenlänge $l = 2\pi r$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben:

$$c = \sqrt{2gr} = \sqrt{\frac{gl}{\pi}},$$

die Periode einer Welle:

$$t = \frac{l}{c} = \pi \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{\frac{\pi l}{g}},$$

und die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Wassertheile in ihren von oben nach unten allmälig abnehmenden Kreisbahnen bewegen, $\omega = \frac{c}{r}$.

Der Mittelpunkt des Kreises, in welchem ein tieferes Wassertheilchen umläuft, bestimmt sich aus dem Halbmesser z dieses Kreises durch den Abstand y desselben von dem Mittelpunkt des ersten Kreises vom Halbmesser r, mittels der Formel

$$y = r\, Ln. \left(\frac{r}{z}\right).$$

Umgekehrt ist $z = r e^{-\frac{y}{r}}$, wo $e = 2{,}71828\ldots$, die Grundzahl des natürlichen Potenzensystemes bezeichnet. Man kann hiernach leicht ermessen, daß die Schwingungskreise mit der Tiefe außerordentlich schnell abnehmen, z. B. für $r = 10$ Fuß, ist in der Tiefe $y = 50$ Fuß, $z = 10 . e^{-0,2} = 3{,}50$ Fuß und in der Tiefe $y = 200$ Fuß, fällt $z = 10 . e^{-0,05} = 0{,}15$ Fuß aus.

Bei Wellen von geringer constanter Tiefe sind dagegen, wie auch schon Scott Russell angegeben hat, die horizontalen Bewegungen der über einander befindlichen Wassertheile gleich groß; es behält daher der anfangs verticale Wasserfaden bei der Wellenbewegung seine verticale Stellung, verändert dagegen hierbei seine Länge und Dicke. Die einzelnen Wassertheilchen beschreiben hier geschlossene Curven von gleichem horizontalen, und von einem veränderlichen mit der Tiefe allmälig abnehmenden verticalen Durchmesser; dieselben sind jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die Wellenhöhe gegen die Wassertiefe unendlich klein ist, Ellipsen.

Bei endlicher Tiefe des Wassers und großer Wellenhöhe sind die Gesetze der Wellenbewegung sehr complicirt.

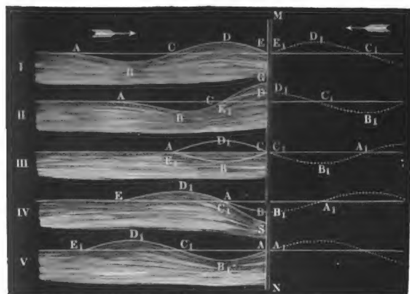
§. 28 **Interferenz der Wasserwellen.** Wenn sich zwei Wasserwellen durchkreuzen, so treten im Allgemeinen dieselben Erscheinungen ein, wie bei den Luft- und anderen Wellen; es setzt auch hier jede Welle nach dem Zusammentreffen ihre Bewegung fort, als wenn es gar nicht stattgefunden hätte; nur findet, nach Weber's Beobachtungen, ein kleiner Zeitverlust statt, so daß eine Welle ein wenig mehr Zeit braucht, einen gewissen Weg zu durchlaufen, wenn sie durch eine andere Welle hindurchgeht, als wenn sie frei fortschreitet. Kommen zwei Wellenberge zusammen, so entsteht ein fast doppelt so hoher Berg, und ebenso geben zwei Wellenthäler bei ihrem Zusammentreffen ein fast doppelt so tiefes Thal, als bei einer einfachen Welle. Die Weber'schen Versuche führen auf das Verhältniß 1 : 1,79 zwischen den Berghöhen der einfachen und der

pelwelle. Bei der **Interferenz** oder dem Zusammenkommen eines enberges mit einem Wellenthale heben sich beide gegenseitig auf und es t die betreffende Stelle im Niveau des ruhigen Wasserspiegels. Was Bahnen der einzelnen Wasserelemente anlangt, so gehen diese bei dem ımmentreffen von zwei gleichen Wellen in gerade Linien über, die im ʒgipfel senkrecht, entfernt von demselben, aber schief, jedoch so stehen, daß ich oben gegen den Gipfel neigen.

Benn ferner eine Wasserwelle gegen eine **feste Wand anstößt**, so wird ›on derselben so zurückgeworfen, als wenn sie von einem Orte herkäme, eben so weit hinter der Wand absteht, als der Ausgangspunkt der Welle derselben, und es geht die zurückgeworfene Welle ebenso durch die ankom- de hindurch wie zwei sich kreuzende Wellen überhaupt.

3n Fig. 900, I., II. bis V. sind die Erscheinungen, welche sich beim

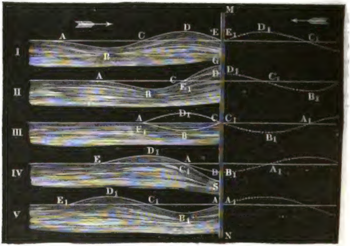
Fig. 900.



urückwerfen einer Welle $ABCDE$ durch eine feste Wand MN darbie- ı, vor Augen geführt. In I. kommt eben der Wellenberg CDE an der Band MN an, und es beginnt das Reflectiren in Form einer umgekehrt ufenden Welle $C_1 D_1 E_1$; in II. ist der Gipfel D des Wellenberges an der Band angekommen, und es hat sich mit demselben die Hälfte $D_1 E_1$ des zu- ıckgeworfenen Wellenberges vereinigt, folglich entsteht ein halber Wellenberg 'G von fast doppelter Höhe. In III. erreicht eben erst das Wellenthal $.BC$ die feste Wand, während der zurückgeworfene Wellenberg $C_1 D_1 E_1$ ber denselben hinweggeht; es tritt daher eine Interferenz ein, wobei die Belle einen Augenblick lang ganz verschwindet. In IV. trifft die Thalsohle

B der ankommenden Welle mit der Thalsohle B_1 der zurückgeworfenen Welle an der Wand zusammen, es bildet sich folglich ein halbes Thal AS von der doppelten Tiefe. In V. ist endlich die ankommende Welle $ABCDE$ vollständig durch die Wand MN zurückgeworfen, und dadurch in die umgekehrt laufende Welle $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1$ verwandelt worden.

Fig. 901.



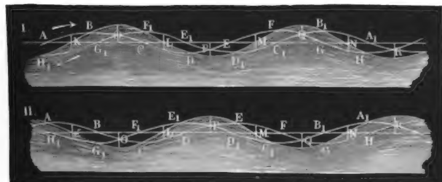
Die Bahnen der Wasserelemente erleiden durch den **Anstoß** an die feste Wand dieselben Veränderungen, wie bei dem Durchkreuzen zweier Wellen; es wird auch hier in der Nähe der Wand der horizontale Theil dieser Bewegung immer mehr und mehr aufgehoben, und dagegen der verticale Component mehr und mehr verstärkt, so daß nahe an der Wand diese Bahn in eine verticale, und entfernter davon in eine schiefe Linie übergeht. Stößt die Welle schief gegen eine feste Wand, so wird sie, wie jeder elastische Körper, unter demselben Winkel zurückgeworfen, unter welchem sie auftrifft. Trifft die Welle nur theilweise gegen ein Hinderniß, so treten die Erscheinungen der sogenannten **Inflexion** ein, wobei sich neue Wellen um die äußersten Enden dieser Hindernisse herum bilden.

Endlich entstehen die **stehenden Wellen** des Wassers wie die einer Saite oder eines anderen festen Körpers, wenn sich zwei gleich lange Wellen kreuzen, deren Ausgangspunkte um das 1, 3, 5, 7 ... fache des Viertels einer Wellenlänge von einander abstehen. Es sei $ABCDEFGH$, Fig. 902 I. und II., die eine, und $A_1\ B_1\ C_1\ D_1\ E_1\ F_1\ G_1\ H_1$ die andere Welle. In den Punkten K, L, M, N, wo beide Wellenzüge von der Mittellinie gleich weit abstehen, sich also die Bewegungen aufheben, bilden sich feste **Inter-**

Digitized by Google

ferenzpunkte, dagegen über und unter den Punkten O, P, Q, R, wo sich beide Wellenlinien schneiden und daher die Wege verdoppeln, entstehen abwechselnd Berggipfel und Thalsohlen.

Fig. 902.



Anmerkung. Den vollständigsten Unterricht über die Wellenbewegung ertheilt folgendes Werk: Wellenlehre auf Experimente gegründet, u. s. w., von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber, Leipzig 1825. Einen guten Auszug hiervon findet man in dem Lehrbuche der mechanischen Naturlehre von August. Auch ist hierüber nachzulesen: Müller's Lehrbuch der Physik und Meteorologie, Bd. I. Die Abhandlungen über die Wellen von Laplace, Lagrange, Flaugergues, Gerstner und Poisson findet man in dem Weber'schen Werke sehr vollständig mitgetheilt und kritisirt. Ueber Cauchy's „Wellen-Theorie" und Bidone's „Versuche" findet man Ausführlicheres in Gehler's physikalischem Wörterbuche, Art. Wellen. Emy's „Wellentheorie" ist unter dem Titel „Ueber die Bewegung der Wellen und über den Bau am Meere und im Meere" von Wiesenfeld übersetzt, und 1839 in Wien erschienen. Die Schriften von Hagen sind oben §. 27 citirt worden. Auch handelt Airy von der Theorie der Wasserwellen im Artikel „Tides and Waves" der Encyclopädia metropolitana Vol. V.

Alphabetisches Sachregister.

Die angegebenen Ziffern geben die Seitenzahl an.

A.

Abbrechen, 418.
Abdrücken, Abscheeren (Widerstand desselben), 339. 372.
Aberration des Sternenlichtes, 120.
Abhängigvariable, 1.
Abhang, 921.
Abscissen, 2.
Abscissenacceleration, 114.
Abscissengeschwindigkeit, 113.
Acceleration, 76. 81. 92.
Adhäsionskraft, 131. 728.
Adhäsionsplatten, 729.
Aërodynamik, Aërostatik, 133.
Aichen, Aichmaß, 942.
Aggregatzustände, 130.
Anfangsgeschwindigkeit, 76. 608. 1047.
Angriffspunkt, 131. 159.
Ansatzgerinne, kurze (Ausfluß durch) 814. 816.
Ansatzröhren, conisch convergente, 827.
Ansatzröhren, conisch divergente, 828.
Ansatzröhren, kurze (Ausfluß durch) 818. 820.
Ansatzröhren, kurze conische, 827. 857.
Ansatzröhren, kurze cylindrische, 819, 854.
Ansatzröhren, kurze innere, 821.
Ansatzröhren, kurze schiefe, 823.
Ansatzröhren, lange, 829.
Anschwellungen der Flüsse, 939.
Antifrictionszapfen, 316.
Anziehungsgesetze, magnetische, 1022.
Aräometer, Senkwagen, 724.
Arbeit der Centrifugalkraft, 546.
Arbeit der comprimirten Luft, 749. 902.
Arbeit der Reibung, 280. 302.
Arbeit der Trägheit, 139. 543.
Arbeit der Wärme, 902.
Arbeit einer Kraft, mechanische Arbeit, 136. 154. 176.
Arbeitseinheit, 137.
Arbeitsmodul der Elasticität und Festigkeit, 349. 419.
Arbeitsverlust beim Stoß, 640. 849.
Archimedes' Princip, 723.
Asymptote, 17. 19. 20.
Atmosphäre, Atmosphärendruck, 743.
Atwood'sche Fallmaschine, 566.
Aufhängepunkt, 216, 630.
Auftrieb, 708, 763.
Ausdehnung der Luft, 747.
Ausdehnung durch Wärme, 759.
Ausdehnung, elastische und permanente, 341. 360.
Ausdehnungscoefficient, 759.
Ausdehnungskräfte, 340.
Ausdehnungsversuche, 359.
Ausfluß aus bewegten Gefäßen, 783.
Ausflußcoefficient des Wassers, 790.
Ausflußcoefficienten der Luft, 910.
Ausfluß der Luft aus Gefäßen, 898. 900. 905. 907.
Ausfluß des bewegten Wassers, 808.
Ausfluß des Wassers aus Gefäßen, 766.

sflußgeschwindigkeit, 766.
sflußmenge, Ausflußquantum, 766.
399.
sflußmündung, Ausflußöffnung, 766.
sfluß unter veränderlichem Drucke, 376. 918.
sfluß unter Wasser, 772.
sfluß verschiedener Flüssigkeiten, 771. 896.
ısfluß, voller, 819.
ısschlag, Ausschlagswinkel, 615.
re eines Kräftepaares, 172.
re, freie, 590.
re, Umdrehungsaxe, 172. 214. 539.
rendruck, 217.
renschicht, neutrale, 376.

B

Balken, 384. 388. 393. 396.
Balken, gespannte, 525.
Balken, hohle, 403. 443.
Ballistik, 103. 1004.
Ballistisches Pendel, 659.
Barometer, 742.
Barometrisches Höhenmessen, 754.
Barycentrische Methode, 208.
Becher, hydrometrischer, 952.
Beharrungsvermögen, Trägheit, 125.
Beharrungszustand des fließenden Wassers, 923.
Belastung, excentrische, 446.
Berührungslinie, 7.
Beschleunigung, 76.
Beschleunigung der Schwere, 81. 127.
Bette, Flußbette, 921.
Bewegung, absolut, relativ, 73. 117.
Bewegung, beschleunigt, verzögert, 74.
Bewegung der Luft in Röhren, 916.
Bewegung des Wassers in Flußbetten u. s. w., 921. 935.
Bewegung des Wassers in Röhren, 835.
Bewegung, einfache und zusammengesetzte, 94.
Bewegung, geradlinige und krummlinige, 73.
Bewegung, gleichförmige und ungleichförmige, 74.
Bewegung in widerstehenden Mitteln, 1001.
Bewegungsarten, 539.
Bewegungshindernisse, 1043.
Bewegungsmoment, 636.
Bewegungsphasen, 1028.
Biegung, 375.
Biegungsfestigkeit, 339. 416.
Biegungsmoment, 378. 380. 398. 402.
Binomialfunction, 25.
Binomische Reihe, 25.
Bodendruck, 687.
Böschung, 235. 698. 927.
Bogenlänge, 53.
Brachystochronismus, 625.
Brechungsebene, Brechungsquerschnitt, 461.
Bricolwinkel, 861.
Brunnenzoll, 949.

C.

Calotte, 559.
Capillarität, 728.
Cataracte, 842.
Centralstoß, 633. 635.
Centrifugalkraft, 574.
Centrifugalkraft des Wassers, 685. 686.
Centripetalkraft, 574.
Cinematik, 122.
Cohäsion, 337, 728.
Cohäsionskraft, 131.
Communicirende Röhren, 689. 727.
Componenten, 97. 142. 1045.
Concavität, 7. 23.
Conische Röhren, 838.
Constante Factoren, 9. 29.
Constante Glieder, 9. 29.
Constante Größen, 1. 9.
Constante Kraft, 134.
Contraction, Contractionscoefficient, 788. 910.
Contraction, vollkommene und unvollkommene, 806. 824. 853.
Contraction, vollständige und unvollständige (partielle), 803.
Contractionsscala, 802.
Contrahirte Wasserstrahlen, 787. 789.
Convexität, 7. 23.
Coordinaten, 2.
Cosinus- und Cotangensfunction, 39.

Curven, convexe, concave, 7. 12. 22.
Cycloide, Cycloidenpendel, 621. 622.
Cylinder, hohler, 409.

D.

Dampf, Dichtigkeit desselben, 761.
Dampf, Expansivkraft desselben, 3.
Daniel Bernoulli, 770.
Dichtigkeit der Körper, 128.
Dichtigkeit (mittlere) der Erde, 1017.
Dichtigkeit der Luft, 761.
Dichtigkeit des Wasserdampfes, 761.
Dichtigkeit des Wassers, 128.
Differenzial, 6.
Differenzialverhältniß, Differenzialquotient, 7.
Directionskraft der Magnetnadel, 1019.
Drehklappe, 867. 869.
Drehpunkt, 222.
Drehung, 177. 178. 538.
Drehungselasticität, 339. 489.
Drehungsfestigkeit, Torsionsfestigkeit, 494.
Drehungshalbmesser, 547. 575.
Drehungsmoment, 490. 543. 1020.
Drehwage, 1016.
Drosselventil, 867.
Druck der Luft, 742. 753.
Druckfestigkeit, 338. 339.
Druckhöhe, 688. 767. 775.
Druck, hydraulischer, hydrodynamischer, 774.
Druck, hydrostatischer, 679. 689. 690.
Druck im Wasser, 681.
Druck und Zug, 124. 338.
Druck-, Vertical-, Horizontal-, 698.
Durchbiegung, Einbiegung, 384. 435.
Dynamik, 123. 133.

E.

Ebene, schiefe oder geneigte, 239. 241. 605.
Eigenthümliches Gewicht, 129.
Einfallsloth, Einfallswinkel, 650.
Einheit der mechanischen Arbeit, 137.
Einrammen, 664.
Elasticität, 131. 337. 742. 1011.
Elasticitätsgrenze, 337. 342.
Elasticitätsmodul, 344. 373. 1015.
Elastische Linien, 380. 488.
Elastisch-flüssige Körper, 678.
Elemente, 6.
Elevationswinkel, 104.
Ellipse, 18. 251.
Ellipsoid, 560.
Elliptische Bewegung, 1047.
Elongation, 615.
Emporsteigen, senkrechtes, 84.
Endgeschwindigkeit, 76.
Erdmagnetismus, 1020. 1025.
Evolute, 56.
Excentrischer Druck und Zug, 517.
Excentrischer Stoß, 633. 661.
Expansivkraft der Luft, 742. 759.
Expansivkraft des Wasserdampfes, 3.
Exponentialfunction, 31.

F.

Fall oder Fallen der Körper, 3. 81. 605. 625.
Fallmaschine von Atwood, 566.
Fallwinkel, Neigungswinkel, 281. 605.
Federn, Federdynamometer, 472.
Federkraft, 131.
Festigkeit, 338.
Festigkeitsmodul, 347. 418.
Fläche, krumme, 8.
Fliehkraft, 574.
Fließende Wasser, 921.
Flügelrad, hydrometrischer Flügel, 958.
Flüssigkeiten, flüssige Körper, 130. 678.
Flußbetten, 921.
Fortpflanzungsgeschwindigkeit, 1028. 1051.
Fortrollen, 571.
Fortschreitende Bewegung, 539.
Friction, 276.
Frictionsräder, 303. 565.
Füllen und Leeren der Schleusen, 890.
Functionen, 1.

G.

Gay-Lussac'sches Gesetz, 759.
Gase, Luftarten, 742.
Gasmesser, Gasuhr, 989.
Gefälle, 921.

Gefäßbarometer, 712.
Gefäßmanometer, 745.
Geostatik, Geodynamik, Geomechanik, 133.
Geschmeidig, 338.
Geschwindigkeit, 74.
Geschwindigkeit des fließenden Wassers, 922.
Geschwindigkeit des Schalles, 1032.
Geschwindigkeit, mittlere, 89, 92. 922.
Geschwindigkeit, virtuelle, 155.
Geschwindigkeitscoefficient, 786. 910.
Geschwindigkeitshöhe, 83. 775.
Geschwindigkeitsveränderung, plötzliche, 851.
Gesetz von Mariotte, 746.
Gesetz von Gay-Lussac, 759.
Gewicht, absolutes, 124. 127. 129.
Gewicht, specifisches oder eigenthümliches, 129. 721.
Gewichtseinheit, 125.
Gleichförmige Bewegung, 74.
Gleichförmig beschleunigte, gleichförmig verzögerte Bewegung, 75. 77. 80.
Gleichförmig veränderte Bewegung, 75.
Gleichgewicht, 123. 124.
Gleichgewichtsarten, 216. 217. 231.
Gleichheit der Kräfte, 124.
Gramm, Kilogramm, 125.
Gleiten, 277. 605.
Graphische Darstellung, 2. 90.
Größen, constante und variable, 1.
Grundbette, 921.
Guldinische Regel, 208.

H.

Haarröhrchen, 738.
Hähne, 866. 869.
Härte, 338. 643.
Halszapfen, 314.
Hauptaxen, 590.
Hebel, Hebelarten, 222. 223. 310.
Hebelarm, 161.
Hebermanometer, 744.
Herabgleiten, 609.
Herabrollen, 612.
Horizontal- und Verticaldruck, 698. 702. 708.
Heyer, Rammbär, 664.
Hydrodynamik, Hydrostatik, 133. 766.
Hydraulik, 133.
Hydrometer, Hydrometrie, 942. 955.
Hydrometrisches Flügelrad, 958.
Hydrometrisches Pendel, 966.
Hyperbel, 19. 48.
Hyperbolische Logarithmen, 32. 48.
Hydrostatische Wage, 722.

J.

Inflexion der Wellen, 1056.
Inflexions- oder Wendepunkt, 22.
Interferenz der Wellen, 1030. 1055.
Integral, Integralrechnung, 28.
Integralformeln, 41.
Intensität einer Kraft, 132.
Intensität des Erdmagnetismus, 1026.
Interpolation, 66.
Isochronismus, 606, 624. 625.

K.

Kegelventile, 871.
Keil, 244. 296. 462.
Kettenbrücke, 259.
Kettenlinie, 260, gemeine Kettenlinie, 266.
Kettenreibung, 325. 328.
Klappenventile, 866. 871.
Klostergewölbe, 210.
Kniehebel, 224.
Knieröhren, 860.
Knoten, 248.
Körnerspitzen, 316.
Körper, materielle oder physische, 122.
Körper, starre, biegsame und elastische, 247.
Körper von gleichem Widerstande, 356. 464. 470. 505.
Kolbenstange, 504. 539.
Kraft, Kräfte, 122. 123. 131. 174.
Kraft, lebendige, 141.
Kräftepaar, 167. 378.
Kräftemaß, 126.
Kraftmoment, 162. 380.
Kraftrichtung, 131.
Kreis, 2.
Kreisbogen, Schwerpunkt desselben, 183.
Kreisfunctionen, 38.
Kreisel, 576.
Kreispendel, 614.
Kropfröhren, gekrümmte Röhren, 862.
Krümmungshalbmesser, Krümmungskreis, 55. 110. 379.

Krummlinige Bewegung, 109. 113. 156.
Kugel, 194. 203. 554. 571. 612. 713. 884.
Kurbel, 89. 539.
Kurbelstange, 503. 539.

L.

Labiles Gleichgewicht, 217. 233.
Länge einer Welle, 1024. 1051.
Längenschwingungen, 1011. 1027.
Last, 223. 271.
Lebendige Kraft, Princip derselben, 139. 141.
Leeren der Ausflußgefäße, 876.
Lesbros' Versuche, 812.
Leistung, Arbeit einer Kraft, 136.
Leistung der Centrifugalkraft, 576.
Leistungsvermögen des fließenden Wassers, 767.
Linie, elastische, 380. 383.
Linie, gerade, 17.
Logarithmen, 32.
Luft, Ausfluß derselben, 898 900. 905.
Luftballon, 764.
Luft, Dichtigkeit derselben, 761.
Luft, Luftdruck, 743.
Luftmanometer, 762.
Luftpumpe, 756.
Luftschichten, 753.

M.

Mac Laurin's Reihe, 25.
Magnetismus, 1020.
Magnetische Kraft, 131. 1022.
Magnetnadel, 1019.
Manometer, 742. 744.
Mariotte'sches Gesetz, 5. 746.
Masse, 127.
Massenmoment, 543.
Materie, 124.
Materieller Punkt, 133.
Materielles Pendel, 614.
Maximal- und Minimal-Contraction, 800.
Maximal- und Minimal-Spannungen, 481.
Maximum und Minimum, 21.
Mechanik, 122.
Mechanische Arbeit, 136. 176.
Metacentrum, 717.
Metallfedern, 472.
Methode der kleinsten Quadrate, 63.
Mittel, arithmetisches, 65.
Mittelkraft, 145.
Mittelpunkt der Masse, 180. 540.
Mittelpunkt des Schwunges, 627.
Mittelpunkt des Stoßes, 603. 658.
Mittelpunkt des Wasserdruckes, 691.
Mittelpunkt paralleler Kräfte, 174.
Modul der Elasticität und Festigkeit, 344. 346.
Modul der Logarithmen, 33.
Molecularwirkungen, 728.
Molecule, Molecularkraft, 131. 728.
Moment eines Kräftepaares, 167. 168.
Moment, magnetisches, 1020. 1026.
Moment paralleler Kräfte, 174.
Moment, statisches oder Kraftmoment, 162.
Moment, Trägheitsmoment, 543.
Mundstücke, Ein- und Ausmündungsstück, 841. 846.
Mündung in der dünnen Wand, 787. 896. 910.
Mündungen, rectanguläre, 778. 794. 808. 812.
Muskelkraft, animalische Kraft, 131.

N.

Naturgesetze, 3.
Natürliche Logarithmen. 32. 48.
Naturlehre, 122.
Neil'sche Parabel, 53.
Nicholson'sche Senkwage, 725.
Normale, 55.
Normalacceleration, 111. 573.
Normalkraft, 156. 573.

O.

Obelisk, Ausfluß aus demselben, 885.
Obelisk, Schwerpunkt desselben, 201.
Oberfläche des Wassers, 685.
Observatorium, hydraulisches, 961.
Obturatoren, 866.
Oel, Ausfluß desselben, 896.
Ordinaten, 2.
Ordinatenacceleration, 114.
Ordinatengeschwindigkeit, 113.
Ort, 73. 118.
Oscillation, 614. 1008.

P.

arabel, 3. 55. 101. 258. 269.
arabolische Bewegung, 102. 109.
araboloid, 556. 686.
arallelepiped der Geschwindigkeiten, 100.
arallelkräfte, 166.
Parallelogramm der Accelerationen, 100.
Parallelogramm der Bewegungen, 95.
Parallelogramm der Geschwindigkeiten, 96.
Parallelogramm der Kräfte, 145
Paralleltafeln, 736.
Parameter, 17.
Pendel, ballistisches, 659.
Pendel, einfaches mathematisches und materielles, 614. 627.
Pendel, hydrometrisches, 966.
Pendellinse, 557.
Pendelschlag, 615.
Periode, periodische Bewegung, 74. 89.
Pfähle, Einrammen derselben, 664.
Pfund, Zollpfund, Neupfund, 125.
Phoronomie, 122.
Phoronometrische Formeln, 87.
Piezometer, 745. 847.
Pitot'sche Röhre, 964.
Pneumatik, 133.
Polyeder, Schwerpunkt derselben, 198.
Poncelet'sche Ausflußmündungen, 794.
Poncelet's Theorem, 308.
Potenzfunction (x^n), 12.
Potenzreihe, natürliche, 32.
Princip des gleichen Druckes, 679.
Profil, Längen- und Querprofil, 921.
Progressive Bewegung, 139.
Prony's Wassermeßmethode, 948.
Prosaphie und Synaphie, 729.

Q.

Quadratur der Curven, 46.
Quecksilber, Ausfluß desselben, 896.
Querprofil der fließenden Wasser, 921. 925.
Querschwingungen, 1014. 1036.
Querschnitt, 342. 642. 767. 921.
Querschnitt, schwacher, gefährlicher, 461.
Querschnittsveränderungen, plötzliche, 849.
Quotient $\frac{0}{0}$, 61.
Quotient, Differenzial desselben, 11.

R.

Radwelle, 272. 533. 561.
Rammbär, Rammklotz, 664.
Reaction des ausfließenden Wassers, 968.
Reactionsrad, 981.
Rectification der Curven, 53.
Reduction der Biegungsmomente, 398.
Reduction der Massen, 545.
Reduction der Trägheitsmomente, 546.
Reduction einer Kraft, 222.
Reductionsformel 44.
Reflexionswinkel, Austrittswinkel, 650.
Reibung, Reibungswiderstand, 276.
Reibung auf der schiefen Ebene, 290.
Reibungsarten, 277.
Reibungscoefficient, 280.
Reibungscoefficient der Luft in Röhren, 915.
Reibungscoefficient des Wassers in Flüssen, 931.
Reibungscoefficient des Wassers in Röhren, 830.
Reibungsgesetze, 279.
Reibungskegel, 282.
Reibungswage, 284.
Reibungswiderstandshöhe, 830.
Reibungs- oder Ruhewinkel, 281.
Relativer Ort, relative Bewegung, 118.
Resultirende Kraft, Mittelkraft, 142. 145. 161.
Reversionspendel, 631.
Rheometer, 967.
Rippen, 444. 445.
Röhren- und Kesselstärken, 704.
Röhrenleitungen, 840.
Rösche, 921.
Rollen, feste und lose, Kraft- und Leitrolle, 270. 271. 335. 567.
Rollen der Körper, 571. 612.
Rotationsflächen und Rotationskörper, 205. 208. 209. 559. 592.
Ruhe, absolute, relative, 74.
Ruhepunkt, Stützpunkt, 222.

S.

Saiten, Schwingungen gespannter, 1036.
Säulen, Tragkraft derselben, 498.

Schallgeschwindigkeit, 1032.
Schaukeln oder Wiegen, 631.
Scheer- und Schubfestigkeit, 339. 372.
Schieber, Schubventile, 866. 869.
Schiefe Ebene, 239. 290.
Schiefwinkelige Coordinaten, 47.
Schleusen, 890.
Schmieren, 277.
Schneiden und Spitzen, 319.
Schubfestigkeit, 372.
Schubkraft, 378. 476.
Schwerebene, Schwerlinie, 180.
Schwerkraft, 81. 122. 131.
Schwerpunkt, 180.
Schwerpunktsbestimmungen, 181.
Schwimmen, Schwimmtiefe, 711. 712. 715. 720.
Schwimmer, Schwimmkugel, 955.
Schwimmstab, 956.
Schwingung, schwingende Bewegung, 614. 1008.
Schwingungen elastischer Stäbe, 1038.
Schwingungen der Magnetnadel, 1021.
Schwingungen der Saiten, 1036.
Schwingungen des Wassers, 1045.
Schwingungsamplitude, 1009.
Schwingungsbogen, Schwingungsweite, 542. 615.
Schwingungspunkt, 627.
Schwingungszeit, Schwingungsdauer, 615. 1009. 1033.
Schwungkraft, 574.
Seilmaschine, 247.
Seilpolygon, 252.
Seilreibung, 323.
Seitengeschwindigkeiten, 97.
Seitenkräfte, 145.
Sicherheitsmodul, 346.
Sinusfunction, 38.
Sinusoide, 39.
Sohle, 921.
Sondirstange, Sondirkette, 957.
Spannkraft, 742.
Spannung, 248. 731.
Spannung, Horizontal- und Vertical-, 253.
Specifisches (eigenthümliches) Gewicht, 129. 721.
Sphäroid, 204. 554.
Spitzzapfen, 314.
Springende Wasserstrahlen, 842.
Spröde, 338.
Stab, Schwingungen eines Stabes, 1038.
Stabilität, Standfähigkeit, 216. 230. 236.
Stabilität schwimmender Körper, 716.
Stahl, gehärtet und angelassen, 368.
Stahlfedern, 472.
Statik, 123. 133.
Steifigkeit der Seile und Ketten, 328. 330.
Steifigkeitswiderstand der Hanf- und Drahtseile, 331. 332.
Steighöhe, Fallhöhe, 84. 844.
Stereometer, 754.
Stift, Reibung desselben, 314.
Stoß, verschiedene Arten des Stoßes, 633. 634.
Stoß, elastischer, 634.
Stoß, gerader, 633.
Stoß, unvollkommen elastischer, 634. 646.
Stoß, schiefer, 634. 648.
Stoß des Wassers, 972. 977. 994.
Stoß der Luft, 996.
Stoßfestigkeit, 668. 671.
Stoßlinie, 633.
Stoßpunkt, 658.
Stoßreibung, 651.
Stoßzeit, 634.
Stromgeschwindigkeitsscala, 923.
Stromquadrant, 966.
Stromstrich, Stromrinne, 922.
Stützpunkt, 222.
Subnormale, 55.
Subtangente, 8. 34. 259.
Symmetrieebene, Symmetrieaxe, 183.
Symmetrische Körper, 182.
Sympson'sche Regel, 50. 138.

T.

Tachometer, 967.
Tangente, Tangentenwinkel, 7. 15. 114.
Tangentialacceleration, 112.
Tangentialebene, 8.
Tangensfunction, Tangentoide, 39.
Tangentialgeschwindigkeit, 114.
Tangentialkraft, 156.
Taucherglocke, 749.
Tautochronismus, 625.
Teichdämme, 698.
Teichgerinne, 824. 888.

Temperatur, 759.
Torsion, 338. 489.
Torsionsfestigkeit, 494. 673.
Torsionsmoment, 490.
Torsionspendel, Torsionsschwingungen, 1016.
Torsionswinkel, 490.
Tractorie, Zuglinie, 317.
Träger, 430.
Trägheit, 125.
Trägheitshalbmesser, 547.
Trägheitskraft, 125. 131. 540.
Trägheitsmoment, 543.
Tragkraft, Tragvermögen, 345. 417.
Tragmodul, 346. 423. 495.
Tragmoment, 417. 438.
Triogonometrische Functionen, 38.
Trigonometrische Linien, 40.

U.

Ueberfall, Wandeinschnitt, 777. 799. 810. 815. 880.
Umdrehungsaxe, 172. 214. 539. 595.
Umdrehungsebene, 215.
Umdrehungskräftepaar, 530.
Umdrehungszeit, 575.
Ungleichförmige Bewegung, 74. 85.
Ungleichförmige Bewegung des fließenden Wassers, 935.
Umhüllungscurve, 107.
Urvariable, 1.

V.

Variable, veränderliche Größen, 1.
Ventile, 742. 745. 870.
Verschiebungswinkel, 496.
Versuchsapparat, hydraulischer, 892.
Virtuelle Geschwindigkeit, 155. 176. 179. 242.
Vollkommen flüssige Körper, 678.
Volumen, 125.
Volumenometer, 755.

W.

Wage, hydrostatische, 722.
Wälzendes Pendel, 631.
Wälzende Reibung, 320.
Wärme, 759.
Wärmekraft, 131.
Wagenfedern, 473.
Wandeinschnitt, Ueberfall, 777. 880.
Wasser, Ausfluß desselben, 766.
Wasser, Dichtigkeit desselben, 128.
Wasserdämpfe, 3. 761.
Wasserdruck, hydrostatischer, 688.
Wasserdruck, hydraulischer, 774.
Wassermenge, Wasserquantum, 766.
Wassermeßapparat, 942.
Wassermesser, Wasseruhr, 986.
Wasserspiegel, Oberfläche des Wassers, 684. 731. 733.
Wasserstand in communicirenden Röhren, 689. 727.
Wasserstrahl, 767. 787.
Wasserstrahlen, springende, 106.
Wasserwellen, 1050.
Wasserzoll, 949.
Weich, 338.
Wellen, 1028.
Wellenberg, Wellenthal, 1051.
Wellenhöhe, Wellenlänge, 1051.
Wendepunkt, 22. 390.
Widerstand des Wassers, 994.
Widerstände, 123. 276.
Widerstandscoefficient, 822. 850.
Widerstandshöhe, 822.
Winkelacceleration, 542.
Winkelgeschwindigkeit, 542.
Winkelhebel, 223.
Wirkung einer Kraft, 124. 126.
Wirkung und Gegenwirkung, 132. 228. 633.
Woltmann'scher Flügel, Flügelrad, 958.
Wurfbewegung im luftleeren Raume, 104.
Wurfbewegung in der Luft, 1004.
Wurfhöhe, Wurfweite, 105.
Wurflinie, 1004.

X.

Ximenes, Reibungsversuche, 285.
Ximenes, Wasserfahne, 967.

Z.

Zahlenreihe, natürliche, 27.
Zapfen, 272. 278. 312.
Zapfenreibung, 278. 283.

Zerdrückungsfestigkeit, 342. 358.
Zerknickungsfestigkeit, 501.
Zerlegung und Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und Accelerationen, 99. 100.
Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte, 142. 146. 147. 162. 174.
Zerlegung und Zusammensetzung der Kräftepaare, 169.
Zug, 124. 338.
Zusammendrückung, elastische und permanente, 342.
Zusammengesetzte Ausflußgefäße, 873.
Zusammengesetzte Bewegungen 94.
Zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit, 339. 513.
Zusammengesetzte Kräfte, 142.

Berichtigungen.

Seite 21 Zeile 15 von unten: $y =$ statt $x =$
„ 34, oben: Art. 21 statt Art. 12.
„ 83 Zeile 12 von unten: due à la statt de la.
„ 83 „ 17 „ „ 0,0510 statt 0,1019.
„ 86 „ 10 „ „ $\varkappa, \varkappa$ statt k, k.
„ 138 „ 7 von oben: §. 73 statt §. 7.
„ 248 „ 3 „ „ vierten Abschnitt statt sechsten Capitel.
„ 369, 370, 371, oben: §. 212 statt §. 211.
„ 370 Zeile 17 von unten: 180 statt 1800.
„ 371 „ 5 von oben: Zerdrückens statt Zerreißens.
„ 403 „ 11 von unten: fehlt am Rand §. 228.
„ 488 „ 5 von oben: C statt c.
„ 496 „ 5 von unten: $\frac{Wl}{2e^2}$ statt $\frac{WC}{2e}$.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

Digitized by Google

3 2044 103 132 411

Digitized by Google